رقم الترتيب:

رقم التسلسل:

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الفيزياء

مذكرة

ماستر أكاديمي

مجال: علوم المادة

فرع: فيزياء

تخصص: فيزياء الإشعاعات، كاشف و بصريات إلكترونية

من إعداد: بن علي حسن

الموضوع

حساب فقد الطاقة الناجم عن توصيل النواقل ببعضها، باعتباره إشعاعًا كهرومغناطيسيًا

نوقشت يوم: 2014\06\10

أمام لجنة المناقشة المكوَّنة من:

الأستاذ	الرتبة	الجامعة	الصفة
خلفاوي فتحي	أستاذ تعليم عالٍ	جامعة ورقلة	رئيسا
بن بيتور محمد عبد الوهاب	أستاذ مساعد أ	جامعة ورقلة	ممتحنا
شيحي إسماعيل	أستاذ تعليم عالٍ	جامعة ورقلة	مقررا

2014\2013

إهـــــــداء

أهدي هذا العمل إلى الوالدة -أطال الله في عمرها-، إلى معلمي و أستاذي الأستاذ: شيحي إسماعيل، و إلى كل إخوتي و أخواتي: علي، لمين، مكي، الطيب، محمد الجموعي، الطاهر، إبراهيم، عبد الحميد، و أصدقائي: عبد الرزاق خالدي، و عماره رمضاني، و إلى كل من مدّ لي يد العون لإنجاح هذا العمل.

شكر و عرفان

الشكر أولًا وأخيرا لله عز وجلّ الذي كان خير عون لي في هذا العمل، فوفقت بفضله إلى تقديمه على هذه الصورة، كما أتقدم بخالص عبارات الوِدّ والعطف إلى الوالدة الكريمة -أطال الله في عمرها-، وأتقدّم إلى أستاذي الفاضل الأستاذ شيحي إسماعيل بالشكر والوقار على ما قدّمه لي في سبيل إنجاح هذا العمل، ولا يفوتني أن أشكر كلًا من الأستاذ خلفاوي فتحي والأستاذ بن بيتور محمد عبد الوهاب على قبولهما ترؤس هذه المذكرة و مناقشتها.

وإلى جميع إخوتي و أخواتي و الأصدقاء.

فهرس المحتويات

مقـــدمة عامـــة

مقدمة عامة:

تختزن النواقل المشحونة طاقة كهروستاتيكية يمكن حسابها بقوانين معروفة. بتوصيل النواقل بعضها ببعض يحدث بينها تبادل للشحنات، يصحبه نقص في الطاقة الكلية لجملة هذه النواقل و انحفاظ تام للشحنة الإجمالية للجملة.

كثيرا ما يفسَّر ذلك بأنه فقد للطاقة بفعل جول، و لكننا نظن ذلك مُجانبًا للصواب؛ ذلك أن النواقل عُوملت باعتبارها تامّةً و مثاليةً، فلا توجد أيّة ضياعات للطاقة بفعل جول الحراري.

ما نظنه هو أن هذه الطاقة المفتقدة قد تحولت إلى إشعاع، و هو ما يمكن تبريره برؤية شرارة كهربائية و سماع فرقعات أثناء توصيل النواقل ببعضها.

سنحاول في هذا العمل تبرير الفقد في الطاقة، الذي تحدثنا عنه آنفا، باعتباره إشعاعا كهرومغناطيسيا، و ذلك بحساب طاقة هذا الإشعاع، و مقارنتها بفارق الطاقة المحسوب قبل توصيل النواقل ببعضها و بعده.

في سبيل ذلك سنقترح نموذجا لجملة الشحنات و التيارات المكافئة لعملية انتقال الشحنات بين النواقل، و من ثَمَّ حساب الكمونات الكهربائية و المغناطيسية المتأخرة، ثم اشتقاق الحقول الكهربائية و المغناطيسية المواكبة للموجة الكهرومغناطيسية، ثم استنباط متجه بوينتنغ لها، و الذي يمثل تيار الطاقة الكهرومغناطيسية المتدفقة مع الموجة، لوحدة الأزمنة و لوحدة السطوح المتعامدة مع الاتجاه القطري لانتشار الموجة الكهرومغناطيسية.

لقد استخدمنا نتيجة حساب سابق، يخص منبعًا كيفيا، فطبّقناه على حالتنا الخاصة، و التي سنصفها في الموضع الملائم من هذه المذكرة.

تتألف هذه المذكرة من أربعة فصول و خلاصة عامة، ففي الفصل الأول "الطاقة الكهروستاتيكية لمختلف الجمل" قدّمنا تعريفا للطاقة الكهروستاتيكية، و أبرزنا طاقات جمل مختلفة للشحنات.

في الفصل الثاني "أساسيات النظرية الكهرومغناطيسية و عموميات عن الإشعاع الكهرومغناطيسي" تحدثنا عن القواعد و القوانين الأساسية (معادلات ماكسويل) التي انبنت عليها النظرية الكهرومغناطيسية، كما تعرضنا إلى طبيعة الإشعاع الكهرومغناطيسي و خصائصه الموجية و الحبيبية، و كذا مختلف الأطوال الموجية للطيف الكهرومغناطيسي.

أما في الفصل الثالث "النماذج السائدة لتفسير الإشعاع" فقد عرضنا أهم النماذج، و هي إشعاع ثنائي القطب الكهربائي و إشعاع ثنائي القطب المغناطيسي.

في الفصل الرابع "حساب الإشعاع الصادر عن النواقل الكهربائية قبيل الاتزان الكهروستاتيكي" قمنا بحساب الإشعاع الصادر عن جملة كريتين معدنيتين تتبادلان الشحنة فيما بينهما، بالاعتماد على حساب سابق أُجْريَ لتوزيع شحني و تياري كيفي، و أتبعنا ذلك بمناقشات، حاولنا فيها تبرير نتائج الحساب الذي أجريناه.

و ختمنا كل ذلك بخلاصة شاملة.

الفصل الأول

الطاقة الكهروستاتيكية لمختلف الجمل

I–1 تعريف الطاقة الكهروستاتيكية:

الطاقة الكهروستاتيكية هي مجموع الأعمال التي ينبغي إنجازها لإحضار شحنات من اللانهاية و وضعها عند مواضعها النهائية، إذْ يُفترض في البداية أنها متباعدة عن بعضها البعض بما فيه كفاية لأنْ تُعتبر غيرَ متفاعلة فيما بينها.

I–2 الطاقة التي تمتلكها شحنة نقطية في حقل كهربائي خارجي:

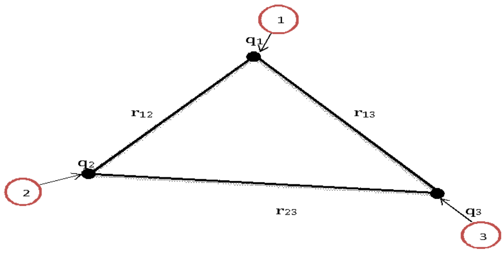
عندما تنتقل شحنة نقطية q من الموضع A إلى الموضع B تحت تأثير حقل كهربائي E فإن عمل قوة هذا الحقل عليها هو:

$$W_{AB} = q(V_B - V_A) = qV \dots\dots\dots\dots\dots (I-1)$$

I–3 طاقة جملة شحنات نقطية:

لنعتبرْ في البداية جميع شحنات الجملة بعيدة عن بعضها البعض بحيث لا تؤثر إحداها في الأخرى. لجمع هذه الشحنات و وضعها عند مواضعها من الجملة (الشكل I–1) فإنه ينبغي بذل عمل لذلك. تخضع كل شحنة من الجملة إلى الحقل الكهربائي الناشئ عن بقية شحنات الجملة، لذا فإنه لإحضار الشحنة q_1 في غياب الشحنات الأخرى يكون العمل اللازم لذلك: $W_1 = 0$، و لإحضار q_2 في وجود q_1 يكون العمل اللازم لذلك: $W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$، و لإحضار q_3 في وجود q_1 و q_2 يكون العمل اللازم لذلك:

$W_3 = \frac{q_1 \cdot q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 \cdot q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$، و هكذا لجميع الشحنات.



الشكل (I –1) : تموضع الشحنات

بتعميم ذلك لجملة مكونة من n شحنة نقطية يكون مجموع الأعمال اللازمة لجمعها:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I-2)$$

4–I طاقة توزيع مستمر من الشحنات الكهربائية:

غالبا ما تكون المسافات بين شحنات جملة ما أصغرَ كثيرا من بُعد هذه الجملة عن موضع الإهتمام، لذا فإن مثل هذه الجمل تكافئ شحنة كلية موزعة باستمرار على خيط أو سطح أو حجم ما، و تكون طاقة الجملة حينها:

- للتوزيع الحجمي: $U = 1/2 \iiint \rho_q V d\tau$
- للتوزيع السطحي: $U = 1/2 \iint_s \sigma_q V ds$
- للتوزيع الخيطي: $U = 1/2 \int_c \lambda_q V dl$

I– 5 طاقة جملة من النواقل المشحونة المتّزنة كهروستاتيكيّا:

I–5 –1 ناقل وحيد: يتميز الناقل المتّزن كهربائيا بكمون ثابت، كما أن شحناته تتموضع على سطحه الخارجي، لذا فإنه يتميز بكثافة σ، و تكون طاقته:

$$U = \frac{1}{2}V\iint_s \sigma . ds = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}cV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{c}$$

حيث V كمون الناقل، و Q شحنته الإجمالية، و C سعته الكهربائية.

I–5 –2 جملة n ناقلا: يحمل كل ناقل طاقة $U_i = \frac{1}{2}Q_i V_i$، إذًا تكون الطاقة الكامنة لجملة مكونة من n ناقلا: $U = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i$

I–6 طاقة مكثف مشحون:

تُعطَى بـ : $U = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}c(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots (I-3)$

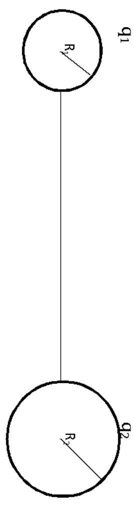
I–7 موقع الطاقة الكهروستاتيكية:

تتأتى الطاقة الكهروستاتيكية من القوة الكهروستاتيكية، و بالتالي من الحقل الكهروستاتيكي، إذًا الطاقة الكهروستاتيكية متموضعة في الفضاء حيث يوجد حقل كهروستاتيكي، و بالتالي فهي بين لبوسي المكثفة، و تُعطَى كثافتها الحجمية بـ : $\frac{\mathrm{dU}}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ ، و بالتالي يمكننا حساب الطاقة كما يلي:

$$\mathrm{U} = \iiint \frac{\varepsilon_0 \mathrm{E}^2}{2} \mathrm{d}\tau \ \ldots\ldots\ldots (I-4)$$

I–8 حساب طاقة جملة كريَّتين، قبل التوصيل و بعده:

لنعتبر كريتين معدنيتين (1) و(2) موصولتين بسلك رقيق (الشكل I–2)، الكرة الأولى مشحونة بشحنة ابتدائية q_0 و الكرة الثانية غير مشحونة، إذًا الطاقة الإبتدائية للكرية (1) قبل التوصيل هي U_0 حيث $U_0 = q_0 \,.\frac{Kq_0}{R_1} = \frac{{q_0}^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$.



الشكل (I–2)

بعد تبادل الكريتين للشحنات بينهما يحصل اتزان كهروستاتيكي جديد، يقتضي أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 + q_2 = q_0 \\ \dfrac{Kq_1}{R_1} = \dfrac{Kq_2}{R_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} q_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} q_0 \\ q_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} q_0 \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I-5)$$

طاقة الكرية (1) عند التوازن الكهروستاتيكي الجديد هي:

$$U_1 = \frac{{q_1}^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{R_1}{4\pi\varepsilon_0 (R_1+R_2)^2}{q_0}^2 = \frac{{R_1}^2}{(R_1+R_2)^2}U_0$$

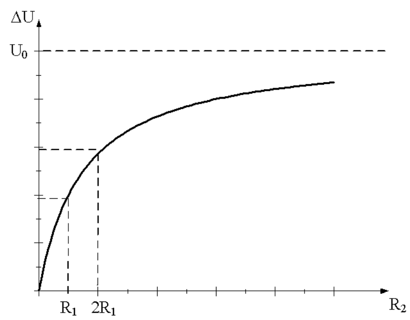
و طاقة الكرية (2) عند التوازن الكهروستاتيكي الجديد هي:

$$\mathrm{U_2} = \frac{{\mathrm{q_2}}^2}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R_2}} = \frac{\mathrm{R_2}}{4\pi\varepsilon_0(\mathrm{R_1}+\mathrm{R_2})^2}{\mathrm{q_0}}^2 = \frac{\mathrm{R_1R_2}}{(\mathrm{R_1}+\mathrm{R_2})^2}\mathrm{U_0}$$

و منه يكون الفرق في الطاقة كما يلي:

$$\Delta U = U_0 - (U_1 + U_2) = \left(1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right)U_0 = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_0 \dots\dots\dots (I-6)$$

لاحظ أن تغير فرق الطاقة متعلق بالنسبة بين قطري الكرتين، كما هو مبيّن بالشكل (I-3)، فكلما ازداد قطر الكرة الثانية زاد مقدار فرق الطاقة، حتى إذا بلغت مقدارا كبيرا جدا فإن طاقة الجملة ستؤول إلى الصفر.



الشكل (I-3)

في الحالة الخاصة التي تكون فيها الكرتان متماثلتين تماما فإن:

$$\Delta U = \frac{1}{2}U_0 \dots\dots\dots (I-7)$$

الفصل الثاني

أساسيات النظرية الكهرومغناطيسية

و عموميات عن الإشعاع الكهرومغناطيسي

II–1 الطيف الكهرومغناطيسي:

الطيف الكهرومغناطيسي أو الأشعة الكهرومغناطيسية أو الأمواج الكهرومغناطيسية كلها تحمل المعنى الفيزيائي نفسه، فإذا تكلمنا عن الضوء المرئي أو الموجات المايكروية أو الأشعة السينية أو أشعة جاما أو موجات التلفزيون و الراديو، فهي كلها أشعة تُعْرف باسم الإشعاع الكهرومغناطيسي، و تشترك في العديد من الخصائص، لكنها تختلف عن بعضها في الطول الموجي و التردد و الطاقة.

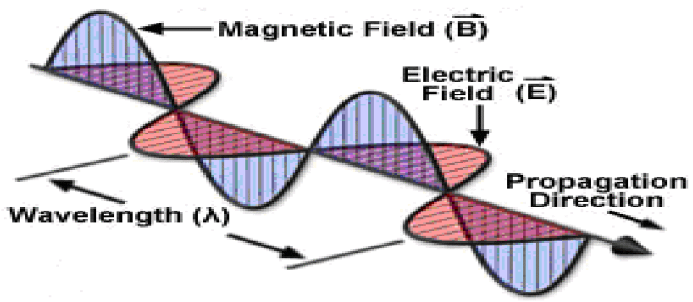
تختلف الموجات الكهرومغناطيسية عن الموجات الميكانيكية اختلافا كبيرا؛ فمثلا إذا نظرنا إلى وسط مثل الماء نجد أن جزيئات الوسط (الماء) هي التي تتذبذب، فتنتج اضطرابات تنتشر في وسط الماء على صورة موجات متتابعة؛ أي أن المادة هي التي تنتقل، مسببة هذه الموجات. و كذلك الحال في الموجات الصوتية، حيث أن الصوت ينتقل من خلال اضطراب في جزيئات الهواء على شكل انضغاط و تخلخل ينتشر في الهواء. أما في حالة الموجات الكهرومغناطيسية فالوضع مختلف تماما، حيث أن الذي يتموج أو يتذبذب هو المجال الكهربائي الذي ينشأ من تذبذب الجسيمات المشحونة، مثل الإلكترون ذي الشحنة السالبة أو البروتون ذي الشحنة الموجبة، و هذا هو سبب تكوّن الأشعة الكهرومغناطيسية، حيث أن تذبذب الشحنات المكوّنة للذرة يؤدي إلى انبعاث الطيف الكهرومغناطيسي، فهي بمثابة نوابض مهتزة، تستمد طاقتها من الحرارة، أو من أيِّ نوع من أنواع الإثارة، مثل التصادمات و غيرها.

يعتمد الطول الموجي للأشعة الكهرومغناطيسية على درجة إثارة الشحنة، لذا فإن للطيف الكهرومغناطيسي مدى واسعا من الأطوال الموجية. للتمييز بين الأطوال الموجية أُعطيتْ أسماء مختلفة لمناطق الطيف، كأشعة المايكروويف و الأشعة المرئية و الأشعة السينية و أشعة جاما و غيرها. تنتشر الأشعة أو الموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ بسرعة ثابتة تساوي سرعة الفراغ، و هي تقريبا 3.10^{8} m/s ، و تنقل معها الطاقة حيثما حلّتْ أو ارتحلت.

II–2 الإشعاع الكهرومغناطيسي و طبيعة الضوء:

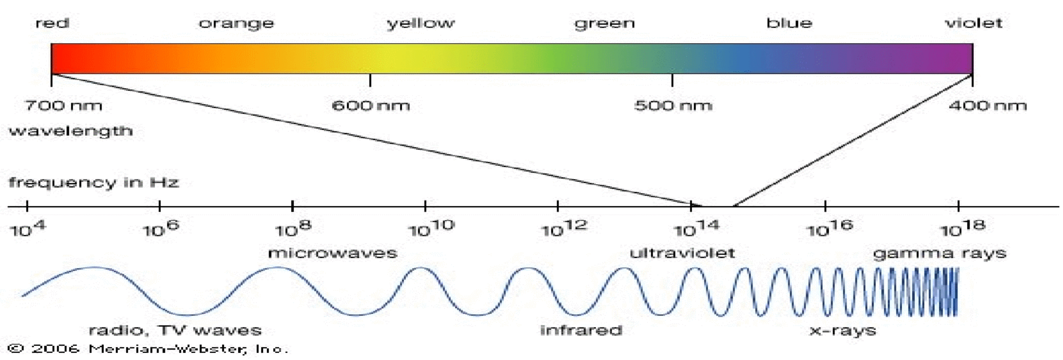
إن الضوء بكل أنواعه، سواء كان مرئيا أو غير مرئي، يُعتبر إشعاعا كهرومغناطيسيا، و سمي الإشعاع الكهرومغناطيسي بهذا الإسم لأنه يتكون من مجال كهربائي و مجال مغناطيسي، يتذبذبان في مستويين متعامدين على بعضهما البعض، و يعامدان اتجاه تقدم الشعاع، لذا يمكن فهم الضوء بشقيه، المرئي و غير المرئي، على أنه أمواج كهرومغناطيسية. الشكل (II-1) يتألف من مركبتين متعامدتين، الأولى مركبة المجال الكهربائي و الثانية

مركبة المجال المغناطيسي، و هما ينتشران في الفضاء، حيث تتغير سعة الموجة باستمرار مع حركة انتشارها، و يُقصد بسعة الموجة أقصى ارتفاع للمنحنى من الإحداثي الأفقي، و تعبر أيضا عن شدة الشعاع.



شكل (II –**1**): **تمثيل الموجة الكهرومغناطيسية**

يمثل الإشعاع الكهرومغناطيسي أحد صور الطاقة، و التي تتصف بخصائص موجية و خصائص حُبيبية، و الطيف الكهرومغناطيسي -كما هو موضح بالشكل (II -**2**)- يبدأ من أمواج الراديو ذات الطول الموجي الطويل و التردد المنخفض، ثم أشعة المايكروويف، فالأشعة تحت الحمراء، فالأشعة المرئية، فالأشعة فوق البنفسجية، فالأشعة السينية، و تمتد حتى أشعة جاما ثم الأشعة الكونية القصيرة جدا.



شكل (II -2): **الطيف الكهرومغناطيسي**

هذا التسلسل تابعٌ لزيادة تردد الموجات، و لكل منطقة من مناطق الطيف الكهرومغناطيسي خصائص تميزها عن بقية المناطق، و بناءً عليه نتجت تطبيقات مختلفة لهذه الأشعة.

II–3 أساس النظرية الكهرومغناطيسية (معادلات ماكسويل):

النتيجة الأساسُ لنظرية ماكسويل هي وجود أمواج كهرومغناطيسية تنتشر بسرعة الضوء، حيث استطاع ماكسويل بعد اكتشافه تيار الانزياح وضع نظرية موحدّة للظواهر الكهربائية و المغناطيسية، و قد فسرت هذه النظرية كل الحقائق المعروفة في عصره، كما تنبأت بعدد من الظواهر الجديدة التي تأكّد وجودها فيما بعد. لقد توصّل ماكسويل بعد الدراسة النظرية لخصائص هذه الأمواج إلى وضع نظرية كهرومغناطيسية للضوء. إن الأساس الذي تقوم عليه النظرية الكهرومغناطيسية هو معادلات ماكسويل، فهي بمثابة قوانين نيوتن في الميكانيك أو المبادئ الأساسية للترموديناميك، مع فارق مهمٍّ هو أن معادلات ماكسويل لا متغيرة بالنسبة لتحويلات لورنتز، في حين أن قوانين نيوتن ليست كذلك.

$$(i)\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad\qquad (iii)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(ii)\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad\qquad (iV)\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

II–4 الصياغة الكمونية لمعادلات ماكسويل:

II–4–1 الكمون السلمي و الكمون الشعاعي:

كيف تولد المنابع ρ و$\vec{J}$ الحقلين الكهربائي و المغناطيسي؟ ما هما الحقلان $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)$ و $\vec{B}\left(\vec{r},t\right)$؟ سنسعى في طلب الحل العام لمعادلات ماكسويل.

في الحالة الساكنة قانون كولوم و قانون بيو و سافار كفيلان بالإجابة عن هذا السؤال، أمّا ما نبحث عنه فهو تعميم الاجابة للحالات المتعلقة بالزمن. ليس من اليسير ذلك، لكننا سنبدأ بالتعبير عن الحقول بدلالة الكمونات. في الكهرباء الساكنة $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ يسمح لنا بكتابة $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ ، و في الكهروديناميكا ليس من الممكن ذلك، لأن $\vec{\nabla}\times\vec{B} \neq 0$. بالمقابل تكون $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ دوما، إذًا يمكن كتابة:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \dots\dots\dots\dots (II-1)$$

بوضع هذا في قانون فارادي (iii) نجد:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

إذًا يمكن اعتبار $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ تدرجا لكمون سلمي:

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}V\Rightarrow\vec{E}=-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(II-2)$$

بطبيعة الحال إذا كانت المسألة غيرَ متعلقة بالزمن فإنها ستؤول إلى الكهروستاتيكا.

إن التمثيل الكموني $(II-1)$ و$(II-2)$ يؤدي تلقائيا دور معادلتي ماكسويل (ii) و (iii) ، فماذا عن المعادلتين الأخريين (i) و (iv)؟ بإدخال $(II-2)$ في (i) نجد:

$$\vec{\nabla}.\left(-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\Rightarrow\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}V\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla^2V+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II-3)$$

و هي تعوض معادلة بواسون في الكهرباء الساكنة. بوضع (II-1) و(II-2) في (iv) يكون:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\mu_0\vec{J}+\frac{\mu_0\varepsilon_0\,\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\mu_0\vec{J}-\mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$$

بإعادة ترتيب الحدود يكون:

$$\nabla^2\vec{A}-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)-\mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\left(\nabla^2\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right)-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}+\mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)\right)=-\mu_0\vec{J}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(II-4)$$

إن المعادلتين $(II-3)$ و$(II-4)$ تحملان كل المعلومات التي تتضمنها معادلات ماكسويل.

II-4-2 معيار كولوم و معيار لورنتز:

II-4- 2-1 معيار كولوم:

كما في المغناطيسية الساكنة نختار:

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(II-5)$$

و المعادلة (II-3) تصبح $\nabla^2V=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ ، و هي بالضبط معادلة بواسون التي نعرف حلّها، و بوضع $V(\infty)=0$ يكون:

$$V(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\vec{r}`,t\right)}{r}d\tau`\ldots\ldots\ldots\ldots.(II-6)$$

ينبغي أن لا نغيّر، فإن V لن يخبرنا عن $\vec{E}$، بل ينبغي أن نعرف $\vec{A}$ أيضا. هناك شيء ما يخص الكمون السلمي (II-6) في معيار كولوم، إنه يعيَّنُ من خلال توزيع الشحنة في اللحظة ذاتها، فإذا ما تحرك إلكترون على الأرض فإن الكمون على سطح القمر سيتغير مباشرة. هذا ما يتعارض مع النظرية النسبية الخاصة التي تنص على أنه لا يمكن لأية معلومة أن تنتقل بأكثر من سرعة الضوء. القضية هي أن الكمون السلمي V ذاته مقدار غير قابل للقياس، و كذلك الكمون الشعاعي $\vec{A}$ ، فما يمكن قياسه هو الحقل الكهربائي $\vec{E}$.

بمعيار كولوم تصبح (II-4) :

$$\left(\nabla^2\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right)= -\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{\nabla}V}{\partial t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{II}-7)$$

II-4- 2-2 معيار لورنتز:

في هذا المعيار نختار:

$$div\vec{A}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{II}-8)$$

لقد صُمِّم هذا المعيار لاستبعاد الحد الأوسط من المعادلة (II-4)، و بذلك يكون:

$$\nabla^2\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}\ldots\ldots\ldots(\mathrm{II}-9)$$

و المعادلة (II-3) تصبح:

$$\nabla^2\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\ldots\ldots\ldots(\mathrm{II}-10)$$

ميزة معيار لورنتز هي معالجته لـ V و $\vec{A}$ بشكل متماثل، فالمؤثر التفاضلي نفسه:

$$\nabla^2-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\square^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{II}-11)$$

و يُدعى مؤثر دالامبير (دالامبيرسيان):

$$\left.\begin{aligned}\square^2\vec{A}&=-\mu_0\vec{J}\\ \square^2 V&=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II-12)$$

إن المعالجة المتواضعة لـ V و $\vec{A}$ جيدة في سياق النسبية الخاصة، حيث يكون الدالامبيرسيان هو التعميم الطبيعي للابلاسيان، و المعادلتان $(II-12)$ يمكن النظر إليهما كنسخة ذات أربعة أبعاد لمعادلة بواسون. في هذا

السياق نفسه يمكن النظر إلى المعادلة الموجية ذات سرعة الانتشار C $(\square^2 f = 0)$ كنسخة ذات أربعة أبعاد لمعادلة لابلاس. في معيار لورنتز يحقق الكمونان V و $\vec{A}$ معادلة موجة غير متجانسة، يُستبدل الطرف الأيمن المعدوم منها بكثافة شحنة حجمية ρ أو كثافة تيار حجمي $\vec{J}$.

باستخدام معيار لورنتز تختزل كل الكهروديناميكا إلى حل معادلة موجة غير متجانسة لمنابع خاصة؛ أيْ إلى المعادلتين (II-12) لـ $\vec{J}$ و ρ محددتين.

II-4- 3 الكمونات المتأخرة:

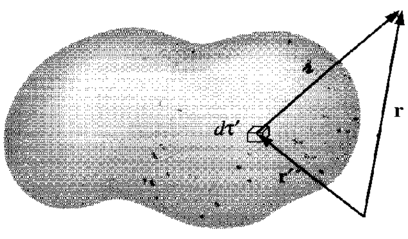
في الحالة الساكنة تُختزل المعادلة (II-12) إلى معادلة بواسون بأربع نسخ:

$$\square^2 V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad ، \qquad \square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

بحلولها الشهيرة:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r`})}{\mathcal{r}} d\tau` \quad ، \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{J}(\vec{r`})}{\mathcal{r}} d\tau` \ldots\ldots (\mathrm{II}-13)$$

الأشعة و الأبعاد ممثَّلَةٌ كما بالشكل (II -3).



شكل (II -3)

إن الإشارات الكهرومغناطيسية تنتقل بسرعة الضوء، ففي الحالة غير الساكنة لا تصف الحقول حالة المنبع عند اللحظة ذاتها، بل عند زمن سابق t_r يدعى الزمن المتأخر، و هو الزمن أو اللحظة التي غادرت فيها الإشارة المنبع، فالإشارة إذًا يجب أن تقطع مسافة $\mathcal{r}$، و يكون الزمن اللازم لذلك $\frac{\mathcal{r}}{c}$:

$$t_r \equiv t - \frac{\mathcal{r}}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}-14)$$

و يكون التعميم الطبيعي للمنابع غير الساكنة إذًا:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}`, t_r)}{\mathscr{r}} d\tau` \quad ، \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}`, t_r)}{\mathscr{r}} d\tau` \ldots.(\text{II}-15)$$

حيث $\rho(\vec{r}',t_r)$ و $\vec{J}(\vec{r}',t_r)$ هما كثافة الشحنة و كثافة التيار عند الموضع $\vec{r}`$ عند لحظة سابقة t_r . و حيث أن المقادير التي تقع داخل التكامل (المتكاملات) عند زمن سابق، فإن الكمونات تدعى متأخرة. إن ضوء النجوم الذي نشاهده ليلا قد غادر مواقع النجوم منذ وقت طويل.

إن الكمونات المتأخرة تُختزل إلى الحالة الساكنة (II-13) عندما تكون ρ و $\vec{J}$ مستقلين عن الزمن. إن التفسير الفيزيائي للكمونات المتأخرة ذو أهمية كبيرة، فالمعادلتان (II-15) تبينان أنه عند موضع ما $\vec{r}$ و لحظة ما t تكون الكمونات ناتجة عن وجود شحنات و تيارات في مناطق أخرى في الفضاء المحيط في زمن سابق لـ t . الزمن المناسب لكل نقطة مصدر يكون سابقا للزمن t بمقدار يساوي الزمن اللازم للانتقال من المصدر إلى نقطة الحقل $\vec{r}$ بسرعة $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ ، فلو أن شحنة نقطية q موضوعة عن مبدإ الإحداثيات تغيرت فجأة، فإن تأثير هذا التغير لا يمكن تحسسه على بُعد $\mathscr{r}$ ، إلا بعد انقضاء فترة زمنية مقدارها $\frac{\mathscr{r}}{c}$ بعد انتهاء التغير.

II-4- 4 الطاقة الكهرومغناطيسية:

من الطبيعي أن الحقل الكهرومغناطيسي المنتشر يلزمه طاقة كهرومغناطيسية، فكيف يمكن للطاقة الكهرومغناطيسية الانتشار؟ و ما المسؤول عن ذلك؟

نعرّف شعاعا $\vec{S}$ بدلالة الحقلين الكهربائي و المغناطيسي كما يلي:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(\text{II}-16)$$

لنستعمل المتطابقة التالية:

$$div\,(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{rot}\vec{B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(II-17)$$

بالإستعانة بمعادلات ماكسويل (iii) و (iv) و المعادلتين (II-16) و (II-17) يمكن استنباط المعادلة التالية:

$$\varepsilon_0\vec{E}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + div\,(\vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0}) = -\vec{E}.\vec{J} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(II-18)$$

و حيث يمكن كتابة: $\vec{E}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}$ و $\vec{B}.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}$ ، فإنه يمكن كتابة المعادلة (II-18) كما يلي:

$$div\,\vec{S} + \frac{\partial\Omega_{em}}{\partial t} = -\vec{E}.\vec{J} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(II-19)$$

حيث يُعطَى Ω_{em} بالعبارة التالية:

$$\Omega_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-20)$$

و هو يمثل الكثافة الحجمية للطاقة الكهرومغناطيسية، أو الطاقة الكهرومغناطيسية المختزنة في وحدة الحجم من الفضاء الذي يسوده الحقل الكهرومغناطيسي، و هي مجموع حدين، الأول كثافة الطاقة الكهربائية، و الثاني كثافة الطاقة المغناطيسية.

أمّا الحد $(-\vec{E}.\vec{J})$ فهو يمثل المعدّل الزمني للطاقة (الإستطاعة) الضائعة بفعل جول الحراري في وحدة الحجوم.

الفصل الثالث

بعض النماذج السائدة لتفسير الإشعاع

III-1 بعض النماذج السائدة لتفسير الإشعاع:

منابع الإشعاع بعض التركيبات الشحنيّة الكهربائية. الشحنات الساكنة و التيارات المستقرة لا توَلِّد أمواجا كهرومغناطيسية، فالشحنات المسرَّعة و التيارات المتغيرة مع الزمن هي التي تنتج أمواجا كهرومغناطيسية، أو قُلْ هي التي تشع. بمجرد أن تنشأ الأمواج الكهرومغناطيسية تنتشر في الفراغ، مبتعدةً عن المنبع إلى اللانهاية، حاملةً معها الطاقة، فالإشعاع سريان للطاقة بعيدا عن المصدر، بشكل غير قابل للاسترداد.

لنتصورْ طبقة كروية بنصف قطر r. الإستطاعة الكلية للإشعاع العابر لهذا السطح الكروي هي تدفق متجه بوينتنغ عبره:

$$P(r)=\oint \vec{S}\,d\vec{s}=\frac{1}{\mu_0}\oint \vec{E}\times\vec{B}\,d\vec{s} \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III-1)$$

أمّا الاستطاعة الكلية المشَعَّة فهي نهاية هذه الكمية عندما تؤول r إلى اللانهاية:

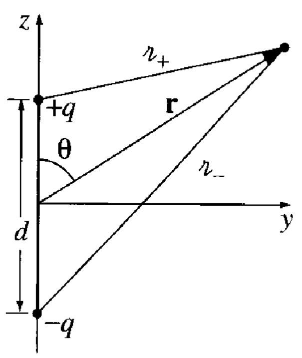
$$P_{rad}=\lim_{r\to\infty}P(r)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III-2)$$

III-1 -2 إشعاع ثنائي الأقطاب الكهربائي المهتز:

هذا النموذج يتألف من شحنتين نقطيتين، البُعد بينهما a و موصولتان ببعضهما بسلك رقيق، الشكل (III-1). عند لحظة t تكون شحنة الكرية العليا q(t) و شحنة الكرية السفلى q(t) -. لنفترض أننا نقود الشحنة جيئة و ذهابا من إحدى النهايتين إلى الأخرى بتردد زاوي ω: $q(t)=q_0\cos(\omega t)\ldots\ldots(\mathrm{III}-3)$

النتيجة إذًا ثنائي أقطاب كهربائي مهتز، له عزم كهربائي متردد: $\vec{p}=p_0\cos(\omega t)\vec{\mathrm{k}}\ldots\ldots\ldots(III-4)$

حيث: $p_0=\mathrm{q_0a}$ هي القيمة العظمى لعزم ثنائي الأقطاب الكهربائي.



الشكل (III-1)

الكمونات المتأخرة عند الموضع $\vec{r}$ و اللحظة t وفقا للمعادلة (II − 15) من الفصل الثاني هي:

$$V(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_0\cos\left(\omega t-\frac{r_+}{c}\right)}{r_+}-\frac{q_0\cos\left(\omega t-\frac{r_-}{c}\right)}{r_-}\right\}\dots\dots\dots\dots(III-5)$$

$$\overrightarrow{r_+}=\vec{r}-\frac{a}{2}\vec{k}\Rightarrow r_+=\sqrt{r^2-2\vec{r}.\frac{a}{2}\ \vec{k}+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{r^2-ra\cos\theta+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{r_-}=\vec{r}+\frac{a}{2}\ \vec{k}\Rightarrow r_-=\sqrt{r^2+2\vec{r}.\frac{a}{2}\ \vec{k}+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{r^2+ra\cos\theta+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$r_\pm=\sqrt{r^2\mp ra\cos\theta+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\dots\dots(III-6)$$

حتى نجعل ثنائي الأقطاب الفيزيائي تاما سنعتبر البعد a صغيرا:

$$a\ll r\dots\dots\dots\dots(III-7)$$

بالطبع إذا كان a صفرا فسنحصل على كمون صفري. ما نريده هو نشر من الرتبة الأولى في a.

$$r_\pm=r\left(1\mp\frac{a}{r}\cos\theta+\left(\frac{a}{2r}\right)^2\right)^{1/2}\cong r\left(1\mp\frac{a}{2r}\cos\theta\right)\dots\dots(III-8)$$

الإستنتاج هو:

$$\frac{1}{r_\pm}\cong\frac{1}{r}\left(1\mp\frac{a}{2r}\cos\theta\right)\dots\dots\dots\dots\dots(III-9)$$

و:

$$\cos\left[\omega\left(t-r_\pm/c\right)\right]\cong\cos[\omega(t-r/c)\pm\omega a/2c\cos\theta]$$

$$\cong\cos[\omega(t-r/c)]\cos\left(\frac{\omega a}{2c}\cos\theta\right)\mp\sin[\omega(t-r/c)]\sin\left(\frac{\omega a}{2c}\cos\theta\right)$$

مرة أخرى لثنائي الأقطاب التام يمكن إجراء التقريب:

$$a\ll\frac{\omega}{c}\dots\dots(III-10)$$

حيث أن الموجات ذات التردد المشترك ω و الطول الموجي $\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$ فإن التقريب الثاني يقتضي أن يكون: $a\ll\lambda$.

في ظل هذه الظروف يكون:

$$\cos[\omega(t-r_{\pm}/c)] \cong \cos[\omega(t-r/c)] \mp \frac{\omega a}{2c}\cos\theta\sin[\omega(t-r/c)] \ldots .(\mathrm{III}-11)$$

بوضع المعادلتين $(\mathrm{III}-9)$ و $(\mathrm{III}-11)$ في $(\mathrm{III}-5)$ نحصل على كمونات ثنائي الأقطاب التام:

$$V(r,\theta,t) = P_0\cos\theta/\,4\pi\varepsilon_0 r\left\{-\frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\ldots\ldots(\mathrm{III}-\mathbf{12})$$

نلاحظ أنه عند النهاية الساكنة $(\omega \to 0)$ ينتج الكمون الناشئ عن ثنائي أقطاب ساكن:

$$V=\frac{P_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\overrightarrow{P_0}.\,\vec{r}/\,4\pi\varepsilon_0 r^3$$

سنهتم بالحقول التي تبقى موجودة حتى عند مسافات كبيرة من المنبع، أو ما يسمى بمنطقة الإشعاع: $r \gg \lambda \gg a$.
في منطقة الإشعاع هذه حيث $\frac{c}{\omega r} \ll 1$ يمكن إجراء:

$$-\frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]=\frac{\omega}{c}\left\{-\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{c}{\omega r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\cong -\frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

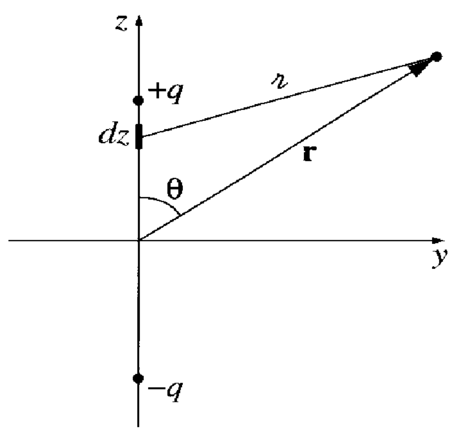
و بالتالي يمكن اختزال الكمون $(\mathrm{III}-12)$ إلى:

$$V(r,\theta,t)=-\frac{P_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\ldots\ldots(\mathrm{III}-\mathbf{13})$$

أما الكمون الشعاعي فيحدد بالتيار الذي يسري في السلك:

$$\vec{I}(t)=\frac{dq(t)}{dt}\vec{k}=-q_0\omega\sin(\omega t)\,\vec{k}$$

من الشكل (III-2) المقابل يمكن كتابة:



الشكل (III-2)

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{-q_0\omega\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]dz\,\vec{k}}{\mathcal{r}}\ldots\ldots\ldots.(\mathrm{III}-14)$$

كما يمكن كتابة: $\vec{\mathcal{r}}=\vec{r}-z\vec{k}$

$$\mathcal{r}=\mathrm{r}\left[1-\frac{2z}{r}\cos\theta+\left(\frac{z}{r}\right)^2\right]^{1/2}\cong r\left(1-\frac{z}{r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{\mathcal{r}}=\frac{1}{r}\left[1-\frac{2z}{r}\cos\theta+\left(\frac{z}{r}\right)^2\right]^{1/2}\cong\frac{1}{r}\left[1-\frac{2z}{r}\cos\theta\right]^{-1/2}$$

بإهمال الرتبة الثانية لـ $\frac{z}{r}$ ، حيث $z\ll r$ ؛ أي $\frac{z}{r}\ll 1$، يمكن كتابة:

$$\frac{1}{\mathcal{r}}\cong\frac{1}{r}\left(1+\frac{z}{r}\cos\theta\right)$$

أيضا:

$$\sin\left[\omega\left(t-\mathcal{r}/\mathrm{c}\right)\right]\cong\sin\left[\omega\left(t-r/c\left(1-\frac{z}{r}\cos\theta\right)\right)\right]\cong\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\omega z}{c}\cos\theta\right]\cong\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

$$\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\sin\left[\omega\left(t-\mathcal{r}/c\right)\right]dz}{\mathcal{r}}\cong\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sin\frac{\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}{r}\left(1+\frac{z}{r}\cos\theta\right)dz\cong\frac{1}{r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\left[z+\frac{z^2}{2r}\cos\theta\right]_{-a/2}^{a/2}$$

$$\vec{A}(r,\theta,t)=\frac{\mu_0P_0\omega}{4\pi r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\vec{k}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{III}-15)$$

نحسب الحقول من الكمونات مباشرة:

$$\vec{\nabla}V=\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$$

$$=-\frac{p_0\omega}{4\pi\varepsilon_0c}\left\{\begin{array}{r}\cos\theta\left(-\frac{1}{r^2}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{\omega}{rc}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right)\vec{e}_r\\-\frac{\sin\theta}{r^2}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\vec{e}_\theta\end{array}\right\}$$

$$=-\frac{p_0\omega}{4\pi\varepsilon_0c}\frac{\omega}{rc}\left\{\begin{array}{r}\cos\theta\left(-\frac{c}{\omega r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right)\vec{e}_r\\-\frac{c}{\omega r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\vec{e}_\theta\end{array}\right\}$$

يُسقَط الحدان الأول و الأخير وفقا للتقريب: $\frac{c}{\omega r} \ll 1$ ، إذًا:

$$\vec{\nabla}V \cong \frac{P_0\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\overrightarrow{e_r} \qquad : c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

و بالمثل فإن:

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{P_0\omega^2\mu_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right](\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta})$$

و منه فإن:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{P_0\omega^2\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\overrightarrow{e_\theta} \dots\dots\dots\dots (\mathrm{III}-16)$$

أيضا:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\overrightarrow{e_\varphi} = -\frac{P_0\omega\mu_0}{4\pi r}\left\{\frac{\omega}{c}\sin\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] + \frac{\sin\theta}{r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\overrightarrow{e_\varphi}$$

باستبعاد الحد الثاني أيضا، وفقا $d \ll \lambda \ll r$، إذًا:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = --\frac{P_0\omega^2\mu_0}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\overrightarrow{e_\varphi} \dots\dots\dots\dots.(\mathrm{III}-17)$$

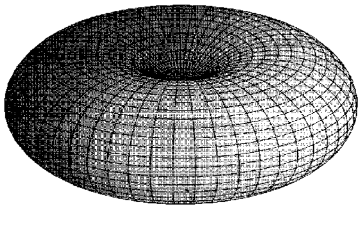
الطاقة المشعّة بثنائي أقطاب مهتز تعيّن بمتجه بونتينغ:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\mu_0}{c}\left\{\frac{P_0\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}^2\overrightarrow{e_r}$$

و يتحصل على الشدة بإجراء متوسط زمني على دورة كاملة:

$$\langle\vec{S}\rangle = \left(\frac{\mu_0{P_0}^2\omega^4}{32\pi^2 c}\right)\frac{\sin^2\theta}{r^2}\overrightarrow{e_r} \dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{III}-18)$$

نلاحظ أنه لا يوجد إشعاع على طول محور ثنائي الأقطاب ($\sin\theta = 0$) ، و منظر الشدة يأخذ شكل كعكة، الشكل (III-3)، حيث تكون قيمة الشدة عظمى عند المستوي الإستوائي.



الشكل (III-3)

الإستطاعة الكلية المشعة تحسب بمكاملة:

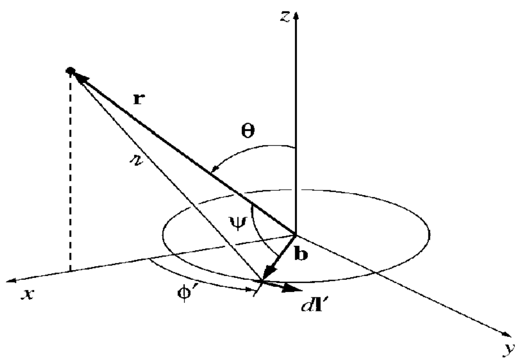
$$\langle P\rangle = \int \langle\vec{S}\rangle.\overrightarrow{ds} = \frac{\mu_0 {P_0}^2\omega^4}{32\pi^2 c}\int \frac{\sin^2\theta}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \mu_0 \frac{{P_0}^2\omega^4}{12\pi c} \dots\dots (\mathrm{III}-19)$$

فهي مستقلة عن نصف القطر، كما هو متوقع من انحفاظ الطاقة.

III-1 -2 إشعاع ثنائي الأقطاب المغناطيسي المهتز:

لنفترض الآن عروة تيار دائرية نصف قطرها b ، يسري فيها تيار متردد، الشكل (III-4):

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) \dots\dots\dots (III-20)$$



الشكل (III-4)

يُدعى هذا النموذج ثنائي أقطاب مغناطيسي مهتز، عزمه المغناطيسي:

$$\vec{m}(t) = \pi b^2 I(t)\vec{k} = m_0 \cos(\omega t)\vec{k}$$

حيث:

$$m_0 = \pi b^2 I_0 \dots\dots\dots (\mathrm{III}-21)$$

هي القيمة العظمى لعزم ثنائي الأقطاب المغناطيسي.

العروة غير مشحونة، لذا فالكمون السلمي معدوم. الكمون الشعاعي المتأخر:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I_0 \frac{\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\overrightarrow{dl}}{r} \dots\dots\dots\dots (\mathrm{III}-22)$$

لموضع $\vec{r}$ يقع مباشرة فوق المحور x ، الشكل (4-III)، ينبغي أن يكون $\vec{A}$ باتجاه y ، حيث أن المركبات x الناجمة عن المواضع المتناظرة على جانبي المحور x سيلغي بعضُها بعضًا، إذا:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 I_0 b\vec{j}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}{\imath}\cos\varphi`\, d\varphi` \dots\dots\dots (\text{III}-23)$$

$$\imath = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\psi}$$

$$\vec{r} = r\sin\theta\,\vec{\imath} + r\cos\theta\vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b\cos\varphi`\vec{\imath} + b\sin\varphi`\vec{j}$$

إذا:
$$\vec{r}.\vec{b} = rb\cos\psi = rb\sin\theta\cos\varphi`$$

و بالتالي:
$$\imath = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\sin\theta\cos\varphi`}$$

إذا اعتبرنا ثنائي الأقطاب تاما فإن:
$$b \ll r\dots\dots\dots (\text{III}-24)$$

$$\imath \cong r\left(1-\frac{b}{r}\sin\theta\cos\varphi`\right) \Rightarrow \frac{1}{\imath} \cong \frac{1}{r}\left(1+\frac{b}{r}\sin\theta\cos\varphi`\right)\dots\dots (\text{III}-25)$$

و:

$$\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \cong \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\varphi`\right]$$
$$\cong \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\varphi`\right) - \sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\sin\left(\frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\varphi`\right)$$

سنفترض هنا أن أبعاد ثنائي الأقطاب صغيرة مقارنة بالطول الموجي المشع: $b \ll \frac{c}{\omega}\dots\dots\dots\dots\dots (\text{III}-31)$

يكون إذًا:

$$\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \cong \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] - \omega b/c\sin\theta\cos\varphi`\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\dots\dots (\text{III}-26)$$

بإدخال المعادلتين (III − 25) و (III − 26) في (III − 23)، و إسقاط الحد ذي الرتبة الثانية، يكون:

$$\vec{A}(\vec{r},t) \cong \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] + b\sin\theta\cos\varphi'\left(\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right)\right\}\cos\varphi' d\varphi'\vec{j}$$

باعتبار ذلك، و ملاحظة أن $\vec{A}$ عموما تكون في الاتجاه $\vec{e}_\varphi$ ، نستخلص أن الكمون الشعاعي لثنائي أقطاب مغناطيسي تام مهتز هو:

$$\vec{A}(\vec{r},\theta,t) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\left\{\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\vec{e}_\varphi \dots\dots (\text{III}-27)$$

نلاحظ أنه عند النهاية الساكنة $(\omega = 0)$ نحصل على الصيغة المعروفة لكمون ثنائي الأقطاب المغناطيسي:

$$\vec{A}(\vec{r},\theta) = \frac{\mu_0 m_0 \sin\theta}{4\pi r^2}\vec{e}_\varphi = \mu_0 \overrightarrow{m_0} \times \vec{r}/4\pi r^3$$

في منطقة الإشعاع: $r \gg \frac{c}{\omega} \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-28)$

يُهمَل الحد الأول من $\vec{A}$ ، إذًا:

$$\vec{A}(\vec{r},\theta,t) = \frac{-\mu_0 m_0}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\vec{e}_\varphi \ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-29)$$

و نحصل على الحقول عند r كبيرة:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\vec{e}_\varphi \ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-30)$$

و

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{-\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\vec{e}_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-31)$$

و يكون متجه بوينتنغ لإشعاع ثنائي الأقطاب المغناطيسي:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\mu_0}{c}\left\{\frac{m_0\omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}^2\vec{e}_r$$

و بتعبير الشدة يكون:

$$\langle\vec{S}\rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2\omega^2}{32\pi^2 c^3}\right)\frac{\sin^2\theta}{r^2}\vec{e}_r \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-32)$$

أمّا الاستطاعة الكلية المشعة فهي:

$$\langle P\rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2\omega^4}{12\pi c^3}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-33)$$

الفصل الرابع

حساب الإشعاع الصادر عن النواقل الكهربائية قبيل الاتزان الكهروستاتيكي

سنقوم في هذا الفصل بوصف النموذج الذي سنعتمد عليه لحساب طاقة الإشعاع الكهرومغناطيسي الصادر عن النواقل الكهربائية أثناء تبادلها للشحنات فيما بينها.

حتى نبسّط الحسابات سنعتبر جملةً مكوَّنةً من كريتين معدنيتين متماثلتين، إحداهما مشحونة بشحنة ابتدائية q_0، و الأخرى غير مشحونة.

عندما نوصّل الكرتين ببعضهما بسلك ناقل فإن الشحنة ستنتقل من الكرية الأولى إلى الكرية الأخرى، حتى يتساوى كموناهما، و تتساوى شحنتاهما؛ أيْ أن الشحنة الابتدائية ستنقسم عليهما بالتساوي، فتصبح شحنة كل منهما $q_0/2$.

IV–1 حساب الإشعاع من منبع كيفي:

إن إيجاد الحقول الكهرومغناطيسية الناشئة عن توزيعات شحنة و تيار متغيرة مع الزمن يبدأ بإيجاد الكمونات، و التي هي حلول للمعادلة العامة:

$$\Box^2\psi(\vec{r},t)=f(\vec{r},t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-1)$$

حيث: $\Box^2\equiv\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$، و يدعى مؤثر دالامبير، و $\psi(\vec{r},t)$ الكمون العام، و هو يمثل الكمون السلمي V أو إحدى مركبات الكمون الشعاعي $\vec{A}$، أمّا $f(\vec{r},t)$ فهي تمثّل منابع الحقول $\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$ أو $\mu_0\vec{J}(\vec{r},t)$.

لنفترضْ أننا نعرف سلوك المنابع مع الزمن بشكل كافٍ، إذًا سيكون تحويل فورييه للمنبع العام $f(\vec{r},t)$:

$$f(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\omega(\vec{r})\,e^{-i\omega t}d\omega\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-2)$$

حيث:

$$f_\omega(\vec{r})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\vec{r},t)\,e^{-i\omega t}dt\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-3)$$

و كذلك الأمر بالنسبة للكمون العام:

$$\psi(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{\omega}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}d\omega\;.................(IV-4)$$

$$\psi_{\omega}(\vec{r})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\vec{r},t)\,e^{-i\omega t}dt\;.................(IV-5)$$

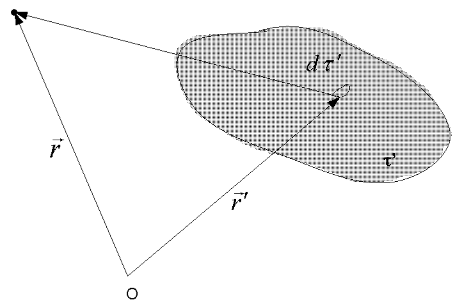
بإدخال تمثيلات فورييه (IV-2) و (IV-4) في المعادلة (IV-1) ، و استخدام علاقة تبدد الفراغ للأمواج الكهرومغناطيسية $\omega=ck$ يكون:

$$\nabla^2\psi_{\omega}(\vec{r})+\mathrm{k}^2\,\psi_{\omega}(\vec{r})=-\mathrm{f}_{\omega}(\vec{r})\;.................(IV-6)$$

و هي معادلة موجية مستقلة عن الزمن، غير متجانسة، في ثلاثة أبعاد، تحمل عادةً اسم: معادلة هلمهولتز.

وفقًا لمخطط الشكل (1-IV) يمكن كتابة حلول

المعادلة (IV-1) كما يلي:



الشكل (1-IV)

$$\mathrm{V}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'}\frac{\rho(\vec{r}',t'_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau'\;.................(IV-7)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t'_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau'\;.................(IV-8)$$

لكثافات التيار و الشحنة المتغيرة مع الزمن يمكن العمل بمركبات فورييه الأحادية $\rho_\omega(\vec{r})$ و $\vec{J}_\omega(\vec{r})$، إذْ يفرض منبعا أحادي اللون، ذا تردد وحيد، و هذا بدوره يتطلب حقولا كهربائية و مغناطيسية تتواجد لأزمنة لانهائية، و مع ذلك فإنه عند أخذ حدود معقولة يمكننا استخدام هذه المقاربة حتى لمنابع و حقول لمدة محدودة. هذا ما سنستخدمه لحساب الحقول الكهربائية و المغناطيسية الناشئة في الفراغ عن كثافات شحنة و تيار $\rho_\omega(\vec{r})$ و $\vec{J}_\omega(\vec{r})$ معرفة بتحويلات فورييه الزمنية.

$$\rho(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_\omega(\vec{r})\,e^{-i\omega t}\,d\omega\;\dots\dots\dots(IV-9)$$

$$\vec{J}(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{J}_\omega(\vec{r})\,e^{-i\omega t}d\omega\;\dots\dots\dots.(IV-10)$$

باعتبار أن الكمونات المتأخرة هي المقبولة فيزيائيا دون الكمونات المتقدّمة، فإن الكمونات المتأخرة تكون:

$$V(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} d\omega \,\ldots\ldots (IV-11)$$

$$V_\omega(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\omega\left(\overrightarrow{r}\right) \frac{e^{-ik\mathscr{r}}}{\mathscr{r}}\, d\omega \,\ldots\ldots (IV-12)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} d\omega \,\ldots\ldots (IV-13)$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} J_\omega\left(\overrightarrow{r}\right) \frac{e^{ik\mathscr{r}}}{\mathscr{r}}\, d\omega \,\ldots\ldots (IV-14)$$

حيث: $\overrightarrow{\mathscr{r}} = \vec{r} - \overrightarrow{r'}$

في النهاية تستخدم المقادير الحقيقية لهذه الكميات.

عندما تكون المنابع وحيدة التردد (ω_0) تبسّط هذه العبارات إلى:

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}$$

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}_0(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}$$

$$V(\vec{r},t) = V_0(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = A_0(\vec{r})e^{-i\omega_0 t}$$

IV–1–1 الحقل المغناطيسي $\vec{B}$:

لنحسب الآن $\vec{B}$ من الكمون الشعاعي $(IV-13)$ و $(IV-14)$ وفقًا لـ:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}(\vec{r},t) \,\ldots\ldots (IV-15)$$

ستختزل الحسابات كثيرا إذا ما اشتغلنا في فضاء ω ، و في النهاية نُرجع تحويل فورييه إلى فضاء الزمن t . سنستخدم شرط لورنتز: $div\,\vec{A} + \frac{1}{C^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ ، و سيأخذ في فضاء ω العبارة:

$$div\overrightarrow{A_\omega} - \frac{ik}{c}V_\omega = 0 \,\ldots\ldots (IV-16)$$

باستخدام تحويل فورييه للمعادلة $(IV-15)$ و عبارة $\vec{A}_\omega(\vec{r},t)$ بالمعادلة $(IV-14)$ نحصل على:

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\int_{\tau`} \vec{J}_\omega\left(\overrightarrow{r`}\right)\frac{e^{ik\mathscr{r}}}{\mathscr{r}}\, d\tau` \,\ldots\ldots (IV-17)$$

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_{\tau`} \frac{\vec{J}_\omega(\vec{r`})\, e^{ik\mathcal{R}} \times \vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^3}\, d\tau` + \int_{\tau`} \frac{(-ik)\, \vec{J}_\omega(\vec{r`})\, e^{ik\mathcal{R}} \times \vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (IV-18)$$

من عبارة الحقل المغناطيسي هذه في فضاء ω نحصل على عبارته في فضاء الزمن t ، و ذلك بأخذ تحويل فورييه المقلوب: $(-ik = -\frac{i\omega}{c})$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau`} \frac{\vec{J}(\vec{r`}, t`_{ret}) \times \vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^3}\, d\tau` + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau`} \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r`}, t`_{ret}) \times \vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}\, d\tau` \ldots\ldots (IV-19)$$

حيث: $t`_{ret} = t - \frac{\mathcal{R}}{c}$ ، $\dot{\vec{J}}\left(\vec{r`}, t_{ret}\right) = \left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right)_{t=t_{ret}}$

يكون الحد الأول من المعادلة $(IV-19)$ مهيمنا بالقرب من مصدر التيار، لكنه سرعان ما يضمحل، و يُدعى حقل التحريض. أمّا الحد الثاني فيُدعى حقل الإشعاع، أو الحقل البعيد، و يهيمن عند المسافات البعيدة، و يمثل الطاقة المنتقلة إلى المالانهاية.

IV–1–2 الحقل الكهربائي $\vec{E}$:

لحساب الحقل الكهربائي نستخدم تحويل فورييه الزمني للعبارة:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\overrightarrow{grad}V(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) \ \ldots\ldots\ldots\ \ldots (IV-20)$$

بإدخال المعادلتين $(IV-11)$ و $(IV-12)$ يكون:

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}V_\omega(\vec{r}) + i\omega\vec{A}_\omega(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau`} \frac{\rho(\vec{r`}, t`_{ret})\vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^3} d\tau` + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{\tau`} \frac{\left[\vec{J}(\vec{r`}, t`_{ret}).\vec{\mathcal{R}}\right]}{\mathcal{R}^4} d\tau` + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{\tau`} \frac{\left[\vec{J}(\vec{r`}, t`_{ret}) \times \vec{\mathcal{R}}\right] \times \vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^3}\, d\tau` +$$
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{\tau`} \frac{\left[\dot{\vec{J}}(\vec{r`}, t`_{ret}) \times \vec{\mathcal{R}}\right] \times \vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^3}\, d\tau` \ \ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots (IV-21)$$

يمثل الحد الأول من المعادلة $(IV-21)$ حقل كولوم المتأخر، أمّا الحدّان الثاني و الثالث فيمثلان الحقل ذا المدى المتوسط، أمّا الحد الأخير فهو حقل الإشعاع، و هو المسؤول عن نقل الطاقة إلى مسافات بعيدة.

عند هذا الحدّ نكون قد أوجدنا العبارات التحليلية التامة للحقول الكهربائية و الحقول المغناطيسية عندما تكون المنابع كيفية.

2-IV حقول الإشعاع:

سندرس الآن أجزاء الحقول الكهرومغناطيسية القادرة على حمل الطاقة بعيدا عن المنابع، و هي التي تُدعى حقول الإشعاع.

من المعادلتين $(IV-19)$ و $(IV-21)$ نحصل على:

$$\vec{B}^{rad}(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{B}_{\omega}^{rad}(\vec{r})e^{-i\omega t}d\omega=\frac{\mu_0}{4\pi c}\int_{\tau'}\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t'_{ret})\times\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^{2}}\,d\tau' \;\ldots\ldots(IV-22)$$

$$\vec{E}^{rad}(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_{\omega}^{rad}(\vec{r})e^{-i\omega t}d\omega=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{\tau'}\frac{\left[\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t'_{ret})\times\vec{\mathscr{r}}\right]\times\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^{3}}\,d\tau' \;\ldots\ldots(IV-23)$$

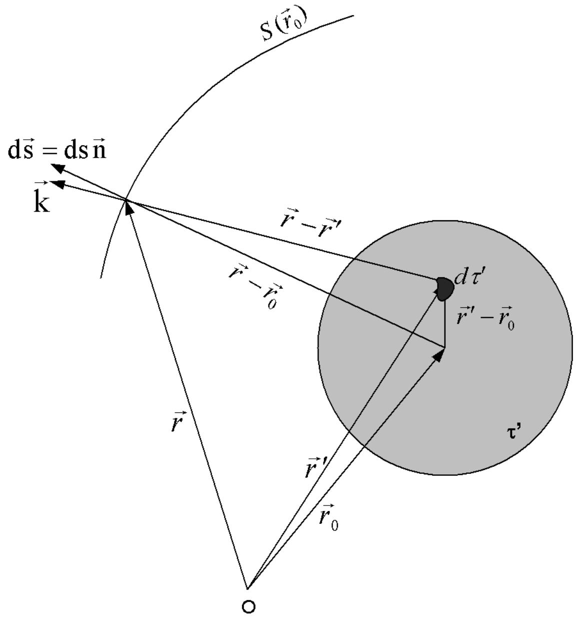
بدلا من دراسة الحقول في مجال الزمن t ، يمكننا غالبا إنجاز تحليل طيفي في مجال الترددات ω ، و دراسة كل مركبة فورييه مستقلةً. تراكب كل هذه المركبات و العودة إلى مجال الزمن سيقودنا إلى الحل التام.

$$\vec{B}_{\omega}^{rad}(\vec{r})=-\frac{i\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{\vec{J}_{\omega}(\vec{r}')\times\vec{k}}{\mathscr{r}}\;e^{ik\mathscr{r}}d\tau' \;\ldots\ldots(IV-24)$$

$$\vec{E}_{\omega}^{rad}(\vec{r})=-\frac{i}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{\tau'}\frac{\left[\vec{J}_{\omega}(\vec{r}')\times\vec{k}\right]\times\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^{2}}\;e^{ik\mathscr{r}}d\tau' \;\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-25)$$

حيث: $\vec{k}=\frac{\omega}{c}\frac{\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}}$

بالاستعانة بالمخطط الموضح بالشكل (2-IV) فإنه إذا كان المنبع $d\tau'$ قريبا من الموضع $\vec{r}_0$ داخل الحجم τ' ، و كان $|\vec{r}'-\vec{r}_0|\ll|\vec{r}-\vec{r}'|$ ، و كان لسطح التكامل S المتمركز عند $\vec{r}_0$ نصف قطر كبير كفايةً؛ أي $R_0=|\vec{r}-\vec{r}_0|\gg\max\left(|\vec{r}'-\vec{r}_0|\right)$ ، فإنه يمكننا إجراء التقريب التالي:



الشكل (2-IV)

$$k r \equiv \vec{k}.\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \cong k\left|\vec{r}-\vec{r}'\right| - \vec{k}.(\vec{r}'-\vec{r}_0) = kR_0 - \vec{k}.(\vec{r}'-\vec{r}_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(IV-26)$$

$$ds = R_0^2 d\Omega = R_0^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

من الشكل (2-IV) $\vec{n}$ و $\vec{u}_k = \dfrac{\vec{k}}{k}$ متوازيان تقريبا، لذا يمكننا تقريب:

$$\frac{\vec{u}_k . d\vec{s}}{R_0^2} \cong \frac{ds}{R_0^2} = d\Omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-27)$$

إذًا المعادلتان $(IV-24)$ و $(IV-25)$ تصبحان:

$$\vec{B}_{\omega}^{rad}(\vec{r}) \cong -i\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int_{\tau'}\left[\vec{J}_{\omega}(\vec{r}')\times\vec{k}\right]e^{-i\vec{k}.(\vec{r}'-\vec{r}_0)}d\tau' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-28)$$

$$\vec{E}_{\omega}^{rad}(\vec{r}) \cong i\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\frac{\vec{R}_0}{R_0}\times\int_{\tau'}\left[\vec{J}_{\omega}(\vec{r}')\times\vec{k}\right]e^{-i\vec{k}.(\vec{r}'-\vec{r}_0)}d\tau' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-29)$$

أيْ أنه إذا كان $\left|\vec{r}'-\vec{r}_0\right| \ll \left|\vec{r}-\vec{r}'\right|$ فإن الحقول يمكن اعتبارها موجات كروية، مضروبةً بمعاملات زاوية لابعدية، بتكاملات على الحجم المتضمن للمنابع فقط.

IV–3 الطاقة المشَعَّة:

لنعتبر الطاقة محمولة بحقول الإشعاع $\vec{E}_{\omega}^{rad}(\vec{r})$ و $\vec{B}_{\omega}^{rad}(\vec{r})$. سنعالج إشاراتٍ ذاتَ مُدَدٍ حياة محدودة، و بالتالي شريطا ذا عرض محدود حول الإشارات الوحيدة اللون.

IV–3–1 الإشارات الوحيدة اللون:

إذا كان المصدر وحيد اللون تماما فإنه يمكننا الحصول على متوسط زمني للاستطاعة المشعَّة مباشرة، بإجراء المتسط على دور واحد:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{\mu_0}\left\langle \vec{E} \times \vec{B} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\text{Real}\left\{ \vec{E} \times \vec{B}^* \right\} = \frac{1}{2\mu_0}\text{Real}\left\{ \vec{E}_{\omega} \times \vec{B}^*_{\omega} \right\} \qquad (IV-30)$$

باستخدام تقريبات الحقول البعيدة $(IV-28)$ و $(IV-29)$ ، و كذا $\frac{1}{c} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ و المعاوقة المميزة للفراغ $Rs_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 376,7 Ohms$ نحصل على:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{32\pi^2} Rs_0 \frac{1}{R_0^2} \left| \int_{\tau'} \left[\vec{J}_{\omega}(\vec{r}') \times \vec{k} \right] e^{-i\vec{k}.(\vec{r}'-\vec{r}_0)} d\tau' \right|^2 \frac{\vec{R}_0}{R_0} \qquad (IV-31)$$

أو باستخدام المعادلة $(IV-27)$ ، فتكون الاستطاعة المشعَّة لوحدة الزوايا المجسَّمة:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2} Rs_0 \left| \int_{\tau'} \left[\vec{J}_{\omega}(\vec{r}') \times \vec{k} \right] e^{-i\vec{k}.(\vec{r}'-\vec{r}_0)} d\tau' \right|^2 \qquad (IV-32)$$

IV–3–2 الإشارات ذات الشريط المحدود:

فلإيجاد الطاقة الكلية المشَعة نحتاج المكاملة على كل عرض الشريط. الطاقة الكلية العابرة لوحدة السطوح هي التكامل الزمني لمتجه بوينتنغ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{S}(t)dt = \frac{1}{\mu_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) dt = \frac{1}{\mu_0}\int d\omega \int d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\vec{E}_{\omega} \times \vec{B}_{\omega} \right) e^{-i(\omega+\omega')t} dt \qquad (IV-33)$$

فإذا كاملنا بالنسبة للزمن أوّلا، ثم استخدمنا حقيقة أن: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega+\omega')t} dt = 2\pi\delta(\omega+\omega')$ فإنه يمكن كتابة:

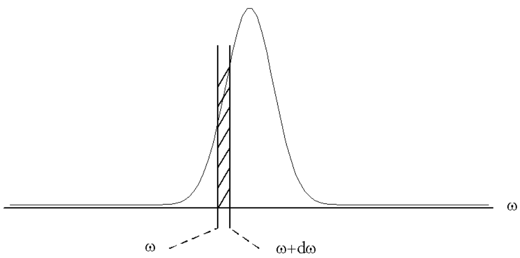
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{S}(t)dt = \frac{2\pi}{\mu_0}\int_0^{+\infty}\left(\vec{E}_\omega \times \vec{B}_\omega^* + \vec{E}_\omega^* \times \vec{B}_\omega\right)d\omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-34)$$

بإدخال تحويلات فورييه لمركبات الحقول المهيمنة عند مسافات بعيدة، المعادلتان $(IV-24)$ و $(IV-25)$، و التي سميناها حقول الإشعاع، فإن النتيجة بعد إجراء التكامل على سطح S لكرة كبيرة تضم الحجم المنبعي τ' هي:

$$U = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\oint_S d\vec{s}\,.\int_0^{+\infty}\left|\int_{\tau'}\frac{\vec{J}_\omega(\vec{r}\,')\times\vec{k}\,e^{-i\vec{k}.(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right|^2 d\tau' d\omega \vec{u}_k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-33)$$

و بإدخال التقريبين $(IV-26)$ و $(IV-27)$ في المعادلة $(IV-35)$، و كذا:

$U = \int_0^{+\infty} U_\omega d\omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-36)$ ، حيث تُدعى U_ω كثافة الطاقة الطيفية، الشكل (3-IV)، نحصل على:



الشكل (3-IV)

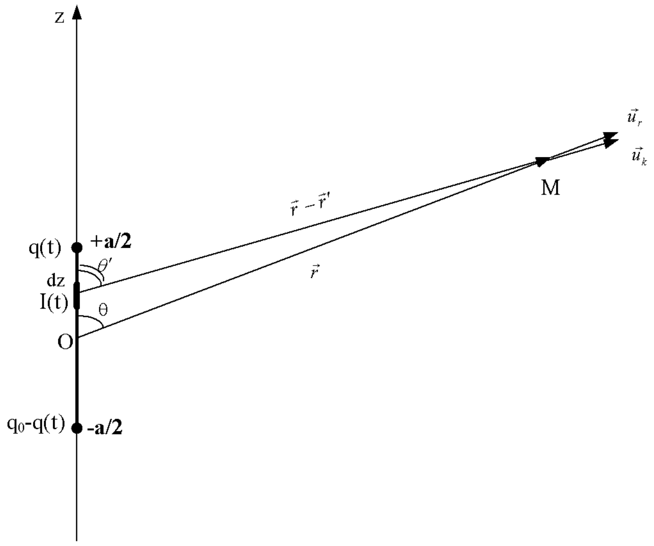
$$\frac{dU_\omega}{d\Omega}d\omega \cong \frac{1}{4\pi}Rs_0\left|\int_{\tau'}\left[\vec{J}_\omega(\vec{r}\,')\times\vec{k}\right]e^{-i\vec{k}.(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}d\tau'\right|^2 d\omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-37)$$

و هو ما يتفق جيدا، عند مسافات بعيدة، مع الطاقة المشَعة لوحدة الزوايا المجسَّمة $d\Omega$ في عرض شريط الترددات $d\omega$.

من المهم الإشارة إلى أن الصيغة $(IV-37)$ تتضمن فقط إحداثيات المنبع، ممّا يعني أن كمية الطاقة المشّعة مستقلة عن البُعد عن المنبع كلما كان بعيدا.

4–IV حساب كمية الطاقة المشَعَّة من جملة كريتين تتبادلان الشحنة فيما بينهما:

يمكننا تمثيل مسألتنا بالمخطط الموضح بالشكل (4–IV)، إذًا سيكون لدينا شحنتان نقطيتان، البعد بينهما a ، موصولتان ببعضهما بسلك رقيق. عند لحظة كيفية t تكون الشحنة السفلى q(t) و الشحنة العليا $q_0 - q(t)$ حيث: q_0 هي الشحنة الابتدائية للكرية السفلى قبل التوصيل.



الشكل (4–IV)

سنسعى في هذه الخطوة إلى إيجاد عبارة $\vec{J}_\omega(\vec{r}')d\tau'$: $\vec{J}_\omega(\vec{r}')d\tau' \equiv I(\vec{r}')\overrightarrow{d\ell'} = I(t)dz\ \vec{k}$

حيث: $\vec{k}$ هو العدد الموجي الممتد من عنصر التيار إلى الموضع M.

حيث أن تيارنا تيار تفريغ، فإنه يمكن كتابته على النحو:

$$I = \frac{dq(t)}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-38)$$

من المعلوم أن تحويل فورييه للدالة الأسية يُكتب كما يلي:

$$e^{-a|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}}{a^2+\gamma^2} e^{-i\gamma x} d\gamma \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-39)$$

لذا يمكننا كتابة:

$$I_0 e^{-t/\tau} = \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\tau}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-i\omega t}}{(\frac{1}{\tau})^2 + \omega^2} d\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV-40)$$

و حيث لدينا من المعادلة $(IV-10)$: $\vec{J}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{J}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} d\omega$ فإنه يمكن بالمقارنة كتابة:

$$\vec{J}_\omega(\vec{r}) \equiv \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\frac{1}{\tau}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}}{(\frac{1}{\tau})^2 + \omega^2} \vec{e_z} = \frac{I_0}{\tau\,\pi} \frac{\vec{e_z}}{\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2\right]} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV-41)$$

سنحسب الآن الاستطاعة المشَعة لوحدة الزوايا المجسَّمة: $\frac{dU_\omega}{d\Omega} \cong \frac{1}{4\pi} Rs_0 \left| \int_{\tau'} \left[\vec{J}_\omega(\vec{r}') \times \vec{k}\right] e^{-i\vec{k}.(\vec{r}'-\vec{r}_0)} d\tau' \right|^2$

لذلك سنبدأ أوّلا بتقدير التكامل: $Integ = \int_{\tau'} \left[\vec{J}_\omega(\vec{r}') \times \vec{k}\right] e^{-i\vec{k}.(\vec{r}'-\vec{r}_0)} d\tau'$

عند مسافات بعيدة يكون: $\vec{u_k} \cong \vec{u}_r$ ، لذا فإن:

$$Integ \cong \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{I_0 \vec{e}_z \times \frac{\omega}{c} e^{i\frac{\omega \vec{u}_r . z\vec{e}_z}{c}}}{\tau\pi\left[\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right]} dz = \left\{\frac{I_0 \omega \sin\theta \vec{e}_\varphi}{c\,\tau\pi\left[\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right]}\right\} \int_{-a/2}^{+a/2} e^{i\frac{\omega}{c} z\cos\theta} dz$$

$$= \left\{\frac{I_0 \omega \sin\theta \vec{e}_\varphi}{c\,\tau\pi\left[\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right]}\right\} \frac{c}{i\,\omega\cos\theta}\left(e^{\frac{i\omega a\cos\theta}{2c}} - e^{\frac{-i\omega a\cos\theta}{2c}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (IV-42)$$

بوضع: $\beta = \frac{\omega a \cos\theta}{2c}$ تصبح المعادلة $(IV-42)$ على النحو التالي:

$$Integ = \frac{I_0 \sin\theta \; 2\sin\beta \vec{e}_\varphi}{\tau\,\pi\left[\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2\right]\cos\theta} \quad \ldots\ldots \;\; \ldots\ldots \;\; \ldots . (IV-43)$$

إذًا:

$$\int_{\tau'} (\vec{J}_\omega(\vec{r}) \times \vec{k})\; e^{i\vec{k}.\vec{r}} d\tau' = \frac{I_0 2\tau \sin\theta \sin\left(\frac{\omega a\cos\theta}{2c}\right)}{\pi(1+\tau^2\omega^2)\cos\theta} \vec{e}_\varphi \ldots\ldots \;\; \ldots\ldots \;\; \ldots . (IV-44)$$

و تكون الاستطاعة المشَعة لوحدة الزوايا المجسمة:

$$\frac{dU_\omega}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\frac{I_0 2\tau \sin\theta \sin\left(\frac{\omega a\cos\theta}{2c}\right)}{\pi(1+\tau^2\omega^2)\cos\theta}\right]^2 \ldots\ldots \;\; \ldots\ldots \;\; \ldots . (IV-45)$$

و بمكاملة العبارة الأخيرة على الزاوية المجسمة الكلية، نحصل على كثافة الطاقة الطيفية:

$$U_\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\frac{I_0 2\,\tau \sin\theta \sin\left(\frac{\omega a\cos\theta}{2c}\right)}{\pi(1+\tau^2\omega^2)\cos\theta}\right]^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi \;\dots\dots\;\dots\dots\;\dots.(IV-46)$$

حيث: $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\, d\theta d\varphi$

$$U_\omega = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\frac{2I_0\tau}{\pi(1+\tau^2\omega^2)}\right]^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \sin^2\left(\frac{\omega a\cos\theta}{2c}\right)\frac{\sin\theta\, d\theta d\varphi}{\cos^2\theta}$$

و حيث أن: $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ فإن:

$$U_\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\frac{2I_0\tau}{\pi(1+\tau^2\omega^2)}\right]^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta \sin^2\left(\frac{\omega a\cos\theta}{2c}\right)\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\dots\dots\;\dots\dots\;\dots.(IV-47)$$

إذًا سوف نهتم بحساب التكامل: $Integ0 = \int_0^{\pi} \sin^3\theta \sin^2\left(\frac{\omega a\cos\theta}{2c}\right)\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

سنضع $A = \frac{\omega a}{2c}$ و بالتالي سيكون:

$$\sin^3\theta \sin^2\left(\frac{\omega a\cos\theta}{2c}\right)\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\sin\theta \sin^2(A\cos\theta)$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\sin^2(A\cos\theta) - \sin\theta\sin^2(A\cos\theta)$$

و يصبح:

$$Integ0 = \int_0^{\pi} \sin\theta \sin^2(A\cos\theta)\frac{d\theta}{\cos^2\theta} - \int_0^{\pi}\sin\theta\, sin^2(A\cos\theta)d\theta \dots\dots\dots\dots\dots(IV-48)$$

لنستخدم التعويض التالي: $u = \cos\theta \rightarrow du = -\sin\theta\, d\theta$ إذًا:

$$= \int_1^{-1} sin^2(Au)\, du - \int_1^{-1}\frac{sin^2(Au)}{u^2}du$$

و باعتبار: $y = \mathrm{Au} \rightarrow dy = Adu$ يكون:

$$Integ0 = \frac{1}{A}\int_A^{-A} sin^2y dy - A\int_A^{-A}\frac{sin^2y}{y^2}dy \dots\dots\dots\dots\dots(IV-49)$$

$$\int sin^2y dy = \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\sin 2y$$

$$\int \frac{sin^2y}{y^2}dy = -\frac{1}{2y} + \frac{\cos 2y}{2y} + 2y - \frac{(2y)^2}{3.3!} + \frac{(2y)^5}{5.5!} - \frac{(2y)^7}{7.7!} + \cdots \dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{cases} y = Au \\ u = cos\theta \end{cases} \Rightarrow y = A\,cos\theta$$

$$Integ0 = \left[\frac{y}{2A} - \frac{1}{4A}\sin 2y + \frac{A}{2y} - \frac{\text{A}\cos 2y}{2y} - A\left(2y - \frac{(2y)^3}{3.3!} + \frac{(2y)^5}{5.5!} - \frac{(2y)^7}{7.7!}\ldots\ldots..\right)\right]_A^{-A}$$

$$= -2 + \frac{\sin(2A)}{A} + \cos(2A) + 2A\left(\frac{(2A)^1}{1.1!} - \frac{(2A)^3}{3.3!} + \frac{(2A)^5}{5.5!} - \frac{(2A)^7}{7.7!}\ldots\ldots\right)\ \ldots\ldots\ldots(IV-50)$$

$$\therefore\ \ U_\omega \cong \frac{2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\frac{I_0\tau}{1+\omega^2\tau^2}\right]^2$$

$$\left\{-2 + \frac{\sin(2A)}{A} + \cos(2A) + 2A\left(\frac{(2A)^1}{1.1!} - \frac{(2A)^3}{3.3!} + \frac{(2A)^5}{5.5!} - \frac{(2A)^7}{7.7!} + \ldots\right)\right\}\ldots\ldots\ldots(IV-51)$$

هذه هي عبارة كثافة الطاقة الطيفية.

إن المتسلسلة الظاهرة في العبارة الأخيرة يمكن اختزالها باستخدام دالة خاصة معرّفة كما يلي:

$$Si(2A) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(2A)^{2k-1}}{(2k-1).(2k-1)!}\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(2A)^{2k-1}}{(2k-1).(2k-1)!} = Si(2A) + \frac{\pi}{2}\ldots\ldots(IV-52)$$

$$\therefore\ \ U_\omega \cong \frac{2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\frac{I_0\tau}{1+\tau^2\omega^2}\right]^2\left\{\pi A - 2 + \cos(2\text{A}) + \frac{\sin(2A)}{A} + 2A\,Si(2A)\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-53)$$

تُعرّف الدالة الخاصة Si على النحو التالي:

$$Si(x) = -\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos t}\cos(x\sin t)\,dt\ \ldots\ldots(IV-54)$$

باستخدام هذه العبارة في المعادلة $(IV-53)$، و من ثمّ في $U = \int_0^{+\infty} U_\omega d\omega$ يكون:

$$U = \int_0^{+\infty} U_\omega d\omega = U_{\omega 0}\left\{-2I_1 - \frac{\pi a}{2c}I_2 + I_3 + \frac{2c}{a}I_4 + \frac{a}{c}I_5\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(IV-55)$$

حيث: $U_{\omega 0} = \dfrac{2}{\pi^2}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}I_0^2\tau^2$

$$I_1 = \int_0^{+\infty}\frac{d\omega}{(1+\omega^2\tau^2)^2}\ ,\ I_2 = \int_0^{+\infty}\frac{\omega\, d\omega}{(1+\omega^2\tau^2)^2}\ ,\ I_3 = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(\frac{a}{c}\omega)d\omega}{(1+\omega^2\tau^2)^2}\ ,\ I_4 = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(\frac{a}{c}\omega)d\omega}{\omega(1+\omega^2\tau^2)^2}\ ,$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty}\frac{\omega\, Si(\frac{a}{c}\omega)d\omega}{(1+\omega^2\tau^2)^2}$$

للتبسيط سنعتبر: $\frac{a}{c} = \tau \Rightarrow a = c\tau$ ؛ أي أن معيار الزمن τ يكون من رتبة: $\left.\begin{matrix} a \sim 1m \\ c = 3.10^8 m/\sec \end{matrix}\right\} \Rightarrow \tau \sim 10^{-8} \sec$

إذًا ستصبح التكاملات المحدودة:

$$I_1 = \frac{\pi}{4\tau}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\tau^2}$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega\tau)d\omega}{(1+\omega^2\tau^2)^2} = \frac{\pi}{2e\tau}$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega\tau)d\omega}{\omega(1+\omega^2\tau^2)^2} = \frac{\pi}{2}(1-\frac{3}{2e})$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\omega Si(\omega\tau)d\omega}{(1+\omega^2\tau^2)^2} = \frac{\pi}{8\tau^2}\left(\frac{e^2-1}{e} - \sqrt{2\pi}\, struveL_{1/2}(1)\right)$$

حيث $struveL$ دالة خاصة تُدعى: (modified struve function)

لقد استخدمنا برنامجا جاهزا على موقع شركة casio للإلكترونيات:

(http://keisan.casio.com/exec/system/1222676855)، و بناءً عليه كان:

$struveL_{1/2}(1) = 0.4333156538$، و بالتالي فإن التكامل الأخير سيكون: $I_5 = \frac{0.158\pi}{\tau^2}$

بالتعويض عن كل تلك التكاملات المحدودة في عبارة الطاقة $(IV-55)$ نحصل على:

$$U = I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\tau}{\pi}(0.09) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV-56)$$

لنقدر الآن قيمة I_0 بدلالة الشحنة الابتدائية q_0.

$$I = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow \frac{q_0}{2} = I_0 \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt = I_0\tau \Rightarrow I_0 = \frac{q_0}{2\tau}$$

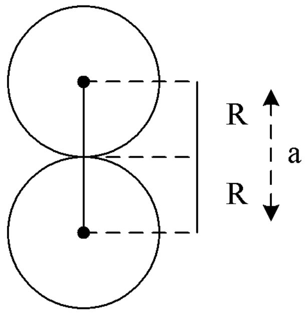
إذًا:

$$U = \frac{q_0^2}{4\tau^2} \frac{\tau}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (0.09) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV-57)$$

و حيث أن: $\frac{1}{\varepsilon_0} = 4\pi 9.10^9 \Rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ فإن:

$$U = 0.045\frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0.045U_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV-58)$$

نشير إلى أننا حصلنا على هذه النتيجة باعتبار $a = 2R$، الشكل (5-IV)، و أن $\tau = \frac{a}{c}$.



الشكل (5-IV)

5–IV مناقشة نتائج الحساب:

إن النتيجة الأخيرة، المعادلة $(IV-58)$، تمثل المقدار المحسوب للطاقة المشعة أثناء التبادل الشحني بين الكريتين، فهي إذًا تمثل ما نسبته 4.5% ؛أيْ $\Delta U = 0.045U_0$، و هي نتيجة أقل ممّا كنا نتوقع بكثير، فما كنا نتوقعه هو النصف تماما.

إذا ما استخدمنا الاعتبار $\tau = \frac{a}{2c}$ بدلا من $\tau = \frac{a}{c}$ فإن نتيجة الحساب ستعطي:

$\Delta U = 0.82U_0$، و هي نتيجة أكبر ممّا هو متوقّع، و إنْ كانت أقربَ من سابقتها.

بالمقارنة بين النتيجتين، فإننا نتوقع أنه عندما تُعطى لـ τ قيمة بين القيميتين السابقتين، فإن الطاقة المشَعّة ستقترب من فارق طاقة الجملة في الحالتين، قبل التوصيل و بعده.

إن الزمن τ يُدعى زمن الاسترخاء، و هو يميز المادة الناقلة، و كذا السعة الكهربائية للجملة، و التي هي مواصف هندسي يميز شكل الناقلين و كذا كيفية توضعهما بالنسبة إلى بعضهما البعض، لذا فإنه إذا ما اختير زمن الاسترخاء بعناية، و ذلك بمراعاة الملاحظات السابقة، فإننا نتوقع أن النتيجة ستقترب كثيرا مما كنا نريده.

عامل آخر ينبغي الإشارة إليه، و هو كون الحسابات بها العديد من التقريبات، و التي قد تكون سببا في ابتعاد النتيجة عمّا كنا نتوقعه.

شيء آخر ينبغي أن لا نغفله، و هو الصوت المسموع، و ربما غير المسموع، الذي يصدر أثناء توصيل النواقل بعضها ببعض، إن ذلك يُعَدُّ أيضا جزءًا من الطاقة المنتشرة بشكل ميكانيكي في الفضاء المجاور لجملة النواقل.

خلاصة شاملة

خلاصة شاملة:

لقد قمنا في هذه المذكرة بحساب الطاقة المفتقدة أثناءٍ توصيل ناقلين ببعضهما، على اعتبار ذلك إشعاعا كهرومغناطيسيا، و هو ما يتجلى في الشرارة الكهربائية التي ترافق هذه العملية.

في سبيل ذلك وصفنا جُملا كهربائية بسيطة مختلفة، و حسبنا طاقاتها، بعد أن قدّمنا التعريف الأساسَ للطاقة المختزنة في الجمل المختلفة. لقد كان فارق الطاقة لجملة كريتين متماثلتين مساويًا النصفَ تماما.

قدّمنا كذلك أسس النظرية الكهرومغناطيسية، ممثَّلةً في معادلات ماكسويل ذائعة الصيت، كما أوردنا الصياغة الكمونية لها.

قمنا أيضا بإيراد نماذج متداولة لأنظمة مشعة، كثنائي الأقطاب الكهربائي المهتز، و ثنائي الأقطاب المغناطيسي المهتز.

قدّمنا نموذجا بسيطا لجملة الكريتين، و التي اعتبرناها جملة مشِعة، ثم بنينا معادلاتنا و حساباتنا على ضوء ذلك، متتبعين في ذلك خطوات حساب مراجعَ معتمدةٍ و موثوقةٍ.

لقد حسبنا الطاقة المشَعَّة الصادرة عن جملة الكريتين الموصوفة سابقا، ثم قارنّاها بفارق طاقتَي الجملة، قبل التوصيل و بعده، فكانت النتيجة مختلفةً عمّا كنا نتوقعه، إلا أننا برّرْنا ذلك بالتقريبات المعتبرة أثناء الحساب، و كذا بإغفال تقدير زمن الاسترخاء، المتعلق أصلا بهندسة الجملة.

المراجـــــــع

قائمة المراجع

باللغة العربية:

- د. مكي الحسني، الكهرباء و المغناطيسية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر
- عبد المجيد معيرش، مدخل إلى النظرية الكهرومغناطيسية – معادلات ماكسويل في الفراغ، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر
- ريتز–ميلفورد، أساسيات النظرية الكهرومغناطيسية، ترجمة: يحي عبد الحميد الحاج علي و الدكتور رحمن رستم عبد الله، وزارة التعليم العالي و البحث العلمي، جامعة الموصل، العراق (1988)

باللغة الأجنبية:

- David Jeffrey Griffiths, Introduction to electrodynamics, 3rd edition, Reed College, Prentice Hall, USA (1999)
- Bo Thidé, Electromagnetic field theory, 2nd edition, Swedish Institute of Space Physics and Department of Physics and Astronomy, Uppsala, Sweden (October 2009)
- Gradshteyn and Ryzhik's, *Table of Integrals, Series, and Products,* Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger editors, 6th edition (July 2000)
- Sami M Al-Jaber and Subhi K Salih, Energy consideration in the two-capacitor problem, Eur. J. Phys. 21 (2000) pp. 341–345

مختصر:

لقد حُسبت الطاقة المفتقدة أثناء توصيل كريتين ناقلتين ببعضهما باعتبارها طاقة كهروستاتيكية مختزنةً في الشحنات، ثم باعتبارها إشعاعا كهرومغناطيسيا. رُغم أن نتيجة طاقة الإشعاع الصادر لم تكن بعيدة كثيرا عن المعقول، إلا أنها إذا ما قورنت بنتيجة الحساب الكهروستاتيكي كانت مختلفةً عمّا هو متوقع. برّرْنا ذلك بالتقريبات المعتبرة أثناء الحساب، و كذا بالتقدير غير الدقيق لزمن الاسترخاء، المتعلق أصلا بهندسة الجملة.

الكلمات المفتاحية: الإشعاع الكهرومغناطيسي، طاقة الإشعاع، الكمونات المتأخرة، حقول الإشعاع، الطاقة الكهروستاتيكية

abstract:
We have calculated the energy missed while connecting two conductive bullets, once as an electrostatic energy stored in the charges, then as an electromagnetic radiation. The calculated radiation energy was not very far from reasonable. It compared to the electrostatic one. It was different from what is expected. We justify that by the approximations considered during the calculation, and by the inaccurate appreciated of the relaxation time. The latter is related by the geometry of system.

Key words: electromagnetic radiation, energy of radiation, retarded potentiels, radiation fields, electrostatic energy

Résumé:

Nous avons calculé l'énergie perdue lors de la connexion de deux balles conductrices, une fois comme une énergie électrostatique stockée dans les charges, puis comme un rayonnement électromagnétique. L'énergie de rayonnement calculé n'était pas très loin du raisonnable. Elle est comparée à celle de l'électrostatique. C'était différent de ce qui est attendue. Nous justifions par les approximations considérées lors du calcul, et par l'inexactitude appréciée du temps de relaxation. Celui-ci est lié par la géométrie du système.

Mots clefs: radiation electromagnetique, énergie de radiation, potentiels retardés, champs de radiation, énergie électrostatique