

# Théorème du point fixe de Lefschetz

Roumayssa Mahdjoubi

June 12, 2014

## Remerciement

Tout d'abord je remercie Dieu de m'avoir donné la connaissance, le courage et la santé pour mener à bien mon projet.

Il m'a été aussi agréable d'exprimer mes sincères remerciements à mon encadreur Monsieur **Mohamed Amine Bahayou**, maître de conférences, pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, ses précieux conseils mais aussi ses encouragements.

Je lui exprime toute ma gratitude.

Je tiens également à remercier l'ensemble des «*membres du Jury*» Mr. Abdallah Bensayed, Mr. Mohamed Boussaid qui ont bien voulu accepter d'évaluer mon travail. Enfin, tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail trouvent ici le témoignage de mes reconnaissances et je remercie toute personne ayant participé à réaliser ce travail..

# Contents



<b>1</b>	<b>Éléments de topologie différentielle</b>	<b>7</b>
1.1	Structures différentielles . . . . .	7
1.2	Transversalité . . . . .	11
1.3	Intersection modulo 2 . . . . .	18
1.4	Intersection orientée . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Théorème du point fixe de Lefschetz</b>	<b>24</b>
2.1	Cohomologie de De Rham . . . . .	24
2.2	Caractéristique d'Euler . . . . .	29
2.3	Théorème du point fixe de Lefschetz . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>36</b>
3.1	Théorème de Poincaré-Hopf . . . . .	36
3.2	Théorème de la boule chevelue . . . . .	37
3.3	Théorème du point fixe de Brouwer . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>

# Introduction

---

Dans beaucoup de problèmes mathématiques (géométrie, topologie, équations différentielles...) la question de savoir si une application possède des points fixes est d'une grande importance.

Étant donnée une application continue sur une variété compacte  $f : M \rightarrow M$ , on peut se demander, quelles sont les conditions pour que l'application possède un point fixe ?

On dispose de quelques résultats plus ou moins connus :

- Si  $M$  est un espace métrique complet et si  $f$  est contractante, elle possède alors un unique point fixe. (Voir [4])
- Si  $M$  est la boule unité (ou, plus généralement, un convexe fermé non vide), alors l'application possède un point fixe. C'est le Théorème du point fixe de Brouwer. (Voir [4]).
- En dimension 1, le Théorème des valeurs intermédiaires affirme que le graphe de  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  doit rencontrer la diagonale.
- Lefschetz a généralisé cette idée, en étudiant les propriétés de l'intersection du graphe de l'application avec la diagonale.

Soit  $M$  une variété différentielle compacte (connexe et sans bord) et soit  $f : M \rightarrow M$  une application lisse. Nous pouvons, au besoin, déformer  $f$  (à l'aide d'une homotopie) pour que l'intersection du graphe de  $f$ ,  $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in M\}$ , avec la diagonale  $\Delta = \{(x, x), x \in M\}$  soit transverse (grosso modo, aux points d'intersection, le graphe et la diagonale ne sont pas tangents).

Les points fixes (s'ils existent) sont en nombre fini. À tout point fixe  $x$  on associe  $\pm 1$ , suivant le signe de  $\det(D_x f - \text{Id})$ . Le nombre de Lefschetz de  $f$  est l'entier :

$$L(f) = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{sign} \det(D_x f - \text{Id}).$$

Le Théorème du point fixe de Lefschetz s'énonce alors :

**Théorème 1.** *Si  $L(f) \neq 0$ , alors  $f$  possède au moins un point fixe.*

L'objet de ce mémoire est de donner une preuve géométrique du Théorème du point fixe de Lefschetz et de développer quelques exemples d'application importants. Ce mémoire est composé de trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous étudions quelques notions de topologie différentielle : transversalité, homotopie, Théorie de l'intersection.
- Dans le deuxième chapitre, nous étudions la cohomologie de de Rham, la caractéristique d'Euler et nous montrons le Théorème du point fixe de Lefschetz.

- Dans le troisième chapitre, nous développons quelques exemples d'application : Théorème de Poincaré-Hopf, Théorème de la boule chevelue, Théorème du point fixe de Brouwer.

À la fin, nous donnons une bibliographie sommaire de l'abondante littérature qui existe sur le sujet de notre mémoire.



# Notations

$C^k(M)$	fonctions de classe $C^k$ sur $M$ .
$C^\infty(M)$	fonctions lisses sur $M$ .
$\Gamma_f$	le graphe de la fonction $f$ .
$\deg(f)$	le degré de la fonction $f$ .
$\dim$	la dimension.
$\partial M$	le bord de $M$ .
$\Omega^k(M)$	formes différentielles de degré $k$ sur $M$ .
$R_f$	l'ensemble des valeurs régulières de $f$ .
$S^n$	sphère de dimension $n$ .
$\text{sign}$	le signe.
$D_x f, T_x f$	applications tangente au point $x$ .
$T_x M$	espace tangent à $M$ au point $x$ .
$T^n$	tore de dimension $n$ .
$\text{tr}$	la trace.
$(U, \varphi)$	carte locale d'une variété.
$\chi(M)$	caractéristique d'Euler de $M$ .
$\#f^{-1}(Z)$	le nombre d'éléments de $f^{-1}(Z)$ .



# List of Figures

1.1	L'intersection de la parabole et l'axe des abscisses dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	11
1.2	L'intersection des courbes $X$ et $Y$ dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	11
1.3	Deux surfaces transverses dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	12
1.4	Deux courbes homotopes dans un espace $X$ . . . . .	14
2.1	Bande de Möbius . . . . .	31

# Éléments de topologie différentielle



## 1.1 Structures différentielles

### 1.1.1 Sous-variétés

**Définition** (Sous-variété en un point). Soient  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in V$ ,  $d \in \mathbb{N}$ . On dit que  $V$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  en  $a$ , de dimension  $d$ , si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. **Redressement linéaire:**

Il existe un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un  $C^\infty$ -difféomorphisme  $F$  de  $U$  sur un voisinage de  $0$  qui redresse  $V$  sur  $\mathbb{R}^d$  :

$$F(U \cap V) = (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap F(U).$$

2. **Équation locale:**

Il existe un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $\mathbb{R}^n$ , une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  tels que  $D_a f$  soit surjective et :

$$x \in V \cap U \Leftrightarrow x \in U \text{ et } f(x) = 0.$$

3. **Graphe :**

Il existe un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un voisinage  $U'$  de  $(a_1, a_2, \dots, a_d)$  et une fonction de classe  $C^1$ ,  $g : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  telle que

$$x \in U \cap V \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_d) \in U' \\ (x_{d+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_d). \end{cases}$$

4. **Coordonnées locales:**

Il existe un voisinage  $U$  de  $a$  et  $\Omega$  un voisinage de  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$ , une application de classe  $C^1$   $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que  $\varphi$  soit un homéomorphisme de  $\Omega$  sur  $V \cap U$ ,  $a = \varphi(0)$  et que  $D_0 \varphi$  soit injective.

**Définition.** Soit  $V \subset \mathbb{R}^n$ . On dit que  $V$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  si c'est une sous-variété de chacune de ses points.

### 1.1.2 Variétés différentielles

Soit  $M$  un ensemble arbitraire. Une carte locale sur  $M$  est un couple  $(U, \varphi)$  où  $U$  est un sous ensemble de  $M$  et  $\varphi$  est une bijection de  $U$  dans un ouvert  $\varphi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  deux cartes locales de  $M$ , l'application :

$\psi \circ \varphi^{-1} :$

$$\varphi(U \cap V) \longrightarrow (U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$$

est dite changement de cartes locales.

Un  $C^k$ -atlas sur  $M$  est une famille de cartes locales  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  vérifiant les conditions suivantes :

1.

$$\cup_{i \in I} U_i = M.$$

2. Pour tout  $i, j \in I$ ,  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et le changement de cartes locales  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$  est de classe  $C^k$ .

Une variété différentielle de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ) est un ensemble  $M$  muni d'un atlas de classe  $C^k$ . Les parties  $U$  de  $M$  qui vérifient :

$$\forall i, j \in I, \varphi_i(U \cap U_j) \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n$$

forment les ouverts de la topologie de  $M$ , qui possède les mêmes propriétés topologiques locales de  $\mathbb{R}^n$  (localement compacte, localement connexe...). On suppose de plus que la topologie de la variété est séparée et possède une base dénombrable d'ouverts.

Dans toute la suite, on ne considère que les variétés lisses, i.e. de classe  $C^\infty$ .

### 1.1.3 Variétés à bord

Une variété à bord est un espace topologique dont les points admettent au moins un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  (point intérieur) ou bien un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ , ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  dont la  $n$ -ième coordonnée est positive (point bordant). L'ensemble des points n'admettant que ce dernier type de voisinage constitue le bord de la variété.

On montre que le bord (s'il existe) d'une variété de dimension  $n$  est une variété de dimension  $n-1$ , sans bord !

**Définition.** On note  $H^n$  le demi-espace  $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$ .

Soit  $M$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $M$  est une sous-variété à bord, si et seulement si, en chaque point  $x_0$  de  $M$  il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  et un difféomorphisme local  $\phi$  de  $\mathbb{R}^n$  envoyant  $x_0$  sur  $0$  tel que l'on ait soit

$$\phi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap \phi(U) \tag{1.1}$$

ou

$$\phi(U \cap M) = (H^p \times \{0\}) \cap \phi(U) \tag{1.2}$$

L'entier  $p$  est appelé dimension de  $M$  en  $x_0$ . On appelle bord de  $M$  et on note  $\partial M$  l'ensemble des points  $x_0$  correspondant au cas (2).

**Remarque.** Les cas (1) et (2) ne peuvent se présenter simultanément pour un même point  $x_0$ , car il n'existe pas de difféomorphisme local préservant l'origine et envoyant  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}^n$  : en effet, l'image d'un ouvert contenant  $0$  par un difféomorphisme est encore un ouvert contenant  $0$ , mais  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$  ne contient pas de tel ouvert.

**Proposition:** Toute variété à bord admet un champ de vecteur normal extérieur le long de son bord.

### 1.1.4 Espace tangent et application tangente

Pour définir un espace tangent en un point  $x$  à une variété différentielle  $M$ , en utilisant les courbes passant par  $x$ . Nous désignerons par  $C_x$  l'ensemble des courbes lisses  $c : I \rightarrow M$  définies sur un intervalle ouvert  $I$  contenant 0 et telles que  $c(0) = x$ .

**Définition.** Deux courbes  $c_1 : I_1 \rightarrow M$  et  $c_2 : I_2 \rightarrow M$  de  $C_x$  sont tangentes en  $x$  si s'il existe une carte  $(U, \varphi)$ , telle que  $x \in U$  et

$$(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0).$$

Cette condition ne dépend pas du choix de la carte, puisque, si  $(V, \psi)$  est une carte de  $x$  le théorème des fonctions composées donne, pour tout  $c \in C_x$

$$(\psi \circ c)'(0) = D_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ c)'(0).$$

L'ensemble des vecteurs tangents en  $x$  est noté  $T_x M$ .

Une autre définition équivalente de l'espace tangent en un point  $x \in M$  est donnée par l'ensemble des dérivations :  $T_x M = \langle \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n} \rangle$ , où, pour toute fonction de classe  $C^\infty$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , et toute carte  $(U, \varphi)$  en  $x$

$$\partial_{x_i} f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)).$$

À noter que pour cette définition, il est important que la variété soit de classe  $C^\infty$ .

**Théorème 2.** Soit  $M$  une sous-variété de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^n$ . L'espace tangent à  $M$  en  $x$  est un espace vectoriel de dimension  $d$ . De plus

1. Si localement  $M = f(U)$  (image d'une immersion  $f$ ), alors  $T_{f(x)}M = \text{Im}(D_x f)$ .
2. Si localement  $M = f^{-1}(y_0)$  (fibre d'une submersion  $f$ ), alors  $T_x M = \ker(D_x f)$ .
3. Si localement  $M \subset E \times F$  est le graphe d'une application  $f$ , alors  $T_{(x, f(x))}M$  est le graphe de l'application linéaire  $D_x f$ .

En effet, si  $\phi : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme qui redresse  $M$  sur  $\mathbb{R}^n$  au voisinage de  $x$ , alors  $T_x M = (D_x \phi)^{-1}(\mathbb{R}^d)$ .

### 1.1.5 Application tangente

**Définition.** Soit une sous-variété  $V \in \mathbb{R}^n$ , une application  $C^1$   $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On appelle application tangente de  $f$  à  $V$  en  $a \in V$  la restriction  $D_a f$  à  $T_a V$ , on la note

$$\begin{aligned} T_a f : T_a V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto D_a f(v) \end{aligned}$$

**Définition.** (*Submersion, immersion*) Soient  $f : V \rightarrow W$  où  $V$  et  $W$  sont des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^d$ ,  $a \in V$ . On dit que  $f$  est une immersion (respectivement submersion) en  $a$  si  $T_a f$  est injective (respectivement surjective).

On dit que  $f$  est une immersion (respectivement submersion) si c'est une immersion (respectivement submersion) en tout point de  $V$ .

**Définition.** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse.

- Un point  $x \in M$  est dit **point critique** de  $f$  si :  $\text{rang} D_x f < \dim N$ .
- Un point  $x \in M$  qui n'est pas critique est un **point régulier**. On dit aussi, dans ce cas, que  $f$  est une submersion en  $x$ .

L'image par  $f$  de tout les points critiques est l'ensemble des valeurs critiques :

$$C = \{y \in N, \exists x \in M, \text{ point singulier}, y = f(x)\}.$$

Le complémentaire dans  $N$  de l'ensemble des valeurs critiques est appelé ensemble de valeurs régulières et noté  $R = N \setminus C$ .

L'ensemble des point critiques peut être très grand (par exemple, si  $m < n$  ou si  $f$  est l'application constante). Par contre, l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle ; c'est l'objet du Théorème de Sard. Avant d'énoncer ce Théorème fondamentale de topologie, examinons quelques exemples.

**Exemple.** 1. Soit  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ . Ici  $D_t f = (-\sin t, \cos t)$  donc le rang de  $f$  est partout égal à 1. Donc  $C = f(\mathbb{R}) = S^1$  et  $R = \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ .

2. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (xy + 1, x^2 + y)$$

On a  $D_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$  et  $\det D_{(x,y)} f = y - 2x^2$ . Donc le rang de  $f$  est égal à 1 sur la parabole  $\{y = 2x^2\}$  et est égal à 2 partout ailleurs. Donc l'ensemble des valeurs critiques est la courbe  $C = \{(2x^3 + 1, 3x^2), x \in \mathbb{R}\}$ .

3. Pour une application constante  $f : M \rightarrow N$  (avec  $\dim N > 0$ ), l'ensemble des points singuliers est tout  $M$ . Dans ce cas  $C = f(M) = \{pt\}$  et  $R = N - \{pt\}$ .

**Théorème 3** (Sard). Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles (avec ou sans bord) et  $f : M \rightarrow N$  une application lisse. Alors l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  est de mesure nulle.

*Proof.* Voir [4] page 139. □

**Théorème 4** (Plongement de Whitney). Toute variété  $X$  de dimension  $n$  peut être plongée dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

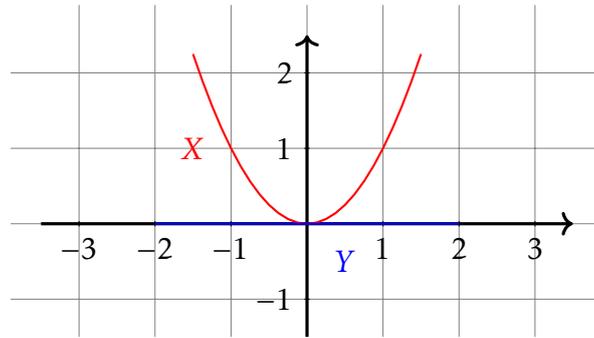
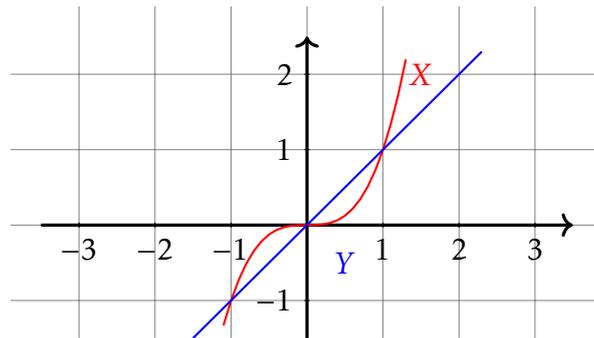
*Proof.* Voir [4], page 134. □

**Théorème 5** (Approximation de Whitney). Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles et  $f : M \rightarrow N$  une application continue. Alors  $f$  est homotope à une application lisse  $F : M \rightarrow N$ .

*Proof.* Voir [4], page 141. □

**Théorème 6.** Deux applications lisses  $C^0$ -homotopes sont  $C^\infty$ -homotopes.

*Proof.* Voir [4], page 142. □

Figure 1.1: L'intersection du parabole et l'axe des abscisses dans  $\mathbb{R}^2$ Figure 1.2: L'intersection des courbes X et Y dans  $\mathbb{R}^2$ 

## 1.2 Transversalité

En algèbre linéaire et en géométrie différentielle, la propriété de transversalité est un qualificatif pour l'intersection de sous-espaces ou de sous-variétés.

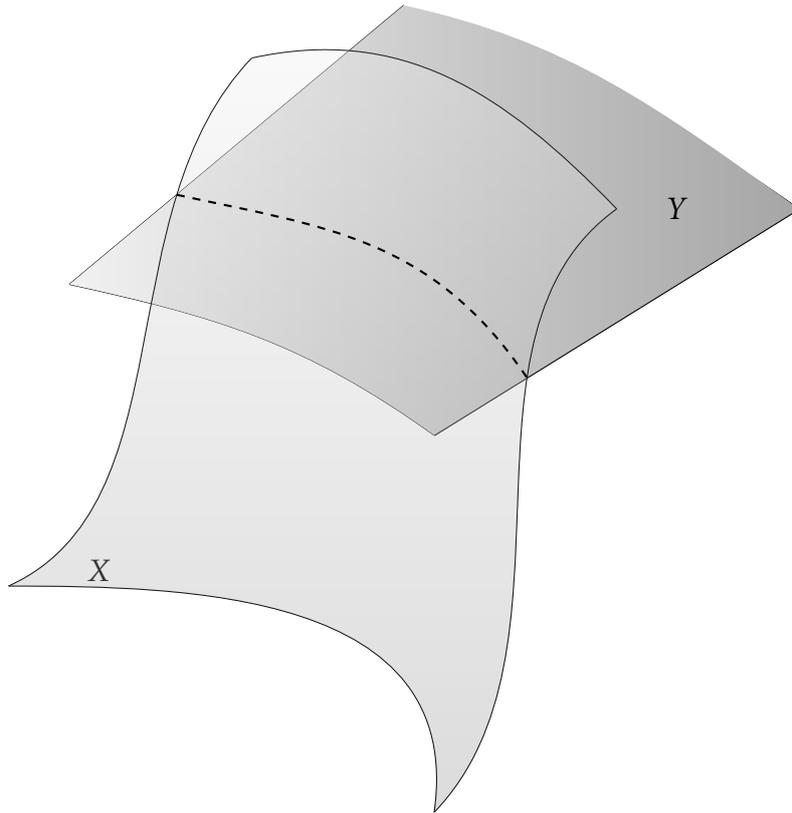
Deux sous-espaces vectoriels  $F$ ,  $G$  d'un espace vectoriel  $E$  sont dits *transverses* et on écrit  $F \pitchfork G$  quand  $F + G = E$  ou, de manière équivalente :

$$\text{codim}(F \cap G) = \text{codim}(F) + \text{codim}(G).$$

Deux sous-variétés  $X$  et  $Y$  d'une variété différentielle  $M$  sont dites transverses lorsque, pour tout point  $x$  de  $X \cap Y$ , les espaces tangents  $T_x X$  et  $T_x Y$  sont transverses dans l'espace tangent  $T_x M$ , c'est-à-dire si  $T_x M = T_x X + T_x Y$ .

### Exemples.

1. Dans le plan, la parabole  $X = \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$  et l'axe des abscisses  $Y = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$  ne sont pas transverses (car tangents en  $(0, 0)$ ).
2. Dans le plan, les deux courbes  $X = \{(x, x^3), x \in \mathbb{R}\}$  et  $Y = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$  sont transverses (en les trois points d'intersection, les droites tangentes sont complémentaires). Les mêmes courbes plongées dans l'espace,  $\{0\} \times X$  et  $\{0\} \times Y$ , ne sont pas transverses. Par exemples,  $T_{(0,0,0)}\{0\} \times X = \langle (0, 1, 0) \rangle$  et  $T_{(0,0,0)}\{0\} \times Y = \langle (0, 1, 1) \rangle$  n'engendrent pas l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

Figure 1.3: Deux surfaces transverses dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Remarques.** 1. La transversalité est fortement liée à la dimension de l'espace ambiant : deux droites non tangentes sont transverses dans le plan, mais elles ne le sont pas dans l'espace.

2. Deux sous-variétés disjointes sont transverses.

Un premier résultat concernant l'intersection de sous-variétés transverses est donné par la proposition suivante :

**Proposition 1.** Une intersection non vide  $X \cap Y$  de deux sous-variétés transverses, d'une variété différentielle  $M$ , est une sous-variété de dimension :

$$\dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y - \dim M. \quad (1.3)$$

et, pour tout  $x \in X \cap Y$

$$T_x(X \cap Y) = T_x X \cap T_x Y \quad (1.4)$$

### 1.2.1 Application transverse à une sous-variété

L'ensemble des solutions d'une équation  $f(x) = y$  forme une variété différentielle si  $y$  est une valeur régulière de  $f : X \rightarrow Y$ . Si  $Z$  est maintenant, au lieu d'un point, une sous-variété de  $Y$ , quelle condition assure que  $f^{-1}(Z)$  est une sous-variété ? Cette question va nous amener à définir la notion de transversalité comme une extension toute naturelle de celle de régularité.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés différentielles et  $Z$  une sous-variété de  $Y$ . On dit que la fonction  $f : X \rightarrow Y$  est transverse à  $Z$  et on écrit  $f \pitchfork Z$  si, pour tout  $x \in f^{-1}(Z)$

$$\text{Im}D_x f + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}Y.$$

En d'autres termes,  $f$  est transverse à  $Z$  si, pour tout  $x \in f^{-1}(Z)$ ,  $\text{Im}D_x f$  et  $T_{f(x)}Z$  sont transverses (en tant que sous-espaces vectoriels de  $T_{f(x)}Y$ ).

**Remarque.**

1. Les deux notions de transversalité ci-dessus sont équivalentes :  
Si  $X$  et  $Y$  sont deux sous-variétés de  $M$  et  $i$  est l'injection de  $X$  dans  $M$  alors

$$X \pitchfork Y \iff i \pitchfork Y.$$

Réciproquement, si  $f : X \rightarrow Y$  et  $Z$  est une sous-variété de  $Y$  alors

$$f \pitchfork Z \iff \Gamma_f \pitchfork (X \times Z),$$

où  $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\}$  est le graphe de  $f$ .

2. Si  $f : X \rightarrow Y$  est une submersion alors  $f$  est transverse à toute sous variété de  $Y$ .

L'image réciproque d'une sous-variété par une application qui lui est transverse est une sous-variété.

**Proposition 2.** Si  $f \pitchfork Z$  et si  $f^{-1}(Z)$  n'est pas vide alors :

1.  $f^{-1}(Z)$  est une sous-variété qui a la même codimension que  $Z$  :

$$\text{codim}f^{-1}(Z) = \text{codim}Z.$$

2. L'espace tangent de  $f^{-1}(Z)$  est l'image réciproque par la différentielle de  $f$  de l'espace tangent à  $Z$  :

$$\forall x \in f^{-1}(Z), \quad T_x(f^{-1}(Z)) = (D_x f)^{-1}(T_{f(x)}Z).$$

*Proof.*

1. Montrons que tout point de  $f^{-1}(Z)$  admet un voisinage (dans  $f^{-1}(Z)$ ) qui est la fibre d'une submersion. Pour  $x \in f^{-1}(Z)$ , il existe un voisinage  $U$  de  $y = f(x)$  dans  $Y$  et une submersion  $\varphi : U \cap Z \rightarrow \mathbb{R}^d$  (avec  $d = \text{codim}Z$ ) telle que  $U \cap Z = \varphi^{-1}(0)$ . Vérifions que si  $V = f^{-1}(U)$ , alors  $V \cap f^{-1}(Z) = (\varphi \circ f)^{-1}(0)$  et que  $\varphi \circ f$  est une submersion. Comme  $T_y Z = \ker D_y \varphi$  et comme  $f \pitchfork Z$  alors

$$\text{Im}D_x(\varphi \circ f) = D_y \varphi(\text{Im}D_x f) = D_y \varphi(\text{Im}D_x f + \ker D_y \varphi) = D_y \varphi(T_y Y) = \mathbb{R}^d.$$

et  $\text{codim}f^{-1}(Z) = \dim X - \dim \ker D_x(\varphi \circ f) = \text{rang}D_x(\varphi \circ f) = d = \text{codim}Z$ .

2. On a

$$\begin{aligned} T_x(f^{-1}(Z)) &= \ker D_x(\varphi \circ f) = \ker(D_y \varphi \circ D_x f) = (D_y \varphi \circ D_x f)^{-1}(0) \\ &= (D_x f)^{-1}((D_y \varphi)^{-1}(0)) = (D_x f)^{-1}(\ker D_y \varphi) = (D_x f)^{-1}(T_y Z). \end{aligned}$$

□

On retrouve aussi le résultat concernant l'intersection de deux sous-variétés transverses.

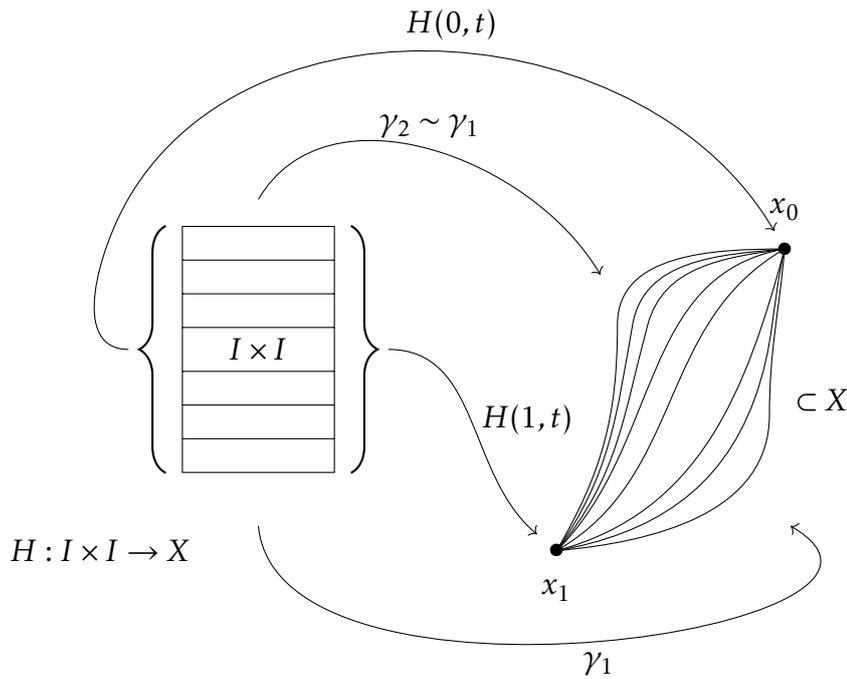


Figure 1.4: Deux courbes homotopes dans un espace  $X$ .

### 1.2.2 Stabilité et Généricité

La première propriété fondamentale de la transversalité est la *stabilité* : une *petite perturbation* d'une application transverse à une sous-variété est encore transverse à la sous-variété. Nous allons donner la formulation précise de cette propriété intuitive. Pour cela, nous allons commencer par quelques définitions.

**Définition** (Homotopie). Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques et soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux applications continues.

On dit que  $f$  est homotope à  $g$  et on note  $f \sim g$ , s'il existe une application continue (dite homotopie)

$$\begin{aligned}
 H : X \times [0, 1] &\rightarrow Y \\
 (x, t) &\mapsto H(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

telle que  $H(x, 0) = f(x)$  et  $H(x, 1) = g(x)$ .

**Remarques.** 1. L'homotopie est une relation d'équivalence.

2. Si  $X$  et  $Y$  sont des variétés différentielles et si  $f$  et  $g$  sont lisses et homotopes, alors elles sont  $C^\infty$ -homotopes.

**Définition** (Type d'homotopie). On dit que deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  ont le même type d'homotopie s'il existe deux applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que :

$$f \circ g \sim \text{Id}_Y \quad \text{et} \quad g \circ f \sim \text{Id}_X.$$

**Rétraction par déformation.** Un exemple important et intuitive d'homotopie entre deux espaces est la rétraction par déformation. Soient  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $X$ . Une rétraction de  $X$  sur  $A$  est une application continue  $r : X \rightarrow A$  telle que  $r(x) = x$  pour  $x \in A$ . L'application  $r : X \rightarrow A$  est appelée une *rétraction par déformation* si de plus  $i \circ r : X \rightarrow X$ , où  $i : A \rightarrow X$  est l'injection canonique, est homotope à  $\text{Id}_X$ . On dit que  $A$  est un rétracte par déformation de  $X$  s'il existe une rétraction par déformation  $X \rightarrow A$ .

**Exemples.** 1. Deux espaces homéomorphes sont homotopes.

2. Un cercle est un rétracte par déformation d'un cylindre.

3. Si  $Y$  est contractile (homotope à un point), alors toutes applications continues  $f, g : X \rightarrow Y$  sont homotopes.

4. Un espace est dit simplement connexe s'il est connexe par arcs et si tout lacet (courbe fermée) est homotope à un point. Tout espace contractile est simplement connexe ; la réciproque est fautive : les sphères  $S^n$  ( $n \geq 2$ ) sont simplement connexes mais non contractiles.

5. Le plan privé de l'origine n'est pas simplement connexe ; une courbe qui entoure l'origine n'est pas homotope à un point. L'anneau  $\{z \in \mathbb{C}, 0 < r < |z| < R\}$  et le tore  $T^2 = S^1 \times S^1$  ne sont pas simplement connexes.

6.  $\mathbb{R}^n - \{pt\}$  est homotope à la sphère  $S^{n-1}$  (la sphère est un rétracte par déformation de  $(\mathbb{R}^n)^*$  par  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ ).

7. Par les projections stéréographiques  $S^n - \{pt\} \sim \mathbb{R}^n$  et

$$(S^n - \{N\}) \cap (S^n - \{S\}) \sim (\mathbb{R}^n)^* \sim S^{n-1}.$$

**Définition** (Stabilité locale). Une propriété  $(\mathcal{P})$  d'une classe d'applications  $f : X \rightarrow Y$  est dite localement stable si tout point  $x \in X$  possède un voisinage  $U$  telles que si  $f|_U : U \rightarrow Y$  possède la propriété  $(\mathcal{P})$  et si  $H : U \times [0, 1] \rightarrow Y$  est une homotopie avec  $H(\cdot, 0) = f$  alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $f_t = H(\cdot, t) : U \rightarrow Y$  possède la propriété  $(\mathcal{P})$  pour tout  $t > \varepsilon$ . On dit que la propriété est globalement stable si les conditions ci-dessus sont vérifiées avec  $U = X$ .

Nous pouvons maintenant énoncer le Théorème de stabilité de la transversalité.

**Théorème 7.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés différentielles. Les classes des applications lisses  $f : X \rightarrow Y$  suivantes sont localement stables :

1. immersions,
2. submersions,
3. plongements,
4. applications transverses à une sous-variété donnée  $Z$  de  $Y$ .

Si  $X$  est compacte la stabilité est globale.

*Proof.* Seul le cas de transversalité nous intéresse (pour une preuve complète, voir [3], page 49). Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse et transverse à  $Z$ , avec  $\text{codim}Z = d$ . Soit  $x_0 \in f^{-1}(Z)$  et soit  $V$  un voisinage de  $y_0 = f(x_0)$  telle que  $V \cap Z = \varphi^{-1}(0)$  où  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une submersion sur  $V \cap Z$ .  $W = f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x_0$ ,  $W \cap f^{-1}(Z) = (\varphi \circ f)^{-1}(0)$  et  $\varphi \circ f : W \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une submersion sur  $W \cap f^{-1}(Z)$  (car  $f \pitchfork Z$ ).

Pour tout  $x \in W \cap f^{-1}(Z)$ , la matrice de  $D_x(\varphi \circ f)$  possède un mineur  $M_d(x, \varphi \circ f)$  d'ordre  $d \times d$  de déterminant non nul. L'application  $(x, t) \mapsto \det M_d(x, \varphi \circ f_t)$  est continue (comme composée d'applications continues) et ne s'annule pas en  $(x_0, 0)$ . Il existe donc un ouvert  $U \subset W$  et un  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $(x, t) \in U \times [0, \varepsilon[$ ,  $\det M_d(x, \varphi \circ f_t) \neq 0$ . Mais  $D_x(\varphi \circ f_t)$  surjective sur  $U \times [0, \varepsilon[$  signifie que  $f_t \pitchfork Z$ . Si  $X$  est compacte elle peut être recouverte par un nombre fini de  $U_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Il suffit de prendre  $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq k} \varepsilon_i$  pour avoir la stabilité globale.  $\square$

**Exemple.** Soit  $f_t(x) = (x, x^2 + 2t - 1)$  et soit l'axe des abscisses  $d = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ . Pour tout  $0 \leq t < \frac{1}{2}$ ,  $f_t \pitchfork d$ . En effet,  $f_t^{-1}(d) = \{(\pm\sqrt{1-2t}, 0)\}$  et  $\text{Im} D_{(\pm\sqrt{1-2t}, 0)} f_t$  est engendrée par le vecteur  $(1, \pm\sqrt{1-2t})$ . D'autre part,  $f_{\frac{1}{2}} \not\pitchfork d$  (donc ici  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ).

**Théorème 8.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés différentielles,  $Z$  une sous-variété de  $Y$  et  $f : X \rightarrow Y$  une fonction de classe  $C^\infty$ . Alors il existe une fonction  $g \in C^\infty(X, Y)$ , qui est à la fois, homotope à  $f$  et transverse à  $Z$ .

**Généricité.** La deuxième propriété fondamentale de la transversalité est connue sous le nom de généralité (ou la propriété d'être en position générale). Nous allons voir que, grâce au Théorème de Sard, la propriété d'être transverse est générique dans le sens que, si  $f$  n'est pas transverse à  $Z$  on peut la rendre transverse moyennant une petite perturbation. En particulier,  $f$  sera toujours homotope à une application transverse à  $Z$ .

Commençons par un exemple. Soit  $F : X \times S \rightarrow Y$  lisse et  $F_s : X \rightarrow Y$  telle que  $F_s(x) = F(x, s)$ . Si  $F \pitchfork Z$ , est-ce que  $F_s \pitchfork Z$  pour tout  $s \in S$  ? La réponse est négative :

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((x, y), s) \mapsto (x, y, s)$$

$F$  est une submersion et donc transverse à toute sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . En particulier,  $F \pitchfork S^2$ .  $F_s$  envoie le plan  $\mathbb{R}^2$  sur le plan horizontal  $\{z = s\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Pour  $s = -1, 1$ ,  $F_s$  n'est pas transverse à  $S^2$  (les deux plans  $\{z = \pm 1\}$  sont tangents à  $S^2$ ). Remarquons tout de suite que pour tout  $s$  différent de  $-1$  et  $1$ ,  $F_s \pitchfork S^2$  (i.e. la transversalité pour presque tout  $s$ ).

**Théorème 9** (Théorème de Transversalité). Soit  $F : X \times S \rightarrow Y$  une application lisse entre des variétés différentielles telles que seule  $X$  ait un bord (éventuellement vide !). Soit  $Z$  une sous-variété sans bord de  $Y$ . Si  $F$  et  $\partial F = F|_{\partial X \times S}$  sont transverses à  $Z$ , alors pour presque tout  $s \in S$  les applications  $F_s$  et  $\partial F_s$  sont transverses à  $Z$ .

*Proof.* L'image réciproque  $W = F^{-1}(Z)$  est une sous-variété de  $X \times S$  de bord  $\partial W = W \cap (\partial X \times S)$ . Soit  $\pi : W \rightarrow S$  la restriction à  $W$  de la projection  $X \times S \rightarrow S$ . Nous allons montrer que si  $s \in S$  est une valeur régulière de  $\pi$  alors  $F_s \pitchfork Z$  et de même, si

$s \in S$  est valeur régulière de  $\partial\pi$  alors  $\partial F_s \pitchfork Z$ . Le théorème suit alors immédiatement du Théorème de Sard, car presque tout  $s \in S$  est valeur régulière à la fois de  $\pi$  et de  $\partial\pi$ .

On a  $s$  valeur régulière de  $\pi$  si, pour tout  $(x, s) \in W$  :

$$\forall e \in T_s S, \exists (v, e) \in T_{(x,s)} W = (D_{(x,s)} F)^{-1}(T_z Z),$$

pour  $z = F_s(x)$ . Ceci se traduit par,  $\forall (u, e) \in T_{(x,s)} X \times S = T_x X \times T_s S, \exists v \in T_x X$  tels que  $D_{(x,s)} F(u, e) - D_{(x,s)} F(u - v, 0) \in T_z Z$ , ou encore

$$D_{(x,s)} F(u, e) - D_x F_s(u - v) \in T_z Z,$$

$$\left( \text{car } D_{(x,s)} F(a, 0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(\gamma(t), s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F_s(\gamma(t)) = D_x F_s(a) \right).$$

On peut dire que tout vecteur de l'image de  $D_{(x,s)} F$  est un vecteur de l'image de  $D_x f_s$  à un vecteur de  $T_z Z$  près ou encore

$$\text{Im} D_{(x,s)} F + T_z Z = \text{Im} D_x F_s + T_z Z.$$

D'où, sous la condition  $s$  valeur régulière de  $\pi$  :

$$F \pitchfork Z \implies F_s \pitchfork Z.$$

De même,  $\partial F \pitchfork Z \implies \partial F_s \pitchfork Z$ . □

**Théorème 10** ( $\varepsilon$ -Voisinage). *Soit  $Y$  une variété compacte sans bord de  $\mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon > 0$ , soit l'ensemble  $Y^\varepsilon = \{\omega \in \mathbb{R}^n, \exists y \in Y, |\omega - y| < \varepsilon\}$*

*Si  $\varepsilon$  est assez petit, pour tout point  $\omega \in Y^\varepsilon$  il existe un unique point dans  $Y$  qui est le plus proche noté  $\pi(\omega)$ . Alors  $\pi : Y^\varepsilon \rightarrow Y$  est une submersion.*

*Lorsque  $Y$  n'est pas compacte, la même conclusion est vraie en autorisant une épaisseur  $\varepsilon$  variable dans la définition de  $Y^\varepsilon$ .*

*Proof.* Pour une démonstration de ce théorème, voir [3], page 71. □

**Corollaire 1.1.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application différentielle avec  $Y$  sans bord, alors il existe une boule ouverte  $S$  d'un espace  $\mathbb{R}^m$  et une application différentiable  $F : X \times S \rightarrow Y$  telle que  $F(x, 0) = f(x)$  et pour tout  $x$  fixé l'application  $s \mapsto F(x, s)$  est une submersion de  $S$  dans  $Y$ . En particulier  $F$  et  $\partial F$  sont des submersions.*

*Proof.* Soit  $S$  la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^n$  dans lequel est réalisé  $Y$ , posons

$$F(x, s) = \pi(f(x) + \varepsilon(f(x))s)$$

Où  $\varepsilon$  est la fonction lisse «épaisseur» du voisinage  $Y^\varepsilon$ . Puisque  $\pi : Y^\varepsilon \rightarrow Y$  est l'identité en restriction de  $Y$ , on a  $F(x, 0) = f(x)$ . À  $x$  fixé, l'application  $s \mapsto f(x) + \varepsilon(f(x))s$  est une submersion. Donc  $s \mapsto F(x, s)$  est une submersion comme composée de deux submersions. Il est alors évident que  $F$  et  $\partial F$  sont des submersions. □

Le caractère générique de la transversalité est formulé dans le

**Théorème 11** (homotopie à une application transverse). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse. Soit  $Z$  une sous variété de  $Y$  (toutes les deux sans bord), alors il existe  $g : X \rightarrow Y$  lisse, homotope à  $f$  telle que  $g$  et  $\partial g$  soient transverse à  $Z$ .*

*Proof.* Le théorème de transversalité s'applique à l'application  $F$  du corollaire et donne  $f_s \pitchfork Z$  et  $\partial f \pitchfork Z$  pour presque tout  $s \in S$ . Mais chaque  $f_s$  est homotope à  $f$  par l'homotopie  $(x, t) \in X \times I \mapsto F(x, ts)$ .  $\square$

Nous aurons besoin de la version plus forte suivante (que nous admettrons) du théorème d'homotopie à une application transverse. On dira que  $f : X \rightarrow Y$  est transverse à  $Z$  sur un sous ensemble  $C$  de  $X$  si la condition de la transversalité

$$\text{Im}(T_x f) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y$$

est satisfaite en tout point  $x \in C \cap f^{-1}(Z)$ .

**Théorème 12** (de Prolongement). *Soit  $Y$  une variété sans bord et  $Z$  une sous variété fermée sans bord de  $Y$ . Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse et  $C$  un fermé de  $X$ . Si  $f$  et  $\partial f$  sont transverses à  $Z$  sur  $C$  et  $C \cap \partial X$  respectivement alors il existe une application lisse  $g : X \rightarrow Y$  homotope à  $f$  telle que  $g$  et  $\partial g$  soient transverses à  $Z$  et que sur un voisinage de  $C$  on ait  $f = g$ .*

Puisque  $\partial X$  est fermé dans  $X$  on a le

**Corollaire 1.2.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  est telle que  $\partial f : \partial X \rightarrow Y$  soit transverse à  $Z$ , alors il existe  $g : X \rightarrow Y$  homotope à  $f$  telle que  $g$  soit transverse à  $Z$ .*

La conséquence la plus utile de ce corollaire est que si  $h : \partial X \rightarrow Y$  est transverse à  $Z$  et peut se prolonger en une application lisse définie sur tout  $X$ , alors  $h$  peut se prolonger en une application lisse définie sur tout  $X$  et transverse à  $Z$ .

### 1.3 Intersection modulo 2

Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-variétés d'une variété différentielle compacte  $M$ , avec  $\dim X + \dim Y = \dim M$ . Comme la sous-variété  $X \cap Y$  est discrète (car de dimension 0) et compacte (car fermée dans le compact  $M$ ) alors elle finie :  $X \cap Y = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ . On notera le nombre d'éléments de  $X \cap Y$  par  $\#(X \cap Y)$ .

De même, si  $f : X \rightarrow Y$  est une application lisse, avec  $X$  compacte telles que  $f \pitchfork Z$ , où  $Z$  est une sous variété fermée de  $Y$  de dimension :  $\dim Z = \dim X - \dim Y$ . Dans ce cas  $f^{-1}(Z)$  est fini de nombre d'éléments  $\#f^{-1}(Z)$ .

On peut se demander si ce nombre est invariant par homotopie. La réponse est négative comme on peut le vérifier facilement sur l'exemple suivant : Soient les deux applications

$$f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto (x, x^2) \qquad x \mapsto (x, x^3)$$

on trouve que leurs homotopie  $H(x, t) = (x, (1-t)x^2 + tx^3)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , donc  $f \sim g$ . Mais  $\#(\Gamma_f, \Delta) \neq \#(\Gamma_g, \Delta)$ .

Par contre, si on s'intéresse plutôt au nombre d'intersections modulo 2, là nous allons voir que ce nombre est invariant par homotopie (moyennant l'hypothèse que

$X$  est sans bord).

Commençons par la notation suivante :  $I_2(f, Z) := \#f^{-1}(Z)[2]$ .

Dans tout ce qui suit, nous considérons les application lisses  $f : X \rightarrow Y$  telles que :  $X$  est compacte et sans bord (variété dite *fermée*),  $Z$  sous-variété fermée de  $Y$  avec  $\dim Z = \dim Y - \dim X$ .

**Théorème 13.** *Si  $f, g : X \rightarrow Y$  sont homotopes et transverses à  $Z$ , alors*

$$I_2(f, Z) = I_2(g, Z).$$

*Proof.* Soit  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tel que  $H(x, 0) = f(x)$  et  $H(x, 1) = g(x)$  on peut supposer que  $H \pitchfork Z$  et  $\partial H \pitchfork Z$  grâce à le théorème de transversalité (9) page 16 alors on a  $\partial H : X \times \{0\} \cup \{1\} \rightarrow Y$  tel que  $\partial H(x, 0) = f(x)$  sur  $X \times \{0\}$  et  $\partial H(x, 1) = g(x)$  sur  $X \times \{1\}$ , Par le théorème de l'image réciproque,  $H^{-1}(Z)$  est une sous variété à bord de dimension 1, dont le bord est :

$$\begin{aligned} \partial H^{-1}(Z) &= H^{-1}(Z) \cap (X \times \{0\} \cup X \times \{1\}) \\ &= (H^{-1}(Z) \cap X \times \{0\}) \cup (H^{-1}(Z) \cap X \times \{1\}) \\ &= f^{-1}(Z) \times \{0\} \cup g^{-1}(Z) \times \{1\} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \#(\partial H^{-1}(Z)) = \#f^{-1}(Z) + \#g^{-1}(Z)$$

Comme  $\partial H^{-1}(Z)$  est une sous variété à bord compacte de dimension 1, alors elle est formée par l'union fini des cercles et d'intervalles fermés bornés. Ceci assure que  $\partial H^{-1}(Z)$  a un nombre paire de points (i.e.  $\#(\partial H^{-1}(Z))[2] = 0$ ).

D'où  $\#f^{-1}(Z) = \#g^{-1}(Z)[2]$ . □

Pour conclure, nous avons utilisé le théorème de classification suivant :

**Théorème 14** (Classification des variétés à bord de dimension 1). *Toute variété différentielle connexe, de dimension 1 est difféomorphe au cercle  $S^1$  ou à un intervalle de  $\mathbb{R}$ .*

*Proof.* Voir [8], page 55. □

Notons tout de suite qu'il est important que  $X$  soit sans bord. D'abord, parce que si  $X$  est à bord,  $X \times [0, 1]$  n'est plus une variété standard (mais une variété à coins) et de plus le résultat ci-dessus n'est plus vrai ! Comme on peut le voir sur l'exemple suivant :

Soient  $X = [-2, 2]$ ,  $Y = \mathbb{R}^2$ ,  $Z = \{(x, x), x \in X\}$ ,  $f(x) = (x, x^2)$  et  $g(x) = (x, x^3)$ . On a  $f \pitchfork Z$ ,  $g \pitchfork Z$ ,  $f$  est homotope à  $g$ , mais

$$I_2(f, Z) = 0[2] \quad \text{et} \quad I_2(g, Z) = 1[2].$$

**Définition.** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  avec  $X$  compact,  $Z$  sous variété fermé de  $Y$  et  $\dim X + \dim Z = \dim Y$ . Si  $f$  n'est pas transverse à  $Z$ , alors il existe  $g$  qui est à la fois homotope à  $f$  et transverse à  $Z$ . On pose et vérifie :  $I_2(g, Z) = I_2(f, Z)$ .*

**Corollaire 1.3.** *Si  $f, g : X \rightarrow Y$  et  $f \sim g$  alors  $I_2(f, Z) = I_2(g, Z)$ .*

Pour deux sous variétés  $X, Z$  de  $Y$ , on peut définir le nombre d'intersection modulo 2 entre  $X$  et  $Z$  comme suit:  $I_2(X, Z) = I_2(i, Z)$  où  $i : X \rightarrow Y$  tel que  $i(x) = x$ .

**En particulier :**

Si  $Z = X$  alors  $\dim Y = 2 \dim X$  et  $I_2(X, X) =$  le nombre d'auto intersection modulo 2.

**Exemple.**  $X =$  Le cercle de Mobios, le nombre d'auto intersection modulo 2 est  $I_2(X, X) = 1$ .

**Définition** (Degré modulo 2). Soient  $X$  compact,  $f : X \rightarrow Y$ , et  $Z = \{y\} \subset Y$  avec  $\dim X = \dim Y$  tel que  $f^{-1}(Z)$  est fini, alors  $I_2(f, Z) = \text{deg}_2 f$

**Exemple.** •  $f : S^1 \rightarrow S^1$  tel que  $f(z) = z^2$  si on prend  $Z = \{1\}$  alors le degré de  $f$  est:  $\text{deg}_2 = 0$ .

•  $f : S^1 \rightarrow S^1$  tel que  $f(x, y) = (-y, x)$ ,  $Z = \{(x_0, y_0)\}$  et le degré est:  $\text{deg}_2 = 1$

**Théorème 15.** Si  $X = \partial W$  avec  $W$  variété compacte et si  $f : X \rightarrow Y$  s'étend à  $W$ , alors  $\text{deg}_2 f = 0$ .

### 1.4 Intersection orientée

**Définition.** Soit  $M$  une variété différentielle. On dit que  $M$  est orientable, si elle admet un atlas dont tous les changements de cartes  $\varphi \circ \psi^{-1}$  sont positivement orientés, i.e. pour tout  $x \in M$  et toutes cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  en  $x$ ,

$$\det D_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1}) > 0.$$

Une définition équivalente de l'orientabilité est l'existence d'une forme volume sur  $M$ , c'est-à-dire une forme différentielle de degré maximum qui ne s'annule jamais. Par exemple, le cercle  $S^1$ , possède la forme volume  $\mu = xdy - ydx$ .

Soient  $X, Y, Z$  trois variétés sans bord orientables, avec  $X$  compacte,  $Z \subset Y$  fermée et  $\dim X + \dim Z = \dim Y$ .

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse transverse à  $Z$ . Sous ces hypothèses,  $f^{-1}(Z)$  est finie. Si  $x \in f^{-1}(Z)$  et  $z = f(x)$ , on a

$$D_x f(T_x X) \oplus T_z Z = T_z Y,$$

et  $D_x f$  est un isomorphisme sur son image, donc l'orientation de  $X$  donne une orientation de son image  $D_x f(T_x X)$ . Si la somme directe ci-dessus redonne l'orientation de  $Y$ , on pose  $I_x(f, Z) = 1$ , sinon on pose  $I_x(f, Z) = -1$ . On définit

$$I(f, Z) = \sum_{x \in f^{-1}(Z)} I_x(f, Z)$$

**Proposition 3.** Si  $X$  est le bord d'une variété compacte  $W$  et si  $f : X \rightarrow Y$  transverse à  $Z$  s'étend à  $W$  alors  $I(f, Z) = 0$ .

*Proof.* D'après le théorème de prolongement, il existe une application  $F : W \rightarrow Y$  avec  $f \pitchfork Z$  et  $f = \partial F \pitchfork Z$ . Mais  $F^{-1}(Z)$  est une variété compacte de dimension 1, donc la somme des orientations de  $\partial F^{-1}(Z) = f^{-1}(Z)$  est nulle. □

**Proposition 4.** *Deux applications  $f_1$  et  $f_2$  toutes deux transverse à  $Z$  et homotopes ont le même nombre d'intersection avec  $Z$ .*

*Proof.* Soit  $F : I \times X \rightarrow Y$  une homotopie lisse de  $f_0$  à  $f_1$ .

Grâce au théorème de prolongement, on peut supposer que  $F \pitchfork Z$ . D'après la proposition précédent, on sait que  $I(\partial F, Z) = 0$ . Mais  $\partial(I \times X) = X_1 - X_0$  et  $\partial F = f_0$  sur  $X_0$  et  $f_1$  sur  $X_1$ . Donc on a :

$$\partial F^{-1}(Z) = f_1^{-1}(Z) - f_0^{-1}(Z)$$

d'où  $I(\partial F, Z) = I(f_0, Z) - I(f_1, Z)$ . □

On peut donc définir  $I(f, Z)$  même si  $f$  n'est pas transverse à  $Z$ . Si  $Y$  est connexe et si  $\dim X = \dim Y$  On définit le degré de  $f$  par

$$\deg(f) = I(f, \{y\}).$$

**Proposition 5.** *Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  défini par  $f(z) = z^n$ , alors  $\deg(f) = n$ .*

**Proposition 6.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application différentiable, avec  $X$  compacte et orientée et  $Y$  connexe et orientée. Si  $X = \partial W$ , avec  $W$  compacte, et si  $f$  se prolonge à  $W$ , alors  $\deg(f) = 0$ .*

**Corollaire 1.4** (Le théorème de D'Alembert). *Si  $X \subset Y$ , on définit  $I(X, Z) = I(i, Z)$  où  $i$  est l'inclusion de  $X$  dans  $Y$ .*

Il convient de prendre garde que  $I(X, Z) \neq I(Z, X)$ , par exemple si  $Y$  est un tore et si  $X$  est un cercle horizontal et  $Z$  un cercle vertical on trouve  $+1$  ou  $-1$  suivant l'ordre.

Soient  $X, Y, Z$  trois variétés orientables,  $X$  et  $Y$  étant compactes telles que  $\dim X + \dim Z = \dim Y$ . Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Z \rightarrow Y$  deux applications lisses. On dit que  $f$  et  $g$  sont transverses si :

$$D_x f(T_x(X)) + D_z g(T_z(Z)) = T_y(Y). \tag{1.6}$$

Pour tous  $x, y, z$  tels que  $f(x) = y = g(z)$ . La condition sur les dimensions implique que  $D_x f$  et  $D_z g$  sont injectives, on pose  $I_{(x,z)}(f, g) = 1$  si 1.4 redonne l'orientation de  $Y$ , sinon on pose  $I_{(x,z)}(f, g) = -1$ . On définit alors

$$I(f, g) = \sum_{f(x)=g(z)} I_{(x,z)}(f, g)$$

Si  $g$  est une inclusion, on retrouve la définition précédente.

**Proposition 7.** *Les applications  $f$  et  $g$  sont transverses si et seulement si  $f \times g$  est transverse à  $\Delta$ , la diagonale de  $Y \times Y$ . On a alors*

$$I(f, g) = (-1)^{\dim Z} I(f \times g, \Delta)$$

Ce résultat est essentiellement contenu dans le lemme

**Lemme 1.1.** *Soit  $U$  et  $W$  des sous-espaces d'un espace vectoriel  $V$ . Alors*

$$U \oplus W = V \Leftrightarrow U \times W \oplus \Delta = V \times V,$$

où  $\Delta$  est la diagonale de  $V \times V$ . De plus, supposons que  $U$  et  $W$  sont orientés et  $V$  muni de l'orientation donnée par somme directe,  $\Delta$  orientée grâce à l'isomorphisme naturel  $V \rightarrow \Delta$ . On alors

$$U \times W \oplus \Delta = (-1)^{\dim W} V \times V$$

La proposition précédente permet de définir  $I(f, g)$  pour deux applications lisses quelconques (non transverses)  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Z \rightarrow Y$  (avec cependant  $\dim X + \dim Z = \dim Y$ ) par la formule :

$$I(f, g) = (-1)^{\dim Z} I(f \times g, \Delta)$$

**Proposition 8.** *Si  $f_0$  est homotope à  $f_1$  et si  $g_0$  est homotope à  $g_1$ , alors  $I(f_0, g_0) = I(f_1, g_1)$ .*

**Proposition 9.** *Si  $i : Z \rightarrow Y$  est l'inclusion, alors  $I(f, i) = I(f, Z)$ .*

**Proposition 10.** *On a  $I(f, g) = (-1)^{(\dim X)(\dim Z)} I(g, f)$ .*

**Corollaire 1.5.** *Si  $X$  et  $Z$  sont des sous variétés compactes de  $Y$ , alors*

$$I(X, Z) = (-1)^{(\dim X)(\dim Z)} I(Z, X).$$

### Cas particulier $\dim Y = 2 \dim X$

On peut définir  $I(X, X)$ . Si  $\dim X$  est impaire, on a  $I(X, X) = 0$  et donc

$$I_2(X, X) = I(X, X)[2] = 0[2].$$

On en déduit une obstruction à l'orientabilité d'une variété : Si  $Y$  contient une variété compacte orientable  $X$  de dimension moitié et  $I_2(X, X) \neq 0$  alors  $Y$  n'est pas orientable (On retrouve ici le fait que la bande de Möbius n'est pas orientable, puisque son cercle médiateur  $C$  vérifie  $I_2(C, C) = 1$ ).

#### 1.4.1 Théorème fondamentale de l'algèbre

**Théorème 16.** *Tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine.*

*Proof.* Si  $P$  est de degré  $n$ , on peut supposer, (quitte à diviser par le coefficient du plus grand degré), que  $P(z) = z^n + r(z)$  avec  $r$  polynôme de degré strictement inférieur à  $n$ .

Si on choisit  $R > 0$  suffisamment grand pour que

$$|z^n| = R^n > |r(z)| \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| = R,$$

alors

$$tP(z) + (1-t)z^n = z^n + tr(z) \neq 0 \text{ pour tout } t \in [0, 1] \text{ et } z \in S,$$

où  $S$  est le cercle  $S = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$ . L'application  $H(z, t) = \frac{tP(z) + (1-t)z^n}{|tP(z) + (1-t)z^n|}$  est une homotopie différentielle entre  $(\frac{z}{R})^n$  et  $\frac{P}{|P|}$  sur  $S$ . Ces deux fonctions doivent avoir le même degré.

Si  $P$  n'a pas de racine sur  $S$ , alors  $\frac{P}{|P|}$  s'étend à une fonction différentielle sur le disque fermé  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$ , et donc le degré de  $\frac{P}{|P|}$  est nul (par le Théorème d'extension), qui contredit que le degré de  $(\frac{z}{R})^n$  est  $n$ , on déduit que  $P$  doit admettre au moins une racine sur  $S$ .  $\square$

# Théorème du point fixe de Lefschetz



## 2.1 Cohomologie de De Rham

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ . On considère la suite des applications ci-dessous qu'on appelle le *complexe de De Rham* de  $M$

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0.$$

On note  $Z^k(M)$  le sous espace vectoriel de  $\Omega^k(M)$  constitué des  $k$ -formes différentielles  $\omega$  telles que  $d\omega = 0$ . Une telle forme est dite *fermée*. Par exemple  $\omega = ydx + xdy \in Z^1(\mathbb{R}^2)$ .

On note  $B^k(M)$  le sous espace vectoriel de  $\Omega^k(M)$  constitué des  $k$ -formes différentielles  $\omega$  de la forme  $d\alpha$  où  $\alpha \in \Omega^{k-1}$ . Une telle forme est dite *exacte* (par convention  $B^0(M) = 0$ ).

Par exemple  $\omega = dx \wedge dy = d(xdy) = d\left(-\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy\right) \in B^2(\mathbb{R}^2)$ .

Autrement dit,  $Z^k(M)$  est le noyau de  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  et  $B^k(M)$  est l'image de  $d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ .

Comme  $d \circ d = 0$ , on voit que  $B^k(M) \subset Z^k(M)$  : toute forme exacte est fermée. On peut donc considérer l'espace vectoriel quotient

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$$

qu'on appellera le  $k$ -ième *groupe de cohomologie* de  $M$ .

**Exemple.** Soit sur  $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$  la 1-forme  $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ . On a

$$d\omega = d\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \wedge dx,$$

$d\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} dy$  et  $d\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$ , de sorte que  $d\omega = 0$ . La forme  $\omega$  est donc fermée, mais nous allons voir qu'elle n'est pas exacte, ce qui montrera que  $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \neq 0$ .

**Lemme 2.1.** Soit  $M$  une variété différentielle et  $\omega$  une 1-forme différentielle sur  $M$ . Pour que  $\omega$  soit exacte, il faut que son intégrale le long de toute courbe fermée soit nulle, i.e. si  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est une courbe différentiable fermée ( $\gamma(a) = \gamma(b)$ ) alors  $\int_{\gamma} \omega = 0$ .

*Proof.* Si  $\gamma$  est exacte, i.e.  $\omega = df$  où  $f \in C^\infty(M)$ , alors

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^* df = \int_a^b d(\gamma^* f) = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$$

□

Pour l'exemple ci-dessus, si  $\gamma$  est le cercle unité ( $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ), alors

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \gamma^* \omega = \int_0^{2\pi} -\sin t d(\cos t) + \cos t d(\sin t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Nous allons voir que précisément  $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \mathbb{R}$ .

### 2.1.1 Functorialité de la cohomologie

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse. Comme l'image réciproque commute avec la différentielle extérieure :  $d \circ f^* = f^* \circ d$ , on voit que

$$f^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M) \text{ et } f^*(B^k(N)) \subset B^k(M)$$

de sorte que  $f^*$  induit, par passage au quotient, une application  $\mathbb{R}$ -linéaire notée

$$f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M).$$

Soient maintenant  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow V$  deux applications lisses. On vérifie que

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \text{ et que } \text{Id}_M^* = \text{Id}_{H^*(M)}.$$

Ces propriétés se résument en disant que le  $k$ -ième groupe de cohomologie est un *foncteur contravariant* de la catégorie des variétés différentielles dans la catégorie des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

En particulier, si  $M$  et  $N$  sont difféomorphes, les groupes de cohomologie  $H^k(N)$  et  $H^k(M)$  sont isomorphes pour tout  $k$ . nous allons voir qu'en fait il suffit de beaucoup moins d'un difféomorphisme entre  $M$  et  $N$  pour assurer l'isomorphisme entre  $H^*(N)$  et  $H^*(M)$ .

Dans toute la suite, lorsque  $H^k(N)$  et  $H^k(M)$  sont isomorphes on écrira  $H^k(N) = H^k(M)$ .

### 2.1.2 Invariance par homotopie

Soient  $f, g : M \rightarrow N$  deux applications lisses. On dit que  $f$  et  $g$  sont (différentiablement) *homotopes* s'il existe une application lisse  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  telles que

$$H(x, 0) = f(x) \text{ et } H(x, 1) = g(x).$$

**Théorème 17.** Soient  $f, g : M \rightarrow N$  deux applications homotopes, alors  $f^*$  et  $g^*$  de  $H^k(N)$  dans  $H^k(M)$  sont égales pour tout  $k \geq 0$ .

*Proof.* Soit l'intervalle  $I = [0, 1]$  et soit pour tout  $t \in I$ , l'application

$$\begin{aligned} i_t : M &\rightarrow M \times I \\ x &\mapsto (x, t). \end{aligned}$$

Comme  $f = H \circ i_0$  et  $g = H \circ i_1$  et par functorialité :  $f^* = i_0^* \circ H^*$  et  $g^* = i_1^* \circ H^*$ , il suffit de montrer le théorème pour  $i_0^*$  et  $i_1^*$ .

**Lemme 2.2.** *Pour toute variété différentielle  $M$  il existe un opérateur d'homotopie  $h : \Omega^*(M \times I) \rightarrow \Omega^{*-1}(M)$  pour lequel*

$$h(d\omega) + d(h\omega) = i_1^* \omega - i_0^* \omega \quad (2.1)$$

Une fois le lemme démontré, on constate alors que si  $\omega$  est une  $k$ -forme fermée ( $d\omega = 0$ ) les formes fermées  $i_0^* \omega$  et  $i_1^* \omega$  diffèrent de la forme exacte  $d(h\omega)$ . Elles ont donc même classe dans le groupe de cohomologie  $H^k(M)$ , ce qui montre que les deux applications en cohomologie  $i_0^*$  et  $i_1^*$  sont égales.

Soit  $S$  le champ de vecteurs sur  $M \times \mathbb{R}$  donné par  $S(x, t) = (0, \partial_t)$ . Soit  $\omega$  une  $k$ -forme différentielle sur  $M \times I$  ( $k \geq 1$ ). On définit  $h\omega \in \Omega^{k-1}(M)$  par

$$h\omega = \int_0^1 i_t^*(i_S \omega) dt$$

i.e. pour tout  $x \in M$

$$(h\omega)_x = \int_0^1 i_t^*((i_S \omega)_{(x,t)}) dt$$

où l'intégrand est considéré comme fonction de  $t$  à valeur dans  $\wedge^{k-1}(T_x^*M)$ . Dans toute carte locale, les composantes de l'intégrand sont des fonctions lisses de  $(x, t) \in U \times I$  et donc l'intégrale définit une  $(k-1)$ -forme différentielle sur  $M$ .

On peut calculer  $d(h\omega)$  en tout point de  $M$ , en dérivant sous le signe intégrale en coordonnées locales, ce qui donne :

$$d(h\omega) = \int_0^1 di_t^*(i_S \omega) dt.$$

Par la formule magique de Cartan

$$\begin{aligned} h(d\omega) + d(h\omega) &= \int_0^1 \left[ i_t^*(i_S d\omega) + di_t^*(i_S \omega) \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[ i_t^*(i_S d\omega) + i_t^*(di_S \omega) \right] dt \\ &= \int_0^1 i_t^*(\mathcal{L}_S \omega) dt. \end{aligned}$$

Comme le flot (global) de  $S$  est  $F_t(x, s) = (x, s + t)$  et comme  $i_t = F_t \circ i_0$ , alors

$$i_t^*(\mathcal{L}_S \omega) = i_0^* \circ F_t^*(\mathcal{L}_S \omega) = i_0^* \frac{d}{dt} (F_t^* \omega) = \frac{d}{dt} i_0^*(F_t^* \omega) = \frac{d}{dt} (i_t^* \omega),$$

et donc

$$h(d\omega) + d(h\omega) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (i_t^* \omega) dt = i_1^* \omega - i_0^* \omega.$$

□

**Conséquences.** Il résulte du théorème ci-dessus que deux variétés différentiablement homotopes ont même caractéristique d'Euler-Poincaré. Par le Théorème d'approximation de Whitney, toute application continue est homotope à une application lisse, on déduit alors

**Théorème 18** (Invariance par homotopie). *Si  $M$  et  $N$  sont deux variétés lisses homotopes, alors  $H^k(M) \simeq H^k(N)$ , pour tout  $k$ .*

### 2.1.3 Suite exacte de Mayer-Vietoris

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts d'une variété différentielle  $M$  tels que  $M = U \cup V$ . Alors il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Omega^*(U \cup V) \xrightarrow{r} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{d} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0,$$

où  $r : \omega \mapsto (\omega|_U, \omega|_V)$  et  $d : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha|_{U \cap V} - \beta|_{U \cap V}$ .

Seule la surjectivité de  $d$  n'est pas immédiate. Pour l'établir on considère une partition de l'unité  $\{\psi_1, \psi_2\}$  subordonnée au recouvrement ouvert  $\{U, V\}$  ( $\text{Supp}\psi_1 \subset U, \text{Supp}\psi_2 \subset V, \psi_1 + \psi_2 = 1$ ) puis il suffit de remarquer que

$$(\psi_1 \omega, -\psi_2 \omega) \in \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$$

et

$$d(\psi_1 \omega, -\psi_2 \omega) = \psi_1 \omega - (-\psi_2 \omega) = \omega.$$

La suite exacte courte de Mayer-Vietoris donne au niveau de la cohomologie, la suite exacte longue suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^{k+1}(M) & \xrightarrow{r^*} & \dots & & & \\ & \searrow & & \delta & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & \\ & & & & & & \\ \rightarrow & H^k(M) & \xrightarrow{r^*} & H^k(U) \oplus H^k(V) & \xrightarrow{d^*} & H^k(U \cap V) & \rightarrow \\ & \searrow & & \delta & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & \\ & & & & & & \\ & & & \dots & \xrightarrow{d^*} & H^{k-1}(U \cap V) & \rightarrow \end{array}$$

où  $\delta : H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(M)$  est l'opérateur dit *connectant*.

**Application.** Soit  $\Sigma_k = \{m_1, \dots, m_k\}$  un ensemble de  $k$ -points du plan  $\mathbb{R}^2$ . On peut recouvrir  $\mathbb{R}^2$  par deux ouverts  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_k$  et  $V$  la réunion de  $k$ -disques disjoints  $D_1, \dots, D_k$  centrés respectivement en  $m_1, \dots, m_k$ .

En écrivant la suite exacte de Mayer-Vietoris associée à ce recouvrement, nous obtenons :

$$H^1(U) = \mathbb{R}^k.$$

Il en résulte que si  $k \neq \ell$ , alors  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_k$  et  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_\ell$  ne sont pas homéomorphes.

### 2.1.4 Théorème de dualité de Poincaré

On dit qu'une variété différentielle  $M$  de dimension  $n$  est de *type fini* s'il existe un recouvrement (dit admissible) de  $M$  par un nombre fini d'ouverts  $U_1, \dots, U_p$  avec la propriété que toutes les intersections non vides de la forme  $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_\ell}$  est contractile (homotope à un point). Le cardinal minimal d'un recouvrement ouvert admissible s'appelle le *type minimal* de  $M$ .

À partir de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, on peut montrer qu'une variété de type fini a tout ses groupes de cohomologie de dimension finie.

**Exemple.** 1. *Toute variété compacte est de type fini. La preuve est extrêmement technique : On construit un recouvrement admissible à l'aide d'une métrique riemannienne et de voisinages géodésiquement convexes. (Voir [4]).*

2.  $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  n'est pas de type fini (son  $H^0$  n'est pas de dimension finie, puisque  $M$  possède une infinité dénombrable de composantes connexes).

**Théorème 19** (Dualité de Poincaré). *Soit  $M$  une variété orientée de type fini de dimension  $n$ . L'application linéaire  $\varphi : \Omega^k(M) \rightarrow (\Omega_c^{n-k}(M))^*$  définie par*

$$\varphi(\omega)(\eta) = \int_M \omega \wedge \eta, \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega_c^{n-k}(M)$$

*induit un isomorphisme  $D_k : H^k(M) \rightarrow (H_c^{n-k}(M))^*$ .*

*En particulier si  $M$  est compacte alors :*

$$\dim H^k(M) = \dim H^{n-k}(M).$$

*Proof.* Voir [4]. □

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles et soient les projections :

$$\begin{array}{ccc} \pi_M : M \times N & \rightarrow & M \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \pi_N : M \times N & \rightarrow & N \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

L'application bilinéaire :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M) \times \Omega^*(N) & \rightarrow & \Omega^*(M \times N) \\ (\omega, \eta) & \mapsto & \pi_M^* \omega \wedge \pi_N^* \eta \end{array}$$

induit deux morphismes :

$$\begin{array}{ccc} K : H^*(M) \otimes H^*(N) & \longrightarrow & H^*(M \times N) \\ K_c : H_c^*(M) \otimes H_c^*(N) & \longrightarrow & H_c^*(M \times N) \end{array}$$

**Théorème 20** (Formule de Künneth).

- $K_c$  est un isomorphisme.
- $K$  est un isomorphisme si l'une des variétés est de type fini.

*Si l'une des variétés est de type fini, alors pour tout  $k$ , l'application*

$$\bigoplus_{\ell+p=k} H^\ell(M) \otimes H^p(N) \rightarrow H^k(M \times N).$$

*est un isomorphisme.*

*Proof.* Voir [4]. □

## Applications

- Toute variété compacte orientée  $M$ , de dimension impaire est de caractéristique nulle. En effet, Grâce au Théorème de dualité de Poincaré on a, pour tout  $k = 0, \dots, 2n + 1$ , la relation entre les nombres de Betti<sup>1</sup> de  $M$ ,  $b_k = b_{2n+1-k}$ . Donc

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k b_k = (b_0 - b_{2n+1}) - (b_1 - b_{2n}) + \dots + (-1)^n (b_n - b_{n+1}) = 0.$$

- La formule de Künneth donne un moyen simple de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré des variétés produits

**Proposition 11.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés de type fini, on a :

$$\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$$

*Proof.* En effet, de la formule de Künneth on a

$$\begin{aligned} \chi(M \times N) &= \sum_{k=0}^{m+n} (-1)^k \dim H^k(M \times N) = \sum_{k=0}^{m+n} (-1)^k \dim \left( \bigoplus_{p+\ell=k} H^p(M) \otimes H^\ell(N) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} (-1)^k \left( \sum_{p+\ell=k} \dim H^p(M) \dim H^\ell(N) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{p+\ell=k} (-1)^p \dim H^p(M) \cdot (-1)^\ell \dim H^\ell(N) = \chi(M) \cdot \chi(N) \end{aligned}$$

□

## 2.2 Caractéristique d'Euler

La caractéristique d'Euler d'une variété  $M$  est un entier qui décrit un aspect de la topologie et de la géométrie de la variété. Ce nombre est noté  $\chi(M)$ .

On dispose de plusieurs définitions (toutes équivalentes) de la caractéristique d'Euler d'une variété : par l'homologie, la cohomologie de de Rham, la théorie de Morse et la théorie de l'intersection orientée.

Nous ne montrerons pas ces équivalences, mais nous allons seulement revoir quelques-unes de ces définitions et quelques méthodes de calcul.

### 2.2.1 Cohomologie de de Rham

L'invariance par homotopie, la suite exacte de Mayer-Vietoris couplés avec le lemme suivant, vont nous permettre de calculer la caractéristique d'Euler de certaines variétés compactes.

<sup>1</sup>Le  $k^{\text{ème}}$  nombre de Betti d'une variété différentielle est la dimension de son  $k^{\text{ème}}$  groupe de cohomologie de De Rham.

**Lemme 2.3.** *Pour toute suite exacte*

$$0 \rightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \dots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \rightarrow 0$$

*associées à une famille finie d'espaces vectoriels (de dimension finie), on a*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim E_k = 0$$

*Proof.* Il suffit d'écrire la condition d'exactitude de la suite avec le Théorème du rang (premier théorème d'isomorphisme)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim E_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (\dim \ker f_k + \dim \operatorname{Im} f_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( (-1)^k \dim \ker f_k - (-1)^{k+1} \dim \ker f_{k+1} \right) + (-1)^n \dim \ker f_n \\ &= (\dim \ker f_0 - (-1)^n \dim \ker f_n) + (-1)^n \dim \ker f_n = \dim \ker f_0 = 0 \end{aligned}$$

□

**Définition.**

*La caractéristique d'Euler d'une variété (compacte)  $M$ , de dimension  $n$ , est donnée par :*

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H^k(M).$$

Passons maintenant aux exemples

**Exemple.**

1.  $\chi(\mathbb{R}^n) = 1$ .
2.  $\chi(\text{bande de Mobius}) = \chi(S^1) = 0$
3.  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ .
4.  $\chi(\text{tore}) = 0$ .

*Proof.*

1. Il suffit de vérifier que  $\mathbb{R}^n$  est contractile (a le même type d'homotopie d'un point) et comme  $H^0(\{pt\}) = \mathbb{R}$  et  $H^k(\{pt\}) = 0$  pour  $k \geq 1$ , alors  $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\{pt\}) = 1$ .
2. De la même façon, comme la bande de Möbius se rétracte par déformation en un cercle, alors  $\chi(\text{bande de Mobius}) = \chi(S^1)$ , il suffit de vérifier que  $\chi(S^1) = 0$ . Par les projections stéréographiques, on a  $S^1 = U \cup V$  (où  $U = S^1 \setminus \{(0, 1)\}$  et  $V = S^1 \setminus \{(0, -1)\}$  sont contractiles). La suite de Mayer-Vietoris donne :

$$0 \rightarrow H^0(S^1) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow H^1(S^1) \rightarrow 0,$$

puisque  $H^1(U) \oplus H^1(V) = 0$ . On a donc

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow H^1(S^1) \rightarrow 0,$$

car  $S^1$ ,  $U$  et  $V$  sont connexes et  $U \cap V$  possède deux composantes connexes. Par le Lemme 2.3, on a  $1 - 2 + 2 - \dim H^1(S^1) = 0$ , ce qui donne  $\dim H^1(S^1) = 1$  et donc  $\chi(S^1) = \dim H^0(S^1) - \dim H^1(S^1) = 1 - 1 = 0$ . On aurait pu conclure rapidement par le Théorème de dualité de Poincaré :  $\dim H^1(S^1) = \dim H^0(S^1)$ , ou de son corollaire : la caractéristique d'Euler-Poincaré de toute variété compacte de dimension impaire est nulle !

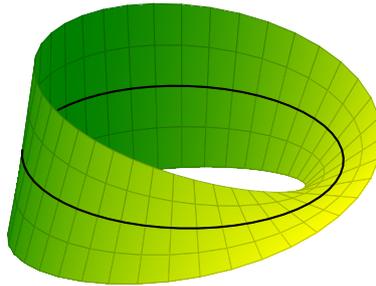


Figure 2.1: Bande de Möbius

3. Le recouvrement de  $S^n$  par deux ouverts  $U$  et  $V$  contractiles (donnés par les projections stéréographiques) et la suite exacte de Mayer-Vietoris donnent pour  $2 \leq k \leq n - 1$ :

$$0 \rightarrow H^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H^k(S^n) \rightarrow 0,$$

et comme  $U \cap V$  à le même type d'homotopie que  $S^{n-1}$ , alors

$$H^k(S^n) \simeq H^{k-1}(S^{n-1}).$$

Donc on peut vérifier par récurrence que

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{pour } k = 0 \text{ ou } k = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Pour le tore  $T^2 = S^1 \times S^1$ , il suffit d'appliquer la formule de Künneth

$$\chi(T^2) = \chi(S^1)^2 = 0.$$

□

Nous terminons cette partie par le Théorème important suivant :

**Théorème 21** (Théorème d'invariance de la dimension). *Un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  ne peut être homéomorphe à un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^m$  si  $n \neq m$ .*

*Proof.* Tout d'abord, on peut se ramener à  $U = \mathbb{R}^n$  et  $V = \mathbb{R}^m$  (car toute boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$  est diffeomorphe à  $\mathbb{R}^n$ ). Nous allons montrer ce Théorème par l'absurde. Supposons que  $\mathbb{R}^n$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^m$ , avec  $n \neq m$  (par exemple,  $n < m$ ). En enlevant un point de part et d'autre, les deux espaces obtenus restent homéomorphes. Mais  $\mathbb{R}^n \setminus \{pt\}$  est homotope à la sphère  $S^{n-1}$ , on déduit alors :

$$\mathbb{R}^n \text{ homéomorphe à } \mathbb{R}^m \implies S^{n-1} \text{ homotope à } S^{m-1}.$$

Mais on sait que  $H^{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{R}$  et  $H^{n-1}(S^{m-1}) = \{0\}$ , d'où la contradiction.  $\square$

## 2.2.2 Théorie de Morse

Soit  $M$  une variété différentielle et soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse sur  $M$ . Un point  $a \in M$  est un *point critique* de  $f$  si  $T_x f$  est l'application nulle ( $f$  n'est pas une submersion en  $a$ ). De manière équivalente, dans toute carte locale de  $a$ ,  $\partial_{x_i} f(a) = 0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Un point critique  $a$  de  $f$  est *non dégénéré* si la hessienne de  $f$  en  $a$  dans une carte locale (et donc dans toute carte locale de  $a$ ) est inversible, i.e. si

$$\det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) (a) \neq 0.$$

Une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est dite de Morse si tout ses points critiques sont non dégénérés. On a le lemme important suivant :

**Lemme 2.4.** *Si  $a \in M$  est un point critique non dégénéré de  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , alors il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  centrée en  $a$  telle que, pour tout  $x \in U$*

$$f(x) = f(a) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1} + \dots + x_n,$$

où  $k$  désigne le nombre des valeurs propres  $< 0$  de la hessienne de  $f$  en  $a$ .

*Proof.* Pour une preuve, voir [7].  $\square$

Il résulte du Lemme de Morse que les points critiques non dégénérés sont isolés et donc sur une variété compacte, toute fonction de Morse admet un nombre fini de points critiques non dégénérés.

le nombre  $k$  dans le Lemme de Morse est appelé *indice* du point critique  $a$ .

On a le Théorème important suivant :

**Théorème 22.** *Soit  $M$  une variété différentielle compacte et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse. La caractéristique d'Euler de  $M$  est donnée par :*

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k(f),$$

où  $c_k(f)$  désigne le nombre de points critiques de  $f$  d'indice  $k$ .

*Proof.* Pour une preuve, voir [7].  $\square$

**Application.** Si on prend la fonction hauteur  $h$  sur le tore  $T^2$ , qui est une fonction de Morse, elle possède 4 points critiques : un minimum d'indice 0 ( $c_0(h) = 1$ ), deux points col d'indice 1 ( $c_1(h) = 2$ ) et un maximum d'indice 2 ( $c_2(h) = 1$ ). La caractéristique d'Euler du tore est donc

$$\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

### 2.2.3 Auto-intersection

Soit  $X$  une variété différentielle compacte et orientable, on définit la caractéristique d'Euler de  $X$  grâce à légalité :

$$\chi(X) = I(\Delta, \Delta)$$

où  $\Delta$  est la diagonale de  $X \times X$ .

**Proposition 12.** *La caractéristique d'Euler d'une variété compacte et orientée de dimension impaire est nulle.*

*Proof.* Nous avons vu que  $I(\Delta, \Delta) = (-1)^{(2n+1)^2} I(\Delta, \Delta)$ , d'où

$$\chi(X) = I(\Delta, \Delta) = 0.$$

□

**Exemple.** *On se propose de calculer la caractéristique d'Euler de la sphère  $S^n$ . Pour cela, on considère  $S^n$  canoniquement plongée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  et l'application  $f : S^n \rightarrow S^n$  telle que*

$$f(x) = \frac{x + (0, \dots, 0, \frac{-1}{2})}{\|x + (0, \dots, 0, \frac{-1}{2})\|}.$$

*On observe que  $f$  est homotope à l'identité via*

$$H(x, t) = \frac{x + (0, \dots, 0, \frac{-t}{2})}{\|x + (0, \dots, 0, \frac{-t}{2})\|}.$$

*Le calcul de  $\chi(S^n)$  se ramène donc au calcul du nombre de Lefschetz  $L(f)$ .*

*On remarque que  $f$  possède deux points fixes, à savoir les deux pôles :  $N = (0, \dots, 0, 1)$  et  $S = (0, \dots, 0, -1)$ . Les différentielles en ces points s'écrivent :*

$$D_N f(x) = 2x, \quad D_S f(x) = \frac{2}{3}x.$$

*Par conséquent,*

$$\chi(S^n) = L(f) = L_N(f) + L_S(f) = \text{sign}((2-1)^n) + \text{sign}((\frac{2}{3}-1)^n).$$

*D'où  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ .*

## 2.3 Théorème du point fixe de Lefschetz

Soient  $X$  une variété compacte, orientable et soit  $f : X \rightarrow X$  une application lisse. Notons par  $M$  l'ensemble des points fixes de  $f$ , i.e.  $M = \{x \in X, f(x) = x\}$ . On suppose que le graphe de  $f$  est transverse à la diagonale :  $\Gamma_f \pitchfork \Delta$ .

**Définition.** On appelle nombre de Lefschetz le nombre d'intersection orienté entre le graphe de  $f$ ,  $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\}$  et la diagonale  $\Delta = \{(x, x), x \in X\}$ . On note ce nombre par  $L(f) = I(\Gamma_f, \Delta)$

Nous allons voir qu'on a aussi

$$L(f) = \sum_{x \in M} \text{sign}(\det(D_x f - \text{Id}_X)).$$

**Proposition 13.**  $\Gamma_f$  et  $\Delta$  sont transverses, si et seulement si, tout points fixe  $x$  de  $f$  est non-dégénéré, i.e.

$$\det(D_x f - \text{Id}) \neq 0$$

Le nombre de Lefschetz au point  $x$  est donné par :

$$L_x(f) = \text{sign} \det(D_x f - \text{Id}).$$

*Proof.* Soit  $x = f(x)$ , de sorte que  $(x, x) \in \Delta \cap \Gamma_f$ . On a

$$T_{(x,x)}\Delta = \{(u, u), u \in T_x X\}, \quad T_{(x,x)}\Gamma_f = \{(u, D_x f(u)), u \in T_x X\}.$$

La condition de transversalité s'écrit :

$$T_{(x,x)}\Gamma_f + T_{(x,x)}\Delta = T_x X \times T_x X.$$

À cause des dimensions  $\dim X = \dim \Gamma_f = \dim \Delta$ , la somme est directe et donc :

$$T_{(x,x)}\Gamma_f \cap T_{(x,x)}\Delta = \{0\} \Leftrightarrow \{(u, D_x f(u)), u \in T_x X\} \cap \{(v, v), v \in T_x X\} = \{0\} \Leftrightarrow \ker(D_x f - \text{Id}) = 0.$$

Ce qui veut dire que 1 n'est pas valeur propre de  $D_x f - \text{Id}$ .

L'application  $T_{(x,x)}\Delta \oplus T_{(x,x)}\Gamma_f \simeq T_x X \oplus T_x X \rightarrow T_{(x,x)}X \times X = T_x X \oplus T_x X$

$$(u, v) \mapsto (u + v, u + D_x f(v))$$

est décrite par la matrice en blocs :

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & \text{Id} \\ \text{Id} & D_x f \end{pmatrix}$$

□

et son déterminant est :

$$\det \begin{pmatrix} \text{Id} & \text{Id} \\ \text{Id} & D_x f \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ \text{Id} & D_x f - \text{Id} \end{pmatrix} = \det(D_x f - \text{Id})$$

et donc  $\Delta$  et  $\Gamma_f$  sont transverse en  $(x, x)$ , si et seulement si,  $\det(D_x f - \text{Id}) \neq 0$  et son signe détermine le nombre de Lefschetz de  $f$  en  $x$ .

**Théorème 23.**Si  $L(f) \neq 0$ , alors  $f$  a un point fixe.

*Proof.* Si  $\Gamma_f \cap \Delta$  alors le nombre de Lefschetz de  $L(f)$  constitue une borne inférieure du nombre des points fixes de  $f$ , puisque :

$$L(f) = \sum_{(x,x) \in \Gamma_f \cap \Delta} \text{sign det}(D_x f - \text{Id}).$$

En particulier, si  $f$  ne possède aucun point fixe, alors  $(\Delta \cap \Gamma_f) = \emptyset$  et  $L(f) = 0$ .  $\square$

nombre de Lefschetz de  $L(f)$  constitue une borne inférieure du nombre des points fixes de  $f$  et comme la caractéristique d'Euler est donnée par le nombre de Lefschetz de l'identité, alors nous pouvons montrer une version du théorème du point fixe de Lefschetz, qui s'applique uniquement aux applications de Lefschetz :

**Théorème 24.** Soit  $f : M \rightarrow M$  à une application continue sur une variété lisse, compacte, connexe et orientée ; de dimension  $n$ . Supposons que  $n$ 'a que des points fixes non dégénérés. Alors

$$\#(\text{Fix}(f)) \geq L(f).$$

Si  $f$  est homotope à l'identité, alors :

$$\#(\text{Fix}(f)) \geq \chi(M).$$

# Applications



## 3.1 Théorème de Poincaré-Hopf

Le théorème de Poincaré-Hopf est une conséquence du théorème du point fixe de Lefschetz. Avant d'énoncer le théorème, nous aurons besoin de quelques définitions.

**Définition.** Soit  $X$  un champ de vecteurs sur une variété différentielle  $M$ . Un point  $x_0 \in M$  est dit point singulier de  $X$  si  $X(x_0) = 0$ . Si  $x_0$  est un point singulier isolé de  $X$ , nous définissons l'indice de  $X$  en  $x_0$ , et nous le notons par  $\text{Ind}(X, x_0)$ , comme le degré de l'application

$$\begin{aligned} u : \partial D &\longrightarrow S^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|} \end{aligned}$$

où  $D$  est une boule centrée en  $x_0$  dans laquelle  $x_0$  est l'unique point singulier de  $X$ . (Ici, nous avons plongé  $M$  dans un certain  $\mathbb{R}^n$ ).

**Théorème 25** (Théorème de Poincaré-Hopf). Soit  $X$  un champ de vecteur sur une variété compacte  $M$  ayant un nombre fini de zéros. Alors la somme des indices de  $X$  est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $M$ ,

$$\chi(M) = \sum_{X(x_i)=0} \text{Ind}(X, x_i).$$

*Proof.* Nous donnons seulement une idée de la preuve. Pour une démonstration complète, voir [3].

Puisque  $M$  est compacte, le champ de vecteurs  $X$  engendre un flot (global)  $\exp tX$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ). Les points fixes de  $\exp tX$  sont les zéros de  $X$ . Supposons ces zéros sont isolés, et soit  $x_0$  l'un d'eux. En coordonnées locales, nous avons

$$\exp tX(x) = x + tX(x) + o(t)$$

autour de  $x_0$ , donc

$$D_{x_0} \exp tX = \text{Id} + tD_{x_0} X + o(t).$$

Ceci implique que pour  $t$  petit, l'indice de  $X$  en  $x_0$  est égal à l'indice de  $x_0$  en tant que point fixe de  $\exp tX$ . Le théorème du point fixe de Lefschetz nous dit alors que la somme de ces indices est le nombre d'intersection  $I(\Delta, \Delta_t)$ , où  $\Delta_t$  est le graphe

de  $\exp tX$ . Cet entier dépend continûment de  $t$ , donc il est constant et égal à la caractéristique d'Euler de  $M$  :

$$I(\Delta, \Delta_t) = I(\Delta, \Delta_0) = I(\Delta, \Delta) = \chi(M).$$

□

Le champ de vecteurs  $X = y\partial_x - x\partial_y$  sur la sphère  $S^2$  possède deux points singuliers d'indice 1 et donc  $\chi(S^2) = 1 + 1 = 2$ .

En particulier, tout champ de vecteurs sur  $S^2$  possède au moins un point singulier, sinon la caractéristique de  $S^2$  serait nulle. Ce théorème est connu sous le nom de Théorème de la boule chevelue.

## 3.2 Théorème de la boule chevelue

Henri Poincaré, lors de ses travaux sur les solutions des équations différentielles, a démontré que sur la sphère  $S^2$  il n'existe pas de systèmes de courbes sans singularités ; ce que l'on peut encore énoncer en disant que sur la sphère  $S^2$ , tout champ de vecteurs possède des singularités. Brouwer a généralisé ce théorème à toute sphère de dimension paire. Le théorème de la boule chevelue affirme que sur la sphère de dimension  $2n$  tout champ de vecteurs tangents continu s'annule en au moins un point.

**Théorème 26** (de la Boule Chevelue). *Tout champ de vecteurs tangents à une sphère de dimension paire, s'annule en au moins un point.*

En effet comme la caractéristique d'Euler de la sphère de dimension paire est  $\chi(S^{2n}) = 2$  alors tout champ de vecteurs sur  $S^{2n}$  possède au moins un point singulier (sinon la caractéristique d'Euler serait nulle, d'après le Théorème de Poincaré-Hopf).

## 3.3 Théorème du point fixe de Brouwer

C'est un théorème de point fixe très fort : l'hypothèse sur la fonction est plutôt faible, on a juste sa continuité et qu'elle laisse stable la boule unité, et on obtient l'existence d'un point fixe.

**Théorème 27.** *Toute application continue de la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$  dans elle-même admet un point fixe.*

*Proof.* • Ce Théorème découle du Théorème de Lefschetz. En effet, la boule fermée  $B$  est compacte et homotope à un point. Ses groupes de cohomologie sont nuls sauf son  $H^0$  et pour toute application continue  $f : B \rightarrow B$ , l'endomorphisme  $f^*$  de  $H^0(B) = \mathbb{R}$  est l'identité donc

$$L(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \operatorname{tr}(f^* : H^k(B) \rightarrow H^k(B)) = \operatorname{tr}(f^* : H^0(B) \rightarrow H^0(B)) = 1 \neq 0.$$

- On peut aussi utiliser la notion de degré. Supposons, par l'absurde, que  $f$  n'a pas de point fixe. La demi-droite  $\{x + \lambda(x - f(x)), \lambda \geq 0\}$  rencontre la sphère  $S^{n-1}$  en un unique point  $r(x)$  et permet de définir une rétraction  $r : B \rightarrow S^{n-1}$  telle que  $r|_{S^{n-1}} = \text{Id}_{S^{n-1}}$  et donc est de degré nul (par le théorème d'extension 1.3 page 20).

Comme  $r(x) = \frac{x-f(x)}{|x-f(x)|}$ , on construit l'homotopie (sur la sphère)

$$H(x, t) = \frac{x - tf(x)}{|x - tf(x)|}$$

entre  $r$  et l'identité  $\text{Id}_{S^{n-1}}$ . Elles ont donc même degré 1, contradiction !

□

# Conclusion



Nous avons montré dans ce mémoire un théorème de point fixes, à la fois joli et très puissant qui relie la topologie (caractéristique d'Euler), la géométrie (indice de champs vecteurs, formule de Gauss-Bonnet) et l'analyse des variétés compactes (cohomologie de de Rham).

Ce théorème nous a permis de retrouver des résultats de topologie assez puissant (Théorème du point fixe de Brouwer, Théorème de Poincaré-Hopf...).



# Bibliography

- [1] R. Bott & L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer (1995).
- [2] Yves Carrière, cours de maîtrise de topologie différentielle. Université Grenoble 1, 1994-1996.
- [3] V. Guillemin & A. Pollack, *Differential Topology*. Prentice Hall (1974).
- [4] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer (2013).
- [5] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences ,(1996).
- [6] I. H. Madsen & J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology: De Rham Cohomology and Characteristic Classes*. CRC (1997).
- [7] J. W. Milnor, *Morse Theory*, Princeton 1963.
- [8] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable view point*. Princeton (1997).
- [9] E. Outerelo & J. M. Ruiz, *Mapping degree theory* . AMS (2009).
- [10] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Vol. 1, Publish or Perish (1999).

## Lefschetz fixed point theorem

### ABSTRACT

This Master thesis is devoted to the study of the Lefschetz fixed point theorem. This theorem is very important and has many applications in topology, geometry and analysis. We have developed the essential geometric methods to prove this theorem and we have adopted the approach of the oriented intersection theory rather than the homological approach.

We have developed some examples and outlined some important applications on the geometry and topology of compact manifolds, namely the Poincaré-Hopf theorem, the Brouwer fixed point theorem.

**Keywords:** Transversality, oriented intersection, degree of an application, de Rham cohomology, Poincaré duality, Lefschetz fixed point theorem.

---

### Théorème du point fixe de Lefschetz

### RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré à l'étude du Théorème du point fixe de Lefschetz. Ce Théorème est très important et possède de nombreuses applications en topologie, géométrie et analyse. Nous avons développé les méthodes géométriques essentielles pour démontrer ce Théorème et nous avons adopté l'approche de la théorie de l'intersection orientée, plutôt que l'approche homologique.

Nous avons développé quelques exemples et exposé quelques applications importantes concernant la géométrie et la topologie des variétés compactes, à savoir : le Théorème de Poincaré-Hopf, le Théorème du point fixe de Brouwer.

**Mots-clés:** Transversalité, intersection orientée, degré d'une application, cohomologie de de Rham, dualité de Poincaré, Théorème du point fixe de Lefschetz.