

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE



SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Nouvelles Technologies de l'information  
et de la communication

Département d'Electronique et Des Télécommunication

Mémoire de fin d'étude

**MASTER**

**Domaine:** Science et Technologie

**Filière:** Automatique

**Spécialité :** Automatique et Système

**Présenté Par :**

Melle BOUBEKRI Radja et Melle BOUSSEBSI Mounira

Thème :

**Contrôle des système non linéaires par des algorithmes basé sur  
les données utilisant l'opérateur de koopman et les techniques  
LPV**

**Soutenu publiquement le:20/06/2023**

**Devant le jury composé de:**

Dr. LARBI Bechka

MAA (UKM Ouargla)

Président

Dr. Houari Toubakh

MCA (UKM Ouargla)

Examineur

Dr. Hamza Azzedine

MCB (UKM Ouargla)

Encadreur

**Année Universitaire :2022/2023**



” إِنَّا فَتَحْنَا لَكَ فَتْحًا مُبِينًا ، لِيغْفِرَ لَكَ اللَّهُ مَا تَقَدَّمَ

مِنْ ذَنْبِكَ وَمَا تَأَخَّرَ وَيَتِمَّ بِنِعْمَتِهِ عَلَيْكَ

وَيَهْدِيكَ صِرَاطًا مُسْتَقِيمًا ، وَيَنْصُرَكَ اللَّهُ نَصْرًا عَظِيمًا ”

(سورة الفتح 1-3)



# Dédicace

Avec l'aide de Dieu tout puissant, nous avons achevé ce modeste travail que je dédie:

À mon chère papa :

Grace à toi je réusis à atteindre ce moment. Tu as été mon soutien toutes mes années d'études.

À ma chère Mama :

Tu étais la source de ma force .

À ma sœur de réalisation de ce travail "BOUSSEBSI Mounira" .

À mon encadreur "HAMZA Azzedine".

À toute la famille et mes amis .

**BOUBEKRI Radja**

**Juin 2023**



# Dédicace

Je dédie cet humble travail à mon cher père « **Mohamed laid** »  
et à l'âme de ma chère mère « **Arar Djamila** »

Et à ma belle-mère et à la femme de mon frère

A mes frères et soeurs et leurs enfants

A mes oncles, tantes et leurs enfants

Et toute la famille « Boussebsi et Arar ».

À tous mes amis, copines et collègues de la classe des  
Automatiques et systèmes

Tous ceux que je connais de près ou de loin

A mon compagnon dans la note, mon amour, **Boubekri Radja**

**Mounira Boussebsi**

**Juin 2023**



# Remercient Remercient

Tout d'abord, nous remercions Allah de nous avoir donné la force d'accomplir ce travail ainsi que la patience de surmonter toutes les difficultés.

Nous adressons nos sincères remerciements et notre gratitude à notre professeur superviseur, **M. hamza Azzedine**, d'une part pour l'acceptation de notre encadrement scientifique, et à d'autre part, pour l'effort qu'il a fourni tout au Long des étapes d'étude.

Nos remerciements vont certainement au président de ce jury **M.Bechka larbi**, et à l'examineur **M.Toubakh Houari** Qu'ils trouvent ici notre grand respect.

Nous vous sommes reconnaissantes de bien vouloir porter intérêt à ce travail.

Nous remercions fortement tous les enseignants du Faculté des Nouvelles Technologies de l'information et de la communication de l'Université Kasdi Merbah Ouargla.

*Mounira et Radja*

*Juin 2023*

**Liste des tableaux**

	<b>Pages</b>
<b>Tableau 1 : Paramètres de l' PIEPB.</b>	39
<b>Tableau 2 : Temps d'exécution moyen (ms) des algorithmes MPC pour différents pas d'échantillonnage</b>	51
<b>Tableau 3 : RMSE (%) des erreurs de suivi pour différent pas d'échantillonnage</b>	52

## Liste des figures

	Pages
<b>Figure 1.1</b> : Schéma illustrant l'opérateur de Koopman pour les systèmes dynamiques non linéaires, tiré de [18]. A gauche l'évolution directe des états $x \in M$ gouvernés par $F$ est représentée. A droite, l'évolution d'observables $y \in R^m$ régis par l'opérateur de Koopman $K$ est représenté. La connexion entre les états et les observables se fait par la fonction observable $g$ .	17
<b>Figure 2.1</b> : Principe de la commande prédictive.	27
<b>Figure 2.2</b> : L'"Horizon mobile" en contrôle prédictif, extrait de [26]. $N$ correspond à la prédiction horizon souvent appelé $H_p$ et $N_c$ à l'horizon de contrôle, souvent appelé $H_c$ .	32
<b>Figure 3.1</b> : Pendule inversé entraîné par un bras (PIEPB) en configuration Haut-Haut.	36
<b>Figure 3.2</b> : Schéma de l' PIEPB.	37
<b>Figure 3.3</b> : (a) Trajectoire de référence, (b) signal d'entrée.	40
<b>Figure 3.4</b> : Identification avec trajectoire unique et $G_3$ sur données d'entraînement. $(-)$ et $(-)$ représentent les trajectoires de $\phi_1$ et $\phi_2$ , respectivement.	42
<b>Figure 3.5</b> : Identification avec trajectoires multiples et $G_3$ sur les données d'entraînement.	43
<b>Figure 3.6</b> : Données d'apprentissage provenant de plusieurs trajectoires.	44
<b>Figure 3.7</b> : Identification avec trajectoire unique et $G_3$ sur données de validation.	45
<b>Figure 3.8</b> : Identification avec plusieurs trajectoires et $G_3$ sur les données de validation.	45
<b>Figure 3.9</b> : Les entrées de formation et de validation.	46
<b>Figure 3.10</b> : Visualisation de la validation avec trajectoire unique et $G_3$ .	46
<b>Figure 3.11</b> : Visualisation de la validation avec plusieurs trajectoires et $G_3$ .	47
<b>Figure 3.12</b> : Identification à trajectoires multiples et $G_2$ sur les données de validation.	48
<b>Figure 3.13</b> : Comparaison de l'application de LQI au modèle linéarisé localement par rapport.	49
<b>Figure 3.14</b> : Comparaison de la fonction de coût quadratique $J$ pour le suivi en boucle fermée avec un modèle approximé en utilisant l'approche locale et l'opérateur de Koopman.	50
<b>Figure 3.15</b> : Comparaison de l'application de MPC au modèle linéarisé localement	51

par rapport au modèle Koopman.



**Liste des annexes**

<b>les annexes</b>	<b>pages</b>
<b>Les algorithmes génétiques</b>	A1

## Liste des abréviations

**DMD : Décomposition en mode dynamique.**

**DMDc : Décomposition en mode dynamique avec contrôle.**

**DOF : degrés de liberté.**

**EDMD : Décomposition en mode dynamique étendu.**

**EIODMD : Décomposition en mode dynamique d'entrée-sortie étendue.**

**SVD : Décomposition en valeurs singulières.**

**POD : Décomposition orthogonale propre.**

**IODMD : Décomposition en mode dynamique des entrées-sorties.**

**MPC : Contrôle prédictif du modèle .**

**MBPC : Contrôle prédictif basé sur le modèle.**

**IIO : Entrée sortie d'incrément.**

**DIO : Entrée sortie directe.**

**PIEPB : Pendule inversé entraîné par un bras.**

**LQGC : quadrature gaussienne linéaire contrôleur**

# Sommaire

Dédicace 1

Dédicace2

Remercient

Liste des tableaux

Liste des figures

Notations et Abréviations

Sommaire

**Introduction Générale** ..... 1

## **Chapitre I : La décomposition en mode dynamique**

1. Introduction.....	5
2. Architecteur de décomposition en mode dynamique.....	6
3. Les Algorithmes de décomposition en mode dynamique.....	8
3.1. décomposition en mode dynamique.....	8
3.2. décomposition en mode dynamique avec contrôle.....	10
3.3. décomposition en mode dynamique des entrées-sorties.....	13
3.4. décomposition en mode dynamique entrée-sortie étendue.....	15
3.4.1. Théorie de l'opérateur de koopman.....	15
3.4.2. Théorie de l'opérateur de koopman et décomposition en mode dynamique	18
3.4.3. décomposition en mode dynamique étendue.....	18
4. Conclusion.....	22

## **Chapitre II : La commande prédictive**

1. Introduction.....	24
2. La commande prédictive.....	24

2.1.Définition.....	24
2.2.Principe de la commande prédictive.....	24
2.3. éléments d'un commande prédictive.....	25
2.4.Les avantages de MPC.....	25
3.Domaine d'application .....	26
4.formulation du problème de suivi du modèle de contrôle prédictive.....	26
4.1.Modèle de processus.....	26
4.1.1.Modèle d'entrées- sorties (DIO).....	27
4.1.2.Incrémenter le modèle d'entrées-sorties.....	28
4.2.Indice de performances.....	29
4.3.Contraintes.....	30
4.4.Optimisation.....	30
4.5.Principe de l'horizon fuyant.....	32
5.Conclusion.....	33

### **Chapitre III :Application et simulation**

1.Introduction.....	35
2.Pendule inversé entraîné par un bras.....	36
3.Identification du système et signal d'identification.....	39
4.Poursuit.....	48
5.Conclusion.....	53
<b>Conclusions générale.....</b>	<b>54</b>

# **Introduction**

### **Introduction générale**

Durant les vingt dernières années, de nombreuses publications ont abordé le problème de la commande des systèmes non linéaires. Ce problème présente de nombreux défis, car contrairement aux systèmes linéaires, pour lesquels l'automatique propose une variété de méthodes de synthèse de commande, les systèmes non linéaires nécessitent une approche de commande non linéaire. Cela s'explique par la grande diversité des structures et des dynamiques complexes des systèmes non linéaires, qui peuvent présenter des comportements très variés.

L'une des techniques les plus employées pour le contrôle des systèmes dynamiques non-linéaires est la commande prédictive à base de modèles. Cette méthode repose sur la construction d'un modèle mathématique qui décrit le comportement dynamique du système. En utilisant ce modèle, des prédictions à court terme sont effectuées afin d'optimiser une fonction de coût et de générer une séquence de commandes optimales. Cependant, la construction du modèle mathématique peut être une tâche complexe, en particulier pour les systèmes non linéaires dont la dynamique peut être difficile à modéliser avec précision. Cela nécessite souvent une connaissance approfondie du système et peut nécessiter des efforts de modélisation importants.

De plus, la commande prédictive à base de modèles est souvent portée à des problèmes de calcul et de temps de réponse. La résolution des problèmes d'optimisation associés à la prédiction et à la génération des commandes peut être intensive en termes de calcul due à la non-linéarité des modèles sur lequel se base, ce qui peut entraîner des retards dans la commande en temps réel. Cela peut être problématique pour les systèmes qui nécessitent une réponse rapide, tels que les systèmes de contrôle de mouvement. La commande à base de modèle linéarisé peut réduire considérablement le temps de calcul, cependant, elle reste valable uniquement dans un voisinage restreint autour d'un point de fonctionnement du système.

Les techniques d'identification linéaire à base de données des systèmes offrent des avantages significatifs dans la modélisation et la commande des systèmes non linéaires. En utilisant des méthodes telles que la régression linéaire, l'analyse en composantes principales (PCA) ou la régression vectorielle à noyau (KVR), ces techniques permettent d'approximer la dynamique du système non linéaire par un modèle linéaire simplifié. Les avantages de ces

approches résident dans leur simplicité de mise en œuvre, leur efficacité de calcul et leur interprétation intuitive. Elles peuvent être utilisées pour extraire des relations linéaires à partir de données expérimentales et fournir des estimations précises des paramètres du modèle. Cependant, ces techniques linéaires basées sur les données peuvent présenter des limites lorsque la non-linéarité du système est trop importante ou lorsque des interactions complexes entre les variables sont présentes. Elles peuvent avoir du mal à représenter avec précision les comportements non linéaires, ce qui peut entraîner des erreurs de prédiction importantes. De plus, la qualité des résultats obtenus dépend fortement de la qualité des données d'entrée et des hypothèses sous-jacentes, ce qui peut limiter leur applicabilité dans des situations réelles.

Du motif d'obtenir des représentations linéaires à partir des données de systèmes non linéaires, un modèle à base de la décomposition en modes dynamique (DMD) et l'opérateur de Koopman est proposé dans ce travail. Cette approche permet de capturer les modes dynamiques du système en utilisant des données expérimentales ou de mesure, sans avoir besoin de connaître explicitement les équations sous-jacentes. En utilisant les modes propres calculés par l'opérateur de Koopman, le modèle DMD offre une représentation compacte et précise de la dynamique du système, même en présence de non-linéarités complexes. Il permet de prédire avec précision l'évolution future du système et de reproduire fidèlement les comportements non linéaires observés. De plus, le modèle DMD peut être utilisé pour extraire les variables d'état et les modes dominants du système, ce qui facilite la compréhension et l'interprétation de sa dynamique. Grâce à sa capacité à gérer les systèmes dynamiques non linéaires sans nécessiter de modèles mathématiques explicites, le modèle DMD basé sur l'opérateur de Koopman offre une approche puissante et prometteuse pour l'identification des systèmes non linéaires.

Par conséquent, l'opérateur de Koopman, bien qu'il fournisse une représentation linéaire d'un système non linéaire, est infiniment dimensionnel. Obtenir une approximation finie de l'opérateur de Koopman reste un défi ouvert. Plusieurs approches ont été explorées pour approximer cet opérateur de Koopman. La décomposition en mode dynamique étendu (EDMD) est l'une de ces méthodes d'approximation où les données d'entrée-sortie sont utilisées pour régresser un opérateur linéaire de dimension finie qui fait progresser les mesures de l'état ou des observables dans le temps.

Après avoir obtenu un modèle linéaire précis représentant la dynamique du système non linéaire, une commande prédictive linéaire a été élaborée avec succès pour contrôler un

système non-linéaire et sous-actionné, le pendule inverse entraîné par un bras. En utilisant les techniques d'identification linéaire à partir des données à base de l'opérateur de Koopman et la DMD, les caractéristiques de la dynamique du pendule inverse ont été capturées et représentées par un modèle linéaire simplifié. Ce modèle a ensuite été utilisé pour prédire le comportement futur du système et générer des commandes optimales afin de stabiliser le pendule dans une position désirée. Cette approche démontre l'efficacité de la modélisation linéaire précise et de la commande prédictive linéaire dans la gestion des systèmes non linéaires complexes.

Ce mémoire est organisé en une introduction, trois chapitres et une conclusion : Le premier chapitre est un exposé des notions fondamentales de la décomposition en mode dynamique et quelques concepts de base sur la théorie de l'opérateur de Koopman.

Dans le deuxième chapitre, est consacré à quelques rappels sur la commande prédictive et son principe, les éléments de (MPC), domaine d'application ....

Le troisième chapitre, on présente la technique de la commande des systèmes non linéaire par les algorithmes et les données en utilisant l'opérateur de Koopman et la commande prédictive.



# **Chapitre I : Décomposition en mode dynamique**

**1.Introduction à la décomposition en mode dynamique:**

La DMD fait partie de l'ensemble de technologies connues sous le nom de technologies fondées sur les données. outils de modélisation approximative de la dynamique non linéaire d'un système dans une équation libre. Les stratégies d'équation libres cherchent à assouplir l'hypothèse selon laquelle les équations d'évolution non linéaire sous-jacentes sont connus, en exploitant l'échantillonnage et la collecte de données dans le système complexe. Par conséquent, DMD inverse le processus et fait usage de l'abondance des données recueillies pour rétro concevoir la gouvernance équations du système à partir de données, comme [1] résume élégamment.

DMD a été appliqué à une grande variété de géométries de flux et il a prouvé sa valeur comme un nouveau outil d'analyse de flux quantitatif comparé à d'autres méthodes. Il est montré dans [2] alors que POD se concentre sur les structures plus énergétiques du flux, DMD isole les moins énergétiques mais plus modèles instables de verticité axiale près de la paroi extérieure du cylindre, qui peut être dynamiquement plus pertinent Depuis lors, différentes variations de DMD ont bondi.

En [3]DMD est généralisée à une plus grande classe de séries chronologiques non séquentielles. De plus, la DMD a été utilisée dans d'autres domaines de Dans le contexte de l'épidémiologie[4] la DMD permet l'interprétation épidémiologique à grande échelle tendances dynamiques, comme la façon dont une infection se propage dans un domaine spatial.

Les renseignements découverts par la DMD présentent le plus grand intérêt pour la planification de l'affectation annuelle des ressources de vaccins Dans le contexte des neurosciences[5], la DMD est utilisée pour extraire des schémas cohérents dans des enregistrements neuronaux à grande échelle pour déchiffrer le comportement oscillatoire de la structure générée dans le cerveau pendant le sommeil, aidant ainsi à relever un défi majeur dans le domaine.

DMD a de nombreuses utilisations et les exemples mentionnés ci-dessus se trouvent dans l'une des trois tâches principales de DMD - Diagnostics. Les trois tâches principales sont, comme le précise[1]:

**1. Diagnostics :** extraction des principales caractéristiques spatio-temporelles des systèmes de grandes dimensions, permettant résultats physiquement interprétables en termes

---

de structures spatiales et de leurs réponses temporelles associées. L'utilisateur peut alors mieux comprendre le système étudié.

**2. Estimation de l'état et prédiction de l'état futur :** anticipation du comportement du système lorsqu'il n'y a pas mesures ont été prises. Cette utilisation plus sophistiquée de l'algorithme DMD peut être en utilisant les structures spatio-temporelles dominantes identifiées pour construire des modèles dynamiques processus sous-jacents observés.

**3. Contrôle :** l'activation des stratégies de contrôle est l'objectif ultime et le plus difficile de l'algorithme DMD. La difficulté intrinsèque est compréhensible car le produit final de DMD - un modèle dynamique linéaire – est utilisé pour prédire l'avenir d'un système dynamique non linéaire. Il est raisonnablement prévisible que Il n'y a qu'une courte période limitée à l'avenir où les deux modèles seront effectivement d'accord.

## **2. Architecture de décomposition en mode dynamique en mécanique des fluides :**

Dans le cadre DMD, les données sont collectées à partir d'un système dynamique:

$$\frac{dx}{dt} = f(x;t;\mu) \quad (\text{I.1})$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur représentant l'état du système dynamique à l'instant  $t$ ,  $\mu$  contient paramètres du système et  $f(\cdot)$  représente la dynamique. Recourant à la perspective sans équation, les mesures de données du système seul sont utilisées pour approximer la dynamique. Le linéaire approximatif le système dynamique peut être construit en temps discret, échantillonnant le système de temps continu analogue chaque  $\Delta t$ :

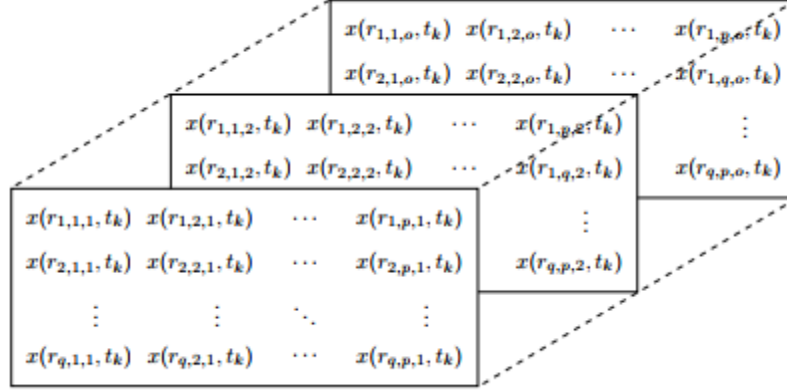
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \quad (\text{I.2})$$

La relation dans (I.2) met en évidence l'hypothèse inhérente qu'un opérateur linéaire

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est responsable de l'évolution du système à chaque instant. Cet opérateur  $\mathbf{A}$  se trouve tel qu'il correspond de manière optimale à la trajectoire mesurée  $\mathbf{x}_k$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$ . À cette fin, la méthodologie de l'instantané est utilisé.

Lors de l'analyse d'une série temporelle de données contenant un champ de vitesse dans une grille d'emplacements spatiaux, il est utile de prendre les données de champ vectoriel 3D au temps  $k$  et aplatir en un seul vecteur colonne. En ce qui concerne

Domaine vectoriel 3D,  $x$  désigne la variable de flux d'intérêt,  $r$  la coordonnée spatiale et l'indice  $k$  pas de temps. Pour un réseau généralisé de points  $q$ ,  $p$  et  $o$  dans les trois directions cartésiennes :



Le vecteur colonne résultant aplati  $x_k \in \mathbb{R}^n$  contenant exactement la même information est appelé un instantané des données.

$$x_k = \begin{bmatrix} x(r_{1,1,1}, t_k) \\ x(r_{1,2,1}, t_k) \\ \vdots \\ x(r_{2,1,1}, t_k) \\ x(r_{q,p,1}, t_k) \\ \vdots \\ x(r_{q,p,o}, t_k) \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

Les instantanés à chaque instant sont ensuite combinés pour former la matrice de données  $X_{full}$  :

$$X_{full} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

Le nombre de lignes  $n$  de la matrice de données est égal au nombre de points spatiaux enregistrés par temps instantané. Le nombre de colonnes  $m$  de la matrice de données est égal au nombre d'instantanés pris, ce qui correspond à son tour au nombre d'instantanés où le champ d'écoulement est échantillonné. La matrice de données est ensuite divisée en deux matrices afin d'approximer l'opérateur  $A$  dans l'équation (I.2), où  $X'$  est le décalage temporel matrice instantanée de  $X$  :

$$X = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{m-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \cdots & \mathbf{x}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

L'équation (I.2) peut maintenant être réécrite en termes d'instantanés de données :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (\text{I.6})$$

Le meilleur ajustement Une matrice est donnée par:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}'\mathbf{X}^\top \quad (\text{I.7})$$

où  $\top$  est la pseudoinverse de Moore-Penrose. Cette solution minimise l'erreur  $\|\mathbf{X}' - \mathbf{A}\mathbf{X}\|$ , où

$\|\cdot\|$  est la norme de Frobenius[6]. Par conséquent, DMD peut être considéré comme un moindre carré, ou régression, d'un système dynamique linéaire best fit  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$  pour les données échantillonnées. La matrice  $\mathbf{A}$  est construit de sorte que  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k\|$  soit minimisé sur tous les instantanés, où  $\|\cdot\|$  est la norme l2 de a vecteur.

En pratique, en raison de la grande dimension d'état  $n$ , la matrice  $\mathbf{A}$  devient insoluble à analyser directement, donc DMD tente d'adapter les instantanés dans le temps à l'aide d'une matrice de rang inférieur qui capture la dynamique du jeu de dates. Une représentation d'ordre inférieur des états  $\mathbf{x}_k$  peut s'écrire :

$$\widetilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{Q}^* \mathbf{x}_k \quad (\text{I.8})$$

où  $\mathbf{Q}$  est une base orthonormée générique qui forme le sous-espace de projection et  $*$  désigne le conjugué transposer. Une explication détaillée des différentes étapes que cette tâche englobe est fournie dans les sous-sections suivantes.

### **3. Algorithmes de décomposition en mode dynamique :**

#### **3.1. Décomposition en mode dynamique :**

Afin de trouver le meilleur opérateur linéaire  $\mathbf{A}$  et sa matrice de rang inférieur correspondante, le DMD standard décrit dans[1] , [3],[7], procède comme suit :

##### **1. Décomposition en valeurs singulières (SVD) de $\mathbf{X}$ :**

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* = [\widetilde{\mathbf{U}} \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{rem}] \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{\Sigma}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_{rem} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{V}}^* \\ \widetilde{\mathbf{V}}_{rem}^* \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

où :  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times m-1}$ ,  $\mathbf{V}^* \in \mathbb{R}^{m-1 \times m-1}$  and  $\widetilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\widetilde{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $\widetilde{\mathbf{V}}^* \in \mathbb{R}^{r \times m-1}$ .

Le l'indice rem indique les  $m - 1 - r$  valeurs singulières restantes. En choisissant judicieusement un valeur de troncature  $r$  du nombre de valeurs singulières à retenir, il est possible d'éliminer le reste rem termes et trouver une approximation SVD réduite de  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{X} \approx \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^* \quad (\text{I.10})$$

Pour des raisons de simplicité, l'approximation SVD tronquée de  $\mathbf{X}$  sera appelée simplement

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^* \quad (\text{I.11})$$

**2. Calculer la matrice  $\mathbf{A}$  dans (I.6) en substituant la SVD de  $\mathbf{X}$  (I.11) dans (I.7) :**

La pseudo-inverse peut maintenant être accomplie puisque  $\Sigma$  est au carré. En utilisant le résultat connu de la pseudo-inverse du SVD :

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{X}'(\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^*)^\top \approx \mathbf{X}' \mathbf{V} \Sigma^{-1} \mathbf{U}^* \quad (\text{I.12})$$

**3. Projeter la matrice  $\mathbf{A}$  de (I.12) sur le sous-espace et obtenir un modèle linéaire de petite dimension  $\tilde{\mathbf{A}}$  :**

La matrice  $\mathbf{A}$  dans (I.12) est de grande dimension de taille  $n \times n$ , et une analyse des valeurs propres pour sous-couvrir la dynamique sous-jacente peut être d'un coût de calcul prohibitif. Par conséquent, un plus compact et modèle informatiquement efficace peut être trouvé, en supposant que  $r \ll n$ , en projetant l'état complet sur un sous-espace linéaire de dimension  $r$ , comme mentionné à la fin de la section I.2. Une transformation pratique a déjà été calculé via la SVD de  $\mathbf{X}$  et le sous-espace de projection  $\mathbf{Q}$  correspond à la gauche vecteurs singuliers  $\mathbf{U}$ , les modes POD.

$$\mathbf{A} \approx \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{U}^* \mathbf{X}' \mathbf{V} \Sigma^{-1} \mathbf{U}^* \mathbf{U} \quad (\text{I.13})$$

Les colonnes de  $\mathbf{U}$  sont orthonormées en raison des propriétés de la SVD, ce qui signifie que  $\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I}$ . Compte tenu de cela, (I.13) se réduit à :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^* \mathbf{X}' \mathbf{V} \Sigma^{-1} \quad (\text{I.14})$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  définit le modèle linéaire de basse dimension du système dynamique sur les coordonnées POD :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}_k \quad (\text{I.15})$$

Les états de haute dimension  $\mathbf{x}_k$  peuvent être reconstruits à partir des états de basse dimension  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  par  $\mathbf{x}_k = \mathbf{U} \tilde{\mathbf{x}}_k$ .

#### 4. Calculer la décomposition propre de $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A}W = W\Lambda \quad (\text{I.16})$$

où les colonnes de  $W$  sont des vecteurs propres et  $\Lambda$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres  $\lambda_k$ . Ceux-ci peuvent être étudiés pour les propriétés fondamentales du système sous-jacent tels que les modes de croissance et les fréquences de résonance.

#### 5. Reconstruire la décomposition propre de $A$ :

Pour approximer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$  sans son calcul explicite, une approximation est calculée sur la base des modes dits DMD. Les valeurs propres de  $A$  sont données par  $\Lambda$  et les vecteurs propres sont approximatés par le mode dynamique, qui correspond aux colonnes de  $\Phi$  dans (I.17), comme initialement proposé dans [8] et figurant dans l'algorithme DMD standard dans [3]:

$$\Phi = UW \quad (\text{I.17})$$

Ces modes dans (I.17) sont appelés modes DMD projetés. Une autre formulation est utilisée pour calculer les modes DMD :

$$\Phi = X'V\Sigma^{-1}W \quad (\text{I.18})$$

Les modes dans (I.18) sont souvent appelés modes DMD exacts, car il a été prouvé dans [3] qu'ils sont les vecteurs propres exacts de la matrice  $A$ . Les modes DMD projetés auront tendance à converger si  $X$  et  $X'$  ont le même espace colonne [1].

### 3.2. Décomposition en mode dynamique avec contrôle :

La décomposition en mode dynamique avec contrôle (DMDc) modifie l'hypothèse de base de la DMD, dans le sens que le système dynamique linéaire reliant l'état futur  $x_{k+1}$  ne repose plus seulement sur l'état actuel l'état  $x_k$ , tel qu'exprimé en (I.2) mais aussi sur le courant de commande  $u_k$ , donné par la relation suivante :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (\text{I.19})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^q$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ .

DMDc permet de comprendre les caractéristiques des systèmes complexes en aidant à découvrir la dynamique sous-jacente sans l'effet confondant du contrôle externe. De plus, la méthode quantifie également l'effet des entrées de commande sur l'état du système [7].

L'algorithme DMDc fonctionne de la même manière que le DMD standard. Outre la collecte des matrices d'instantanés comme dans (I.5), la séquence d'instantanés d'entrée de commande est assemblée :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_{m-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (\text{I.20})$$

La relation (I.19) peut être réécrite en termes de matrices instantanée

$$\mathbf{X}' \approx \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{G} \quad (\text{I.21})$$

En supposant les deux opérateurs A et B inconnu, car il n'y a aucune connaissance sur la façon dont le contrôle affecte le système, (I.21) est manipulé donnant la représentation suivante:

$$\mathbf{X}' \approx \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \Omega \quad (\text{I.22})$$

où  $\Omega$  contient à la fois les informations d'état et d'instantané de contrôle. De manière similaire au DMD standard, présentons le DMDc de manière algorithmique, où le but est de rechercher la solution la mieux ajustée d'ordre inférieur de l'opérateur G, comme décrit dans [7].

### **1. Calculez la SVD de l'espace d'entrée $\Omega$ :**

La SVD de  $\Omega$  est prise avec une certaine valeur de troncature p :

$$\Omega \approx \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^* \quad (\text{I.23})$$

Une approximation de l'opérateur G est maintenant trouvée en prenant la pseudo-inverse de la SVD de  $\Omega$  :  $\mathbf{G} \approx \mathbf{X}' \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^*$ , où  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times (n+q)}$ . En décomposant l'opérateur linéaire  $\tilde{\mathbf{U}}$  en deux composantes distinctes, une approximation explicite des opérateurs A et B est trouvée :

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \approx [\mathbf{X}' \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^*_{\cdot 1}, \mathbf{X}' \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^*_{\cdot 2}] \quad (\text{I.24})$$

Où  $\tilde{\mathbf{U}}_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_2 \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{\mathbf{U}}^*_{\cdot 1} \quad \tilde{\mathbf{U}}^*_{\cdot 2}]^T$  et p est la valeur de troncature de la SVD dans (I.23).

### **2. Calculez la SVD de l'espace de sortie $\mathbf{X}'$ :**

Le SVD de  $\mathbf{X}'$  est nécessaire pour trouver une matrice de sous-espace de projection Q pour calculer le modèle d'ordre inférieur. DMD utilise les valeurs singulières gauches tronquées U



de  $X$  à cette fin. Cependant, DMDC ne peut pas utiliser les vecteurs singuliers gauches  $\tilde{U}$  de  $\Omega$  tels qu'ils sont définis pour l'espace d'entrée, qui maintenant inclut à la fois les mesures d'état et les entrées exogènes[1,7]. En conséquence, les données matricielle de l'espace de sortie  $X'$  est utilisée :  $X' \approx \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^*$  où  $r$  est la valeur de troncature,  $\hat{U} \in \mathbb{C}^{n \times r}$ ,  $\hat{\Sigma} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ ,  $\hat{V}^* \in \mathbb{C}^{r \times m-1}$ . Pour qu'un modèle d'ordre inférieur traitable soit trouvé, généralement  $r < p$ .

### 3. Calculez l'approximation de l'opérateur d'ordre inférieur $G$ :

L'approximation d'ordre réduit des opérateurs  $A$  et  $B$  est alors :

$$\tilde{A} = \hat{U}^* A \hat{U} = \hat{U}^* X' \tilde{V} \Sigma^{-1} \tilde{U}^*_1 \hat{U} \quad (\text{I.25})$$

$$\tilde{B} = \hat{U}^* B = \hat{U}^* X' \tilde{V} \Sigma^{-1} \tilde{U}^*_2$$

où  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  et  $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{r \times q}$ . Le modèle d'ordre réduit peut maintenant s'écrire :

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A} \tilde{x}_k + \tilde{B} u_k \quad (\text{I.26})$$

### 4. Effectuez la décomposition des valeurs propres de $A$ :

$$\tilde{A} W = W \Lambda \quad (\text{I.27})$$

où les colonnes de  $W$  sont des vecteurs propres et  $\Lambda$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres correspondantes  $\lambda_k$ .

### 5. Reconstruisez les modes dynamiques de l'opérateur $A$ :

La transformation des vecteurs propres en modes dynamiques de  $A$  est légèrement modifiée et est donnée par :

$$\Phi = X' \tilde{V} \Sigma^{-1} \tilde{U}^*_1 \hat{U} W \quad (\text{I.28})$$

Le cadre mathématique théorique de DMDC prouve sa valeur en termes de production de modèles d'ordre réduit précis à partir de systèmes complexes avec forçage exogène. Néanmoins, il est développé pour un régime spécifique, où le nombre de mesures d'état est beaucoup plus grand que le rang du système sous-jacent[1]. Pour de nombreuses applications d'ingénierie, le nombre de mesures est généralement inférieur au nombre d'états pour décrire les modèles d'entrée-sortie. Un tel défi est abordé dans la prochaine variante de l'algorithme DMD.

Malgré la fonctionnalité mentionnée empêchant DMDC d'être exploitée dans certaines applications d'ingénierie, elle jette les bases du développement d'algorithmes mieux adaptés. De plus, son applicabilité est large. Dans le contexte de l'épidémiologie, par exemple, l'extension de la DMD à la DMDC aide à planifier les campagnes d'éradication en identifiant comment ces apports favorisent la propagation de la maladie[9].

### **3.3. Décomposition en mode dynamique des entrées-sorties:**

Dans cette section, une extension de l'approche DMD pour inclure les entrées et les sorties est introduite, basée sur les travaux de[10,11], où des modèles d'ordre réduit sont construits pour modéliser le flux du parc éolien en fonction d'une fidélité moyenne et d'une haute fidélité. simulation de fidélité, respectivement.

Dans la section 3.2, la DMD est étudiée dans le contexte du contrôle. Cette approche projette le modèle d'ordre complet sur le sous-espace de sortie, où les entrées sont prises en compte lors de l'ajustement des données à un linéaire système. La décomposition en mode dynamique d'entrée-sortie (IODMD), à son tour, combine la DMD avec l'identification de sous-espace standard, souvent utilisée dans la littérature sur les commandes[12], pour obtenir une entrée-sortie caractérisation du système.

En plus de la relation en (I.19), une seconde est ajoutée pour rendre compte de la correspondance entre la mesure d'état et les sorties :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (\text{I.29})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k$$

où  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^q$  et  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^l$  sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. Les matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{l \times q}$  sont les matrices d'état qui forment ensemble l'espace d'état représentation, un modèle mathématique commun d'un système physique utilisé dans l'ingénierie de contrôle.

La séquence d'instantanés de sortie est maintenant assemblée, ainsi que les instantanés d'entrée et d'états - également précédemment rassemblés dans les méthodologies DMDC et DMD.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y} & \cdots & \mathbf{y}_{m-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (\text{I.30})$$

Réécriture (I.29) en termes de matrices instantanées :

$$\mathbf{X}' \approx \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Y} \quad (\text{I.31})$$

$$\mathbf{Y} \approx \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{Y}$$

La relation dans (I.31) peut à nouveau être réécrite dans un format plus compact, ce qui permet de trouver les opérateurs les mieux ajustés d'ordre inférieur de A, B, C, D :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (\text{I.32})$$

L'état est alors projeté sur le sous-espace défini par une base orthonormée spécifiée par les colonnes de la matrice Q, comme en témoigne (I.8). Les matrices d'état d'ordre inférieur sont alors  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^*\mathbf{A}\mathbf{Q}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^*\mathbf{B}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}}$ . Ces équivalences peuvent être réécrites en fonction des matrices d'ordre supérieur A, B, C et D :

$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^*$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{Q}^*$  et  $\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}}$ . En remplaçant dans (I.32) et en réarrangeant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (\text{I.33})$$

Un choix sous-optimal mais utile pour l'espace de projection est donné par les modes POD de X[11], comme dans la norme DMD. En prenant la SVD de X donnée par  $\mathbf{X} \approx \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$  avec une valeur de troncature r, U est choisi comme Q.

Les matrices d'état d'ordre réduit sont obtenues en minimisant l'erreur de la norme de Frobenius :

$$\min_{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \right\|_F^2 \quad (\text{I.34})$$

où  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{r \times q}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{l \times r}$  et  $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{l \times q}$ . Les matrices d'état d'ordre réduit sont alors obtenues par moindres carrés, en tenant compte du fait que les représentations d'ordre réduit de X et X' sont respectivement  $\mathbf{U}^*\mathbf{X}$  et  $\Sigma\mathbf{V}$  :

$$\Theta_{IODMD} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^*\mathbf{X}' \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma\mathbf{V} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}' \quad (\text{I.35})$$

Cela correspond à une méthode de sous-espace N4SID directe traitable pour estimer les matrices d'états qui peut être appliquée à des systèmes dynamiques multi-variables complexes directement à partir de données[12].

En utilisant la définition de la pseudo-inverse pour une matrice générale  $X$  et sous l'hypothèse que  $X$  a des lignes linéairement indépendantes,  $X'$  peut être écrit comme  $X^*(X^*X)^{-1}$  :

$$\Theta_{IODMD} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^* X' \\ Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma V \\ \emptyset \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma V \Sigma^T V^T & \Sigma V \emptyset^T \\ \emptyset \emptyset^T V^T & \emptyset \emptyset^T \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{I.36})$$

Le modèle d'ordre réduit peut maintenant s'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A} \tilde{x}_k + \tilde{B} u_k & \mu & \\ y_k &= \tilde{C} \tilde{x}_k + \tilde{D} u_k & & \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

Il est important de souligner un point énoncé dans [10] : la ROM arrivée à (I.37) n'est pas un modèle de boîte noire car l'état de la ROM peut être utilisé pour approximer l'état d'ordre complet, par  $x_k = U \tilde{x}_k$ .

### **3.4. Décomposition en mode dynamique entrée-sortie étendue :**

Il a été montré qu'un système non linéaire peut être décrit par superposition de modes dont la dynamique est régie par des valeurs propres. Cependant, à première vue, il peut sembler douteux qu'une telle description d'un système non linéaire complexe fournit des informations précises et que DMD est en effet applicable aux systèmes non linéaires. Néanmoins, il existe des preuves à l'appui de l'applicabilité du DMD en raison de ses liens avec ce que l'on appelle l'opérateur de Koopman, comme indiqué dans [13]. Dans cette sous-section, en raison de sa pertinence, cet opérateur et ses liens avec DMD sont explorés ainsi que les variations qu'il incite aux cadres déjà vus.

#### **1. Théorie de l'opérateur de Koopman :**

L'opérateur de Koopman a été introduit dans [14] et a récemment refait surface dans le contexte des systèmes dynamiques modernes pilotés par les données. En bref, il est défini comme un opérateur linéaire de dimension infinie qui évolue champs d'observables physiques - fonctions scalaires - définis sur un espace d'états - l'ensemble de tous les états possibles - d'un système dynamique.

Plus explicitement, considérons à nouveau le système dynamique générique de l'équation (I.1) et définissons sur un espace d'états  $M$ . Ceci induit un système dynamique à temps discret donné par l'application  $F_t : M \rightarrow M$ , représenté sur la figure 3.1.

$$x_{k+1} = F_t(x_k) \quad (\text{I.38})$$

Une fonction définie par  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée une observable du système, comme représenté sur la figure (3.1). L'opérateur de Koopman  $K_t$  agit sur les fonctions observables  $g$  comme :

$$K_t g = g \circ F_t \quad (\text{I.39})$$

où  $\circ$  est l'opérateur de composition, de sorte que :

$$K_t g(\mathbf{x}_k) = g(F_t(\mathbf{x}_k)) = g(\mathbf{x}_{k+1}) \quad (\text{I.40})$$

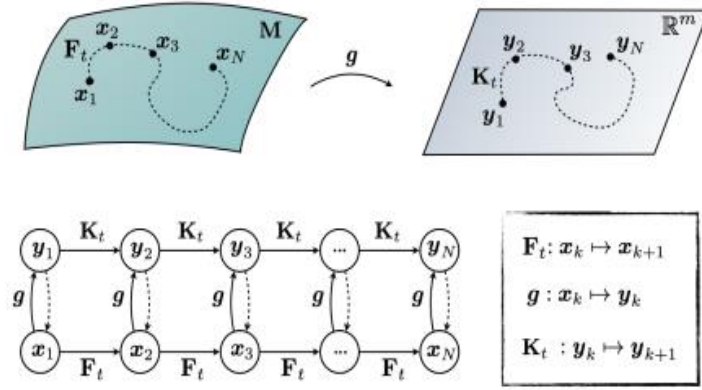
$$g(\mathbf{x}_{k+1}) = K_t g(\mathbf{x}_k) \quad (\text{I.41})$$

Il est maintenant évident dans (I.41) que l'observation de l'état, ou, en d'autres termes, une fonction de la variable d'état mesurée, est avancée au pas de temps suivant par l'opérateur de Koopman. Ceci est vrai pour n'importe quel fonction observable et pour tout point  $\mathbf{x}_k \in M$ , d'où la dimension infinie. La propriété de linéarité découle de sa définition dans (I.39).

La décomposition spectrale de l'opérateur de Koopman est essentielle pour représenter les solutions d'un système dynamique d'intérêt. Considérant le problème aux valeurs propres :

$$K \phi_k = \lambda_k \phi_k \quad (\text{I.42})$$

Les fonctions  $\phi_k(\mathbf{x})$  sont appelées fonctions propres de Koopman et elles définissent un ensemble de coordonnées intrinsèques de mesure, sur lesquelles il est possible de faire avancer ces mesures avec une dynamique linéaire système. Le nouvel espace de mesure formé par un vecteur d'observables  $g(\mathbf{x})$  peut être exprimé en



**Figure I.1 :** Schéma illustrant l'opérateur de Koopman pour les systèmes dynamiques non linéaires, tiré de[15]. A gauche l'évolution directe des états  $x \in M$  gouvernés par  $F$  est représentée. A droite, l'évolution d'observables  $y \in \mathbb{R}^m$  régis par l'opérateur de Koopman  $K$  est représenté. La connexion entre les états et les observables se fait par la fonction observable  $g$ .

termes des fonctions propres de Koopman :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\mathbf{x}) \vartheta_k \tag{I.43}$$

où  $\vartheta_k$  est le kème mode de Koopman de l'application  $F$  correspondant à l'observable  $g$ , associé à la kème fonction propre de Koopman, i. c'est-à-dire la pondération de chaque observable sur la fonction propre. L'expression dans (I.43) peut être interprétée comme une combinaison linéaire des fonctions propres  $\phi_k$  de  $K$  où  $\vartheta_k$  est le coefficient dans le développement. Le système non linéaire peut évoluer soit dans l'espace d'état d'origine, soit dans l'espace de mesure comme dans (I.43).

$$\mathcal{K} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathcal{K} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \vartheta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{K} \varphi_k \vartheta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \vartheta_k \tag{I.44}$$

Les solutions futures peuvent être calculées par multiplication avec les valeurs propres de Koopman,  $\lambda_k \in \mathbb{C}$ , qui caractérisent le comportement temporel du mode de Koopman correspondant  $\vartheta_k$ .

## **2. Théorie de l'opérateur de Koopman et décomposition en mode dynamique :**

Les connexions de DMD à la dynamique non linéaire sous-jacente d'un système à travers la théorie des opérateurs de Koopman ont d'abord été établies dans[13], où il est montré que DMD produit des approximations de valeurs propres de l'opérateur de Koopman et leurs modes correspondants. Une définition mathématique approfondie de l'opérateur de Koopman et de ses propriétés ainsi qu'un aperçu des travaux en croissance rapide utilisant ces deux concepts peuvent être vus dans[16].

DMD est donc une manifestation de la théorie de Koopman pour le cas particulier où les fonctions observables sont l'identité ou une transformation linéaire de l'espace d'état sous-jacent :

$$g_{DMD}(x) = x \quad (I.45)$$

DMD fournit une alternative de calcul traitable, car les matrices de dimension finie qu'il produit sont une approximation de l'opérateur de dimension infinie. En d'autres termes, DMD transforme la conception mathématique utile mais abstraite en un calcul facilement implémentable.

Les connexions avec l'opérateur de Koopman ont donné naissance à des variations de DMD, qui tentent de mieux approximer les valeurs propres et les modes de Koopman et donc d'améliorer l'approximation de la dynamique non linéaire complète. L'idée clé est d'appliquer DMD sur l'espace des observables. À cette fin, les matrices instantanées de (I.5) sont généralisées et assemblées avec des observables.

## **3. Décomposition en mode dynamique étendu :**

La décomposition en mode dynamique étendue (EDMD) a été introduite dans[17], augmentant la DMD pour inclure un ensemble plus riche d'observables non linéaires et, par conséquent, offrant la capacité d'analyser efficacement les systèmes non linéaires. Pour les systèmes de grande dimension où une telle extension pourrait devenir trop coûteuse, des techniques d'apprentissage automatique peuvent être utilisées comme montré dans[18], bénéficiant ainsi de la richesse des observables non linéaires tout en maintenant un coût de calcul acceptable.

Le défi majeur auquel cette approche est confrontée concerne le choix des observables non linéaires, comme le montrent[15,19]. En outre, dans ce dernier cas, d'autres inconvénients de

l'EDMD sont discutés, tels que la perte d'interopérabilité (courant dans les schémas d'apprentissage automatique) et une grande variabilité des résultats (rappelant l'importance de la validation croisée).

Une alternative à l'EDMD standard utilisant des techniques d'apprentissage automatique consiste à sélectionner un ensemble parcimonieux d'observables basé sur la connaissance de la physique du système. Cela signifie que la connaissance des termes non linéaires figurant dans le NPDE qui régissent la dynamique des systèmes complexes est utilisée pour guider la sélection des observables (analogue à la sélection des caractéristiques dans le contexte de apprentissage automatique guidé par des connaissances d'experts). Un aperçu détaillé d'une telle approche est donné dans[19], où des preuves convaincantes sont présentées :

en sélectionnant judicieusement des observables basées sur des termes non linéaires figurant dans le NPDE de Schrödinger, les écarts entre l'approximation de DMD et la vraie solution diminuent considérablement (en environ 3 ordres de grandeur). De plus, dans[20], il est également montré que lorsqu'il est combiné avec un choix adéquat d'observables, l'opérateur de Koopman est capable de cartographier la non-linéaire dynamique sous-jacente avec l'espace observable linéaire, où le DMD peut être mis en œuvre avec une bonne précision (et efficacité).

La représentation linéaire fournie par l'opérateur de Koopman et son correspondant DMD implémentable par calcul, sont utiles non seulement pour la prédiction mais aussi pour le contrôle, comme exploré dans les travaux de [21,22,23]. Dans les deux derniers, une approche structurée est donnée pour dériver des modèles linéaires adaptés au contrôle prédictif basés sur les idées de l'opérateur de Koopman. Cela se résume à une transformation non linéaire des données - appelée levage - et à un problème linéaire des moindres carrés dans l'espace soulevé. Pour les besoins de cette thèse, ces idées sont explorées en utilisant l'Extended Input Output Dynamic Mode Décomposition (EIODMD), qui combine les avantages de l'utilisation d'observables non linéaires avec les méthodes d'identification de sous-espace et la régression des moindres carrés exploitées dans IODMD, permettant de dériver des modèles traitables pour le contrôle prédictif qui intègrent la dynamique pertinente.

La formulation du problème est similaire à IODMD, où le but est de trouver la ROM qui correspond le mieux aux données recueillies. Les matrices d'instantané sont ensuite levées (avec une notation légèrement différente pour correspondre à la littérature actuelle, tout en conservant son sens originel) :



$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) & \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) & \dots & \mathbf{g}(\mathbf{x}_m) \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}'_1) & \mathbf{g}(\mathbf{x}'_2) & \dots & \mathbf{g}(\mathbf{x}'_m) \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \quad (\text{I.46})$$

Où  $\mathbf{g} = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \mathbf{g}_p(\mathbf{x})]^T$ .

L'algorithme procède de la même manière que précédemment. Le sous-espace de projection  $Q$  correspond aux vecteurs singuliers gauches issus de la SVD de  $X$  :

$$\min_{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right\|_F^2 \quad (\text{I.47})$$

En définissant la première observable  $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  comme dans (I.45), il est possible de conserver l'état d'intérêt, tout en bénéficiant de l'extension DMD en choisissant soigneusement les observables non linéaires restantes.

Dans la méthodologie définie dans[21], les fonctions  $\mathbf{g}$  peuvent non seulement représenter des fonctions non linéaires de l'état

mais aussi des mesures physiques, telles que les sorties. Dans le cas d'un système de grande dimension, le nombre  $b$  de sorties  $l$  peut être significativement plus petit que le nombre d'états  $n$ . Par conséquent, il n'y a peut-être pas besoin de SVD et de projection dans un sous-espace

d'ordre inférieur. La relation dans (I.47) peut être modifiée pour s'adapter aux mesures physiques, en définissant ce que l'on appelle des états déterministes :  $\mathbf{X}_d \in \mathbb{R}^d$ . Assembler les matrices instantanées de ces variables et les insérer dans (I.47), les moindres carrés problème se résume à :

$$\min_{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{X}'_d \\ \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_d & A_{nd} & \tilde{\mathbf{B}}_d \\ A_d & \tilde{\mathbf{A}}_{nd} & \tilde{\mathbf{B}}_{nd} \\ \tilde{\mathbf{C}}_d & \tilde{\mathbf{C}}_{nd} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & U^* & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_d \\ X \\ \mathbb{Y} \end{bmatrix} \right\|_F^2 \quad (\text{I.48})$$

où l'indice  $d$  désigne un terme couplé à un état déterministe et l'indice  $nd$  désigne un terme couplé à un état non déterministe. Le modèle d'ordre réduit est alors calculé par moindres carrés :

$$\Theta_{EIODMD} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'_d \\ U^* \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_d \\ \Sigma V \\ \mathbb{Y} \end{bmatrix}' \quad (\text{I.49})$$

Les matrices d'ordre réduites sont alors :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_d & \mathbf{A}_{nd} \\ \mathbf{A}_d & \tilde{\mathbf{A}}_{nd} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_d \\ \tilde{\mathbf{B}}_{nd} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{\mathbf{C}}_d \quad \tilde{\mathbf{C}}_{nd}], \quad \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}} \quad (\text{I.37})$$

Où  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{(d+r) \times (d+r)}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{(d+r) \times q}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{1 \times (d+r)}$  et  $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{1 \times q}$

Cette extension de IODMD tente d'augmenter la précision de la reconstruction d'état : la généralisation de DMD pour inclure des observables non linéaires, ayant comme point de départ une analyse des termes non linéaires des équations non linéaires gouvernantes, tente d'améliorer l'intégration de la dynamique non linéaire dans le modèle linéaire, améliorant ainsi la prévisibilité des états du modèle.

**4. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons conclu que l'opérateur de Koopman offre une approche puissante pour représenter, analyser et contrôler les systèmes dynamiques. Il permet de capturer des comportements non linéaires, de réduire les dimensions de l'espace d'état, de prédire le comportement futur et de produire des ordres optimaux. Ces avantages en font un outil utile dans de nombreux domaines d'application.

## **Chapitre II : La commande prédictive**

**1.Introduction:**

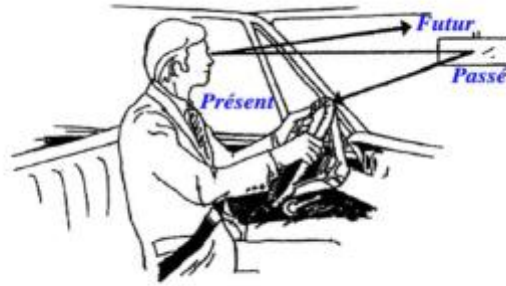
La commande prédictive MPC née d'un besoin réel dans le monde industriel . Dans ce chapitre nous allons Définie la commande prédictive et son principe et des éléments de MPC et domaine d'application. On passe la formulation du problème de MPC ,il contient cinq éléments , à savoir Modèle de processus ,indice de performances, Contraints, optimisation et principe de réduction de l'horizon .Et en fin la conclusion.

**2.La commande prédictive:****2.1. Définition:**

Le Contrôle Prédictif du Modèle (MPC), également connu sous le nom de Modèle basé sur le Contrôle Prédictif (MBPC), est une méthode de commande avancée utilisée dans l'automatisation. Elle est utilisée pour le contrôle des systèmes industriels complexes. Le principe fondamental de cette technologie consiste à utiliser le modèle dynamique du processus interne du contrôleur en temps réel pour prédire le comportement futur du processus.

**2.2.Principe de la commande prédictive :**

Le principe du commande prédictive repose sur la prédiction du comportement futur du système, et en minimisant l'écart par rapport à ces prédictions, le système à contrôler crée un effet attendu par rapport a la trajectoire a connaître à l'avance. Respecter la trajectoire au sens d'une certaine fonction de coût, tout en respectant les contraintes opérationnelles. L'idée est très simple et elle est pratiquée très systématiquement dans la vie quotidienne. Par exemple, le conducteur d'un véhicule connaît á l'avance la trajectoire de référence requise (route) dans une plage de contrôle limitée (son champ de vision), et prend en compte les caractéristiques du véhicule (le modèle mental du véhicule comportemental) pour décider suivre la trajectoire souhaitée Action (accélérer, freiner ou tourner le volant). Seule la première action de conduite est et effectuée à tout moment, et le processus est répété à nouveau pour l'action suivante[24]:



**Figure II.1:** Principe de la commande prédictive

### **2.3.Éléments d'une commande prédictive :**

Chaque algorithme de commande prédictive comprend les mêmes éléments de base, mais offre différentes options pour chacun de ces éléments, ce qui conduit à une variété d'algorithmes disponibles. Les éléments essentiels d'un algorithme de commande prédictive sont les suivants :

- Le modèle du système : Il représente la description mathématique du comportement du système à contrôler.
- Le critère de performance : Il définit les objectifs à atteindre, tels que la minimisation de l'erreur, la stabilité ou la rapidité de réponse.
- L'algorithme d'optimisation : Il détermine la manière dont les actions de commande optimales sont calculées, en prenant en compte le modèle du système et le critère de performance.

### **2.4. Les avantages de MPC:**

- Le contrôleur multivariable est capable de contrôler simultanément les sorties en tenant compte des interactions entre les différentes variables du système.
- Il permet d'éviter des variations excessives sur les variables manipulées, assurant ainsi une commande plus douce.
- En présence de perturbations mesurables, le système s'adapte automatiquement pour maintenir la stabilité et les performances requises.
- En général, il permet de réaliser des économies financières significatives grâce à une meilleure optimisation des variables de contrôle.

### **3. Domaine d'applications:**

Dans les industries modernes où la notion de rendement est prépondérante, le rôle de l'automaticien est de concevoir, de réaliser et d'optimiser, tout au moins d'améliorer les méthodes existantes. Ainsi les domaines d'application sont multiples : aérospatiale, automobile, robotique, aéronautique, internet et les communications en général, mais aussi le secteur médical, chimique, génie des procédés, etc.

Aujourd'hui, le système d'automatisation est complètement devenu notre vie quotidienne (nous n'en savons généralement rien), visant à nous améliorer notre qualité de vie et l'accomplissement de certaines tâches : le système de freinage ABS, assistance à la conduite, servomoteur, thermostat, contrôle d'humidité, contrôle du trac routier, ferroviaire et aérien, rivière, barrage EDF, photographie numérique, lecteurs CD et DVD, réseaux informatiques, moteurs de recherche Sur Internet, circuits, électronique, télécommunications général, contrôle des procédés chimiques, raffinage du pétrole, chaîne industrielle assembler, réconcilier les personnes et autres systèmes médicaux automatisés, faire fonctionner Lasers, robotique, satellites, guides aérospatiaux, bioréacteurs, distillation ; La liste est innie et l'application implique n'importe quel système sur lequel vous pouvez exécuter Agissez pour obtenir les meilleures performances[25].

### **4. Formulation du problème de suivi du modèle de contrôle prédictif :**

#### **4.1. Modèle de processus:**

Une différence importante entre la MPC (Model Prédictive Control) et les autres méthodes de contrôle réside dans l'utilisation explicite d'un modèle. Le grand avantage est que le comportement du contrôleur peut être étudié en détail et les éventuelles défaillances peuvent être détectées avec précision. En revanche, une étude détaillée du comportement de l'installation doit être réalisée, ce qui implique que près de 80 % du travail soit axé sur la modélisation et l'identification de l'installation, comme indiqué dans [26]. Il est donc essentiel de commencer par étudier en premier lieu un modèle fiable qui relie de manière précise les entrées et les sorties. Deux types de modèles de MPC, basés sur la description à espace d'état, sont utilisés.

- **Modèles de sortie d'entrée directe (DIO):** Le signal d'entrée est directement appliqué aux modèles

- **Modèles de sortie d'entrée (IIO) incrément:** les incréments du signal d'entrée sont appliqués aux modèles au lieu de l'entrée directement.

### 1. Modèles de sortie d'entrée directe (DIO):

Le modèle de prédiction linéaire peut être écrit sur la base des équations de l'espace d'état, sachant que l'état futur est une fonction de l'état présent  $x_0$ , des actions de contrôle actuelles et futures et de la dynamique intégrés dans les matrices A et B :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 \quad (\text{II.1})$$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\mathbf{x}_0 + \mathbf{D}\mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0) + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \quad (\text{II.2})$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0) + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1) + \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2 \quad (\text{II.3})$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{C}\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u}_2 = \mathbf{C}(\mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1) + \mathbf{D}\mathbf{u}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_2$$

Les mesures prédites peuvent être écrites sous une forme compacte et généralisées pour un horizon de prédiction  $H_p$ . En désignant le vecteur de puissance  $y$  par  $P$ , correspondant aux variations de puissance du générateur sur les turbines amont et aval :

$$\begin{bmatrix} P_K \\ P_{K+1} \\ P_{K+2} \\ \vdots \\ P_{K+H_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{H_p-1} & CA^{H_p-2}B & CA^{H_p-3}B & \dots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+H_p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{H_p} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (\text{II.4})$$

Si la matrice d'alimentation directe est supposée être nulle, le problème de prédiction se simplifie en :

$$\begin{bmatrix} P_{K+1} \\ P_{K+2} \\ P_{K+3} \\ \vdots \\ P_{K+H_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{H_p-1} & CA^{H_p-2}B & CA^{H_p-3}B & \dots & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+H_p-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{H_p} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (\text{II.5})$$

Qui peut être réécrit sous une forme plus compacte :

$$\bar{P} = \bar{H}\bar{U} + \Gamma \mathbf{x}_k \quad (\text{II.6})$$

où  $\bar{P} \in \mathbb{R}^{H_p \times 1}$ ,  $\bar{H} \in \mathbb{R}^{H_p \times H_c \times q}$ ,  $\bar{U} \in \mathbb{R}^{H_c \times q}$ ,  $\Gamma \in \mathbb{R}^{H_p \times 1 \times r}$ . Le nombre d'entrées et de sorties est respectivement  $q$  et  $l$ .



Les matrices sont définies comme suit :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{K+1} \\ P_{K+2} \\ P_{K+3} \\ \vdots \\ P_{K+Hp} \end{bmatrix}, \bar{H} = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{Hp-1} & CA^{Hp-2}B & CA^{Hp-3}B & \dots & CB \end{bmatrix}, \bar{U} = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+Hp-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{Hp} \end{bmatrix}$$

## 2. Incrémenter le modèle d'entrées-sorties(IIO):

Dans la formulation IIO, les incréments d'entrée  $\Delta u_k$  définis comme  $u_k - u_{k-1}$  sont considérés. Le raisonnement derrière cette approche est basé sur l'amélioration du comportement en régime permanent du contrôleur, comme prouvé dans<sup>1</sup>. Les sorties du processus sont ensuite simulées sur la base des incréments d'entrée, et le modèle d'espace d'état standard peut être réécrit en termes de variables d'incrément :

$$\Delta x_{k+1} = A \Delta x_k + B \Delta u_k \quad (\text{II.8})$$

$$\Delta y_k = C \Delta x_k$$

En prenant la sortie du modèle  $y_k$  comme  $y_{k-1} + C \Delta x_k$ , le nouvel espace d'état peut être formulé :

$$\begin{bmatrix} y_k \\ \Delta x_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ \Delta x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \Delta u_k \quad (\text{II.9})$$

$$y_k = [I \ C] \begin{bmatrix} Y_{K-1} \\ \Delta x_K \end{bmatrix}$$

Qui correspond à l'espace d'état étendu

$$x_{k+1}^e = A_e x^e + B_e \Delta u_k \quad (\text{II.10})$$

$$y_k = C_e x^e$$

Où le nouvel état étendu est maintenant :

$$x_{k+1}^e = \begin{bmatrix} Y_{K-1} \\ \Delta x_K \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

Analogue au MPC IO direct, les prédictions futures pour le MPC IIO peuvent être écrites sous une forme compacte, conduisant à :

$$\begin{bmatrix} P_{K+1} \\ P_{K+2} \\ P_{K+3} \\ \vdots \\ P_{K+Hp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_e B_e & 0 & \dots & 0 \\ C_e A_e B_e & C_e B_e & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_e A_e^{Hp-2} B_e & C_e A_e^{Hp-2} B_e & \dots & C_e B_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+Hp-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_e A_e \\ C_e A_e^2 \\ \vdots \\ C_e A_e^{Hp} \end{bmatrix} x_k^e \quad (\text{II.12})$$

Peut être réécrit sous une forme plus compacte :

$$\bar{P} = \bar{H}_e \Delta \bar{U} + \Gamma_e x_k^e \quad (\text{II.13})$$

#### 4.2. Indice de performances :

Le MPC est utilisé pour résoudre un problème de suivi, ce qui signifie qu'une loi de commande optimale oblige la centrale à suivre une trajectoire de référence souhaitée  $P_{\text{ref}}(t)$  sur un intervalle de temps spécifié  $[t_0, T]$ . désignée par le vecteur  $\hat{P}$ , est calculée en additionnant la prévision de puissance des turbines individuelles, en recourant à la matrice F :

$$\hat{P} = F \bar{P} \quad (\text{II.14})$$

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{K+1} \\ P_{K+1} \\ \vdots \\ P_{K+Hp} \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

Une fonction de coût J peut être écrite de manière à formuler le problème de suivi pour atteindre une certaine valeur de puissance collective  $P_{\text{ref}}$ . Utilisant le modèle IIO du fait de ses avantages par rapport au DIO, la fonction de coût quadratique à minimiser est alors :

$$J = (\hat{P} - P_{\text{ref}})^T Q (\hat{P} - P_{\text{ref}}) + \Delta \bar{U}^T R \Delta \bar{U} \quad (\text{II.16})$$

où  $Q \in \mathbb{R}^{(Hp-1) \times (Hp-1)}$  et  $R \in \mathbb{R}^{(Hc \cdot q) \times (Hc \cdot q)}$  sont respectivement les poids relatifs de l'écart de référence et de l'utilisation des intrants.

En insérant la définition (1.14) dans la fonction de coût J :

$$J = (F \bar{P} - P_{\text{ref}})^T Q (F \bar{P} - P_{\text{ref}}) + \Delta \bar{U}^T R \Delta \bar{U} \quad (\text{II.17})$$

En remplaçant (1.13) dans (1.17), l'expression suivante pour la fonction de coût devient (avec le problème d'optimisation en cours)

$$\min_{[u_{k+1} \dots u_{k+Hp}]} J = (F \bar{H}_e \Delta \bar{U} + F \Gamma_e x_k^e - P_{\text{ref}})^T Q (F \bar{H}_e \Delta \bar{U} + F \Gamma_e x_k^e - P_{\text{ref}}) + \Delta \bar{U}^T R \Delta \bar{U} \quad (\text{II.18})$$

La fonction de coût peut encore être simplifiée, en observant qu'un terme constant apparaît

$$\epsilon = F\Gamma_e \mathbf{x}_e^k - P_{\text{ref}} :$$

$$\mathbf{J} = (\mathbf{F}\bar{\mathbf{H}}_e \Delta\bar{\mathbf{U}} + \epsilon)^T \mathbf{Q} (\mathbf{F}\bar{\mathbf{H}}_e \Delta\bar{\mathbf{U}} + \epsilon) + \Delta\bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{R} \Delta\bar{\mathbf{U}} \quad (\text{II.19})$$

En utilisant les propriétés mathématiques des matrices, l'expression en (1.19) est encore simplifiée :

$$\mathbf{J} = \Delta\bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{H}}_e^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} \bar{\mathbf{H}}_e \Delta\bar{\mathbf{U}} + \Delta\bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{H}}_e^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \epsilon + \epsilon^T \mathbf{Q} \mathbf{F} \bar{\mathbf{H}}_e \Delta\bar{\mathbf{U}} + \epsilon^T \mathbf{Q} \epsilon + \Delta\bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{R} \Delta\bar{\mathbf{U}} \quad (\text{II.20})$$

Pour les besoins de MPC, la fonction de coût est réécrite de la manière suivante, facilitant la formulation de l'étape d'optimisation :

$$\mathbf{J} = \Delta\bar{\mathbf{U}}^T (\bar{\mathbf{H}}_e^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} \bar{\mathbf{H}}_e + \mathbf{R}) \Delta\bar{\mathbf{U}} + 2 \Delta\bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{H}}_e^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \epsilon + \epsilon^T \mathbf{Q} \epsilon \quad (\text{II.21})$$

#### 4.3. Contraintes :

Des contraintes d'inégalité existent en raison de limitations physiques. Dans le cadre de parcs éoliens, les variables de contrôle de la turbine doivent être maintenues dans un certain intervalle. L'angle de lacet est limité à des valeurs comprises entre 0 et -35 degrés. Cette restriction est définie de manière à ce que les DOF opérationnels correspondent à ceux utilisés pour identifier le modèle. La décision de fixer les limites inférieure et supérieure aux valeurs choisies est d'évaluer la performances du modèle en dehors du régime de fonctionnement choisi pour effectuer l'identification des systèmes. Des contraintes au niveau des entrées sont utilisées, et la minimisation des fonctions de coût est alors soumise à :

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{\max} \quad , \quad \mathbf{k} = 1, \dots, \mathbf{H}_p - 1 \quad (\text{II.22})$$

La formulation dans (II.22) stipule que l'action de contrôle optimale à chaque instant dans l'horizon de contrôle  $H_c$  est bornée entre  $\mathbf{u}_{\min}$  et  $\mathbf{u}_{\max}$ . La formulation MPC, cependant, calcule l'action de contrôle incrémentielle optimale  $\Delta\mathbf{u}$ , donc la restriction doit être écrite en termes d'actions incrémentielles. Ceci est traité dans la prochaine sous-section 2.4.

#### 4.4. Optimisation :

La minimisation de la fonction de coût  $\mathbf{J}$  dans (II.21) soumise aux restrictions sur l'angle de lacet dans (II.22) peut être écrite comme un problème de Programmation Quadratique (QP)1, du type :

$$\Delta\bar{\mathbf{U}}_* = \underset{\Delta\bar{\mathbf{U}}}{\min} \left\{ \frac{1}{2} \Delta\bar{\mathbf{U}}^T \mathcal{H} \Delta\mathbf{U} + \mathbf{f}^T \Delta\mathbf{U} \right\}, \text{ sajet à : } \mathbf{M} \Delta\bar{\mathbf{U}} \leq \Lambda \quad (\text{II.23})$$

où  $\mathcal{H}$  et  $f$  sont issus de la formulation de la fonction de coût (1.21) :

$$\mathcal{H} = 2(\bar{\mathbf{H}}_e^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} \bar{\mathbf{H}}_e + \mathbf{R}) \quad f = 2(\bar{\mathbf{H}}_e^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} * (\mathbf{F} \Gamma_e \mathbf{x}_e^k - \mathbf{P}_{ref})) \quad (\text{II.24})$$

où le terme constant  $\bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{c}}$  est absent en raison de sa non-pertinence dans le problème d'optimisation.

Pour chaque instant où le problème d'optimisation est résolu, les incréments futurs de l'angle de lacet pour un horizon donné, en plus de l'angle de lacet à cet instant ou doivent être maintenus dans la plage prédéfinie, comme décrit en (II.22). Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\Delta \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_{k+1} + \Delta \mathbf{u}_{k+2} + \dots + \Delta \mathbf{u}_{k+Hp-1} \leq \mathbf{u}_{max} - \mathbf{u}_0 \quad (\text{II.25})$$

$$\Delta \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_{k+1} + \Delta \mathbf{u}_{k+2} + \dots + \Delta \mathbf{u}_{k+Hp-1} \geq \mathbf{u}_{min} - \mathbf{u}_0$$

qui, en se réarrangeant pour correspondre à la formulation QP dans (II.23) :

$$\sum_{k=1}^{k+Hp-1} \Delta \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{max} - \mathbf{u}_0 \quad (\text{II.26})$$

$$- \sum_{k=1}^{k+Hp-1} \Delta \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{min}$$

Algébriquement, les restrictions de (1.26) sont accomplies en recourant aux matrices  $\mathbf{M}$  et  $\Lambda$ , définies comme suit :

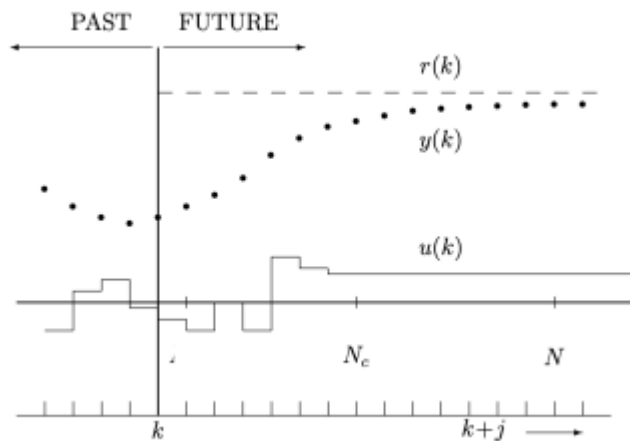
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{max} - \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_{max} - \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_{max} - \mathbf{u}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{max} - \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{min} \\ \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{min} \\ \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{min} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{min} \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Le problème d'optimisation de (1.23) est résolu à chaque instant, en recourant à la fonction intégrée MATLAB quadprog. Ce dernier résout le problème de minimisation indiqué sous les contraintes d'inégalité dans (1.26) et (1.27). En conséquence, les futures actions de contrôle incrémentales optimales - à la lumière du problème en cours, les incréments de  $\gamma t_1$  - sont calculées.

#### 4.5. Principe de l'horizon fuyant :

Le contrôle prédictif utilise le principe de l'horizon fuyant, ce qui signifie qu'après avoir calculé la séquence de contrôle optimale sur l'horizon de contrôle défini  $H_c$ , seul le premier échantillon de contrôle est mis en œuvre. Il en résulte un nouveau réglage de contrôle pour la première turbine. L'horizon est alors décalé d'un échantillon temporel et l'optimisation est relancée avec de nouvelles informations sur les mesures.

Ce principe est illustré sur la figure 1.1, où il est visible qu'au temps  $k$  la séquence de contrôle future est optimisée de sorte que l'indice de performance  $J(u, k)$  soit minimisé sous réserve de contraintes. Cela se traduit par le fait que la sortie prédite  $y(k)$  est très proche de la référence  $r(k)$ . Ensuite, à l'instant  $k$ , le premier élément de la séquence optimale est appliqué au processus réel.



**Figure II.2:** L'"Horizon mobile" en contrôle prédictif, extrait de[26].  $N$  correspond à la prédiction horizon souvent appelé  $H_p$  et  $N_c$  à l'horizon de contrôle, souvent appelé  $H_c$ .

**5. Conclusion**

En résumé, la commande prédictive se présente comme une approche avancée et efficace pour le contrôle des systèmes dynamique. Grâce à sa capacité à anticiper le comportement futur du système, elle permet de générer des commande optimales qui permettent d'atteindre les objectives de performance tout en respectant les contraintes spécifique du système. Bien que sa mise en œuvre puisse comporter des défis, tels que la modélisation précise du système et la résolution en temps réel des problèmes d'optimisation, la commande prédictive présente des avantages significatifs et offre de nouvelles perspectives pour l'amélioration des systèmes de contrôle dans divers domaines d'application. En utilisant cette approche, il est possible d'améliorer les performances des systèmes, d'optimiser l'efficacité énergétique, de réduire les couts et de garantir la sécurité des opérations.

En conclusion, la commande prédictive constitue une avancée majeure dans le domaine du contrôle des systèmes dynamiques et ouvre la voie à de nouvelles possibilités pour une gestion et une optimisation améliorées de ces systèmes.

## **Chapitre III : Application et simulation**

**1. Introduction :**

Dans ce chapitre, nous aborderons la modélisation empirique d'un pendule inverse, qui est entraîné par un bras, ainsi que l'identification de ce système à partir de données en utilisant le modèle de Koopman. Nous explorerons ensuite l'exploitation de ce modèle de Koopman pour une commande prédictive, ce qui nous permettra de contrôler le pendule inverse de manière efficace et précise.

Le pendule inverse est un système dynamique complexe qui présente un comportement non linéaire. Il est composé d'une masse suspendue à un bras, qui peut se déplacer dans un plan vertical. Contrairement à un pendule classique où la masse est suspendue par un fil, dans le pendule inverse, le bras peut bouger de manière à maintenir la masse en équilibre ou à la faire osciller.

La modélisation empirique consiste à obtenir une représentation mathématique du système basée sur des données expérimentales. Dans notre cas, nous recueillerons des informations sur les mouvements du bras et de la masse du pendule inverse à l'aide de capteurs. Ensuite, nous utiliserons ces données pour identifier les caractéristiques et les paramètres du système.

Une approche prometteuse pour l'identification de systèmes complexes est l'utilisation du modèle de Koopman. Le modèle de Koopman est une méthode d'analyse basée sur la théorie des opérateurs linéaires, qui permet de représenter les évolutions dynamiques d'un système non linéaire dans un espace de fonctions. En utilisant ce modèle, nous pouvons capturer les comportements complexes du pendule inverse et estimer les relations entre les variables d'état.

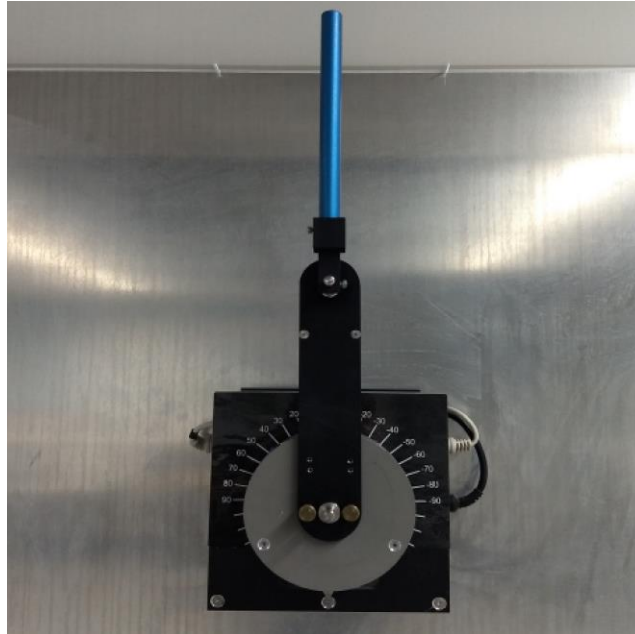
Une fois que nous aurons identifié le système à l'aide du modèle de Koopman, nous pourrons l'exploiter pour la commande prédictive. La commande prédictive est une approche de contrôle qui consiste à prédire le comportement futur du système et à générer une commande en fonction de ces prédictions. En utilisant le modèle de Koopman, nous pourrons prédire les trajectoires du pendule inverse et générer des commandes pour maintenir le système en équilibre ou effectuer des mouvements souhaités.

En résumé, ce chapitre explorera la modélisation empirique d'un pendule inverse entraîné par un bras en utilisant le modèle de Koopman. Nous verrons comment le modèle de Koopman peut être utilisé pour identifier les caractéristiques et les paramètres du système, ainsi que pour générer des commandes prédictives. Cette approche offre de nouvelles



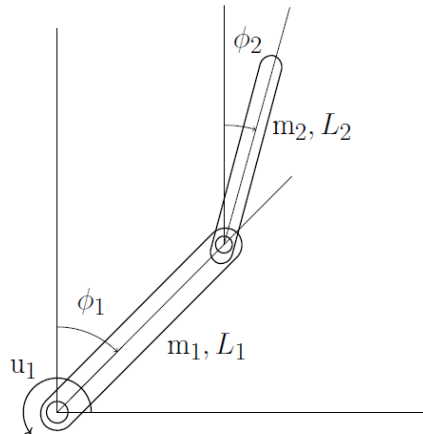
perspectives pour la commande précise et efficace du pendule inverse, avec des applications potentielles dans le domaine de la robotique, du contrôle des systèmes mécaniques et de la stabilisation des systèmes non linéaires.

## **2. Pendule inversé entraîné par un bras :**



**Figure III.1 :** Pendule inversé entraîné par un bras (PIEPB) en configuration Haut-Haut.

Dr Y. Nishi a initialement conçu l' PIEPB à des fins de formation chez Kawasaki industrie lourde au Japon. Ici, le pendule est la partie supérieure et est entraîné par le bras rotatif, qui est la partie inférieure. Un moteur à courant continu actionne le bras. Il s'agit donc d'un système à entrée unique et sorties multiples où les angles du bras,  $\phi_1$ , et du pendule,  $\phi_2$ , sont les sorties mesurées par des encodeurs rotatifs incrémentaux. Il convient de noter que la dynamique de l' PIEPB est fortement non linéaire et chaotique. De plus, l' PIEPB est un système sous-actionné. Cela en fait un problème difficile pour le contrôle. L' PIEPB a une infinité de points fixes, et parmi ceux-ci, un point fixe important est l'équilibre stable du système décrit comme la configuration «bas-bas», où le bras et le pendule sont dans la position descendante c-à-d.  $\phi_1 = \phi_2 = \pi$  radian. Ce système est caractérisé par un seul point d'équilibre stable, et le reste des points fixes constituent des équilibres instables. Dans le cadre de ce travail, un ensemble d'équilibres instables est décrit comme la configuration haut-haut' où le bras et le pendule sont positionnés ainsi  $-\pi/2 < \phi_i < \pi/2$ ,  $i = 1, 2$ . Le cas d'une configuration haut-haut lorsque  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  est représenté sur la Fig. III.1.



**Figure III.2** : Schéma de l' PIEPB.

Considérons un schéma d' PIEPB illustré par la figure III.2. Le bras a une longueur  $L_1$  et a une masse  $m_1$  qui est concentrée à une distance  $l_1$ , le centre de masse approximatif du bras. De même, le pendule a une longueur  $L_2$  et une masse  $m_2$  concentrée à  $l_2$ , le centre de masse approximatif du pendule. Un encodeur est placé sur la liaison entre le bras et le pendule pour mesurer l'angle formé par le pendule avec la verticale. L'encodeur, ainsi que son support sur le bras, ont une masse  $m_3$  située à  $L_1$ .

Les états et les entrées sont définis dans un système de coordonnées cartésiennes à main droite. Comme l' PIEPB est un dispositif plan, seuls les axes  $x$  et  $y$  sont considérés. La rotation angulaire du bras  $\phi_1$  et du pendule  $\phi_2$  est mesurée par rapport à l'axe  $y$ , où une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre est considérée comme positive.  $\phi_1 = \phi_2 = \pi$  lorsque l' PIEPB est en position d'équilibre stable.

Le moteur à courant continu applique un couple  $u_1$  au bras, et la liaison entre le bras et le pendule n'est pas actionnée mais libre en rotation. En conséquence du couple appliqué sur le bras, un couple de perturbation  $u_2$  est ressenti par le pendule. Quelques hypothèses sont faites avant de déduire la dynamique du système. Ces hypothèses sont référencées à partir de celles faites pour un système similaire, le pendule de Furuta, tel que présenté par Cazzolato et al.[27]. Ceux-ci sont:

1. Il est supposé que l'arbre du moteur et le bras sont rigidement couplés et infiniment rigides,
2. On suppose que le pendule est infiniment rigide,

3. Seule la friction visqueuse aux joints avec des coefficients d'amortissement  $C_{arm}$  et  $C_{pend}$  pour le bras et le pendule respectivement est considérée. Toutes les autres formes d'amortissement, si nécessaire, peuvent être ajoutées aux équations finales de mouvement de manière appropriée.

Les équations de mouvement pour l' PIEPB sont formulées par la méthode énergétique d'Euler-Lagrange. Cette formulation ne nécessite que le changement des énergies cinétique et potentielle du système.

Puisque le bras et le pendule sont des corps rigides et que leur masse est uniformément répartie sur leur longueur, il convient de calculer la variation totale de l'énergie cinétique,  $T$ , comme la somme des énergies cinétiques des masses  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$ .

$$T = \frac{1}{2}J_{arm}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}J_{pend}\dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2}m_2v_c^2 + \frac{1}{2}J_{enc}\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}J_{moteur}\dot{\phi}_2^2, \quad (\text{III.1})$$

où  $J_{arm}$  est le moment d'inertie du bras au point de rotation,  $J_{pend}$  est le moment d'inertie du pendule autour de son centre de gravité,  $v_c$  est la vitesse du centre de gravité du pendule,  $J_{enc}$  est la moment d'inertie de la masse  $m_3$  au point de rotation du bras, et  $J_{moteur}$  est l'inertie de rotation du moteur à courant continu. L'énergie cinétique de rotation due à l'inertie de rotation du moteur à courant continu s'ajoute à l'énergie cinétique totale car cette valeur n'est pas négligeable et a un effet considérable sur la dynamique du système.

Le changement d'énergie potentielle du système est calculé de manière similaire comme suit :

$$V = V_1 + V_2 + V_3, \quad (\text{III.2})$$

$$V = m_1gl_1(1 - \cos\phi_1) + m_2g(L_1(1 - \cos\phi_1) + l_2(1 - \cos\phi_2))\theta_3\dot{\phi}_2s_{12} + m_3gL_1(1 - \cos\phi_1).$$

Les équations de mouvement pour l' PIEPB peuvent alors être calculées à partir des équations 1.50 et 1.51 (Appendices) comme suit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (\text{III.3})$$

Où

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_3c_{12} \\ \theta_3c_{12} & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{arm} & \theta_3\dot{\phi}_2s_{12} \\ -\theta_3\dot{\phi}_1s_{12} & C_{pend} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.4})$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\theta_4g\sin(\phi_1) \\ -\theta_5g\sin(\phi_2) \end{bmatrix},$$

Avec

$$\theta_1 = J_{arm} + J_{motor} + J_{enc} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2,$$

$$\theta_2 = m_2 l_2^2 + J_{pend},$$

$$\theta_3 = m_2 L_1 l_2,$$

$$\theta_4 = m_1 l_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1,$$

$$\theta_5 = m_2 l_2,$$

$$s_{12} = \sin(\phi_1 - \phi_2) \text{ et } c_{12} = \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Pour l' PIEPB,  $\mathbf{q} = [\phi_1 \ \phi_2]^T$ ,  $\mathbf{u} = [u_1 \ 0]^T$ , Les paramètres de l' PIEPB sont répertoriés dans le Tableau 1.

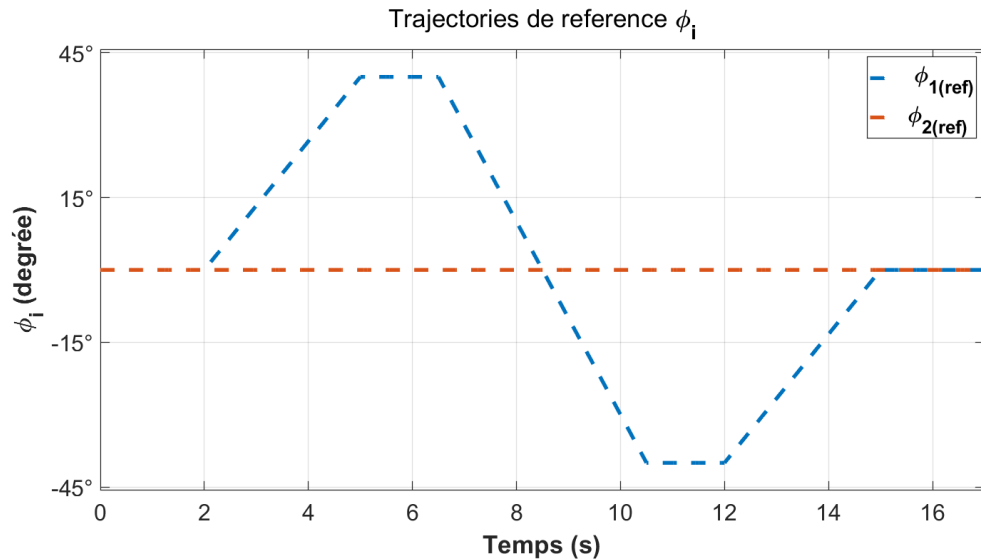
Paramètre	Description	Valeur
$L_1$	Longueur du bras	0,154 m
$L_2$	Longueur du pendule	0,186 m
$l_1$	Distance au C.G du bras	0,077 m
$l_2$	Distance au centre de gravité du pendule	0,093 m
$m_1$	Masse du bras	0,13 kg
$m_2$	Masse du pendule	0,07 kg
$m_3$	Masse de l'ensemble codeur	0,04 kg
$J_{arm}$	Moment d'inertie du bras	$3,00 \times 10^{-4}$ kg·m <sup>2</sup>
$J_{pend}$	Moment d'inertie du pendule	$2,02 \times 10^{-4}$ kg·m <sup>2</sup>
$J_{motor}$	Moment d'inertie du moteur	$1,58 \times 10^{-4}$ kg·m <sup>2</sup>
$J_{enc}$	Moment d'inertie de l'ensemble codeur	$7,37 \times 10^{-4}$ kg·m <sup>2</sup>
$C_{arm}$	Coefficient d'amortissement visqueux du bras	$2,89 \times 10^{-3}$ N·s/m
$C_{pend}$	Coefficient d'amortissement visqueux du pendule	$1,41 \times 10^{-5}$ N·s/m
$g$	Accélération due à la gravité	9.81 m/s <sup>2</sup>

**Tableau 1** : Paramètres de l' PIEPB.

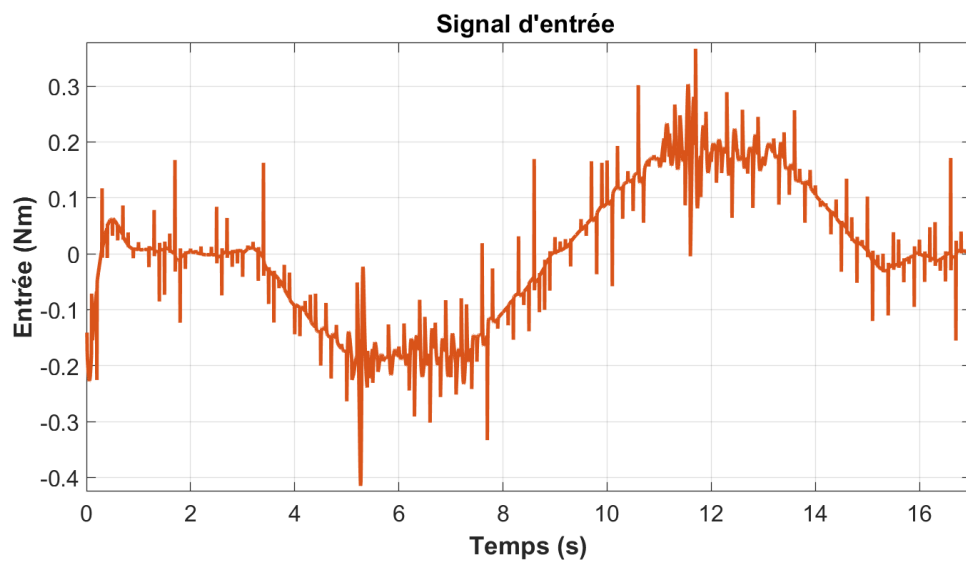
### **3. Identification du système et signal d'identification :**

Comme discuté, le domaine d'intérêt souhaité pour ce travail est la configuration haut-haut du pendule inversé entraînée par un bras (PIEPB). A cette fin, un contrôleur en boucle fermée est conçu pour le modèle local, qui suit une trajectoire de référence. Les données de poursuite, qui comprennent des mesures d'état et d'entrée, sont ensuite utilisées comme données brutes pour approximer le contrôleur à base de données. De plus, Brunton et al.[28], et Kaiser et al. [29]observent que pendant l'identification en boucle fermée, il est nécessaire d'ajouter un bruit blanc suffisamment important ou de donner occasionnellement des impulsions au système en entrées pour distinguer la dynamique du retour de l'entrée de la dynamique de l'état. Notez que cette étape n'est pas nécessaire pour l'identification du système en boucle ouverte.

Dans ce travail, une trajectoire de référence, comme le montre la figure III.3a, a été choisie pour laquelle un régulateur LQ a été conçu. Le signal d'entrée résultant est illustré à la Figure III.3b. Ce signal d'entrée est le signal de retour perturbé par un bruit blanc de puissance de 0,05.



(a) Trajectoire de référence des états ( $\phi_1$  et  $\phi_2$ )



(b) Signal d'entrée.

**Figure III.3 :** Trajectoire de référence, signal d'entrée

Les données ont été collectées en simulant le système plusieurs fois en boucle fermée avec des conditions initiales aléatoires données par.

$$\mathbf{x}_0 = [U(-1 \ 1)l_{\phi_1}, U(-1 \ 1)l_{\phi_2}, U(-1 \ 1)l_{\dot{\phi}_1}, U(-1 \ 1)l_{\dot{\phi}_2}], \quad (\text{III.5})$$

Ou  $U(-1, 1)$  une variable aléatoire uniformément distribuée sur une plage de  $-1$  à  $1$ , et  $l_{\phi_1} = 40^\circ$ ,  $l_{\phi_2} = 2^\circ$ ,  $l_{\dot{\phi}_1} = l_{\dot{\phi}_2} = 0.25$  rad/s. Par conséquent, la condition initiale est uniformément distribuée autour de l'équilibre instable ( $\phi_1 = \phi_2 = \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0^\circ$ ) et sa plage est définie par  $L = [l_{\phi_1}, l_{\phi_2}, l_{\dot{\phi}_1}, l_{\dot{\phi}_2}]$ .  $L$  a été choisi par essais et représente la limite de plage dans laquelle le contrôleur est capable de suivre avec succès la trajectoire de référence. On pourrait également choisir  $L$  en évaluant une tâche de régulation au lieu de poursuite. Les données ont été générées par des simulations de 17 secondes chacune sur un modèle non linéaire de l'PIEPB où le contrôleur a suivi la trajectoire de référence (Fig. III.1a). Les données ont été échantillonnées toutes les 5 ms. L'approximation ultérieure des matrices linéaires suit la procédure détaillée à la section 3.4.3.

Comme indiqué précédemment, bien que la région d'intérêt pour ce travail soit la configuration haut-haut pour laquelle seule l'identification en boucle fermée est possible, l'identification en boucle ouverte autour du point d'équilibre présente cependant de nombreuses informations importantes sur la génération de données et le choix des observables (données de sorties), qui ont ensuite été appliqués pour générer des données et/ou a influencé le choix des observables dans l'identification en boucle fermée. Au cours de ce travail, de nombreuses combinaisons d'observables et de données ont été testées et analysées, ce qui n'aurait pas été facilement réalisable dans la configuration haut-haut car elle nécessite un contrôleur correspondant pour stabiliser le système.

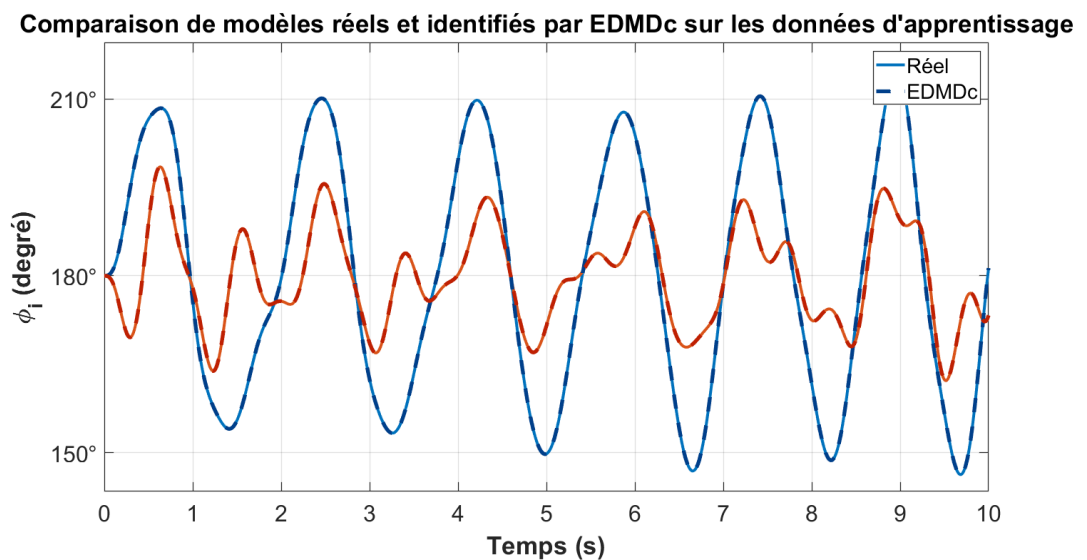
Pour démontrer le fonctionnement de l'algorithme EDMD, il est possible d'approximer la dynamique en boucle ouverte. EDMDC peut également être utilisé à cette fin. Cependant, EDMDC approxime directement l'évolution temporelle des états à partir des données et d'un ensemble de fonctions candidates, sans avoir à choisir les observables "corrects" ni à calculer l'opérateur de Koopman correspondant. Il est important de noter que EDMDC a également été utilisé pour la commande en boucle fermée de systèmes non linéaires[28]. La fonction de forçage utilisée dans l'identification en boucle ouverte est un signal chirp dont la fréquence est définie dans la plage  $[f_{min} f_{max}]$  et dont l'amplitude est  $A$ . Les fréquences et les amplitudes ont été choisies de manière à ce que le système ne se translate pas vers la "zone chaotique", mais soit suffisamment perturbé loin de son point équilibre. Le signal chirp peut être généré à l'aide de la commande chirp de Matlab. En résumé, les fonctions de forçage à des fins d'apprentissage et de validation sont données par,

**Apprentissage**  $\rightarrow A * chirp(t, f_{min}, t_s, f_{max}, [ \quad ], -90), [f_{min} f_{max}] = [0.3 \ 0.7] \text{Hz}, A = 0.1$

**Validation**  $\rightarrow A * chirp(t, f_{min}, t_s, f_{max}, [ \quad ], -90), [f_{min} f_{max}] = [0.7 \ 0.9] \text{Hz}, A = 0.065$

(III.6)

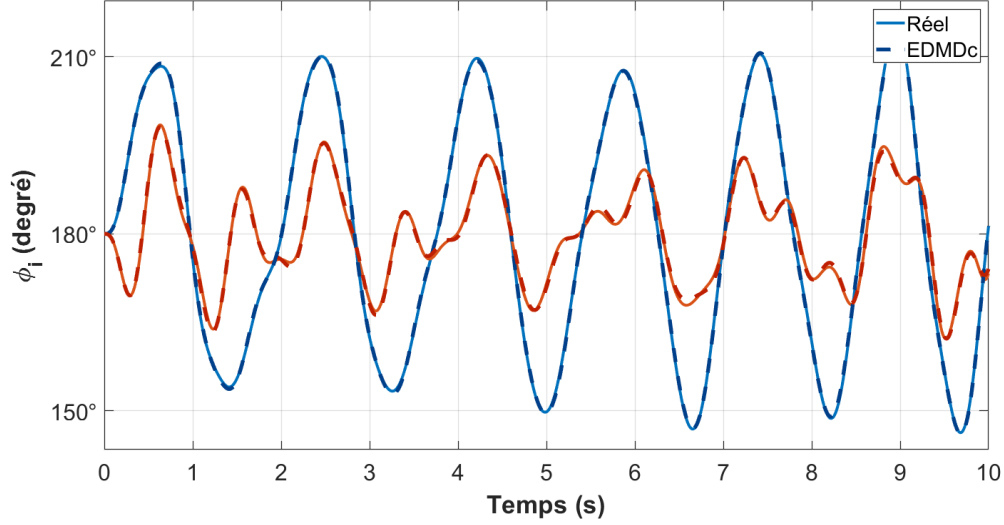
Examinons d'abord le cas des données obtenues à partir de trajectoires multiples. Comme Abraham et al.[30]observé, le nombre de points de données et leur répartition dans l'espace d'état auront un effet important sur l'opérateur de Koopman calculé du système non linéaire. Il est toujours bénéfique d'enregistrer des trajectoires à partir de plusieurs conditions initiales, comme indiqué dans l'équation (III.5). Les figures III.4 et III.5 comparent l'identification du système via EDMDC à partir de données d'apprentissage générées par une seule condition initiale et des données d'apprentissage générées à partir de plusieurs conditions initiales, respectivement. Les données d'apprentissage générées à partir de plusieurs conditions initiales sont visualisées sur la figure III.6. Dans ce cas, les données d'apprentissage sont générées à partir de plusieurs conditions initiales avec  $l_{\phi_1} = 210^\circ, l_{\phi_2} = 150^\circ, l_{\dot{\phi}_1} = l_{\dot{\phi}_2} = 1 \text{rad/s}$  et la fonction de forçage (III.6) avec  $f_{min} = f_{max} = 0,5 \text{ Hz}$  and  $A = 0,1$ , respectivement. Encore une fois, le choix de ces valeurs est influencé par la nécessité de forcer les trajectoires de se situer dans la zone non chaotique.



**Figure III.4 :** Identification avec trajectoire unique et  $G_3$  sur données d'entraînement.

(-) et (-) représentent les trajectoires de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , respectivement

Comparaison des modèles réels et identifiés par EDMDc sur les données d'apprentissage



**Figure III.5:** Identification avec trajectoires multiples et  $G_3$  sur les données d'entraînement.

Dans les figures ci-dessus,  $G_3$  est un vecteur d'observables qui est défini comme suit. Une combinaison d'états et de fonctions non linéaires forme le vecteur des observables. Une fois de plus, le choix des observables varie en fonction de l'objectif. De nombreuses combinaisons différentes d'observables ont été essayées et, pour les besoins de ce travail, trois vecteurs distincts d'observables sont définis comme suit :

$$G_1 = [\phi_1 \phi_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \quad u]^T \quad (\text{III.7})$$

Ainsi,  $G_1$  correspond simplement aux variables d'état  $\phi^T$  augmentées avec la variable d'entrée. Les variables d'état sont augmentées d'un vecteur de polynômes jusqu'au deuxième degré des états, formant ainsi le deuxième vecteur d'observables.

$$G_2 = [\phi^T \psi_1 \psi_2 \dots \psi_{10} \quad u], \quad (\text{III.8})$$

$$\psi_i = \phi_1^{\alpha_i} \phi_2^{\beta_i} \dot{\phi}_1^{\gamma_i} \dot{\phi}_2^{\delta_i}$$

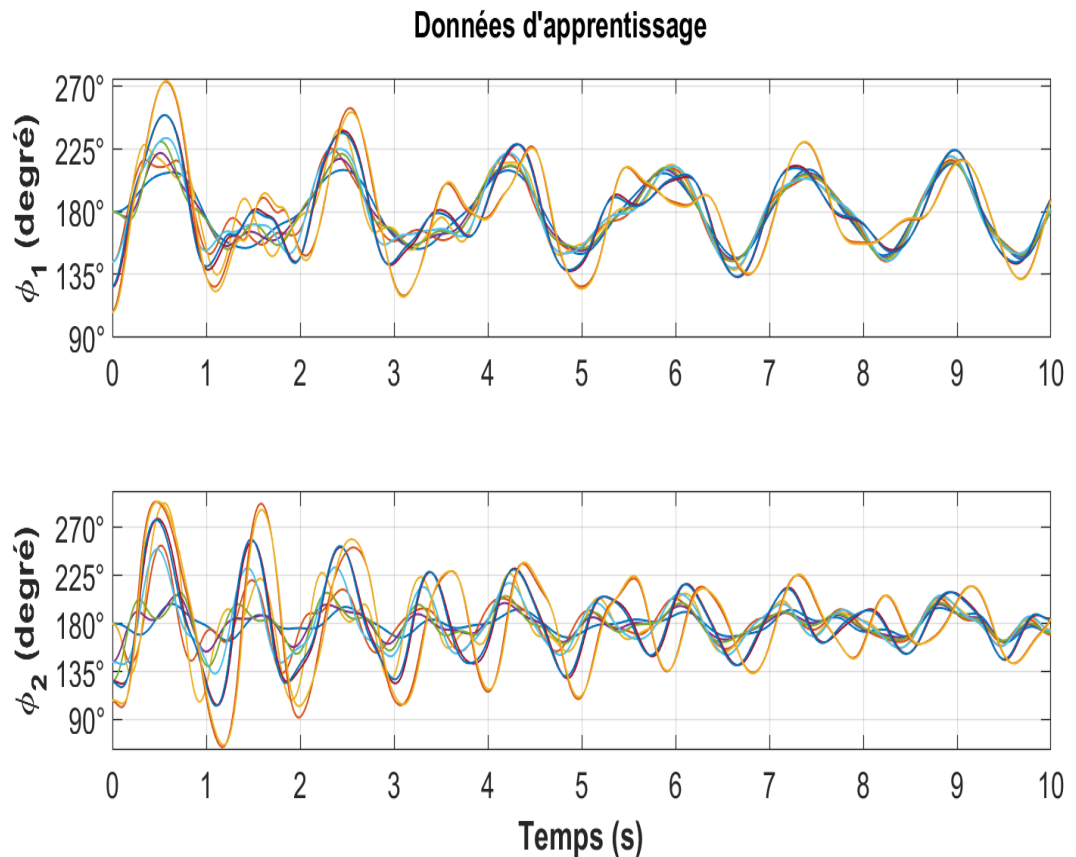
où  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  sont des nombres non négatifs et l'indice  $i$  répertorie toutes les combinaisons telles que  $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i \leq Q$ , où  $Q > 1$  définit le degré polynomial maximal autorisé. Dans le cas ci-dessus,  $Q = 2$ .

$$G_3 = [\phi^T \psi^T \phi_1 s_1 \phi_1 s_2 \phi_1 c_1 \phi_1 c_2 \phi_2 s_1 \dots \dot{\phi}_2 c_2 \quad u] \quad (\text{III.9})$$

où  $s_1 = \sin \phi_1, c_1 = \cos \phi_1$  et de même pour les autres. Notez que seuls les deux premiers états ont été pris en compte pour les fonctions sinus et cosinus. L'inclusion des dérivées n'a pas amélioré de manière significative la prédiction et a donc été abandonnée.



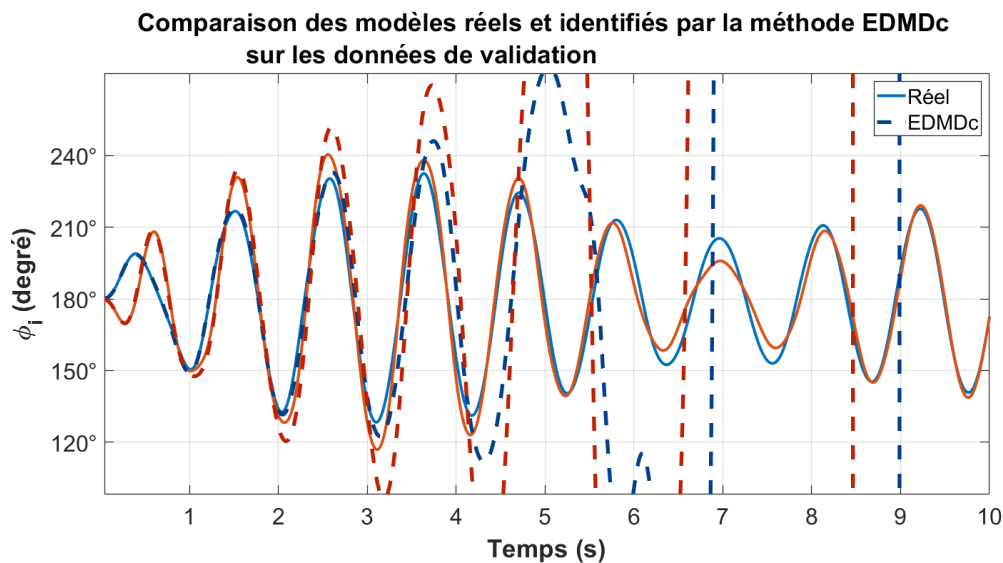
À partir des figures ci-dessus, on peut voir que l'algorithme EDMDC identifie presque parfaitement l'évolution temporelle des trajectoires d'état, à la fois dans le cas de données d'apprentissage obtenues à partir d'une condition initiale unique et de plusieurs conditions initiales, pour un choix spécifique de fonctions candidates.



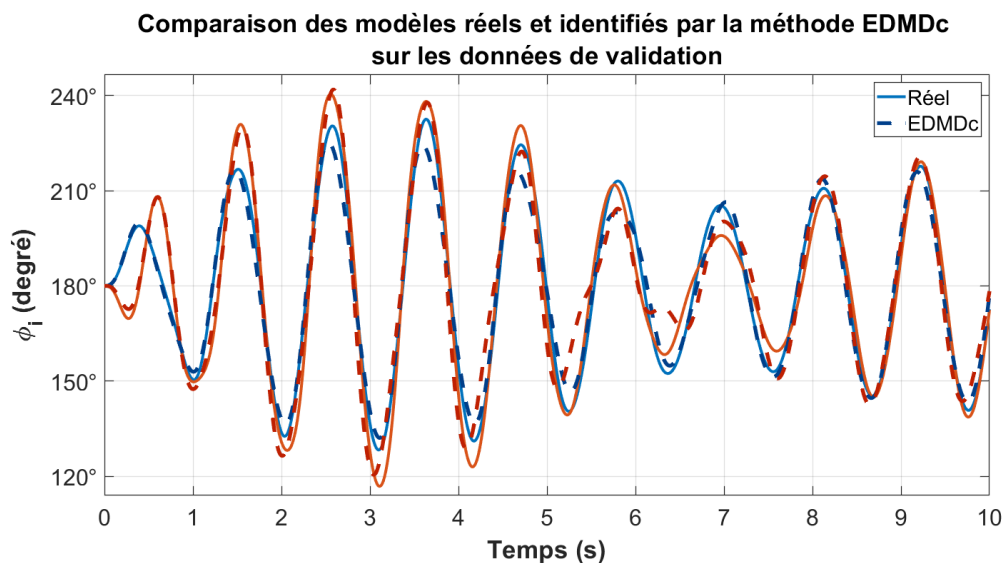
**Figure III.6:** Données d'apprentissage provenant de plusieurs trajectoires

Même s'il peut sembler que les données d'une seule trajectoire sont suffisantes pour approximer la dynamique, cela échouera presque toujours lorsque le système est soumis à une fonction de forçage différente de celle utilisée pour générer les données d'entraînement. En revenant à la Section 3.3.4, EDMD-avec-contrôle (EDMDC) calcule une (grande) matrice de coefficients A, B, C, D (qui contient également la matrice d'entrée), et cette matrice de coefficients est ensuite utilisée pour simuler la dynamique pour une nouvelle fonction de forçage. Les figures III.7 et III.8 montrent la prédiction de la dynamique évaluée sur la matrice de coefficients générée à partir de données d'apprentissage pour une nouvelle fonction de forçage de "validation" dans (III.6). Il est intéressant de noter que, bien que la matrice générée à partir d'une seule trajectoire ait parfaitement fonctionné pour les données qui se situent dans la plage de données d'apprentissage, elle échoue à corrélérer la dynamique sur une

période plus longue lorsque la fonction de forçage éloigne la trajectoire de la trajectoire d'apprentissage, comme observé dans la figure III.7. La trajectoire prédite par EDMDC ne suit pas la trajectoire de référence après environ 2 secondes, où à la fois l'amplitude et la fréquence de la trajectoire de référence diffèrent de la trajectoire utilisée pour l'apprentissage. Alors que dans la figure III.8, on voit que la dynamique est approximativement prédite pour la matrice générée à partir de multiples trajectoires pour un "bon" choix d'observables. Par conséquent, il est essentiel de générer des données à partir de plusieurs trajectoires et d'entraîner les régresseurs, pour une approximation proche de la dynamique.



**Figure III.7 :** Identification avec trajectoire unique et  $G_3$  sur données de validation



**Figure III.8 :** Identification avec plusieurs trajectoires et  $G_3$  sur les données de validation

Les figures III.9, III.10 et III.11 visualisent les fonctions de forçage et les prédictions conséquentes avec une fonction de forçage légèrement différente de celle utilisée précédemment, mais toujours dans la plage définie par (III.6). La fonction de forçage utilisée ici pour l'apprentissage est un signal de type "chirp" avec une fréquence constante. Encore une fois, on constate que le modèle approximé à partir des données générées par plusieurs trajectoires fonctionne mieux.

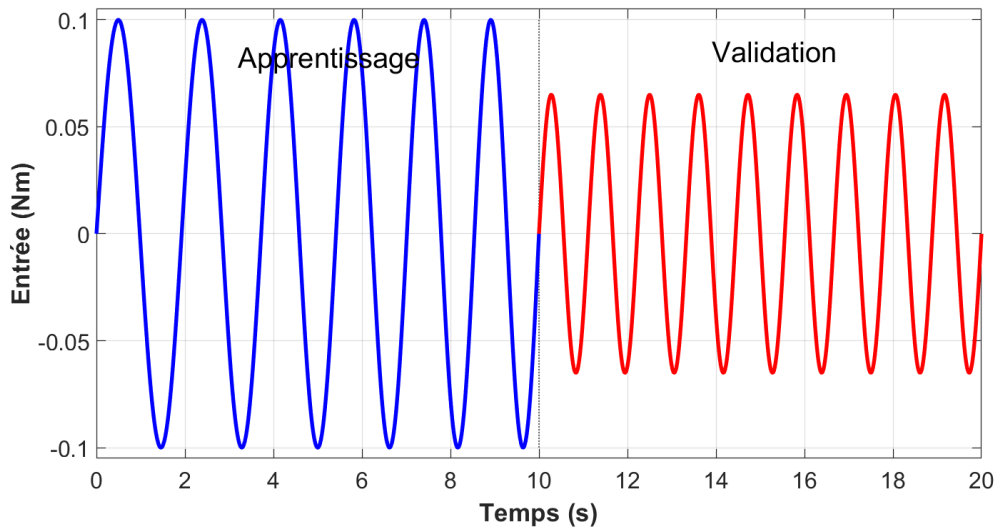


Figure III.9 : Les entrées de formation et de validation

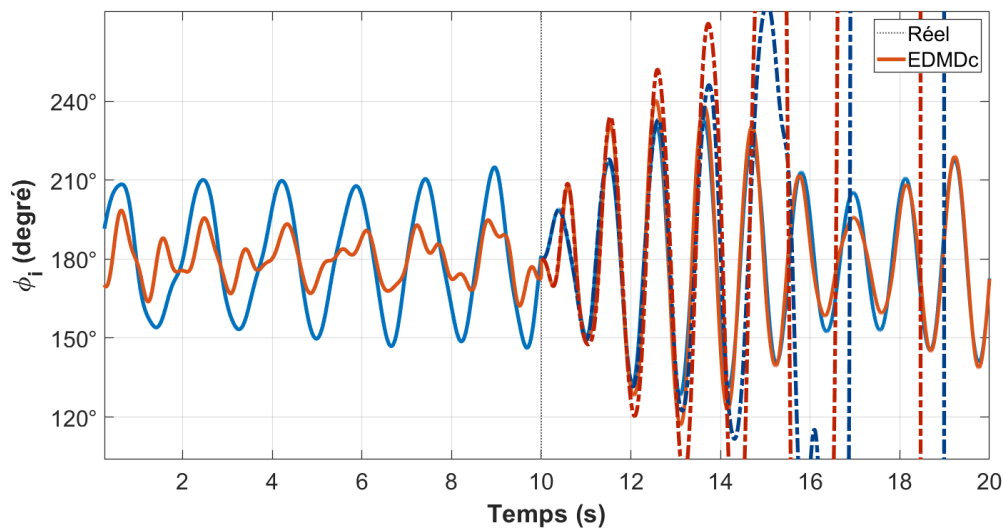
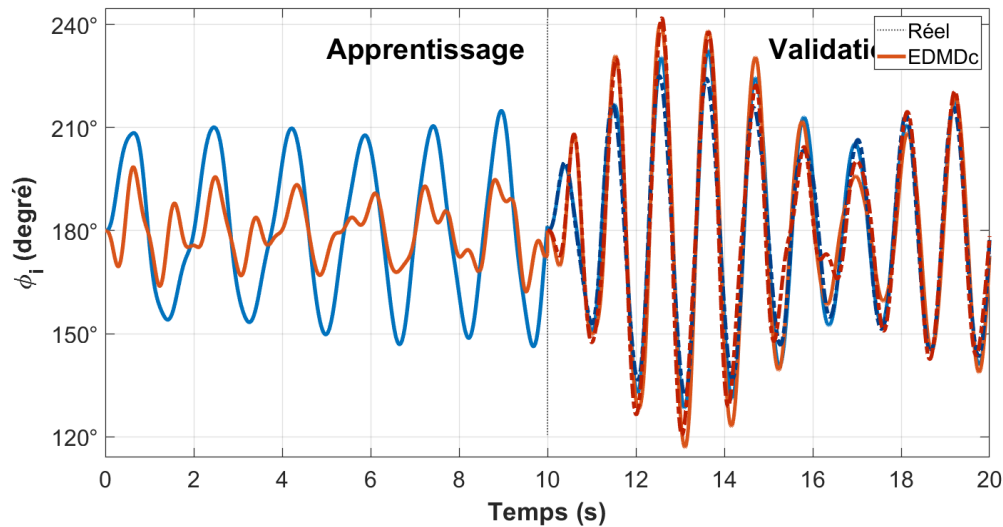
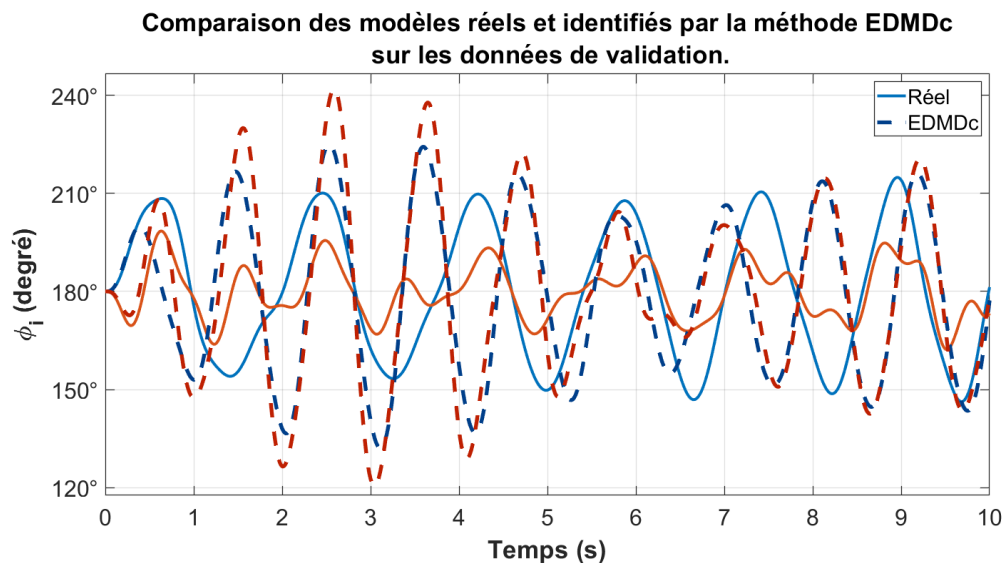


Figure III.10 : Visualisation de la validation avec trajectoire unique et  $G_3$



**Figure III.11 :** Visualisation de la validation avec plusieurs trajectoires et  $G_3$

Les prédictions correspondent aux trajectoires réelles pour un choix spécifique de fonctions candidates,  $G_3$ , dans les figures ci-dessus. Certaines ou toutes les fonctions linéaires ou non linéaires de ce jeu de fonctions candidates peuvent former l'ensemble des observables nécessaires pour calculer l'opérateur de Koopman, générant une approximation linéaire du système non linéaire sous-jacent. La matrice de coefficients épars (creux) est un bon indicateur de telles fonctions linéaires ou non linéaires dominantes qui peuvent alors être considérées comme des observables. Il est important de noter que le choix des fonctions candidates, et donc le choix des observables, est hautement subjectif et qu'il n'y a pas de règles/méthodes fixes pour les choisir. Certaines méthodes ont été discutées dans le chapitre. La Figure III.10 illustre l'effet du choix des fonctions candidates. Le jeu de fonctions candidates utilisé dans ce cas pour générer la matrice de coefficients est 2, qui est un ensemble de polynômes jusqu'au deuxième degré. On voit que 2 ne peut approximer la dynamique que dans une petite région autour de l'équilibre stable, après quoi les trajectoires prédites ne se comportent pas comme la trajectoire de référence. En revanche, dans la Figure III.6, les trajectoires prédites correspondent étroitement à la trajectoire réelle. Cela montre que lorsque l'on s'éloigne du point d'équilibre souhaité, le vecteur d'état initial doit être augmenté d'autres fonctions non linéaires pour permettre des prédictions sur des durées de temps plus longues et/ou sur une plus grande plage.



**Figure III.12 :** Identification à trajectoires multiples et  $G_2$  sur les données de validation

#### **4.Poursuit :**

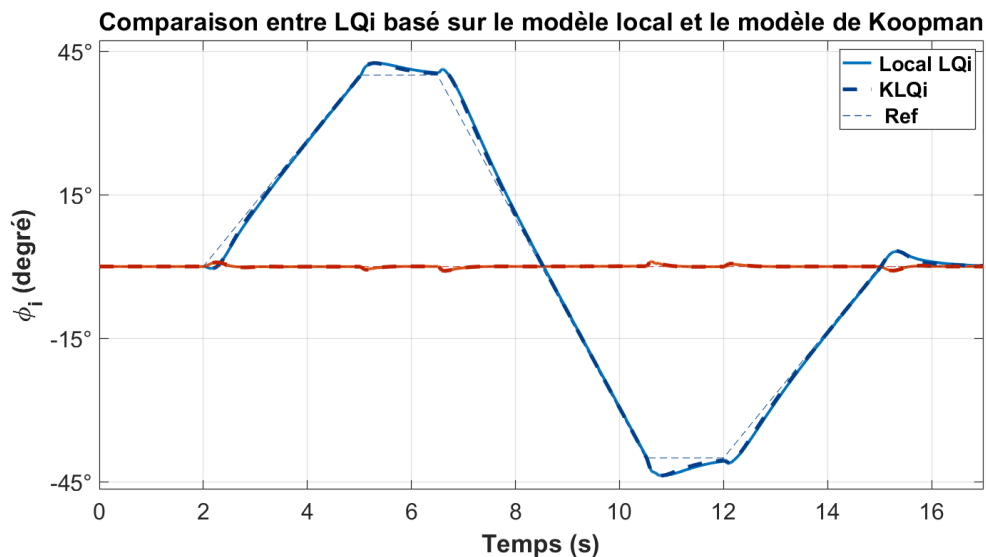
On peut dire en toute sécurité que le contrôle basé sur les données dépend principalement de la configuration des données, du calcul des matrices linéaires basées sur les données (l'approximation finie de l'opérateur de Koopman) et est principalement résolu une fois que les paramètres de génération de données sont décidés. Une fois que les matrices linéaires sont générées, la synthèse d'un contrôleur suit la même procédure que n'importe quel modèle linéaire. Dans ce travail, tous les contrôleurs utilisés ont été ajustés à l'aide d'un algorithme génétique qui simplifie la recherche de la bonne combinaison de paramètres d'ajustement.

Dans les résultats suivants, pour des raisons de comparaison, les matrices d'ajustement utilisées pour tous les contrôleurs présentés sont identiques avec  $Q = \text{diag}(85,38 \ 15,32 \ 0 \ 0,44)$  et  $R = 1,4$ . Cette section applique les connaissances et les observations de la section précédente pour suivre une trajectoire de référence dans la configuration "haut-haut" de l'PIEPB. Les mesures de l'état complet sont collectées comme discuté précédemment dans la section III.2 (voir Figures III.3a, III.3b) en supposant qu'un contrôleur en boucle fermée est disponible pour stabiliser le système. De plus, le couple d'entrée est borné par la plage maximale autorisée  $[-2,5 \ 2,5] \text{ Nm}$ .

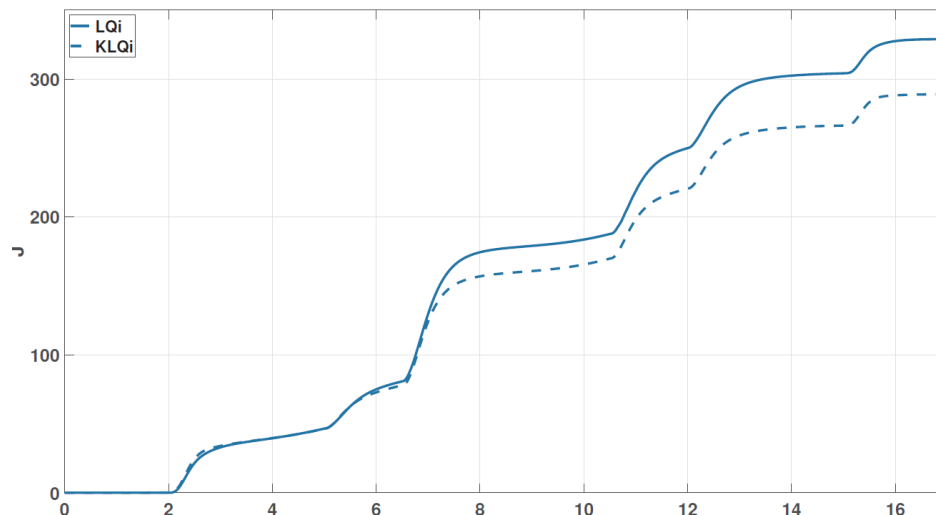
La figure III.11 compare les performances de poursuite d'un régulateur linéaire quadratique à action intégrale sur le modèle local généré par linéarisation jacobienne de la dynamique non linéaire au point d'équilibre instable  $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$  au modèle de Koopman généré uniquement à partir des données avec le vecteur d'observables  $G_1 = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]$  c'est-à-dire

uniquement les mesures d'états linéaires. Il a été observé que les mesures linéaires de l'état étaient suffisantes pour suivre une référence jusqu'à  $40^\circ$  avec un contrôleur LQI, ce qui est également en accord avec le LQI appliqué au modèle local. De plus, la Fig. III.12 visualise le coût quadratique  $J$ . On peut voir que les coûts du modèle local et du modèle basé sur les données sont comparables et, en fait, le coût du premier était un peu plus élevé que celui du second. Il est important de noter que le modèle de Koopman a été généré uniquement à partir de données sans presque aucune hypothèse sur le système.

Dans les figures III.11 et III.13, (- -) et (- -) représentent respectivement les trajectoires de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  générées par le modèle local. Par conséquent, (- -) et (- -) représentent respectivement les trajectoires de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  générées par le modèle de Koopman.



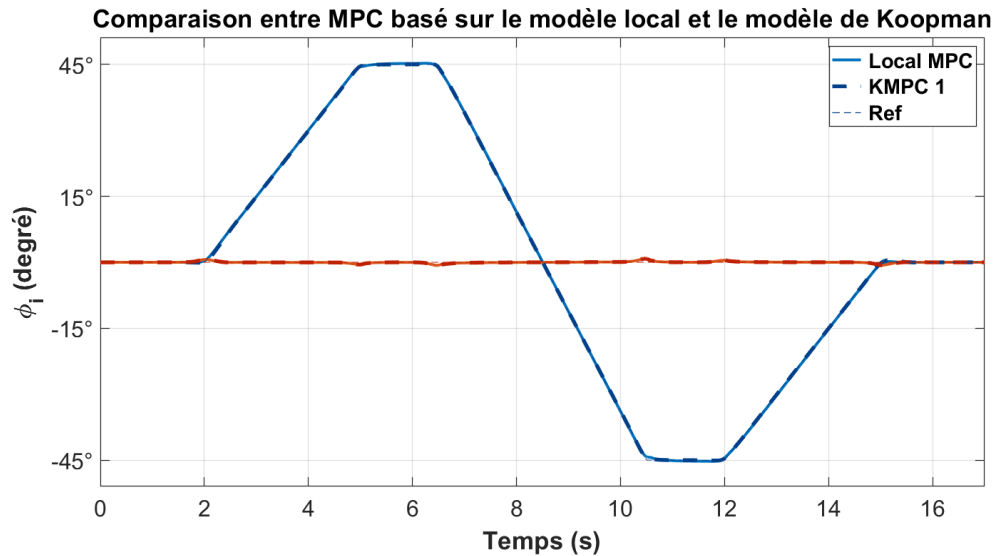
**Figure III.13 :** Comparaison de l'application de LQI au modèle linéarisé localement par rapport



**Figure III.14** : Comparaison de la fonction de coût quadratique  $J$  pour le suivi en boucle fermée avec un modèle approximé en utilisant l'approche locale et l'opérateur de Koopman.

Ensuite, un contrôleur prédictif à base de modèle avec un horizon de prédiction de  $Np = 200$ , c'est-à-dire une prédiction d'une seconde dans le futur, a été conçu pour les modèles générés ci-dessus. On a observé que la plage de poursuite pouvait être augmentée de 40 degrés à 45 degrés. Cela était attendu car le MPC fonctionne presque toujours mieux que le régulateur linéaire quadratique, surtout dans les problèmes de poursuite. C'est parce que, contrairement à l'optimisation de la fonction de coût quadratique sur un horizon temporel infini comme c'est le cas avec le LQR, le MPC optimise la fonction de coût sur un horizon temporel fini (III.16) et calcule de manière répétée l'entrée optimale. Par conséquent, le contrôleur peut générer des entrées de contrôle optimales valables uniquement pour un horizon fixe de petite taille au lieu d'entrées de contrôle optimales valables sur une très longue période de temps comme c'est le cas pour un régulateur linéaire quadratique. Cependant, cela a un coût. L'entrée LQR optimale est calculée hors ligne et ne change pas pendant le processus. En revanche, dans le MPC, l'entrée optimale est calculée en ligne et dépend donc des capacités de calcul de l'ordinateur. Ce coût peut cependant être considérablement réduit en formulant le problème MPC sous une forme dense (éqs. II.8 et II.13) comme proposé par Korda et al [31]. Les matrices  $A$  et  $B$  peuvent être précalculées hors ligne, et il suffit de mettre à jour le vecteur d'état actuel  $x_k$  en ligne. Cela réduit considérablement l'effort de calcul et rend le MPC aussi réalisable que le LQi en termes de pratique. De plus, cette formulation dense (éq. II.13) est indépendante de la dimension de l'état et donc, l'ajout d'observables non linéaires à l'état n'affecte pas significativement le temps de calcul du MPC. La figure III.13 compare les performances de suivi du modèle local par rapport au modèle de Koopman.

Encore une fois, les fonctions de coût quadratiques globales sont similaires pour les modèles locaux et de Koopman.



**Figure III.15 :** Comparaison de l'application de MPC au modèle linéarisé localement par rapport au modèle Koopman.

Le tableau 2 présente les temps de calcul correspondants pour les modèles local et Koopman exécutés avec un temps d'échantillonnage de 5 ms et 10 ms. Il convient de noter que les contrôleurs pour les modèles générés à partir de données échantillonnées toutes les 10 ms sont différents des contrôleurs ajustés pour les modèles générés à partir de données échantillonnées toutes les 5 ms. Les deux contrôleurs ont été ajustés par GA(A1). La comparaison entre les temps d'échantillonnage est faite pour mettre en évidence le compromis entre le temps de calcul et les performances des combinaisons modèle-contrôleur. Le tableau 3 présente l'erreur quadratique moyenne relative (en % d'erreur par rapport à la trajectoire de référence de  $\phi_1$ ) pour les combinaisons modèle-contrôleur explorées jusqu'à présent dans cette section.

Contrôleur-modèle	Temps d'exécution moyen (ms)	
	Ts =5ms	Ts=10ms
MPC - local	0,56	0,17
MPC - KO	0,59	0,18

**Tableau 2 :** Temps d'exécution moyen (ms) des algorithmes MPC pour différents pas d'échantillonnage.



---

Contrôleur-modèle	RMSE (%)	
	Ts =5ms	Ts=10ms
LQ <sub>i</sub> - local	6,60	7,13
LQ <sub>i</sub> - KO	6,32	6,59
MPC - local	0,69	2,84
MPC - KO	0,53	3,53

**Tableau 3 :** RMSE (%) des erreurs de suivi pour différents pas d'échantillonnage

**5. Conclusion :**

Ce chapitre a exploré la modélisation empirique d'un pendule inverse entraîné par un bras, ainsi que l'identification de ce système à partir de données en utilisant le modèle de Koopman, et l'exploitation de ce modèle pour une commande prédictive. Nous avons découvert que le modèle de Koopman offre une approche puissante pour la représentation et la prédiction des comportements complexes des systèmes non linéaires tels que le pendule inverse.

En utilisant des données expérimentales, nous avons pu reconstruire une représentation mathématique du système et identifier les caractéristiques et les paramètres clés grâce au modèle de Koopman. Cette approche nous permet d'obtenir une meilleure compréhension des interactions dynamiques entre les différentes variables d'état du pendule inverse.

De plus, en exploitant le modèle de Koopman pour une commande prédictive, nous sommes en mesure de générer des commandes anticipées qui permettent de maintenir l'équilibre du pendule inverse ou d'effectuer des mouvements souhaités avec une grande précision. Cette approche ouvre des perspectives intéressantes pour le contrôle avancé de systèmes non linéaires tels que les robots manipulateurs ou les systèmes mécaniques complexes.

Il convient de souligner que ce chapitre représente une avancée significative dans le domaine de la modélisation et du contrôle des systèmes dynamiques non linéaires. Cependant, il reste encore des défis à relever, notamment en ce qui concerne l'adaptation du modèle de Koopman à des systèmes de plus grande dimension et la prise en compte des perturbations externes.

En conclusion, la modélisation empirique du pendule inverse entraîné par un bras, l'identification du système à partir des données en utilisant le modèle de Koopman, et l'exploitation de ce modèle pour une commande prédictive constituent une approche prometteuse pour la compréhension et le contrôle précis des systèmes dynamiques non linéaires. Les résultats obtenus ouvrent la voie à de nouvelles applications dans des domaines tels que la robotique, l'automatisation industrielle et la mécatronique, et offrent de nouvelles perspectives pour relever les défis de contrôle des systèmes complexes.

---

# Conclusion générale

---

## Conclusion générale

Ce travail porte sur les capacités et les limitations de l'implémentation de la théorie de l'opérateur de Koopman pour les techniques de contrôle à base de modèle. L'idée centrale de la structure de l'opérateur de Koopman est de faire passer la dynamique non linéaire d'un système dans un espace de dimension supérieure où l'évolution de la dynamique devient approximativement linéaire. Des modèles linéaires à base de données ont été dérivés en utilisant des techniques de régression connues telles que DMD (Sec. III.3) et EDMD (Sec. III.4). Ensuite, une commande prédictive à base de modèle a été synthétisée pour ces modèles à base de données, et les performances de contrôle ont été évaluées sur un problème de poursuite de trajectoire. Dans l'ensemble, les modèles à base de données présentent des performances supérieures par rapport aux modèles localement linéarisés. De plus, les méthodes de conception de commande linéaire sont facilement appliquées à ces modèles. Il a été observé que l'augmentation de la "complexité" des fonctions candidates, ou en d'autres termes, l'augmentation du vecteur d'état avec des fonctions non linéaires de l'état, améliore davantage les performances des modèles d'approximation à base de données. Il a également été constaté que la prédiction pouvait être améliorée lorsque les données sont échantillonnées à partir de différentes trajectoires. La flexibilité des méthodes d'approximation des données permet d'utiliser des données provenant de plusieurs trajectoires et des points de données manquants. De plus, il a été observé que le volume de données et leur répartition dans l'espace d'état ont un effet significatif sur le calcul de l'opérateur de Koopman.

Les performances en boucle fermée des contrôleurs à base de données ont été comparées à celles des contrôleurs à base de modèles localement linéarisés. À cette fin, un modèle de premier principe d'un pendule inverse entraîné par un bras a été dérivé (Sec. III.2) et linéarisé localement à la position Haut-Haut. Un contrôleur non prédictif tel que le régulateur linéaire quadratique et un contrôleur prédictif tel que la commande prédictive en combinaison avec un modèle à base de donnée sont été synthétisés pour comparer les performances de poursuite. Il a été observé que les contrôleurs non prédictifs ne se comportent pas aussi bien que les contrôleurs prédictifs. Il est difficile de prédire quelles fonctions peuvent entraîner l'échec des contrôleurs non prédictifs, c'est pourquoi lorsqu'on travaille avec des modèles à base de données, il est recommandé de travailler avec des contrôleurs prédictifs. De plus, les performances de poursuite du contrôleur prédictif étaient bien supérieures à celles du contrôleur non prédictif (Tab. 3). De plus, avec les récentes

## Conclusion générale

---

avancées en termes de capacités de calcul, le contrôle prédictif est bien moins coûteux qu'auparavant.

**Référence**

### Référence

- [1] J. N. Kutz, S. L. Brunton, B. W. Brunton, and J. L. Proctor. *Dynamic Mode Decomposition: Data Driven Modelling of Complex Systems*. siamr, 2016.
- [2] P. Schmid, K. E. Meyer, and O. Pust. Dynamic mode decomposition and proper orthogonal decomposition of flow in a lid-driven cylindrical cavity. *8th International Symposium on Particle image Velocimetry - PIV09*, August 2009.
- [3] J. H. Tu, C. W. Rowley, D. M. Luchtenburg, S. L. Brunton, and J. Nathan Kutz. On dynamic modedecomposition: Theory and applications. *Journal of Computational Dynamics*, 1(2):391–421, 2014.ISSN 2158-2505.
- [4] J. Proctor and P. Eckhoff. Discovering dynamic patterns from infectious disease data using dynamic mode decomposition. *International Health*, January 2015.
- [5] B. Brunton, L. Johnson, and N. K. Jeffrey Ojemann. Extracting spatial-temporal coherent patterns in large-scale neurural recordings using dynamic mode decomposition. *Journal of Neuroscience Methods*, 258:1–15, January 2016. ISSN 0165-0270.
- [6] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, third edition, 1996.
- [7] J. L. Proctor, S. L. Brunton, and J. N. Kutz. Dynamic mode decomposition with control. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 15(1):142–161, Jan 2016.
- [8] P. Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics*, 656:5–28, August 2010.
- [9] J. Proctor and P. Eckhoff. Discovering dynamic patterns from infectious disease data using dynamicmode decomposition. *International Health*, January 2015.
- [10] J. Annoni, P. M. O. Gebraad, and P. Seiler. Wind farm flow modeling using an input-output reducedorder model. *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 506–512, 2016.
- [11] J. Annoni and P. Seiler. A low-order model for wind farm control.
- [12] M. Viberg. Subspace-based methods for the identificaiton of linear time-invariant systems. *Automatica*, 31(12):1835–1851, 1995.

- [13] C. Rowley, I. Mezic, S. Bagheri, P. Schlatter, and D. Henningson. Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 641:115 – 127, 12 2009.
- [14] B. O. Koopman. Hamiltonian systems and transformation in hilbert space. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(5):315–318, 1931.
- [15] S. L. Brunton, B. W. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz. Koopman invariant subspaces and finitelinear representations of nonlinear dynamical systems for control. *PLOS*, 11(2), Feb 2016.
- [16] I. Mezic. Analysis of fluid flows via spectral properties of the koopman operator. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 45:357–378, 01 2013.
- [17] M. Williams, I. Kevrekidis, and C. Rowley. A data-driven approximation of the koopman operator: Extending dynamic mode decomposition. *Journal of Nonlinear Science*, 25, 08 2014.
- [18] I. Kevrekidis, C. Rowley, and M. Williams. A kernel-based method for data-driven koopman spectralanalysis. *Journal of Computational Dynamics*, 2:247–265, 05 2016.
- [19] J. Kutz, J. Proctor, and S. Brunton. Applied koopman theory for partial differential equations and data-driven modeling of spatio-temporal systems. *Complexity*, 2018:1–16, 12 2018.
- [20] H. Lu and D. M. Tartakovsky. Predictive accuracy of dynamic mode decomposition. *arXiv: NumericalAnalysis*, 2019.
- [21] H. Arbabi, M. Korda, and I. Mezic. A data-driven koopman model predictive control framework for nonlinear partial differential equations. *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6409–6414, 2018.
- [22] M. Korda and I. Mezic. Linear predictors for nonlinear dynamical systems: Koopman operator meets model predictive control. *Automatica*, 93:149–160, Jul 2018. ISSN 0005-1098.
- [23] J. Proctor, S. Brunton, and J. Kutz. Generalizing koopman theory to allow for inputs and control. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 17, 02 2016.

- [24] Yacine FERDJOUKH : Commande Prédictive Généralisée : Application Au Moteur A Excitation Séparée. Thèse de doctorat, université Msila, 2015/2016.
- [25] Sihem AOUIMER et Dounia KEFIF Commande adaptative et prédictive de la machine à courant continu à excitation séparée ., Université Aboubakr Belkaïd– Tlemcen –Faculté de TECHNOLOGIE Présenté pour l’obtention du diplôme de MASTER, 2020/2021.
- [26] T. J. van den Boom and T. C. Backx. *Model Predictive Control*. Delft University of Technology, Delft Center for Systems and Control, September 2005. Lecture Notes for the course SC4060.
- [27] B. Cazzolato and Z. Prime, “On the dynamics of the Furuta pendulum”, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Control Science and Engineering*, vol. 8, Mar. 2011.
- [28] S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz, “Sparse identification of nonlinear dynamics with control”, *IFAC-Papers OnLine*, vol. 49, no. 18, pp. 710–715, 2016, 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2016.
- [29] E. Kaiser, J. N. Kutz, and S. L. Brunton, *Data-driven discovery of koopman eigenfunctions for control*, 2020.
- [30] I. Abraham, G. Torre, and T. Murphey, “Model-based control using koopman operators”, Sep. 2017.
- [31] M. Korda and I. Mezić, “Linear predictors for nonlinear dynamical systems: Koopman operator meets model predictive control”, *Automatica*, vol. 93, pp. 149–160, 2018.



## Annexe

### 1. Algorithme génétique :

L'algorithme génétique (GA) est une heuristique de recherche pour trouver des solutions d'optimisation globale pour problèmes d'optimisation contraints et non contraints inspirés de la théorie de Darwin de l'évolution naturelle.

Cet algorithme reflète le processus de sélection naturelle où les individus les plus aptes sont les plus susceptibles d'être sélectionnés pour reproduire la progéniture du prochain génération.

Ainsi, la population évolue vers une solution optimale au cours des générations. Dans ce travail de thèse, cette notion de sélection naturelle est appliquée pour trouver paramètres de réglage pour les contrôleurs.

Ceci est particulièrement avantageux pour les contrôleurs de réglage appliqué aux modèles basés sur les données car il permet des solutions rapides et fiables à l'optimisation problèmes de contrôle des modèles pilotés par les données.

Le concept et l'application de GA sont vaste, et cette section ne fournit que les connaissances de base nécessaires pour exécuter un GA dans Matlab. Il est important de noter que cinq phases sont considérées dans un algorithme génétique.

**Population initiale:** Le processus de sélection naturelle commence avec un ensemble d'individus appelée population, où chaque individu est une solution au problème que l'on veut résoudre. Un individu est caractérisé par un ensemble de variables appelées gènes. Pour mieux comprendre cela, considérons par exemple le problème de trouver un réglage optimal paramètres  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  pour un problème de régulateur linéaire quadratique :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \dots & q_{1,n} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \dots & q_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1} & q_{n,2} & \dots & q_{n,n} \end{bmatrix} \text{ et } R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m).$$

Ici, les entrées de la matrice Q et R sont les variables (les gènes) et l'ensemble des variables  $[q_{1,1}, \dots, q_{n,n}, r_1, \dots, r_m]$  est une solution (un individu), et une collection de telles ensembles d'individus forment une population. Il faut être prudent dans le choix de la première population car « l'évolution » en dépend naturellement.

- **Fonction fitness** : La fonction fitness ou simplement la fonction coût détermine la capacité d'un individu à rivaliser avec d'autres individus, c'est-à-dire qu'il décide comment s'adapter un individu par le biais d'un score de condition physique. Les individus avec les scores de fitness les plus élevés ont une forte probabilité d'être sélectionnés pour la reproduction. La fonction fitness peut être tout ce qui est soumis à l'exigence. Par exemple, il peut évaluer les performances des mesures telles que le temps de montée, le temps de stabilisation, le dépassement, l'erreur de suivi, etc.
- **Sélection** : L'idée de la phase de sélection est de sélectionner les individus les plus aptes et de passer leurs gènes à la prochaine génération.
- **Crossover** : Crossover est la phase la plus importante d'un GA. Dans cette phase, un nombre choisi au hasard de gènes spécifié par le point de croisement est échangé entre les parents (individus les plus aptes) pour créer une progéniture. La nouvelle progéniture est puis ajoutée à la population.
- **Mutation** : Chez certains nouveaux descendants, certains des gènes peuvent être soumis à une mutation avec une faible probabilité aléatoire. La mutation assure la diversité au sein de la population et empêche la convergence prématurée.
- **Terminaison** : Enfin, l'algorithme se termine si la population a convergé (ne produit pas de progéniture significativement différente de la précédente génération) ou si le nombre de générations spécifié est atteint. L'AG fournit un ensemble de solutions au problème lorsque cela se produit. Les options de croisement et de mutation utilisées dans cette thèse, crossover scattered et mutation gaussian, respectivement, étaient la boîte à outils d'options par défaut de l'AG. De même, le croisement fraction est également inchangée par rapport à la valeur par défaut de 0,8. Plus d'informations sur les options peut être trouvé sur la page d'aide de Matlab pour la boîte à outils. De plus, une limite de fitness de 0,02 a été précisé après quelques premiers essais et observations. Ceci est subjectif à la forme physique fonction et objectif à portée de main. Quelques lignes directrices générales lors de la création d'un algorithme génétique peut aider à la mise en œuvre réussie de la même chose. Ils sont enrôlés comme suit :
  - Taille de la population : Généralement, la taille de la population dépend du nombre de gènes. Des gènes plus longs signifieraient une taille de population plus grande car l'espace de solution a une plus grande dimension.
  - Nombre de générations : Le nombre maximum de générations doit être choisi tel que l'algorithme se termine idéalement lorsque la valeur de fitness spécifiée est atteinte.

Cependant, les lignes directrices présentées ci-dessus ne sont pas des règles absolues ; ils ne servent que de

guide pour initier une GA. Par conséquent, dans ce travail de thèse, six gènes sont définis pour le LQI réglage. Cinq représentent les états (état d'origine du système + erreur de bras intégrée angle,  $\phi_1$ ) et le gène restant représente la pénalité à l'entrée. De même, le MPC problème a cinq gènes. Comme première estimation, la taille de la population et une taille de génération de 10 chacun a produit des résultats raisonnablement bons. Le calcul, cependant, s'est arrêté lorsque le nombre de générations ont été atteintes et non parce que la valeur de fitness a été atteinte. La prochaine tâche importante consiste à formuler la fonction de fitness. Encore une fois, c'est subjectif à les exigences du concepteur. La fonction de fitness renvoie une valeur de fitness scalaire utilisée pour sélectionner les gènes « élites ». On peut spécifier différents objectifs de performance à calculer ce coût, par exemple, le temps de montée, le temps de stabilisation, le dépassement de pic, etc. . Dans ce travail de thèse, cependant, il s'agissait de suivre au plus près une trajectoire de référence et par conséquent, la fonction de fitness consistait en une simple erreur quadratique des états et de la référence,

$$\mathbf{J} = \sum_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{r}_k)^2 \quad (1.47)$$

où  $k$  est l'indice de temps discret et  $\mathbf{r}_k$  est la trajectoire de référence souhaitée. Depuis le le suivi de l'angle du bras  $\phi_1$  tout en maintenant le pendule en position verticale est le but de cette thèse, on peut encore simplifier le calcul du coût spécifié ci-dessus fonction en ne considérant que l'erreur quadratique des états ( $\phi_1$  et  $\dot{\phi}$

1). De plus, dans cette thèse, les erreurs quadratiques des deux états ont été pondérées comme suit :

$$\mathbf{J} = \sum_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{r}_k)^2 + (\dot{\mathbf{x}}_k - \beta \mathbf{r}_{\dot{\mathbf{x}}k})^2 \quad (1.48)$$

La valeur de  $\beta$  peut varier selon les besoins de l'utilisateur. Dans cette thèse, il s'agissait nécessaire pour suivre  $\phi_1$  avec des temps de montée et de stabilisation raisonnablement bons, et il était donc intuitivement choisi comme  $\beta = 0,1$ .

## Résumé:

Le but de ce travail est d'étudier la mise en œuvre du cadre de l'opérateur de Koopman pour approximer des prédicteurs linéaires pour des systèmes dynamiques non linéaires. L'opérateur de Koopman, dans son essence, offre la possibilité d'utiliser les outils spécifiquement conçus pour les systèmes dynamiques linéaires pour les systèmes dynamiques non linéaires définis par l'opérateur de Koopman. Cela permet d'obtenir une approximation linéaire pour les systèmes non linéaires, sans avoir besoin de linéarité directement autour d'un point fixe. Pour cela, les dynamiques non linéaires sous-jacentes sont élevées ou incorporées dans une dimension supérieure dans laquelle l'évolution de l'opérateur de Koopman est approximativement linéaire. Malgré sa linéarité, l'opérateur de Koopman est infiniment dimensionnel, ce qui le rend impraticable pour des applications directes. Par conséquent, une approximation de dimension finie est obtenue en utilisant la décomposition en modes dynamiques étendue. Pour l'évaluation de la stratégie proposée, un pendule inversé à commande d'articulation est utilisé comme application. Les performances de suivi des modèles obtenus sont évaluées en les comparant à un modèle dérivé des premiers principes, qui implique une linéarisation autour d'un point fixe. Les résultats révèlent que les techniques de contrôle basées sur le modèle de Koopman présentent des performances supérieures à celles utilisant un modèle linéarité localement.

**Mots clés :** Contrôle prédictif, Opérateur de Koopman, Système non linéaire, Stabilité du système, Identification basée sur le modèle, Décomposition en modes dynamiques

## Abstract:

The purpose of this work is to investigate the implementation of the Koopman operator framework to approximate linear predictors for nonlinear dynamical systems. The Koopman operator, in its essence, offers the potential to utilize the tools specifically designed for linear dynamical systems to the dynamical non-linear systems defined by the Koopman operator. This allows for the derivation of a linear approximation for non-linear systems, without the need for direct linearization around a fixed point. To achieve this, the underlying nonlinear dynamics are elevated or incorporated into a higher dimension in which the evolution of the Koopman operator is approximately linear. Despite linearity, the Koopman operator is infinite-dimensional, making it impractical for direct application purposes. Consequently, a finite-dimensional approximation is obtained by employing the Extended Dynamic Mode Decomposition. For the evaluation of the proposed strategy, an Arm-Driven Inverted Pendulum is used as an application. The tracking performance of the obtained models is evaluated by comparing them to a model derived from first principles, which involves linearization around a fixed point. Results reveal that the control techniques based on the Koopman model demonstrate superior performance compared to those employing locally linearized model.

**Key words :** Predictive control, Koopman operator, Nonlinear system, System stability, Model-based identification, Dynamic mode decomposition.

## المخلص:

يدرس هذا العمل تنفيذ مشغل كوپمان لتقريب النظم الديناميكية غير الخطية المسيطر عليها بواسطة النماذج الخطية. يتيح نهج كوپمان تطبيق الأدوات المطورة للأنظمة الديناميكية الخطية على الأنظمة الديناميكية غير الخطية التي يتم تعريفها بواسطة مشغل كوپمان، مما يسمح بالحصول على تقريب خطي لنظام غير خطي بدون خطيته مباشرة حول نقطة ثابتة. يتم تحقيق ذلك عن طريق رفع أو دمج الديناميات غير الخطية الأساسية في فضاء ذو بُعد أعلى حيث تكون تطورات مشغل كوپمان تقريباً خطية. على الرغم من خطيته، يكون مشغل كوپمان ذو بُعد لانهازي، مما يجعله غير مناسب للتطبيق المباشر. وبالتالي، يتم الحصول على تقريب ذو بُعد محدود باستخدام تحليل التفكك الدينامي لنمط ممتد (EDMD). لتقييم الاستراتيجيات المقترحة، يُستخدم مثال لمرآحة معكوسة تتم التحكم فيها بواسطة ذراع. يتم تقييم أداء النماذج المحصلة في التتبع عن طريق مقارنتها بنموذج يتم استنتاجه من المبادئ الأولية، مما ينطوي على خطيته حول نقطة ثابتة. تؤكد النتائج أن تقنيات التحكم المستندة إلى نموذج كوپمان لديها أداء أفضل بالمقارنة مع تلك التي تستخدم نموذجاً محلياً خطياً.

**الكلمات المفتاحية :** التحكم التنبئي ، مشغل كوپمان ، النظام غير الخطي ، استقرار النظام ، التحديد المستند إلى النموذج ، تحليل الوضع الديناميكي.