UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Hana Boukhalifa

Théme

Sur les fonctions presque-périodique et leurs applications

Soutenu publiquement le : 05/06/2016

Devant le jury composé de :

Chacha Djamal Ahmed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Amara Abd alkader	M.A.A. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Ghezal Abd alrazak	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Meflah Mabrouk	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à

*Mon **père**.*

*Ma chére **Mère**.*

qui à oeuvré pour ma réussite, par son amour, son soutien, tous les sacrifies,consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois á tavers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

*Mes frères, **Ismail, Moutaz billah, Fadel al djoud***

*Mes soeur, **Khaoula, Nour al houdda, Hadja** et son marie son enfant **Imad alddine**.*

*chère mon fiancé **Saber** pour leur amour et supporté et leur encouragement continue.*

*mon oncle **Djeddi Ahmed**, a donner tous les moyennes pour continue le Master et leur encouragement continue.*

*Ma grande mère **Massouda** et mes grand père **mohamed** et **mohamed al saleh**.*

*je ne oublie ma grand-mère **Zohra** et mon oncle **Al arbi** dieu ait pitié d'eur.*

De marchaient ensemble pour et nous faisons notre chemin ensemble vers le succés et la cré ativité de la main dans la main et nous en prenons la fleur et appris à mes amis et collégues.

Remerciement

Avant toute considération, nous remercions le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur **MEFLAH Mabrouk** de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité á me soutenir et á m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré á mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Science Matiére de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.
Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué á la finalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

➤ $C^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$: espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.

➤ $BC(\mathbb{R},\mathbb{E})$: espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ á valeurs dans $\mathbb{E}$

➤ $C^k(\mathbb{R},\mathbb{E})$: espace des fonctions k fois continument dérivables de $\mathbb{R}$ dans E .

➤ $Trig(\mathbb{R},\mathbb{E})$: espace des polynômes trigonométriques .

➤ $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$: espace des fonctions presque-périodique au sens de bohr, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.

➤ $AP^k(\mathbb{R},\mathbb{E})$: espace des fonctions C^k qui sont presque-périodique jusqu'á l'ordre k.

➤ $APU(\mathbb{R},\mathbb{E})$: espace des fonctions uniformément presque-périodique .

➤ $APU(\mathbb{E}\times\mathbb{R},\mathbb{F})$: espace des fonctions presque-périodique uniformément, par rapport á un paramétre.

➤ $B^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$: ensemble des fonctions presque-périodique au sens de Besicovitch, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.

➤ $B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})$: espace de Blot.

➤ $b\mathbb{R}$: compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$.

➤ $\mathcal{D}'$: espace des distributions au sens de L.Schwartz.

➤ $\mathcal{B}'$: espace des distributions bornée.

➤ $\mathcal{B}'_{pp}$: espace des distributions presque-périodiques.

➤ $\mathfrak{M}\{f\}$: la moyenne temporelle.

➤ $a(f,\lambda)$: le λ-éme coefficient de Fourier-Bohr de f.

➤ $\overline{\mathfrak{M}}\{f\}$: la moyenne sup.

➤ $\mathcal{D}$: la dérivé distributionnelle.

➤ D : la dérivé ordinaire.

➤ ∇ : la dérivée faible sur $B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$.

➤ τ_a : l'opérateur de translation par a, $(a \in \mathbb{R})$.

Introduction

La modélisation mathématique de certains problémes naturels conduit généralement á des modéles qui sont continus ou discrets. Dans les modelés continus, on suppose que l'évolution au cours du temps se fait d'une maniére continue. Ils sont présentés par des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles, ou par des équations intégrales. Les équations différentielles à retard surviennent dans la formalisation de nombreux phénomènes dynamiques où certains effets ne sont pas instantanés, mais interviennent avec retard, autrement dit lorsque l'état à un instant donné est une fonction de son passé. On peut les rencontrer dans plusieurs domaines d'applications, notamment en économie, physique, médecine, biologie, écologie,..., et la signification du retard dans un tel ou tel modéle peut étre différente : le temps de gestation en biologie, le temps de réaction en conduite automobile, la période d'incubation d'une maladie contagieuse, le temps d'accumulation, le temps nécèssaire pour la maturation des cellules ou la transformation d'un type de cellules en un autre,....

la théorie des fonctions presque périodique sur la droite et dans les espaces vectoriels á n dimensions a été établie par **H.Bohr**,á partir de 1924. L'exposé qu'on va donner repose sur la définition due á **bochner** : une fonction $f(x)$ est presque périodique si l'ensemble de ses"translatées"

$$f_t(x) = f(x+t)$$

est compact. Cette définition a été étendue par **V.Neumann** récemment aux groupes quelconque. D'autre part (dans le sens de Bohr), **Stépanoff** et **Tychonoff** en avaient déduit la notion d'espace d'une fonction $f(x)$, dont les éléments sont les $f_t(x)$ et leurs fonctions limites.

Dans le Chapitre I, ce chapitre est introductif. Il a pour objectif de présenter la notion de fonction presque-périodique (p.p.), ses principales propriétés et de donner certains résultats sur ce type de fonctions. Sera donnée, les fonctions p.p. au sens de **Harald Bohr**, On la suite de ce chapitre par l'analyse de Fourier des fonctions presque-périodiques puis on aborde les fonctions p.p. uniformément par rapport á un paramétre, ensuite on parlera des fonctions p.p. au sens de **Besicovitch**, ce qui nous permettra de décrire l'espace de **Blot**.

Dans le chapitre II, nous présentons des notions générale de la Distributions et en suite de la distribution presque-périodique.

Dans le chapitre III, Enfin on expose les applications des fonctions presque-périodique, nous donne un petit historique sur un grand phénomène physique est la mondes presque-périodique et la presque-périodicité de système solaire .

Chapitre 1

Définitions et premières propriétés des Fonctions presque-périodiques

Introduction.

Les fonctions presque-périodiques ont été introduites par des astronomes, et en particulier par **E.Elsclangon (1902)** pour généraliser les fonctions périodiques. Un peut plus tard **(1922)**, **Harald Bohr**, s'intéressant á la fonction Zeta de Riemann et aux séries de Dirichlet, était amené á les étudier en liaison avec des problémes de nature arithmétique. Depuis, la notion de presque-périodicité a été généralisée dans diverses directions notamment par **Favard**, **Besicovitch**, **Fink, Levitan**, et **Corduneanu**. Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats sur la presque-périodicité au sens de Bohr et de Besicovitch.

■

$\mathbb{E}$ désigne un espace de Banach réel, et $||.||_{\mathbb{E}}$ sa norme. On note $C^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{E}$ et $C^k(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'espace des fonctions de classes C^k sur $\mathbb{R}$ á valeurs dans $\mathbb{E}$.

1.1 Fonctions presque-périodique au sens de Bohr

Définition 1.1.1 Un ensemble I de $\mathbb{R}$ est dit relativement dense s'il existe un nombre réel $l > 0$ (dit longueur d'inclusion), tel que, tout intervalle $[a, a+l]$ de longueur l de $\mathbb{R}$ contient un nombre de I.

Définition 1.1.2 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$ et $\epsilon > 0$ un nombre réel strictement positif. Un nombre réel τ est une ϵ-presque-périodique de f si on a

$$sup_{t\in\mathbb{R}}||f(t+\tau) - f(t)||_{\mathbb{E}} < \epsilon. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.3 *(Bohr)*
Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. On dit que f est presque-périodique au sens de Bohr si $\forall\epsilon > 0, f$ possède un ensemble de ϵ-presque-périodiques relativement dense. i.e. $\forall\epsilon > 0$, il existe un nombre $l = l(\epsilon) > 0$, tel que tout intervalle $[a, a+l]$ contienne un nombre $\tau = \tau_\epsilon$ satisfaisant (1.1).
On a les remarque suivant :

1. Toute fonction périodique continue est une fonction presque-périodique au sens de Bohr.
2. Si f est une fonction T-périodique, alors tous les nombres de la forme nT ; $n = (\pm1, \pm2, \pm3, ...)$ sont aussi des périodes de f, et donc sont des presque-périodes de f, pour tout $\epsilon > 0$.
   Or l'ensemble $\{nT; n = \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ est relativement dense, ce qui implique que f est presque-périodique au sens de Bohr.

On notera par $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ (ou aussi $AP^0(\mathbb{E})$) l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr á valeurs dans E.
Et soit une fonction f, presque-périodique et continue, est dite uniformément presque-périodique et on écrit $f \in APU(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ ou bien f est $APU(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.[6]

Proposition 1.1.4 $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni de la norme de convergence uniforme

$$||f||_\infty := sup\{||f||_{\mathbb{E}}; t \in \mathbb{R}\}$$

est un espace de Banach.

Si f et g sont deux fonctions presque-périodiques, alors les fonctions $f+g$ et fg le sont aussi.
D'autres propriétiés des fonctions Bohr-presque-périodique sont cités ci-dessous :

Proposition 1.1.5 Si f est une fonction continue presque-périodique, alors f est bornée et uniformément continue.
Preuve. *Dans cette prouve, on a deux points á démontrer :*

1. *La bornitude de f :*
   Supposons que $f \in APU(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Pour $\epsilon = 1$, on notera l_1 le réel positif correspond. Comme f est continue sur le compact $[0, l_1]$, elle est bornée sur $[0, l_1]$, c'est á dire,
   $$\exists M > 0, \quad sup_{x \in [0,l_1]} ||f(x)|| \leq M.$$
   Soit $\tau \in [-x, -x + l_1]$ un ϵ-presque périodique associé á f.
   On a donc
   $$\forall x \in \mathbb{R}, ||f(x+\tau) - f(x)|| < 1.$$
   Il vient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} ||f(x)|| &= ||f(x) - f(x+\tau) + f(x+\tau)||, \\ &\leq ||f(x) - f(x+\tau)|| + ||f(x+\tau)||, \\ &\leq M + 1. \end{aligned}$$
   Donc f est bornée.

2. *La continuité uniforme de f :*
   Soit $\epsilon > 0$ et $l = l_\epsilon$ la longueur d'inclusion associée. Comme f est uniformément continue sur $[-1, 1 + l]$, alors il existe $0 < \delta(\epsilon) < 1$ tel que,
   $$\forall x, y \in [-1, 1 + l]; |x - y| < \delta(\epsilon) \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \epsilon$$
   D'autre part, si $\tau \in [-x, -x + l]$ est un ϵ-presque-périodique, on a
   $$||f(x+\tau) - f(x)|| \leq \epsilon.$$
   D'où pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $|x - y| < \delta(\epsilon)$,
   $$\begin{aligned} ||f(x) - f(y)|| &= ||f(x) + f(x+\tau) - f(x+\tau) - f(y+\tau) + f(y+\tau) - f(y)||, \\ &\leq ||f(x) - f(x+\tau)|| + ||f(x+\tau) - f(y+\tau)|| + f(y+\tau) - f(y)||, \\ &< \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon. \end{aligned}$$
   Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

■

Proposition 1.1.6 $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ jouit des propriétés suivantes :

1. Tout élément de $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est uniformément continu.
2. Tout élément de $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est á image relativement compacte sur $\mathbb{E}$, donc borné sur $\mathbb{R}$.
3. Si $\mathbb{F}$ est un espace de Banach, et si $g : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est une application continue sur l'adhérence de l'image de f, alors $g \circ f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{F})$.
4. Si pour $i = 1, 2, ..., p$, $f_i \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}_i)$, $\mathbb{E}_i$ étant un espace de Banach, alors $(f_i)_{1\leq i\leq p} \in AP^0(\mathbb{R},\prod_{1\leq i\leq p}\mathbb{E}_i)$.
5. Si $(f_n)_n$ est une suite des fonctions presque-périodiques et qu'elle converge uniformément vers une fonction f, alors $f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$.

Proposition 1.1.7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$, et $a \in \mathbb{R}$. On définit l'opérateur de translation

$$\tau_a(f)(t) := f(t + a).$$

Si $f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\tau_a(f) \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$.

Notons par $BC(\mathbb{R},\mathbb{E})$, l'ensemble de fonctions continues, bornées de $\mathbb{R}$ á valeurs dans $\mathbb{E}$.

Théorème 1.1.8 *(Bochner)*
Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$. Alors $f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ si et seulement si $\{\tau_a(f); a \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $BC(\mathbb{R},\mathbb{E})$ munit de la norme de la convergence uniforme.

Proposition 1.1.9 Du Théoréme de Bochner, on tire les proprietés suivantes :

1. Si f et $g \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, alors $f + g \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$.
2. Si $f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et $\phi \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors $\phi.f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$.

Tout polynôme trigonométrique $P_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k t}$, $(a_k \in \mathbb{E}, \lambda_k \in \mathbb{R})$ est une fonction presque-périodique, et donc en utilisant le point (5) de la Proposition 1.1.6, toute fonction f obtenue par la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques est presque-périodique. Ainsi on introduit une troisième définition dite d'approximation, pour les fonctions presque-périodiques.

Définition 1.1.10 *(Approximation)*
$AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est la fermeture de l'espace des polynômes trigonométriques á valeurs dans $\mathbb{E}$, noté $Trig(\mathbb{R},\mathbb{E})$, dans $BC(\mathbb{R},\mathbb{E})$ pour la topologie de convergence uniforme. i.e.$f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $P_\epsilon \in Trig(\mathbb{R},\mathbb{E})$ tel que

$$sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t) - p_\epsilon(t)\|_{\mathbb{E}} < \epsilon$$

Ou encore $f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ si et seulement si il existe une suite $(P_n)_n \in Trig(\mathbb{R},\mathbb{E})$ telle que

$$lim_{n\to\infty}sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t) - p_n(t)\|_{\mathbb{E}} = 0$$

1.1.1 Dérivation des fonctions presque-périodiques

Si une fonction périodique est dérivable, sa dérivée est automatiquement périodique. Mais dans cas des fonctions presque-périodiques, ceci n'est pas vrai, puisque rien n'assure que la dérivée soit uniformément continue, ce qui est nécessaire pour être presque-périodique. En fait, un résultat assure que cette condition est suffisante :

Proposition 1.1.11 *Cependant on a le résultat suivant.*

1. Si $f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}) \cap C^1(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f' \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note
$$AP^k(\mathbb{R},\mathbb{E}) := \{f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}) \cap C^k(\mathbb{E},\mathbb{R}); \forall i = 1, ..., k \quad \frac{d^i f}{dt^i} \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})\}$$
3. $AP^k(\mathbb{R},\mathbb{E})$ muni de la norme
$$||f||_{C^k} := sup_{t\in\mathbb{R}}||f(t)||_{\mathbb{E}} + \sum_{i=1}^{k} sup_{t\in\mathbb{R}}\|\frac{d^i f(t)}{dt^i}\|_{\mathbb{E}}$$
est un espace de Banach.

Définition 1.1.12 Pour $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$,

$$\mathfrak{M}\{f\} = \mathfrak{M}_t\{f(t)\} := lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)dt$$

désigne la moyenne temporelle de f .

Proposition 1.1.13 Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors $\mathfrak{M}\{f\}$ existe dans $\mathbb{E}$.

Proposition 1.1.14 Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, et $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathfrak{M}_t\{f(t+a)\} = \mathfrak{M}_t\{f(t)\}.$$

Notons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, l'application $[t \mapsto f(t)e^{-i\lambda t}] \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et donc sa moyenne existe dans le complexifié de E.

Définition 1.1.15 Pour $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit le coefficient de Fourier-Bohr d'indice λ de f par *:*

$$a(f; \lambda) := \mathfrak{M}_t\{f(t)e^{-i\lambda t}\}.$$

Proposition 1.1.16 Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. L'ensemble

$$\Lambda(f) := \{\lambda \in \mathbb{R}; a(f; \lambda) \neq 0\}$$

est au plus dénombrable.

Proposition 1.1.17 Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Alors f est développable en série de Fourier-Bohr

$$f(t) \sim \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a(f; \lambda)e^{i\lambda t}.$$

La convergence ayant lieu en moyenne quadratique. De plus si $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, on a l'égalité de Parseval :

$$\mathfrak{M}\{||f(t)||^2_{\mathbb{E}}\} = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} ||a(f; \lambda)||^2_{\mathbb{E}}.$$

Á partir de cette Proposition on á le théoréme suivant.

Théorème 1.1.18 *(unicité)*
Si deux fonctions presque-périodiques ont la même série de Fourier-Bohr, alors elles sont identiques.

Proposition 1.1.19 Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors on a :

1. Si $lim_{t \to \infty} f(t) = l(l \in \mathbb{R})$, (respectivement $-\infty$), alors pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t) = l$.
2. Si pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$, alors $\mathfrak{M}_t\{f(t)\} \geq 0$ et $\mathfrak{M}_t\{f(t)\} = 0$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$.

1.1.2 Intégration des fonctions presque-périodiques

Pour une fonction périodique continue, la condition d'être de moyenne nulle assure que les primitives soient presque-périodiques. Pour les fonctions presque-périodiques, cette condition ne suffit pas. Par exemple, si l'on note f la fonction :

$$f := \sum_{n \geq 1} \frac{e_{1/n}}{n^{11/10}},$$

cette fonction est presque-périodique et de moyenne nulle en vertu de l'unicité du développement. Si ses primitives étaient presque-périodiques, leurs développements seraient :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e_{1/n}}{n^{1/10}},$$

qui n'est pas une fonction presque-périodique en raison de la relation de Parseval et de la divergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/5}}$.
En effet, la condition de relative compacité de l'image des primitives n'est pas automatiquement satisfaite. Cependant, la proposition suivante :

Proposition 1.1.20 Soit $f \in AP^0(\mathbb{E})$ et F une primitive de f . L'une des conditions suivantes assure que les primitives soient presque-périodiques.

1. L'image de F est relativement compacte.
2. F est bornée et E est uniformément convexe

1.1.3 Fonctions presque-périodiques avec un paramétre

On considère la fonction $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $F(x,t) = sin(xt)$. Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $F(.,t)$ est périodique, donc certainement presque-périodique au sens de Bohr. Malgré que $[t \mapsto (sin(t))]$ est presque-périodique, la fonction $[t \mapsto F(sin(t),t)]$ ne peut pas être presque-périodique, car elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, si $F \in C^0(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$, où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux espaces de Banach, est telle que $F(x,.)$ est presque-périodique pour tout $x \in \mathbb{E}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ est presque-périodique, la fonction $[t \mapsto F(\varphi(t),t)]$ ne sera pas forcément presque-périodique. Il faut une certaine uniformité par rapport à x (sur le choix de t). Pour cette à on retient la définition suivante.

Définition 1.1.21 Soit $F \in C^0(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$ On dit que F est presque-périodique en t uniformément par rapport á x sur tout compact de $\mathbb{E}$ (p.p. en t unif.p.r. à x) lorsque : pour tout compact $\mathbb{K}$ de $\mathbb{E}$,

$$\forall \epsilon > 0, \exists l > 0; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [\alpha, \alpha + l]$$

tels que

$$sup_{t\in\mathbb{R}} sup_{x\in\mathbb{K}} ||F(x,t+\tau) - F(x,t)||_{\mathbb{E}} \leq \epsilon.$$

On note par $APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$ la classe de telles fonctions.

Théorème 1.1.22 Soit $F \in C^0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$. F est p.p. en t unif.p.r. á x si et seulement si, pour toute suite (τ_n) de réels, il existe une sous-suite (τ'_n) de (τ_n) et une fonction $G \in C^0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$ telles que pour tout compact $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^N$,

$$lim_{n\to\infty} sup_{t\in\mathbb{R}} sup_{x\in\mathbb{K}} \|F(x,t+\tau'_n) - G(x,t)\|_{\mathbb{E}} = 0.$$

Proposition 1.1.23 $APU(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$ jouit des propriétés suivantes :

1. Si F et G sont p.p. en t unif.p.r. á x, alors $F + G$ l'est aussi.
2. Pour tout compact $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^N$, si F est p.p. en t unif.p.r. à x alors elle est bornée continue sur $\mathbb{K} \times \mathbb{R}$.

Théorème 1.1.24 Si $F \in C^0(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$ est p.p. en t unif.p.r. á x et $\varphi \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors l'application $[t \mapsto F(\varphi(t), t)] \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$.
lorsque $\mathbb{E} = \mathbb{R}^N$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}^M$, et sa démonstration se généralise aux espaces de Banach séparables. Ce théoréme a été généralisé par P. Cieutat pour les espaces de Banach non nécessairement séparables. Lorsque $F \in APU(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$, on note

$$\Lambda(F) := \bigcup_{x \in \mathbb{R}^N} \{\lambda \in \mathbb{R} : \mathfrak{M}_t\{F(x,t)e^{-i\lambda t}\} \neq 0\}.$$

Le module de F, noté $Mod(F)$ est le sous-groupe de $\mathbb{R}$, ou le sous module sur $\mathbb{Z}$, engendré par $\Lambda(F)$.

Théorème 1.1.25 Soit F et $G \in APU(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$. Si pour tout compact $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^N$, et pour toute suite $(\tau_n)_n$ de réels ayant une limite finie ou infinie telle que la suite de fonctions $[(x,t) \mapsto F(x, t+\tau_n)]$ est uniformément convergente sur $\mathbb{K} \times \mathbb{R}$, implique que la suite de fonctions $[(x,t) \mapsto F(x, t+\tau_n)]$ est uniformément continue sur $\mathbb{K} \times \mathbb{R}$, alors

$$Mod(G) \subset Mod(F).$$

1.2 Fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch

Si f est un élément de l'espace de Lebesgue $L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note

$$\overline{\mathfrak{M}_t}\{f(t)\} := lim_{T\to\infty} sup \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt$$

Si $p \in [1,+\infty)$, on note $\mathcal{B}^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ la fermeture dans $L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ de $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ (ou aussi de $Trig(\mathbb{R},\mathbb{E})$) pour la semi-norme

$$f \longmapsto \overline{\mathfrak{M}}\{\|f\|^p_{\mathbb{E}}\}^{\frac{1}{p}}.$$

On note $f \sim_p g$ si $\overline{\mathfrak{M}_t}\{\|f(t)-g(t)\|^p_{\mathbb{E}}\} = 0$. Le quotient de $\mathcal{B}^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ pour cette relation d'équivalence se note $B^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et s'appelle l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch.[6]

Proposition 1.2.1 $\mathcal{B}^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ muni de la norme

$$||f||_p := \mathfrak{M}_t\{\|f(t)\|^p_{\mathbb{E}}\}^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach.

Proposition 1.2.2 Lorsque $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, $B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$ muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})} := \mathfrak{M}\{(f|g)_{\mathbb{E}}\}$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2.3 Si $f \in B^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$, alors sa moyenne existe, est finie, et vérifie

$$lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt = lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(t)dt = lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt$$

Proposition 1.2.4 Si $(u_m)_m$ est une suite dans $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ et si $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ (l'espace de Lebesgue), satisfaisant
$\overline{\mathfrak{M}}\{|u_m - u|^p\}^{\frac{1}{p}} = (lim_{T\to\infty} sup \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u_m - u|^p dt)^{\frac{1}{p}} \to 0 (m \to 0)$, alors $u \in B^p(\mathbb{R}^n)$ et on a $||u_m - u||_p \to 0 (m \to 0)$.
On peut bien entendu développer les éléments de $B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$ en séries de Fourier-Bohr, et

si $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, leur développement vérifie la relation de Parseval suivante :

$$\mathfrak{M}_t\{||f(t)||^2_{\mathbb{E}}\} = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} ||a(f;\lambda)||^2_{\mathbb{E}}.$$

Théorème 1.2.5 *(Riesz-Fisher-Besicovitch)*
L'application $\Phi : B^2(\mathbb{R},\mathbb{E}) \to l^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$ donnée par $\Phi(f) := (a(f;\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$, oú $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, définit un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert. Notons que $B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est l'espace de la synthèse harmonique.[3]

1.2.1 Espace de type Sobolev sur les espaces de Besicovitch, dit 'espace de Blot'

Ces espaces du type Sobolev, inspirés de l'espace classique $H^1(]0,T[,\mathbb{E})$ du cas périodique, ont été construits et développés par J. Blot, pour $\mathbb{E}$ de dimension finie.
Soit $\mathbb{E}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, dont $||.||_{\mathbb{E}}$ et $(.|.)_E$ sont sa norme et son produit scalaire. Soit $r \in \mathbb{R}$; et $f \in \mathcal{B}^P(\mathbb{R},\mathbb{E})$, par l'invariance de la moyenne par translation, on a

$$\mathfrak{M}\{\|\tau_r f\|^p_{\mathbb{E}}\}^{\frac{1}{p}} = \mathfrak{M}\{\|f\|^p_{\mathbb{E}}\}^{\frac{1}{p}}.$$

Donc $f \sim_p g$ implique $\tau_r f \sim_p \tau_r g$, ce qui permet de définir $\tau_r \eta$ dans $\mathcal{B}^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ quand $\eta \in \mathcal{B}^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$. Ces opérateurs de translation permettent de définir une dérivée généralisée pour certains éléments de $\mathcal{B}^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ en suivant la méthode de Vo-Khac. Le générateur infinitésimal du groupe $(\tau_r)_{r\in\mathbb{R}}$ est noté ∇ selon Vo-Khac :

$$\nabla f := lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(\tau_r f - f).$$

L'opérateur ∇ est un opérateur linéaire, non borné de $B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$; en outre ∇ est de graphe fermé dans $B^2(\mathbb{R},\mathbb{E}) \times B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$.
On note $B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E}) = Dom(\nabla)$, c'est-á-dire :

$$B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E}) = \{f \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{E}) : \nabla f \in B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})\}$$

$B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est l'espace de Blot. On munit $B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})} := (f|g)_{B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})} + (\nabla f|\nabla g)_{B^2}(\mathbb{R},\mathbb{E}).$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Proposition 1.2.6 Soit $k \in \mathbb{N} \bigcup +\infty$. Alors $AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est dense dans $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ Ce résultat permet de considérer $(B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E}), \langle f|g\rangle_{B^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{E})})$ comme le complété hilbertien de $AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.
Signalons sans démonstration les proprietés suivantes de l'espace de Blot.

Proposition 1.2.7 Les proprietés suivantes sont vraies :

1. Si $f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $r \in \mathbb{R}$, alors
$$\nabla(\tau_r f) \sim_2 \tau_r(\nabla f).$$
2. Si $f \in AP^1(\mathbb{E})$, alors $f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, et $\nabla f \sim_2 f'$.
3. si $f \in B^{1,2}$, alors $a(\nabla f; \lambda) = i\lambda a(f; \lambda)$.
4. si $f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors $\mathfrak{M}\{\nabla f\} = 0$

Remarque 1.2.8 Le point (2) montre que ∇ est une généralisation de la dérivation ordinaire.

Proposition 1.2.9 Soit $f, g \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $g \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\nabla g \sim_2 f$.
2. $\forall h \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E}), \mathfrak{M}\{(f|h)_{\mathbb{E}}\} = -\mathfrak{M}\{(g|h')_{\mathbb{E}}\}$.

Proposition 1.2.10 Si $f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, et $g \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Alors :

1. $(f|g)_{\mathbb{E}} \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. $\nabla(f|g)\mathbb{E} \sim_2 (\nabla f|g)_{\mathbb{E}} + (f|g')_{\mathbb{E}}$.
3. $\mathfrak{M}\{(\nabla f|g)_{\mathbb{E}}\} = -\mathfrak{M}\{(f|g')_{\mathbb{E}}\}$.

On a aussi la proprieté qui caractérise l'espace $B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, via les séries de Fourier-Bohr.

Proposition 1.2.11 Soit $f \in B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, telle que $f(t) \sim_2 \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a(f;\lambda)e^{i\lambda t}$. Alors on a :

$$f \in B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \Longleftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda^2 ||a(f;\lambda)||_{\mathbb{E}}^2 < \infty$$

et dans ce cas $\nabla f \sim_2 \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} i\lambda a(f;\lambda)e^{i\lambda t}$.

Chapitre 2

La Distribution presque-périodique

2.1 Introduction aux distributions

Introduction.
Les distributions sont utilisées depuis longtemps par les physiciens (distributions de Dirac, . . .) mais une théorie mathématique rigoureuse n'est apparue que récemment dans les travaux de Sobolev (1936) et surtout L. Schwartz (1950) (en parallèle : Gelfand (1964)). Intuitivement, les distributions sont des outils mathématiques utilisés pour représenter des phénoménes physiques que les fonctions classiques s'avérent incapables de transcrire.
■

2.1.1 Fonctions test et distributions

un multi-idice α est un n-uple d'entier $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}$.

- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on pose :
  $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ désigne la longueur de α.

Et $\alpha! = \alpha_1!......\alpha_n! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!$
$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i, \forall i = \overline{1, n}$, si :
$\alpha \geq \beta, \alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, ..., \alpha_n - \beta_n)$ et

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha.\beta)!}$$

- $\partial^{\alpha} = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}, x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n, x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1}, ..., x_n^{\alpha_n}$

2.1.2 Fonctions test

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.1 Si $f \in C(\Omega)$ alors le support de f, noté par $supp(f)$, est définie par :,

$$supp(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

L'adhérence de l'ensemble des points en lesquels la fonction ne s'annule pas.

Définition 2.1.2 Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'espace $C_0^k(\Omega)$ est férmé par toutes les fonctions $f \in C^k(\Omega)$ ayant comme support un sous-ensemble compact de Ω.
Les éléments de C_0^{∞}, noté par $\mathcal{D}(\Omega)$ sont dits fonctions test (ou fonctions d'essai).

Exemples.

1. Soit $x_0 \in \Omega$ et $\epsilon > 0$ tels que :$B(x_0, \epsilon) = \{x \in \Omega; ||x - x_0|| < \epsilon\} \subset \Omega$
   $\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\epsilon^2 - ||x-x_0||^2}} & si \quad ||x - x_0|| < \epsilon \\ 0 & si \quad ||x - x_0|| \geq \epsilon, x \in \Omega \end{cases}$
   $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), (C_0^{\infty}(\Omega))$ et $supp\, \varphi = \overline{B}(x_0, \epsilon) = \{x \in \Omega; ||x - x_0|| \leq \epsilon\}$.

2. si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction $\widetilde{\varphi}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

■ **Notation :** on utilisera la notation suivante :

$$D^{\alpha}\phi := \phi, \text{si} \quad \alpha = (0, ..., 0)$$

$$D^{\alpha}\phi := \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \text{sinon.}$$

Définition 2.1.3 Soit$(\phi_p)_{p\in N}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On dit que (ϕ_p) converge au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. il existe un ensemble compact K fixe, indépendant de p, avec $K \subset \Omega$ tel que $supp(\phi) \subset \Omega$, pour tout entier p et $supp(\phi) \subset K$.

2. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $(D^\alpha \phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha\phi$, c'est-á-dire que

$$sup_{x\in K}|D^\alpha\phi_p(x) - D^\alpha\phi(x)| \to 0, \quad \text{l'orsque} \quad p \to +\infty.$$

2.1.3 Définitions de distributions

Définition 2.1.4 On appelle distribution sur Ω toute application linéaire et continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une application $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une distribution sur Ω si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1. T est linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
2. Pour toute suite $(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers zéros au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$, on a $T(\phi_p)$ converge vers zéros dans $\mathbb{R}$ (continuité).

On appelle le dual topologique de $\mathcal{D}$, noté par $\mathcal{D}'$ l'ensemble des distributions.
D'une maniére analogue, on note par $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables qui sont bornées et $\mathcal{B}'$ son dual qui rassemble les distributions dites également bornées.

2.1.4 Distribution presque-périodique

Définition 2.1.5 une fonction $\phi \in B$ est dite presque-périodique si l'ensemble des translatées de ϕ défini par $\{\tau_a(\phi) = \phi(.+a); a \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{B}$. Ceci est équivalent à dire que ϕ et toutes ses dérivées sont des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr.[6]
On note $\mathcal{B}_{pp}$ l'ensemble de ces fonctions. $\mathcal{B}_{pp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}$.

Définition 2.1.6 Soit $T \in \mathcal{B}'$. On dit que T est une distribution presque-périodique si l'ensemble de ses translatées $\tau_a(T)$ est relativement compact dans $\mathcal{B}'$. On rappelle que $\tau_a(T)$ est défini pour une fonction test u par $\tau_a(T) : u \mapsto Tu(.,a)$.

En d'autres termes, une distribution T est presque-périodique dans $\mathcal{B}'$ si la fonction $a \mapsto \tau_a(T)$ est presque-périodique au sens de bohr de $\mathbb{R}$ á valeurs dans $\mathcal{D}'$.
Ceci permet de remarque que l'espace ${\mathcal{B}'}_{pp}$ des distributions presque-périodiques est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}'$.
La dérivée d'un fonction $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \bigcap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas forcément une fonction presque-périodique. Cependant, cette dérivée représente une distribution presque-périodique. Mieux encore, on a le resultat suivant dont on trouvera une démonstration dans (Schwartz, 1957), Chapitre $\vee$I, paragraphe 9 :

Théorème 2.1.7 Soit T une distribution de $\mathcal{D}'$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $T \in {\mathcal{B}'}_{pp}$.
2. T est une somme finie de dérivées de fonctions presque-périodiques au sens usuel de Bohr.

Proposition 2.1.8

1. L'opérateur de la moyenne $\mathfrak{M} : AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ se prolonge d'une maniére unique et continûment á l'espace ${\mathcal{B}'}_{pp}$.
2. Toute distribution presque-périodique est développable en série de Fourier-Bohr dont les coefficients de Fourier sont définies, comme pour le fonctions pp, par
$$a(T, \lambda) := \mathfrak{M}\{e^{-i\lambda t}T\}.$$
3. Le module de fréquence, á savoir l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R}; a(T, \lambda) \neq 0\}$ est au plus dénombrable.
4. *(Unicité)* L'unique distribution T dont tous les coefficients de Fourier-Bohr sont nuls est la distribution nulle.
5. Si $T \in {\mathcal{B}'}_{pp}$, alors $\mathfrak{M}(\mathcal{D}T) = 0$ ou $\mathcal{D}$ est la dérivée au sens de distributions.

6. Pour tout $T \in \mathcal{B}'_{pp}$ et $\phi \in AP^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a le résultat important suivant :

$$\mathfrak{M}\{\phi.\mathcal{D}T\} = -\mathfrak{M}\{\mathcal{D}\phi.T\}.$$

Chapitre 3

Les applications des fonctions presque-périodique

3.1 Un monde presque-périodique

Introduction.
En 1954, lors du congrès international des mathématiciens d 'Amsterdam, A.N. Kolmogorov annonça un théorème important qui fut précisée (et démontré !) quelques années plus tard par V. Arnold et J. Moser. Je voudrais présenter une introduction trés élémentaire á ce théoréme de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) selon lequel "il est bien possible que le systéme solaire soit presque périodique". ■

Ainsi, le monde que nous l'eguent Hipparque, Ptoléemée, Kepler et Newton est un monde périodique. Plus précisément, chaque planète est périodique mais le systéme solaire est "presque- périodique" dans son ensemble car il n'y a bien sûr aucune raison que les périodes des différentes planètes soient en rapports rationnels. Les nombres irrationnels existent. La somme de deux fonctions périodiques dont les périodes sont en rapport irrationnel n'est pas périodique. Mais elle l'est presque. . . La formalisation de cette idée est récente. Commençons par deux définitions "raisonnables" :

Définition 3.1.1 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$ un (petit) nombre réel strictement positif. Un nombre réel T est une ϵ-période si pour tout t de $\mathbb{R}$, on a : $|f(t+T) - f(t)| < \epsilon$.[7]

Définition 3.1.2 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est presque périodique si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre $M > 0$ tel que tout intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur plus grande que M contient au moins une ϵ-période.
La théorie des fonctions presque périodiques est riche. En particulier en lien avec l'histoire du mouvement des planètes.[7]

Voici deux téorème.

Théorème 3.1.3 Soient $a_1, ..., a_k$ des nombres complexes et $\omega_1, ..., \omega_k$ des nombres réels. La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(t) = \sum_{n=1}^{k} a_n exp(i\omega_n t)$ est presque périodique. Le second est beaucoup plus difficile. Formellement, il est dû á Bohr mais pour les mêmes raisons subjectives que celles exposées plus haut, je l'attribue également á Hipparque et Ptolémée.

Théorème 3.1.4 *(Hipparque-Ptolémée-Bohr)*
Toute fonction presque périodique peut être arbitrairement approchée par des fonctions du type précédent. Ces définitions et ces théorémes étant posés, je peux commencer á préciser le contenu de cet étude. L'univers dans lequel nous vivons est-il presque périodique ?

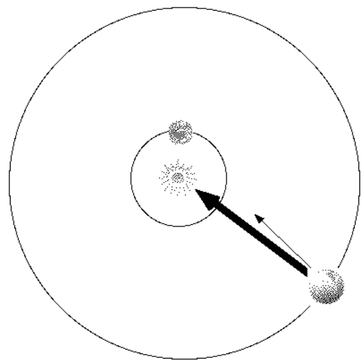
3.2 L'histoire récente de la physique

La turbulence des fluides est un phénomène bien complexe qui intrigue les physiciens au moins depuis Léonard de Vinci et dont les applications pratiques sont plus qu'évidentes en aéronautique. Comment comprendre ces tourbillons de toutes les tailles dans les fluides turbulents, et le flux d'énergie des gros tourbillons vers les plus petits, jusqu'aux echelles dissipatives (théorie de Kolmogorov) ? Il est étonnant de constater que des physiciens aussi éminents et imaginatifs que Landau et Lipschitz ont longtemps présenté la turbulence comme un phénomène presque périodique, dont le nombre de fréquences dépend du nombre de Reynolds (liènotamment à la viscosité du fluide). Ce n'est qu'à partir de la seconde édition de 1971 de leur fameux traité de mécanique des fluides qu'ils ont pris conscience du fait que les fonctions presque périodiques sont finalement trop "gentilles" pour représenter ce phénomène et qu'il faut faire appel à des fonctions beaucoup plus "chaotiques" : c'est le début de la théorie des attracteurs étranges, bel exemple de collaboration entre mathématiciens et physiciens. Les vieilles habitudes sont difficiles à perdre : les épicycles sont encore présents dans notre inconscient scientifique et il est bien difficile de nous en débarrasser. Devons-nous oublier les épicycles et les fonctions presque périodiques dans la description de notre système solaire ? Les systèmes conservatifs, tels que le systéme solaire, sont-ils eux aussi sujets à une sorte de chaos (et en quel sens ?), comme le sont les systèmes dissipatifs (turbulence) ? D'une certaine maniére, le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser est rassurant : il affirme que dans de bonnes conditions (expliquées plus loin), les fonctions presque périodiques suffisent pour décrire le movement de nos planètes ...[7]

3.3 Lagrange et Laplace : le monde presque-périodique

Faute de résoudre exactement les équations du mouvement, on est réduit á trouver des solutions approchées. Lagrange et Laplace sont de ceux qui ont développé le mieux la théorie des perturbations. En premiére approximation bien sûr, les forces dominantes dans le système solaire sont les forces d'attraction vers le soleil car la masse du soleil est largement supérieure á celle des autres planétes (d'un facteur de l'ordre de 103 environ). On peut donc penser que les planétes vont suivre á peu prés les orbites képlériennes (périodiques) et que celles-ci vont se modifier peu á peu á cause de l'influence perturbatrice des autres planétes. Quelle est l'ampleur de ces petites perturbations ? Risquent-elles de modifier significativement l'harmonie du systéme képlérien ? Voilá des questions bien difficiles. On pourrait craindre le pire : peut-être qu'une force perturbatrice de l'ordre du millième de la force principale pourrait modifier le rayon d'une orbite de manière significative aprés un temps de l'ordre de mille fois le temps caractéristique du probléme (l'année). En d'autres termes, on pourrait craindre qu'en mille ans, le rayon de l'orbite terrestre ne soit divisé (ou multiplié) par deux. Voilá qui aurait des conséquences importantes sur l'histoire de notre civilisation ! Puisqu'on ne constate pas de catastrophe de ce genre dans notre passé, quel est le phénoméne qui explique que les perturbations perturbent moins que ce qu'on pouvait craindre ?

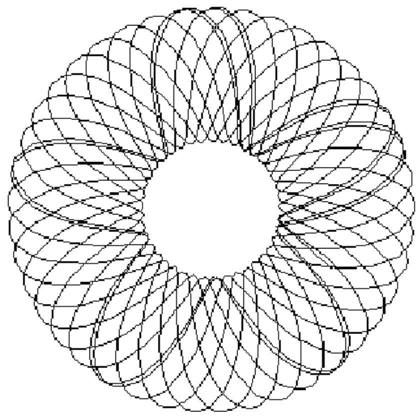
Figure 4 : perturbations.



La théorie des perturbations est compliquée et nécessite beaucoup de calculs mais l'idée géométrique de base, telle qu'elle a été expliquée par Gauss, est trés simple (comme beaucoup de grandes idées). Plaçons-nous dans un cas particuliérement facile : le soleil, de masse trés grande, est (presque) fixe, une planéte P_1 tourne de maniére uniforme sur une orbite circulaire et une autre planéte P_2 de masse trés petite par rapport á P_1 est lancée sur une orbite autour du soleil á peu prés circulaire et extérieure á celle de P_1, dans le même plan. Imaginons que le rayon de l'orbite de P_2 est beaucoup plus grand que celui de P_1 de sorte que la vitesse angulaire de P_1 est beaucoup plus grande que celle de P_2 (d'aprés la troisiéme loi de Kepler). Puisque la masse de P_2 est trés petite, on peut penser qu'elle perturbe trés peu P_1 qui va donc suivre de trés prés sa trajectoire circulaire. Quant á la planéte P_2, elle est soumise á deux forces : l'une, principale, vers le soleil et l'autre, perturbatrice, vers la planéte P_1. La force perturbatrice est faible mais non négligeable ; sa direction oscille sans cesse car P_1 tourne trés rapidement. L'idée consiste á supposer que ces oscillations de la direction de la force perturbatrice peuvent être moyennées : en pratique, cela signifie que l'on remplace la planéte P_1 qui tourne, par son orbite oú l'on distribue la masse de P_1 de maniére uniforme.[9]

Théorème 3.3.1 Soit $F(x, y)$ une fonction continue á valeurs réelles ou complexes qui dépend de deux angles x, y considérés comme éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (l'unité d'angle est le tour). Soient α et β deux fréquences dont le rapport est irrationnel. Alors, lorsque le temps T tend vers l'infini, l'intégrale $\frac{1}{T}\int_0^T F(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)dt$ converge uniformément vers la valeur moyenne de F, cést-á-dire vers l'intégrale double $\int\int F(x, y)dxdy$.[7]

Figure 4 : Mouvement presque-périodique.



Démonstration.

L'ensemble des fonctions F telles que le théoréme est vrai forme évidemment un sous-espace vectoriel de l'espace $C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ des fonctions continues complexes sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Un instant de réflexion montre que ce sous-espace est fermé dans la topologie uniforme : une limite uniforme de fonctions qui vérifient le théoréme le vérifie également. D'aprés Fourier (á deux variables), le sous-espace engendré par les fonctions du type $exp(2i\pi(nx + my))$ est dense dans $C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$; Il suffit donc de vérifier que chacune de ces fonctions $\exp 2i\pi(nx + my))$ satisfait le théoréme .[7] ■

Enfin en déduire que la théoriè des fonctions presque-périodiques apporte de véritables qu'elle méthode ; il est naturel ait provoque les efforts d'un astronome et du côté de la physique théorique.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous introduit les fonctions presque-périodiques. On présentera quelques résultats liés aux fonctions p.p au sens de Bohr ainsi qu'au sens de Besicovitch. On introduira, en particulier, les opérateurs de superposition. Un nouvelle notion de dérivation, qui trouve ses origines dans les travaux de Joël BLOT sera aussi mise en évidence. en remarquons que Les fonctions p.p de Bohr sont restreintes á la classe es fonctions uniformément continues.

Les fonctions p. p ou multifréquentielles, apparaissent naturellement dés qu'on est en présence de plusieurs mouvements périodiques simultanés (par exemple deux ressorts d'élasticités différentes accrochés á deux masses différentes). Elles ne sont pas des fonctions qui sont presque des fonctions périodiques, mais sont des fonctions qui possédent de nombreuses p.p. L'une des propriétés importantes des fonctions p.p. est d'admettre un développement en série de Fourier généralisée :

$$f(t) \sim \sum_{n=o}^{\infty} a\lambda_n e^{i\lambda_n t}$$

On la distribution p. p, notons que si f est une fonction dans $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cup C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors sa dérivée n'est pas forcément une fonction p. p, mais elle est bien une distribution p. p. Physiquement nous parleront par "UN MONDE PRESQUE-PÉRIODIQUE", les physicienne remarquons que chaque planéte est périodique mais le systéme solaire est "presque-périodique" dans son ensemble car il n'y a bien sûr aucune raison que les périodes des différentes planètes soient en rapports rationnels, donc ils ont utilisé les fonctions presqe-périodique dans tout les calcules dans les mouvements presque-périodique.

Bibliographie

[1] J. Bass, Cours de mathématiques, tome 3, Topologie, intégration, distribution, équations intégrales et analyse harmonique , Maisson et cie 1 janvier 1971.

[2] J. Blot, Trajectoires presque-périodiques des systémes lagrangiens convexes, Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 310, Série I, 1990, pp.761-763.

[3] P. Cieutat, Solutions presque-périodiques d'équations d'évolution et de systémes différentiels non linéaires, Thése de Doctorat de Mathématiques, Université de Paris 1, 1996.

[4] T.Cluzeau , Mathématiques pour l'Ingénieur, École Nationale Supérieure d'Ingńieurs de Limoges

[5] M.Delaunay , Nouvelle théorie du mouvment de la lune, Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 220-235. .

[6] L.Dhaou , Fonctions presque-périodiques et Équations Différentielles, Université Panthéon-Sorbonne - Paris I, 2013. French. 16 rue d'atlantis.

[7] É.Ghys, Résonances et petits diviseurs, Article.

[8] L. Schwartz, Distributions ̀valeurs vectorielles, Annales de l'Institut Fourier, tome 7, 1957.

[9] A. Vienne, Mécanique du systéme solaire, LAL-IMCCE Laboratoire d'Astronomie de Lille 1 et Observatoire de Paris, 19 février 2007.

[10] A.Weil , Les fonctions presque-périodiques, Espace de hilbert, séminaire de mathématiques(1933-1939), Exposé 2-J, 11 p.