UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

N° d'ordre :
N° de série :

Faculté des Mathématiques et sciences de la matiére

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option :Analyse fonctionnelle

par :Youcefi Khaoula

Thème

Sur l'existence d'un solution pour un problème aux limite à trois points en résonance dans $\mathbb{R}^n$.

Soutenu publiquement le : 20/06/2024

Devant le jury composé de :

Mr.Bencheikh AbdelKerim	M. A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.Hchifa Abderrzak	M. A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.Kouidri Mohammed	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2023/2024

Dédication

À mon cher père, je te remercie du fond du cœur pour tout ton soutien et tes sacrifices infinis. Que Dieu te donne la santé et le bien-être
À ma chère maman, tu es la lumière de ma vie et mon soutien, que tu restes pour moi la plus douce et la plus belle des mères. Je t'aime de tout mon cœur.
Et à ma sœur et mes frères, ainsi qu'aux enfants de ma sœur (Nada, Aya et Oussama) et les enfants de mon frère (Yahia et Malak), je demande à Dieu de vous protéger tous.

Remerciement

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers **mon Dieu** qui m'a guidé tout au long de la réalisation de mon mémoire. .

Un immense merci à **ma famille** pour son soutien indéfectible.

Mes remerciements vont également à mon encadreur **Kouidri.Mohammed** pour ses conseils précieux.

Je suis reconnaissant envers les membres du jury, notamment à **MR.Bencheikh AbdelKerim** et **MR.Hchifa Abderrzak**, qui ont évalué mon travail.

Mes remerciements s'étendent à tous les membres du département de mathématiques, ainsi qu'à ceux qui ont contribué à la réalisation de ce projet.

Table des matières

Notations

On utilise les notations suivantes tout au long du travail :

— $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

— $\mathbb{R}_+$: ensemble des nombres réels positifs.

— $\mathbb{R}_+^*$: ensemble des nombres réels strictement positifs.

— $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels.

— $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

— $C([a,b])$: l'espace des fonctions f continues sur $[a;b]$ à valeur réels.

— $\bar{C}^k$:l'espace des fonction à valeurs dans R, K fois différentiable dans Ω.

— (X,d) : espace métrique.

— $d(.,.)$: application de distance.

— Ω : un ensemble ouvert borné .

— $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$: c'est la fermeture de Ω.

— $u'(t)$ la dérivée ordinaire par rapport à t.

— U : un ensemble ouvert

— deg : Degré topologique .

— $\deg_B$: Degré topologique de Brouwer.

— $\deg_{LS}$: Degré topologique de Leray-Schauder.

— $\bar{B}$: La boule unité fermée.

— max : Maximum .

— $\langle , \rangle$: Produit scalaire.

— Im : Image d'une application.

— Ker : Noyau.

— P, Q : Deux projections continues.

— $\oplus$: La somme direct.

— L : L'opérateur de Fredholm.

— dom : Domaine.

— ind : Indice.

— dim : Dimension.

— $codim$: Codimension.

— $coker$: Conoyau.

— Kp : l'opérateur linéaire.

— N : L-compact surΩ.

— $\|.\|_{\infty} = max|.|$.

Introduction

L'objectif de ce travail est de présenter des résultats d'existence d'au moins une solution pour un problème aux limite à trois points en résonance dans $\mathbb{R}^n$. Un problème aux limites est qualifié de résonant lorsqu'il a une solution non triviale correspondant au problème homogène linéaire . Les résultats présentés reposent sur la théorie du degré de coïncidence de Mawhin pour examiner l'existence des solutions. Cette approche utilise un type de degré topologique pour résoudre des problèmes sous la forme d'une équation d'opérateur abstrait, Lu= Nu, où L est un opérateur linéaire non inversible et N est un opérateur non linéaire agissant sur un espace de Banach donné. En 1972, Mawhin a proposé une méthode pour résoudre cette équation dans son article célèbre sur les problèmes de degrés topologiques et aux limites pour les équations différentielles non linéaires. Il a supposé que L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, développant ainsi une nouvelle théorie du degré topologique connue sous le nom de degré de coïncidence pour (L, N), également appelée théorie du degré de coïncidence de Mawhin.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans **Le premier chapitre**, nous exposons les concepts préliminaires essentiels qui seront utilisés tout au long des autres chapitres. Une revue détaillée de certains théorèmes de point fixe est présentée, mettant particulièrement en lumière le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. De plus, nous introduisons une notion significative liée à l'homotopie. Nous abordons également le concept du degré topologique et ses propriétés, définissant ainsi deux degrés distincts : le degré de Brouwer en dimension finie et le degré de Leray-Schauder en dimension infinie.

Dans **le deuxième chapitre**, nous définissons le théorème de degré de coïncidence de Mawhin, ou du moins, nous le construisons. Il sera nécessaire d'identifier une classe importante d'opérateurs : les opérateurs de Fredholm d'indice zéro, qui peuvent être obtenus à partir des projections. Enfin, nous démontrons le théorème.

Dans **le troisième chapitre** , est dédié à l'étude d'un problème en résonance. En effet, nous proposons de démontrer l'existence d'un problème de valeur limite à trois points en résonance dans $\mathbb{R}^n$. Il est essentiel de souligner que ces résultats reposent sur la théorie du degré de coïncidence de Mawhin.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Le but de ce chapitre est d'étudier quelques théorèmes du point fixe. Nous débuterons avec le plus simple et le plus célèbre d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach applicable aux applications contractantes. Ensuite, nous aborderons le théorème du point fixe de Brouwer (valable en dimension finie), suivi du théorème du point fixe de Schauder, qui constitue la "généralisation" en dimension infinie (voir [1]-[12]).

1.1 Théorème du point fixe

Dans cette section, nous présentons quelque théories et caractéristiques du point fixe de Banach, et aussi point fixe pour l'application ne soit pas une contraction sur tout l'espace métrique , avec étudier les principes de continuité .

1.1.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver , qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

Définition 1.1.1. ***(Espace métrique)***

Un espace métrique $(X; d)$ *est un ensemble* X *muni d'une application* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *appelée distance ou métrique, possédant les trois propriétés qui suivent :*

i) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$ *et* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ *(la symétrie).*

iii) $\forall x, y \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition 1.1.2. ***(Espace métrique complet)***

L'espace métrique (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* X *converge dans* X.

Suite de Cauchy :

On dit que la suite $(x_n)_n$ *dans l'espace métrique* $(X; d)$ *est de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ N_\epsilon > 0 \ tel\ que\ n, m > N_\epsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

On Écrit alors

$$d(x_n, x_m) \to 0,\ quand\ n, m \to +\infty.$$

Définition 1.1.3. ***(Point fixe)***

Soit $F : X \longrightarrow X$ *une application. On appelle point fixe tout point* $x \in X$ *tel que* $F(x) = x$.

Définition 1.1.4. ***(L'application lipschitzienne)***

Soit (X,d) un espace métrique complet et l'application $F : X \longrightarrow X$*, On dit que F est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive* $k \geq 0$ *telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments* x, y *de* X*, l'inégalité :*

$$d(F(x), F(y)) \leq k(d(x, y)), \forall x, y \in X \tag{1.1}$$

Si $k \leq 1$*, l'application F est appelée non expansive.*

Si $k < 1$*, l'application F est appelée contraction.*

Théorème 1.1.1. ***(Théorème du point fixe de Banach(1922))[5].***

Soit (X,d) un espace métrique complet et soit $F : X \longrightarrow X$ une application contractante de constante de contraction k, alors :

(a) *F admet un unique point fixe $\alpha \in X$.*

(b) *Pour tout $x \in X$, $\alpha = \lim_{n\longrightarrow\infty} F^n(x)$ ou $F^0(x) = x$ et $F^n(x) = F(F^{n-1}(x))$.*

(c) *La vitesse de convergence peut être estimée par :*

$$d(F^n, \alpha) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x, F(x)) \qquad n \geq 1 \tag{1.2}$$

Preuve.

(1) l'unicité du point fixe :

On suppose que il esiste $x, y \in X$ avec $x = F(x)$;$y = F(y)$

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y) \quad 0 < k < 1.$$

Alors l'inégalité dernier est correctement dans le cas

$$d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Alors $\exists! x \in X$ tel que $F(x) = x$.

(2) l'existence du point fixe :

On suppose que $F^n(x)$ est un suite de cauchy pour $n \in N$.

Ou

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq kd(F^{n-1}(x), F^n(x)) \leq .... \leq k^n d(x, F(x))$$

Si $m > n$ où $n \in \{0, 1, ...\}$, on obtient

$$\begin{aligned} d(F^n(x), F^m(x)) &\leq d(F^n(x), F^{n+1}(x)) + d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) + ... + d(F^{m-1}(x), F^m(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x)) + k^{n+1}d(x, F(x)) + ... + k^{m-1}d(x, F(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x))[1 + k + k^2 + ...] \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Pour $m > n; n \in \{0, 1, ...\}$, on a

$$d(F^n(x), F^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)). \tag{1.3}$$

Alors F^n est une suite de Cauchy dans l'espace complet X en suite alors il existe $\alpha \in X$ avec

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} F^n = \alpha.$$

De plus par la continuité de F

$$\alpha = \lim_{n \longrightarrow \infty}(F^{n+1}(x)) = \lim_{n \longrightarrow \infty}(F(F^n(x))) = F(\lim_{n \longrightarrow \infty}(F^n(x))) = F(\alpha).$$

Donc α est un point fixe de F.

Finalement, $m \longrightarrow \infty$ in (1.3), on obtient

$$d(F^n(x), x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)).$$

$\square$

Exemple 1.1.1.

Soient $X = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|, T : X \to X$ tel que $T(x) = \frac{x+\sin(x)}{3}$. Alors $\forall x, y \in X$

$$|T(x) - T(y)| = \left| \frac{x + \sin(x)}{3} - \frac{y + \sin(y)}{3} \right| \leq \frac{1}{3}(|x - y| + |\sin(x) - \sin(y)|)$$

Après l'application du théorème des accroissements finis, on obtient $\forall x, y \in X$

$$|T(x) - T(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y|,$$

donc T est une contraction de X vers X, comme $(\mathbb{R}, d)$ est complet, d'aprés le théorème de point fixe de Banach, alors T admet un point fixe unique $x^* = 0$.

Remarque 1.1.1.

Les conditions du cette théorème sont nécessaires, considérons les exemples suivants .

Exemple 1.1.2. ***(Condition de fermeture)***

(1) *Si X n'est pas stable par F : $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $X = [0, 1]$. On a X est fermé dans $\mathbb{R}$ donc il est complet (car $\mathbb{R}$ est complet).*

De plus $F'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, *ce qui implique que* $\sup_{x\in[0,1]} |F'(x)| < 1$, *donc* F *est contractante sur* $[0,1]$.

Mais F *n'admet pas de point fixe car* $F([0,1]) = [1, \sqrt{2}] \subset [0,1]$, *i.e* X *n'est pas stable par* F.

(2) $F :]0,1] \longrightarrow]0,1]$, $F(x) = \frac{x}{2}$, *est contractante et vérifie* $F(]0,1]) \subset]0,1]$ *mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que* $]0,1]$ *n'est pas fermé* $\lim x_n = 0$ *n'est pas contenue dans* $]0,1]$.

Exemple 1.1.3. ***(condition de contraction)***

(1) $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ *sur* $X = [0, +\infty[$.

On a $F([0,+\infty[) \subset ([0,+\infty[)$ *et* X *est un fermé dans* $\mathbb{R}$*.Alors* X *est complet. Mais* F *n'a pas de point fixe car* $\sup_{x\in X} |F'(x)| = 1$ *i.e* F *n'est pas contractante.*

(2) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ *vérifie* $|F(x) - F(y)| < |x - y|$ *pour tout* $x \neq y$, *mais n'admet pas de point fixe. Le probléme est que* T *n'est pas contractante, et pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$ *on obtient* $x_n \longrightarrow +\infty$.

1.1.2 Théorèmes du point fixe pour l'application ne soit pas une contraction sur tout l'espace métrique

Soit (X, d) un espace métrique complet,Les fonctions définies uniquement sur un sous-ensemble de X ne garantissent pas nécessairement l'existence d'un point fixe . Des conditions supplémentaires seront nécessaires, Pour assurer cela.

Théorème 1.1.2.

Soient K *un ensemble fermé dans* X *et* $F : K \longrightarrow X$ *une k-contraction. Supposons qu'il existe* $x_0 \in K$ *et* $r > 0$ *tel que*

$$\overline{B(x_0, r)} \subset K \qquad et \qquad d(x_0, F(x_0)) < (1-k)r.$$

Alors F *a un unique point fixe dans* $B(x_0, r)$.

Dans certaines applications, il existe des cas où F *est lipschitzienne sans être une* *contraction, mais une certaine puissance de F peut être une contraction voir [5]. Dans ce cas nous avons le théorème suivant.*

Théorème 1.1.3.

Soit (X, d) un espace métrique complet, $T : X \longrightarrow X$ une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction)

$$d(T^m(x), T^m(y) \leq kd(x, y), \forall x, y \in X.$$

Pour un certain $m \geqslant 1$ ou $0 \leq k < 1$, alors T admet un unique point fixe $x^* \in X$.

***Preuve**.*

Comme T^m est une contraction, il en résulte du théorème (1.1.2) que T^m a un unique point fixe, donc $x^* = T^m x^*$.
Alors

$$T^m(T(x^*)) = T(T^m(x^*)) = T(x^*),$$

alors $T(x^*)$ est un point fixe de T^m.
Mais T^m admet un unique point fixe, d'où $T(x^*) = x^*$. Donc T a un unique point fixe (x^*), et il est unique car tout point fixe de T est également point fixe de T^m. □

Exemple 1.1.4.

soit M un espace métrique donné par $M = C[a; b]$ (un espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle [a ;b]), est un espace de Banach par rapport à la norme $\|u\| = \max_{t\in[a,b]} |u(t)|, u \in M$.
On définit $T : M \to M$ par :

$$Tu(t) = \int_a^t u(s)ds.$$

On montre que $\|T(u) - T(v)\| \leq (b - a)\|u - v\|$, on a

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(v)\| &= \max_{t\in[a,b]} |\int_a^t u(s)ds - \int_a^t v(s)ds| \\ &\leq \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |u(s) - v(s)|ds. \end{aligned}$$

D'après la majoration, on obtient

$$\begin{aligned}\|T(u)-T(v)\| &\leq \int_a^t ds\|u(s)-v(s)\| \\ &\leq (t-a)\|u(s)-v(s)\|, \qquad \forall t\in[a,b] \\ &\leq (b-a)\|u(s)-v(s)\|.\end{aligned}$$

Donc $(b-a)$ est la meilleure constante de Lipschitz pour T.
D'autre part, on a :

$$T^2(u)(t)=\int_a^t\left(\int_a^s u(\mu)d\mu\right)ds=\int_a^t(t-s)u(s)ds.$$

Et par induction

$$T^m u(t)=\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}u(s)ds.$$

Dés lors

$$\begin{aligned}\|T^m u(t)-T^m v(t)\| &= \max_{t\in[a,b]}|T^m u(t)-T^m v(t)| \\ &= \max_{t\in[a,b]}\left|\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}u(s)ds-\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}v(s)ds\right| \\ &= \max_{t\in[a,b]}\left|\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}\left(u(s)-v(s)\right)ds\right| \\ &\leq \max_{t\in[a,b]}\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}\left|\left(u(s)-v(s)\right)\right|ds \\ &\leq \frac{1}{(m-1)!}\int_a^t(t-s)^{m-1}ds\|u(s)-v(s)\| \\ &\leq \frac{-1}{(m-1)!\times m}\left[(t-s)^m\right]_a^t\|u(s)-v(s)\| \\ &\leq \frac{1}{m!}(t-a)^m\|u(s)-v(s)\| \qquad \forall t\in[a,b] \\ &\leq \frac{1}{m!}(b-a)^m\|u(s)-v(s)\|.\end{aligned}$$

Et donc T^m serait une contraction si $\dfrac{(b-a)^m}{m!}<1$.

1.1.3 Principes de continuation

Une autre façon d'obtenir l'existence de point fixe pour une application non définie sur tout l'espace s'obtient via un processus de continuation . Celui-ci consiste à déformer notre application en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe. Il va sans dire que cette déformation connue sous le nom devra vérifier certaines condition .

Définition 1.1.5. ***(Les application homotopes)***

Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes lorsqu'il existe une application continue

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y,$$

telle que : $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$.on note $f \simeq g$ ou $H : f \simeq g$

Remarque 1.1.2.

En d'autres termes, il existe une famille d'applications de X dans Y, à savoir $x \longrightarrow H(x, t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, qui part de f pour arriver à g, et varie continument.

Exemple 1.1.5.

Soit $X = Y = \mathbb{R}^n$, on considère $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application constante $v(x) = 0$, et $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application $w(x) = x$. Montrons que v et w sont homotopes. Il suffit de prendre :

$$H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n,$$

tel que

$$H(x, t) = (1 - t)v(x) + tw(x).$$

On a

$$H(x, 0) = (1 - 0) \times 0 + 0 \times x = 0,$$

et

$$H(x, 1) = (1 - 1) \times 0 + 1 \times x = x.$$

Alors $H(x; t) = tx$ et $H(x, 1) = w(x)$ et $H(x, 0) = v(x)$.

Exemple 1.1.6.

Soit $X = Y = \mathbb{R}^n - \{0\}$, *on considéré cette fois ,* $p(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ *et* $q(x) = x$.
On voit que p *et* q *sont homotopes en prenant :*

$$H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Tel que : $H(x,t) = (1-t)q(x) + tp(x)$, *on a*

$$H(x,0) = (1-0) \times x + 0 \times \frac{x}{\|x\|} = x,$$

et

$$H(x,1) = (1-1) \times x + 1 \times \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\|x\|}.$$

Alors $H(x,t) = (1-t)x + t\dfrac{x}{\|x\|}$ *et* $H(x,0) = q(x)$ *et* $H(x,1) = p(x)$.

Définition 1.1.6. ***(Équivalence d'homotopie)***

Soit $f : X \longrightarrow Y$ *une application continue. On dit que* f *est une équivalence d'homotopie lorsqu'il existe* $g : Y \longrightarrow X$ *telle que* $g \circ f = id_X$, *et* $f \circ g = id_Y$.
On dit que X *et* Y *sont du même type d'homotopie, et on note* $X \simeq Y$.

Exemple 1.1.7.

Soit $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ *et* $Y = S^{n-1}$, *on prend alors* $f : X \longrightarrow Y$ *définie par* $f(x) = x/\|x\|$, *et* $g : Y \longrightarrow X$ *l'inclusion. Alors* $f \circ g = id_Y$, *et l'exemple (1.1.6) montre que* $g \circ f \simeq id_X$.
Donc $\mathbb{R}^n - \{0\}$ *a le même type d'homotopie que la sphère* $S^{n-1}.(X \simeq Y)$.

Définition 1.1. ***(Les propriétés d'homotopie)***

Soit (X,d) un espace métrique complet, et U *un sous ensemble ouvert de* X.
On considéré $F : \overline{U} \longrightarrow X$ *et* $G : \overline{U} \longrightarrow X$ *deux contractions, on dit que* F *et* G *sont homotopes s'il existe* $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow X$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) $H(.,0) = G$ *et* $H(.,1) = F$.

(b) $H(x,t) \neq x$ *pour tout* $x \in \partial U$ *et* $t \in [0,1]$.

(c) *Il existe* $\alpha \in [0,1)$ *tel que* $d\Big(H(x,t); H(y,t)\Big) \leq \alpha d(x,y)$ *pour tout* $x, y \in \overline{U}$, *et* $t \in [0,1]$.

(d) *Il existe* $M \geq 0$ *tel que* $d\Big(H(x,t), H(x,s)\Big) \leq M|t-s|$ *pour tout* $x \in \overline{U}$, *et* $t,\ s \in [0,1]$.

Théorème 1.1.4.

Soit $F : \overline{U} \longrightarrow X$ *et* $G : \overline{U} \longrightarrow X$ *deux applications homotopiquement contractives et* G *a un point fixe dans* U*. Alors,* F *admet un point fixe dans* U*.*

Preuve.

On pose l'ensemble $Q = \{\lambda \in [0,1], x = H(x,\lambda)\}$ pour certain $x \in U$ et H est une homotopie entre F et G a décrite dans la définition (1.1.5). Notons que Q est non vide ($Q \neq \emptyset$) puisque G a un point fixe et que $0 \in Q$.

On montre que Q est à la fois ouvert et fermé dans $[0,1]$ alors montre $Q = [0,1]$. Par conséquent F a un point fixe.

(i) Montrons que Q est un ensemble fermé dans [0,1] :

Soit $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ une suite dans Q telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = \lambda$, alors nous devons montrer que $\lambda \in Q$.

Comme $\lambda_n \in Q$ pour $n = 1, 2, ...$, il existe $x_n \in U$ où $x_n = H(x_n, \lambda_n)$.

On a pour $n, m \in \{1, 2, ...\}$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d\Big(H(x_n,\lambda_n), H(x_m,\lambda_m)\Big) \\ &\leq d\Big(H(x_n,\lambda_n), H(x_n,\lambda_m)\Big) + d\Big(H(x_n,\lambda_m), H(x_m,\lambda_m)\Big) \\ &\leq M|\lambda_n - \lambda_m| + \alpha d(x_n, x_m). \end{aligned}$$

Alors

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{M}{1-\alpha}|\lambda_n - \lambda_m|.$$

Donc $\{x_n\}$est une suite de Cauchy de X (car $\{\lambda_n\}$ l'est aussi) et, puisque X est complet, il existe $x \in \overline{U}$ telle que $\lim_{x\longrightarrow\infty} x_n = x$.

Par la continuité de H

$$x = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = lim_{n\longrightarrow\infty} H(x_n, \lambda_n) = H(x, \lambda)$$

Donc $\lambda \in Q$ et Q est fermé dans $[0,1]$.

(ii) Montrons que Q est un ensemble ouvert dans [0,1] :

Soit $\lambda_0 \in Q$, alors il existe $x_0 \in U$ avec $x_0 = H(x_0, \lambda_0)$.

Puisque, par hypothèse $x_0 \in U$, nous pouvons trouver $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \subseteq U$.

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \frac{(1-\alpha)r}{M}$ où $r \leq dist(x_0, \partial U)$,

et

$$dist(x_0, \partial U) = inf\{d(x_0, x) : x \in \partial U\}.$$

Fixons $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$.

Alors, pour $x_0 \in \overline{B(x_0, r)}$

$$\begin{aligned} d(x_0, H(x, \lambda)) &\leq d(H(x_0, \lambda_0), H(x, \lambda_0)) + d(H(x, \lambda_0), H(x, \lambda)) \\ &\leq \alpha d(x_0, x) + M|\lambda_0 - \lambda| \\ &\leq \alpha r + (1 - \alpha)r = r. \end{aligned}$$

Alors pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ fixé

$$H(., \lambda) : \overline{B(x_0, r)} \longrightarrow \overline{B(x_0, r)}.$$

Par le théorème (1.1.1), (1.1.2), on déduit que $H(., \lambda)$ un point fixe dans U.

Alors $\lambda \in Q$ pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$. Et par conséquent Q est ouvert dans $[0, 1]$. Donc Q=[0, 1].

□

Remarque : Du théorème précédent, nous déduisons le résultat suivant :

Théorème 1.1.5. ***(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)***

Soit $U \subset E$ un ensemble ouvert d'un espace de Banach E tel que $0 \in U$, et soit $F : \overline{U} \longrightarrow E$ une contraction telle que $F(\overline{U})$ soit bornée.

Alors un des deux énoncés suivant est vérifié :

(a) *F a un point fixe dans $(\overline{U})$.*

(b) *il existe $\lambda \in (0, 1)$ et $x \in \partial U$ tells que $x = \lambda F(x)$.*

Preuve.

Supposons que (b) n'est pas vérifié et que F n'a pas de point fixe sur ∂U c'est à dire $x \neq \lambda F(x)$ pour tout $x \in \partial U$ et $\lambda \in [0,1]$.

Soit $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow E$ donnée par $H(x,\lambda) = \lambda F(x)$, et soit G l'application nulle(G(x)=0).

Notons que G a un point fixe dans U (à savoir $(G(0) = 0)$) et que F et G sont deux applications homotopiquement contractives. Par le théorème (1.1.4) F a également un point fixe et donc l'annonce (a) est vérifié. □

1.2 Degré topologique

Dans cette section, nous offrons une brève vue d'ensemble du concept de degré topologique, que ce soit en dimension finie ou infinie. Le degré, noté $deg(f,\Omega,y)$ *de la fonction* f *dans l'ensemble* Ω *par rapport à* y*, fournit des informations sur le nombre de solutions de l'équation* $f(x) = y$ *dans un ensemble ouvert* $\Omega \subset X$*. Ici,* $f : X \longrightarrow X$ *est continue,* $y \notin f(\partial\Omega)$*, et* X *est généralement un espace topologique métrique.*

1.2.1 Degré topologique de Brouwer

Soit Ω *un ensemble ouvert borné dans* $\mathbb{R}^n$ *avec une frontière* $\partial\Omega$ *et une fermeture* $\overline{\Omega}$*. L'espace* $\overline{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$ *représente des fonctions à valeur dans* $\mathbb{R}^n$*,* k *fois différentiables dans* Ω *qui sont continues sur* $\overline{\Omega}$ *. Cet espace sera muni de sa topologie usuelle.*

Définition 1.2.1. ***(Jacobien)***

Soit $x_0 \in \Omega$*, si* f *est différentiable en* x_0*, on note par* $J_f(x_0) = det f'(x_0)$ *le Jacobien de* f *en* x_0*.*

Définition 1.2.2. ***(Le point critique)***

Soit f *une fonction de classe* C^1 *sur* Ω*. Notons par* $J_f(x_0)$*le Jacobien de* f *en un point* x_0 *de* Ω*. Le point* x_0 *est dit point critique si* $J_f(x_0) = 0$*. Sinon,* x_0 *est dite point régulier.*

On pose $S_f(\Omega)$ l'ensemble des points critiques.
C'est à dire :

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}.$$

Définition 1.2.3. ***(Valeur régulière)***

Considérons y Un élément dans $\mathbb{R}^n$ est dit valeur régulière de f si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$. Sinon, y est dit valeur singulière.

Définition 1.2.4. ***(Degré topologique)***

Soit $f \in \overline{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ une valeur régulière de f.
On appelle degré topologique de f dans Ω par rapport à y le nombre entier

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} Sgn\ J_f(x).$$

Où $Sgn\ J_f(x)$ Représente le signe de $J_f(x)$, défini par :

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t>0, \\ -1 & \text{si } t<0. \end{cases}$$

Avec l'ajout de ces deux notes

1) *si $f^{-1}(y) = \emptyset, deg(f, \Omega, y) = 0$.*

2) *$f^{-1}(y)$ contient un nombre fini d'éléments.*

Exemple 1.2.1. *Soit $0 < \epsilon < 1$ et considérons la fonction $f(x, y) = (x^2 - y^2 - \epsilon, 2xy)$, et $f^{-1}(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = (0, 0)\}$ alors, on a*

$$.x^2 - y^2 - \epsilon = 0 \tag{1.4}$$

et

$$2xy = 0 \tag{1.5}$$

D'aprés (1.5) on trouve $x = 0$ ou $y = 0$.
Si $x = 0$ alors : $-y^2 - \epsilon = 0 \Longrightarrow y^2 = -\epsilon$ c'est contradiction.

Si $y = 0$ *alors :* $x^2 - \epsilon = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\epsilon}$ *ou* $x = -\sqrt{\epsilon}$, *donc*

$$f^{-1}(0,0) = \{(-\sqrt{\epsilon}, 0); (\sqrt{\epsilon}, 0)\}$$

Si $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ *alors* $f^{-1}(0,0) \cap \partial\Omega = \emptyset$. *En outre, comme*

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et $\det(J_f((x,y))) = 4(x^2 - y^2)$ *et puisque* $\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{Sgn} J_f(x)$ *alors*

$$Sgn \det J_f(\sqrt{\epsilon}, 0) = \operatorname{Sgn} 4\epsilon = 1$$

$$\operatorname{Sgn} \det J_f(-\sqrt{\epsilon}, 0) = \operatorname{Sgn} 4\epsilon = 1$$

$$\Longrightarrow \deg(f, \Omega, 0) = 1 + 1 = 2$$

Remarque 1.2.1.

Dans le cas où $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) \neq 0$, *Nous passons à le lemme suivant*

Lemme 1.1. ***(Lemme de Sard)***

Soit une fonction $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. *Alors l'ensemble* $f(S_f)$ *des valeurs critiques de* f *est de mesure nulle.*

Remarque 1.2.2. *Nous verrons maintenant qu'on peut étendre la notion de degré au cas où la fonction* f *est seulement continue.*

Définition 1.2.5.

Soient $\Omega \subset R^n$ *un ouvert borné,* $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *et* $y \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $y \notin f(\partial\Omega)$. *On définit le degré topologique de* f *dans* Ω *par rapport* y *par*

$$deg(f, \Omega, y) = [\lim_{n \to \infty} deg(f_n, \Omega, y)].$$

Où $\{f_n\}_{n \in N^*}$ *est une suite de fonction* $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *qui converge uniformément vers* f *dans* $\overline{\Omega}$.

Théorème 1.2.1. ***(Quelques propriétés importantes du degré topologique de Brouwer)[11]*** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné, et posons*

$$A(\Omega) = \{f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega))\}.$$

L'application $deg(f, \Omega, y) : A(\Omega) \to \mathbb{Z}$ *satisfait les propriété suivantes :*

(1) ***(Normalisation)*** *$deg(I, \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$ et $deg(I, \Omega, y) = 0$ si $y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ où I désigne l'application identité sur $\overline{\Omega}$.*

(2) ***(Solvabilité)*** *Si $deg(f, \Omega, y) \neq 0$, alors $f(x) = y$ admet au moins une solution dans Ω.*

(3) ***(Invariance par homotopie)*** *Pour tout $h : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et tout $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continues telles que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ pour tout $t \in [0,1]$, $deg(h(t,.), \Omega, y(t))$ est indépendant de t.*

(4) ***(Additivité)*** *Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de Ω et $y \notin f(\overline{\Omega} \diagdown (\Omega_1 \bigcup \Omega_2))$. Alors*

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y).$$

(5) *$deg(f, \Omega, y)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^n \diagdown f(\partial\Omega)$.*

(6) *$deg(f, \Omega, y) = deg(f - y, \Omega, 0)$.*

(7) *Soit $g : \overline{\Omega} \to F_m$ une application continue où F_m est un sous espace de $\mathbb{R}^n$, $dimF_m = m$, $1 \leq m \leq n$. Supposons que y est tel que $y \notin (I - g)\partial\Omega$.*
Alors

$$deg(f, \Omega, y) = deg((I - g)_{\overline{\Omega} \cap F_m}, \Omega \cap F_m, y)$$

Remarque 1.2.3.

Le but de démontrer l'existence de solutions d'équations non linéaires dans $\mathbb{R}^n$, la propriété (2) du théorème ci dessus est souvent complétée par la propriété d'invariance par homotopie du degré. L'intérêt principal de cette notion réside dans le fait que si deux applications sont homotopes, elles ont le même degré.

Exemple 1.2.2. *Soit $\Omega = (-1; 1)$ et considérons*

$$h : (t; x) \in [0,1] \times \overline{\Omega} \to h(t,x) = (1-t)x + t\left(x^2 + 1\right)e^x$$

Il est clair que cette application satisfait :

1) h est continue sur $[0; 1] \times \overline{\Omega}$.

2) $h(0; x) = (1 - 0)x + 0 * (x^2 + 1)\, e^x = x = I(x)$.

3) $h(1;x) = (1-1)x + 1 * (x^2+1)\, e^x = (x^2+1)\, e^x = f(x)$.

4) Pour tout $t \in [0;1]$, les fonction I et f sont homotopes , Donc $\deg(f,(-1,1),0) = \deg(I,(-1,1),0) = 1$

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Soient X un espace vectoriel normé de dimension infinie, $\Omega \subset X$ un ensemble ouvert et borné, $f : \bar{\Omega} \to X$ une fonction continue et $y \in X$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$ .Dans la section précédente, nous avons vu qu'en dimension finie, $C(\bar{\Omega}, X)$ est une classe convenable de fonctions pour laquelle il existe une unique fonction degré, le degré de Brouwer, satisfaisant les propriétés $1, 2$ et 3 du théorème. Malheureusement, en dimension infinie, $C(\bar{\Omega}, X)$ ne l'est pas. En effet, un exemple du à Leray montre qu'il faut restreindre la classe des fonctions pour laquelle il y a existence et unicité d'une fonction degré de Leray-Schauder, a un ensemble strictement contenu dans $C(\bar{\Omega}, X)$.

Définition 1.2.6.

Soient X un espace de Banach et Ω une partie fermé de X. Si $T : \Omega \to X$ est un opérateur continu, on dit que T est compact si pour toute partie bornée B de Ω, $T(B)$ est relativement compact dans X.

Remarque 1.2.4.

On notera en particulier que si T est compact, alors T est borné sur les parties bornées de X.

Définition 1.2.7.

Soients X un espace de Banach et Ω une partie de X. On dit que l'application $T : \Omega \to X$ est de rang fini si $dim(Im(T)) < \infty$, autrement dit, si $Im(T)$ est un sous-espace de dimension finie de X.

Lemme 1.2.1.

Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$. un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \to X$ une application compacte. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace de dimension fini noté F

et une application continue $T_\varepsilon : \bar{\Omega} \to F$ *telle que :*

$$\|T_\varepsilon x - Tx\| < \varepsilon \quad \forall \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Définition 1.2.8.

Soient X *un espace de Banach,* $\Omega \subset X$. *un ouvert borné et* $T : \bar{\Omega} \to X$ *une application compacte. Supposons maintenant que* $0 \notin (I-T)(\partial\Omega)$. *Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que pour* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, *le degré de Brouwer* $deg(I - T_\varepsilon, \Omega \cap F_\varepsilon, 0)$ *est bien défini comme dans le* ***lemme (1.2.1)***. *Par conséquent, nous définissons le degré de Leray-Schauder par :*

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I - T_\varepsilon, \Omega \cap F_\varepsilon, 0).$$

Remarque 1.2.5.

Cette définition ne dépend que de T *et de* Ω. *Si* $Y \in X$ *est tel que* $y \notin (I-T)(\partial\Omega)$, *le degré de* $I - T$ *dans* Ω *par rapport à* y *est défini comme étant*

$$deg(I - T, \Omega, y) = deg(I - T - y, \Omega, 0).$$

Théorème 1.2.2. ***(Quelques propriétés importantes du degré topologique de Leray-Schauder)***

Soit X *un espace de Banach et*

$$A = \Big\{(I-T, \Omega, 0)\,,\ \Omega \ \textbf{\textit{un ouvert borné de X}},\ T : \overline{\Omega} \to X \quad \textit{compacte} \quad, 0 \notin (I-T)\,(\partial\Omega)\Big\},$$

alors, il existe une unique application $deg(f, \Omega, y) : A \to \mathbb{Z}$ *appelé le degré topologique de Leray-Schauder telle que :*

(1) ***(Normalité)*** *Si* $0 \in \Omega$, *alors* $deg(I, \Omega, 0) = 1$.

(2) ***(Solvabilité)*** *Si* $deg(I - T, \Omega, 0) \neq 0$, *alors existe* $x \in \Omega$ *tel que* $(I - T)x = 0$.

(3) ***(Invariance par homotopie)*** *Soit* $H : [0,1] \times \bar{\Omega}$ *une homotopie compacte, telle que* $0 \notin (I - H(t,.))(\partial\Omega)$.
Alors

$$deg\Big(I - H(t,.), \Omega, 0\Big) \ \textit{ne dépend de}\ t \in [0,1].$$

(4) ***(Additivité)*** *Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *deux sous-ensembles disjoints ouverts de* Ω *et*

$$0 \notin (I-T)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

Alors,

$$deg(I-T, \Omega, 0) = deg(I-T, \Omega_1, 0) + deg(I-T, \Omega_2, 0).$$

Le degré de Leray-Schauder conserve toutes les propriétés de base du degré de Brouwer. Pour finir et comme conséquence de cette notion du degré nous allons prouver quelques théorèmes de points fixe topologiques en particulier l'alternative non linéaire de Leray-Schauder

1.3 Théorème du point fixe topologiques

Théorème 1.3.1. ***(Brouwer)***

Soit $\bar{B}$ *la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \bar{B} \to \bar{B}$ *continue. Alors* f *a un point fixe : il existe* $x \in \bar{B}$ *tel que* $f(x) = x$.

Preuve.

On va montrer l'existence de la solution de $f(x) = x$ sur $\bar{B}$:

(i) S'il existe un $x \in \partial B$, alors il n'y a rien à prouver.

(ii) Sinon considérons l'application continue $h(t, x) = x - tf(x)$.

Alors

$$h(0, x) = x - 0 * f(x) = x,$$

et

$$h(1, x) = x - 1 * f(x) = x - f(x).$$

Si on suppose que $h(t, x_0) = 0$ comme $x_0 \in \partial B$, alors on obtient $x_0 = tf(x_0)$ ce qui implique comme $0 \leqslant t \leqslant 1$, que $f(x_0) \in \partial B$, contradiction.

Comme est une homotopie admissible entre $I - f$ et I.

Donc

$$deg(I - f, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1.$$

En conclusion $\exists x \in B$ tel que $x - tf(x) = 0$ i.e $f(x) = x$.

$\square$

Théorème 1.3.2. ***(Schauder)***

Soit $\bar{B}$ la boule unité fermée d'un Banach E et $f : \bar{B} \to \bar{B}$ compacte. Alors f a un point fixe : $\exists\ x \in \bar{B}$ tel que $f(x) = x$.

Preuve.

Soit $h(t,x) = tf(x)$ fonction compacte sur $[0,1] \times \bar{B}$.
Si pour $t \in [0,1]$ et un $x \in \partial B$, on a $x - h(t,x) = 0$, alors $tf(x) = x$; comme $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$, ceci impose $t = 1$ et $x = f(x)$ donc un point fixe sur ∂B situation que l'on a exclue.
On peut donc appliquer les propriétés de normalisation et d'invariance par homotopie du degré donne

$$deg(I - f, B, 0) = deg(I, B, 0) = 1.$$

Puisque $h(0,.) = 0$ et $h(1,0) = f$ donc l'existence d'un point fixe. $\square$

Théorème 1.3.3. ***(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)[9]***

Soit $\Omega \subset X$ un sous ensemble ouvert borné d'un espace de Banach X tel que $0 \in \Omega$, et soit $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact. Alors un des deux énoncés suivants vérifié :

(1) *T a un point fixe dans Ω.*

(2) *il existe $\lambda > 1$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $Tx = \lambda x$.*

Preuve.

Si (2) est vraie alors on a rien à prouver. Sinon on définit l'homotopie

$$H(t,x) = tTx \quad \forall\ t \in [0,1].$$

Ainsi défini $H(t,x)$ est compacte $H(0,x) = 0$ et $H(1,x) = Tx$.

Supposons que $H(t,x_0) = x_0$ pour un certain $t \in [0,1]$ et $x_0 \in \partial\Omega$. Alors on a $tTx_0 = x_0$.
Si $t = 0$ ou $t = 1$ on a (1) ; Sinon $Tx_0 = \frac{1}{t}x_0$ *pour un certain* $t \in (0,1)$, Et alors on a

(2).
Sinon, on a
$$deg(I-T,\Omega,0)=deg(I,\Omega,0)=1.$$
Et alors T a un point fixe dans Ω. $\square$

Théorème 1.3.4. ***(Brouwer)***

Soit M une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie $(X,\|.\|)$ et soit $A : M \to M$ une application continue, alors A admet un point fixe .

Théorème 1.3.5. ***(Schauder)***

Soit M une partie bornée, fermée, convexe et non vide d'un espace de Banach X et soit $A : M \to M$ une application compacte, alors A admet un point fixe.

Théorème 1.3.6. ***(Ascoli-Arzela)***

Considérons $X = C([a, b])$ muni de la norme $\|u\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|u(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Si M est un sous ensemble de X tel que :

(i) *M est borné, il existe une constante $r > 0$ tel que*
$$\|u\| \leqslant r, \quad \forall u \in M.$$

(ii) *M est équicontinu, alors*
$$\forall\varepsilon > 0 \ ,\exists\ \delta > 0 \quad tq \quad |t_1 - t_2| < \delta \quad et \quad \forall u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon.$$

*Alors, **M est relativement compact.***

Chapitre 2

Théorème de continuation de Mawhin

Ce chapitre commence par introduire le théorème de continuation de Mawhin. Avant de détailler ce théorème, nous passons en revue brièvement l'état actuel des opérateurs de Fredholm ainsi que les concepts clés associés. Cependant, comme nous le découvrirons plus tard, ces opérateurs peuvent être obtenus à partir des projections, ce qui sera exploré dans une section ultérieure.. Voir([13]-[20])

2.1 Supplémentaire topologique

Soit E et F deux sous-espaces fermés d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé X. On dit que E est un supplémentaire topologique de F si X est la somme directe de F et E c-à-d

$$X = F \oplus E.$$

2.2 Projection

Soit X un espace vectoriel. On dit qu'un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si $P(P(x)) = P(x), \quad \forall x \in X \quad (c - \text{à} - d \text{ si } \; P^2 = P)$.

Proposition 2.2.1.

Soit X, un espace vectoriel . Un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si et seulement si $(I - P)$ est une projection. De plus, si l'espace X est normé, alors P est continue si et seulement si $(I - P)$ est continue.

***Preuve**.*

1) On montre que : P projection $\Leftrightarrow (I - P)$ projection.

($\Rightarrow$) P une projection, alors :

$$\begin{aligned}(I-P)^2 &= (I-P)[(I-P)(x)]x \\ &= (I-P)[x-P(x)] \\ &= I(x-P(x)) - P(x-P(x)) \\ &= x - P(x) - P(x) + P^2(x) \\ &= x - 2P(x) + P(x) \\ &= x - P(x) \\ &= (I-P)(x).\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $(I - P)$ est une projection,alors :

$$I - (I - P) = I - I + P = P.$$

Est aussi une projection.

2) On montre que :P est continue $\Leftrightarrow$ $(I - P)$ est continue.

($\Rightarrow$) P est continue et I est continue , alors (I-P) continue.

($\Leftarrow$)(I-P) est continue ,alors p est continue .

Pour le cadre topologique, comme l'identité est une application continue et que la somme de deux applications continues reste continue, nous avons que P est continue si et seulement si $(I - P)$l'est.

$\square$

Proposition 2.2.2.

Si P est une projection dans X, alors :

$$\begin{cases} Ker(P) = Im(I-P), \\ Im(P) = Ker(I-P). \end{cases}$$

Preuve.

1 On montre que $Ker(P) = Im(I-P)$.

(i) $Ker(P) \subset Im(I-P)$

Si $x \in Ker(P) \Rightarrow P(x) = 0$. En remplaçant P par $(I-P)$

$$\begin{aligned} (I-P)(x) &= x - P(x) = x - 0 = x \\ &\Rightarrow x \in Im(I-P) \\ &\Rightarrow Ker(P) \subset Im(I-P). \end{aligned}$$

(ii) $Ker(P) \supset Im(I-P)$

Si $x \in Im(I-P)$,on définie l'application :

$$\begin{aligned} P\Big((I-P)(x)\Big) &= P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in Ker(P) \\ &\Rightarrow Ker(P) \supset Im(I-P). \end{aligned}$$

Donc

$$Ker(P) = Im(I-P).$$

2 On montre que $Im(P) = Ker(I-P)$.

(i) $Im(P) \subset Ker(I-P)$

Si $x \in Im(P) \Rightarrow P(x) = x$, on remplaçant P par $(I-P)$. Alors

$$\begin{aligned} (I-P)(x) &= x - P(x)x - x = 0 \\ &\Rightarrow x \in Ker(I-P) \\ &\Rightarrow Im(P) \subset Ker(I-P). \end{aligned}$$

(ii) $Im(P) \supset Ker(I-P)$

Si $x \in Ker(I-P)(x)$

$$\begin{aligned}(I-P)(x)=0 \quad & \Leftrightarrow x-P(x)=0\\ & \Leftrightarrow x=P(x)\\ & \Rightarrow Im(P)\supset Ker(I-P).\end{aligned}$$

Donc

$$Im(P)=Ker(I-P).$$

□

Définition 2.2.1. ***(Un espace de Hausdorff)***

Un espace topologique X est séparé (ou de Hausdorff) si

$$\forall x \neq y \in X, \exists x \in U_x, y \in U_y \text{ ouverts tel que } U_x \cap U_y = \emptyset$$

.

Corollaire 2.2.1.

Toute projection continue dans un espace de Hausdorff est à image fermée. En particulier, les projections continues des espaces de Banach sont à images fermées.

Théorème 2.2.1.

Si P est une projection continue dans un espace vectoriel topologique de Hausdorff X, alors X est la somme directe de $Im(P)$ et $Ker(P)$, $\Big($c-à-d $X = Im(P) \oplus Ker(P)\Big)$.

Preuve.

Par le corollaire précédant , $Im(P)$ et $Ker(P)$ sont fermé dans X, où

$$Ker(P)=\{x\in X, P(x)=0\}$$

et

$$Im(P)=\{x\in X, P(x)=x\}.$$

On pose $x = P(x) + (I-P)(x)$

1- i) $P(x) \in Im(P)$ car $P(P(x)) = P^2(x) = P(x)$.

ii) $(I-P)(x) \in Ker(P)$ car $P((I-P)(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$.

Alors

$$X = Im(P) + Ker(P).$$

2- i) $P(x) \in Im(P) = Ker(I-P) \Rightarrow P(x) = (I-P)P(x) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$

ii) $(I-P)(x) \in Ker(P) \Rightarrow (I-P)(x) = 0$.

Alors $x \in Im(P) \cap Ker(P) = \{0\}$.

D'après (1) et (2)

$$X = Im(P) \oplus Ker(P).$$

□

2.3 Sous-espace de dimension et de codimension finie

Lemme 2.3.1. ***(Projection sur un sous-espace de dimension finie)***

Si E est un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, alors il existe un projection P continu sur X tel que $Im(P) = E$.

Preuve.

On choisit une base $e_1, ..., e_n$ de E, et on désigne par $e_j^*, j = 1, ..., n$ les formes linéaires coordonnées sur E c'est à dire

$$e_j^*(e_i) = \begin{cases} 1 & si \text{ i=j },\\ 0 & si \text{ i} \neq j. \end{cases}$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach on peut prolonger ces formes linéaire sur E en formes linéaires continues $x_1^*, ..., x_n^*$ sur X . On obtient que l'application P définie par :

$$\forall x \in X, \quad P(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x) e_j.$$

Est un projection continue de Xsur E que répond au problème. □

Corollaire 2.3.1.

Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, il existe un sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ tel que $X = E \oplus Y$

Définition 2.3.1. ***(Codimension d'un sous-espace vectoriel).***

Si l'espace quotient X/Y est de dimension finie, on dit que le sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ est de codimension finie dans X qu'on écrit

$$codim(Y) = dim(X/Y)$$

Lemme 2.3.2.

Soient E un espace vectoriel normé, M et N deux sous-espace vectoriel fermé de E tels que $M \cap N = \{0\}$. Si $dim(M) = codim(N) < \infty$, alors $E = M \oplus N$.

Preuve.

Soit $\pi = \pi_{|N}$ la surjection canonique de E sur E/N. Comme $M \cap N = \{0\}$, l'application π_M est injective.D'où

$$dim(\pi(M)) = dim(M) = codim(N) = dim(E/N).$$

Ainsi $\pi(M) = E/N = \pi(E)$. Maintenant si $x \in E$ quelconque, alors $\pi(x) \in \pi(E) = \pi(M)$.

Ainsi il existe x_M tel que $\pi(x) = \pi(x_M)$. D'où $\pi(x - x_M) \in Ker\pi = N$. On en déduit donc que $x \in M + N$. Ceci prouve que $E = M + N$ et donc finalement $E = M \oplus N$. $\square$

2.4 Opérateur de Fredholm

Définition 2.4.1.

Soient X et Y deux $\mathbb{R}$-espace vectoriels normés, on dit qu'une application linéaire $L : dom(L) \subset X \to Y$ est de Fredholm si elle vérifie les conditions suivantes :

1 *$Ker(L) = L^{-1}(\{0\})$ est de dimension finie.*

2 $Im(L) = L(dom(L))$ *est fermée et de codimension finie.*

Rappelons que la codimension de $Im(L)$ est la dimension de $coKer(L) = dim(Y/Im(L))$. (i.e : $codim(Im(L)) = dimcoker(L) = dim(Y/Im(L))$)

Définition 2.4.2. ***(L'ndice)***

Si L est un opérateur de Fredholm, alors son indice est l'entier

$$ind(L) = dim(Ker(L)) - codim(Im(L)).$$

Exemple 2.4.1.

1. *Si X et Y sont de dimensions finies, alors tout application linéaire $L : X \to Y$ est de Fredholm avec*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(L)) - codim(Im(L)) \\ &= dim(Ker(L)) - dimcoKer(L) \\ &= dim(Ker(L)) - (dim(Y) - dim(Im(L))) \\ &= dim(Ker(L)) + dim(Im(L)) - dim(Y) \\ &= dim(X) - dim(Y). \end{aligned}$$

2. *Si X et Y sont des espaces de Banach et $L : X \to Y$ est une application linéaire bijective alors L est un opérateur de Fredholm d'indice 0. En effet, il découle de la bijective que $Ker(L) = \{0_X\}$, dont la dimension est nulle, et $Im(L) = Y$ et sa codimension est nulle, ainsi*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(L)) - codim(Im(L)) \\ &= dim(Ker(L)) - dim\left(\frac{Y}{Im(Y)}\right) \\ &= dim\{0_X\} - dim\{0\} = 0. \end{aligned}$$

3. *l'identité $I : X \to X$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.*

$$\begin{aligned} ind(L) &= dim(Ker(I)) - codim(Im(I)) \\ &= dim(Ker(I)) - dimcoKer(Im(I)) \\ &= dim(Ker(I)) - dim\left(\frac{X}{Im(I)}\right) \\ &= dim\{0\} - dim\{0\} = 0. \end{aligned}$$

Théorème 2.4.1.

Si L est un opérateur de Fredholm, K est une application linéaire compacte, alors $L+K$ est de Fredholm et

$$ind(L+K) = ind(L).$$

En particulier,toute perturbation compacte de l'identité est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Proposition 2.4.1.

Si L est un opérateur de Fredholm d'indice nul, alors L est surjectif si et seulement si L est injectif.

Preuve.

Si L est surjective, alors $Im(L) = Y = Y + \{0\}$ et par suite , $dim\{0\} = dim(Ker(L)) = 0$, donc $Ker(L) = \{0\}$, d'où L est injective. □

Dans tout ce qui suit (sauf mention de contraire) $L : dom(L) \subset X \to Y$ désigne un opérateur de Fredholm d'indice 0. Si L est de Fredholm, alors d'aprés ce qui précède, il existe deux projections continues, $P : X \to X$ et $Q : Y \to Y$ tel que

$$Im(P) = Ker(L), \quad Ker(Q) = Im(L).$$

On pose

$$X_1 = Im(I-P) = Ker(P) \quad et \quad Y_1 = Im(Q)$$

alors,

$$X = Ker(L) \oplus X_1; \quad Y = Im(L) \oplus Y_1,$$

Considérons un isomorphisme

$$J : Im(Q) \to Ker(L).$$

dont l'existence est assurée par le fait que $dimker(L) = dimIm(Q) = n$.
Remarquons que

$$dom(L) = Ker(L) \oplus (dom(L) \cap X_1).$$

Et que la restriction de L à $dom(L) \cap X_1$ est un isomorphisme sur $Im(L)$, notons par L_p cette restriction c'est à dire $L_p : dom(L) \cap X_1 \to Im(L)$, alors

Lemme 2.4.1.

L_p est un isomorphisme algébrique.

Preuve.

1- Montrons que L_p est injective :

Soit $x \in Ker(L_p) \subset Ker(L) = Im(P)$, alors il existe un $y \in dom(P)$ tel que $x = Py$.

Comme P est une projection, on obtient

$$x = Py = P^2y = P(Py) = Px = 0.$$

Par conséquent, $x = 0$, et donc $Ker(L_p) = \{0\}$, ce qui signifie l'injection de L_p.

2- Montrons que L_p est surjective : puisque P est une projection , alors nous pouvons écrire l'espace vectoriel X comme somme directe :

$$X = Ker(P) \oplus Im(P) = Ker(P) \oplus Ker(L).$$

Prenons $z \in Im(L)$, donc il existe $x \in dom(L) \subset X$ tel que $Lx = z$.

Comme $X = Ker(P) \oplus Ker(L)$, alors il existe deux éléments uniques

$$\Big\{ e \in Ker(P) \quad et \ f \in Ker(L) \quad telsque \quad x = e + f.$$

On a

$$z = Lx = L(e + f) = Le + Lf = Le + 0 = Le$$

, ainsi $e \in dom(L)$.

Finalement, on obtient $e \in dom(L), e \in Ker(P)$ et $L_pe = z$, d'où L_p est bien surjective.

□

Soit $K_p : Im(L) \subset Y \to dom(L) \cap Ker(P)$ est bijectif, défini par $K_p := L_p^{-1}$, que $PK_p = 0$, et qu'il vérifie les propriétés :

Lemme 2.4.2.

1 *Sur $Im(L)$, on a $LK_p = I$.*

2 *Sur $dom(L)$, on a $K_pL = (I - P)$.*

Preuve.

(1) Prenons $x \in Im(L)$, alors $LK_px = L(K_p(x)) = L_p(K_p(x)) = Ix$.

(2) Comme $Im(P) = Ker(L)$, alors $L_P = 0$, et par suite $K_pL = K_pL(I - P)$.

Donc montrer (2), revient à vérifier que $K_pL(I - P) = K_pL_p(I - P)$.
Si on a $Im(I - P) \subseteq dom(L_p) = dom(L) \cap Ker(P)$, alors le résultat s'ensuit.
Prenons $x \in dom(L)$ Comme $P(x) \in Ker(L) \subset dom(L)$ et $dom(L)$ est un sous espace vectoriel de X, on a

$$(x - Px) \in dom(L).$$

Puisque

$$P(x - Px) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0.$$

Alors $(x - Px) \in Ker(P)$ et par conséquent $(x - Px) \in dom(L) \cap Ker(P)$.
D'ici obtient $Im(I - P) \subset dom(L) \cap Ker(P)$. D'où en utilisant (1) :

$$K_pL(I - P) = K_pL_p(I - P).$$

s'ensuit. □

Définition maintenant l'opérateur $K_{P;Q} : Y \to X$,avec $K_{P;Q} = L_p^{-1}(I - Q)$.

Lemme 2.4.3.

L'opérateur $L + JP : dom(L) \to Y$ est un isomorphisme et

$$(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q.$$

En particulier,

$$(L + JP)^{-1}x = J^{-1}x, \forall x \in Im(Q).$$

Preuve.

Pour l'injectivité de $L + JP$, soit $x \in dom(L)$ tel que

$$(L + JP)x = 0. \tag{2.1}$$

De cette égalité on en déduit que

$$Lx \in Im(L) \cap Im(J) = Ker(Q) \cap Im(Q) = \{0\},$$

d'où $x \in Ker(L)$. Par conséquence, $Px = x$ et compte tenu de (2.1) où $0 < t < 1$, $Jx = 0$, par suite $x = 0$. Pour la surjectivité de $L + JP, y \in Y$.
Affirmons que

$$x = (K_{P,Q} + J^{-1}Q)y,$$

est une solution de

$$(L + JP)x = y.$$

En effet, comme $J^{-1}Qy \in Ker(L)$, il en résulte que

$$\begin{aligned} Lx &= LK_{P,Q}y. \\ &= LL_p^{-1}(I - Q)y \\ &= (I - Q)y. \end{aligned}$$

Comme $K_{P,Q}y \in dom(L) \cap Ker(P)$, il en s'ensuit que

$$JPx = JJ^{-1}Qy = Qy,$$

conséquemment

$$(L + JP)x = (I - Q)y = Qy,$$

et

$$(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q.$$

$\square$

Lemme 2.4.4.

($\triangle = dom(N)$) , *Si* $N : \triangle \subset X \to X$ *est une application, le problème*

$$x \in dom(L) \cap \triangle \quad , Lx = Nx.$$

est équivalent au problème de point fixe

$$x \in \triangle, x = Px + J^{-1}QNx + K_{P,Q}Nx.$$

Preuve.

On a

$$
\begin{aligned}
&[x \in dom(L) \cap \triangle \quad, Lx = Nx] \\
\Leftrightarrow\ &[x \in dom(L) \cap \triangle \quad, (L + JP)x = (N + JP)x] \\
\Leftrightarrow\ &[x \in \triangle \quad, x = (L + JP)^{-1}(N + JP)x].
\end{aligned}
$$

D'autre part, en utilisant le lemme (2.4.3) :

$$
\begin{aligned}
(L + JP)^{-1}(N + JP) &= (K_{P,Q} + J^{-1}Q)(N + JP) \\
&= K_{P,Q}N + K_{P,Q}JP + J^{-1}QN + J^{-1}QJP.
\end{aligned}
$$

Puisque $Im(J) = Im(Q) = Ker(I - Q)$, il en résulte que

$$K_{P,Q}JP = L_p^{-1}(I - Q)JP = 0.$$

Puisque $Q|_{Im(Q)} = I|_{Im(Q)}$ et $Im(J) = Im(Q)$, on en déduit que

$$J^{-1}QJP = J^{-1}JP = P.$$

Par conséquent, $(L + JP)^{-1}(N + JP) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N.$ □

Soient X, Y deux espaces de Banach et $L : dom(L) \subset X \to Y$ un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Définition 2.4.3. ***(l'application L-compacte)***

Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X tel que $dom(L) \cap \Omega \neq \emptyset$, l'application $N : X \to Y$ est dite L-compacte sur $\overline{\Omega}$ si $QN(\overline{\Omega})$ est borné et $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \to X$ est compacte.

Comme conséquence des lemmes (2.4.3) et (2.4.4) on a la définition suivant :

Définition 2.4.4. ***(le degré de Mawhin)***

Si les opérateur L et N satisfont les propriétés mentionnées ci dessus,alors le degré de coïncidence de L et N sur Ω est définit par

$$deg[(L, N), \Omega] = deg_{LS}(I - M, \Omega, 0).$$

Où M désignera la quantité donnée par :

$$M(P, J, Q) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N.$$

2.5 Preuve du théorème de Mawhin

Théorème 2.5.1. *Soit L un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et N est L-compact sur $\overline{\Omega}$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *$Lx \neq \lambda Nx$ pour tout $(x, \lambda) \in [(dom(L) \setminus Ker(L)) \cap \partial\Omega] \times]0, 1[$.*

(ii) *$QNx \neq 0$ pour tout $x \in Ker(L) \cap \partial\Omega$*

(iii) *$deg_B(J^{-1}QN|_{Ker(L)}, \Omega \cap Ker(L), 0) \neq 0$ où $Q : Y \to Y$ est la projection définie ci dessus avec $Im(L) = Ker(Q)$.*

Alors l'équation $Lx = Nx$ admet au moins une solution dans $dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Preuve.

Pour $\lambda \in [0, 1]$, considérons la famille de problèmes

$$x \in dom(L) \cap \overline{\Omega}, Lx = \lambda Nx + (1 - \lambda)QNx \tag{2.2}$$

Soit $M : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to Y$ une homotopie définie par

$$M(\lambda, x) = Px + J^{-1}QNx + \lambda K_{P,Q}Nx$$

En vertu du lemme (2.4.4) , le problème (2.2) est équivalent à un problème de point fixe $x \in \overline{\Omega}$ et

$$\begin{aligned} x &= Px + J^{-1}Q(\lambda N + (1 - \lambda)QN)x + K_{P,Q}(\lambda N + (1 - \lambda)QN)x \\ &= Px + \lambda J^{-1}QNx + (1 - \lambda)J^{-1}QNx + \lambda K_{P,Q}Nx + (1 - \lambda)K_{P,Q}QNx \\ &= M(\lambda, x). \end{aligned}$$

Donc, cette dernière équation est équivalente à un problème de point fixe

$$x \in \overline{\Omega} \quad , x = M(\lambda, x) \tag{2.3}$$

S'il existe un $x \in \partial\Omega$ tel que $Lx = Nx$, alors nous avons terminé. Maintenant supposons que

$$Lx \neq Nx \quad pour\ tout \quad x \in dom(L) \cap \Omega, \tag{2.4}$$

et d'autre part

$$Lx \neq \lambda Nx + (1-\lambda)QNx. \tag{2.5}$$

Pour tout $(\lambda, x) \in]0,1[\times(dom(L) \cap \Omega)$. Si

$$Lx = \lambda Nx + (1-\lambda)QNx.$$

pour tout $(\lambda, x) \in]0,1[\times(dom(L) \cap \Omega)$, on obtient par application de Q aux deux membres de l'égalité précédente

$$QNx = 0, \quad Lx = \lambda Nx.$$

La première de ces égalités et la condition (ii) impliquent que $x \notin Ker(L) \cap \partial\Omega$, i.e $x \in \partial\Omega \cap (dom(L) \setminus Ker(L))$ et donc la seconde égalité contredit (i).En utilisant une nouvelle fois (ii), il s'ensuit que

$$Lx \neq QNx \quad pour\ tout \quad x \in dom(L) \cap \partial\Omega. \tag{2.6}$$

En vertu de (2.4) , (2.5) et (2.6) on déduit que

$$x \neq M(\lambda, x) \quad pour\ tout \ \ (\lambda, x) \in [0,1] \times \partial\Omega. \tag{2.7}$$

Il est facile de vérifier que $M(\lambda, x)$ est compacte car N est L-compacte sur $\overline{\Omega}$, dés lors en utilisant la propriété d'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder, on obtient

$$deg_{LS}(I - M(0,.), \Omega, 0) = deg_{LS}(I - M(1,.), \Omega, 0). \tag{2.8}$$

D'autre part on a

$$deg_{LS}(I - M(0,.), \Omega, 0) = deg_{LS}(I - (P + J^{-1}QN), \Omega, 0). \tag{2.9}$$

Mais le rang de $P+J^{-1}QN$ est contenu dans $Ker(L)$, d'où en utilisant la propriété de reduction du degré de Leray-Schauder et le fait que $P|_{Ker(L)} = I|_{Ker(L)}$, (car $Ker(L) = Im(P) = Ker(I-P)$) on obtient

$$\begin{aligned} deg_{LS}(I-(P+J^{-1}QN), \Omega, 0) &= deg_B(I-(P+J^{-1}QN), \Omega \cap Ker(L), 0) \quad (2.10) \\ &= deg_B(J^{-1}QN, \Omega \cap Ker(L), 0). \quad (2.11) \end{aligned}$$

En vertu de (2.8) (2.9) (2.11),il s'ensuit que $deg_{LS}(I-M(1,.), \Omega, 0) \neq 0$, et donc la propriété d'existence du degré de Leray-Schauder implique l'existence d'un $x \in \Omega$ tel que

$$x = M(1,x) \quad i.e \quad x \in dom(L) \cap \ \Omega \quad , \quad Lx = Nx.$$

$\square$

Chapitre 3

Application de théorème

3.1 Introduction

Dans cette partie, nous examinerons l'existence d'un solution pour le problème aux limite dans $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$\begin{cases} u'' = f\left(t, u(t), u'(t)\right), \quad t \in]0,1[, \\ u'(0) = \theta, \quad u(1) = Au(\eta), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\eta \in]0,1[$, θ vecteur nul dans $\mathbb{R}^n$ et A une matrice carrée d'ordre n satisfaisant l'une des deux conditions suivantes :

(A1) A est idempotente, c'est-à-dire $A^2 = A$, ou

(A2) $A^2 = I$ (ici, I représente la matrice identité de taille n)

et où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ satisfait les conditions de Carathéodory, c'est-à-dire,

(a) $f(\cdot, u, v)$ est mesurable au sens de Lebesgue pour chaque $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

(b) $f(t, \cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ presque partout dans $[0,1]$,

(c) pour chaque ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^{2n}$, la fonction $h_K(t) = \sup\{|f(t,u,v)| : (u,v) \in K\}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$, où $|\cdot|$ est la norme dans $\mathbb{R}^n$.

Par la théorème de Mawhin et de théorème et des lemmes auxiliaire. On dit que le problème (3.1) est en résonance si l'équation linéaire $Lu = u'' = 0$, sous les conditions aux limite possède une solution non triviale .

3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous introduisons des définitions et des théorèmes importants qui seront utilisés pour prouver les résultats principaux.

1- Soit X ,Z deux espaces de Banach réels.

2- Soit $L : \mathrm{dom}(L) \subset X \to Z$ un opérateur linéaire. L'opérateur L est dit être un opérateur de Fredholm d'indice zéro à condition que

(i) $\operatorname{Im} L$ soit un sous-ensemble fermé de Z,

(ii) $\operatorname{codim} \operatorname{Im} L = \dim \operatorname{Ker} L < +\infty$.

Alors L est un opérateur de Fredholm l'indice zéro .

3- Si L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, alors il existe des projections continus $P : X \to X$ et $Q : Z \to Z$ tels que

$$\begin{cases} ImP = KerL, \\ KerQ = ImL, \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} X = KerL \oplus KerP, \\ Z = ImL \oplus ImQ \end{cases}$$

et l'application $L_P := L|_{\mathrm{dom}(L)\cap \operatorname{Ker} P} : \mathrm{dom}(L) \cap \operatorname{Ker} P \to \operatorname{Im} L$ est inversible. On note son inverse par K_P. L'inverse généralisé de L est noté $K_{P,Q} = K_P(I - Q)$. De plus, pour chaque isomorphisme $J : \operatorname{Im} Q \to \operatorname{Ker} L$, l'application $JQ + K_{P,Q} : Z \to \mathrm{dom}(L)$ est un isomorphisme et

$$(JQ + K_{P,Q})^{-1} u = \left(L + J^{-1}P\right) u, \quad \forall u \in \mathrm{dom}(L).$$

4- soit Ω un sous-ensemble ouvert borné de X tel que $\mathrm{dom}\, L \cap \Omega \neq \emptyset$, l'opérateur $N : \bar{\Omega} \to Z$ est dit L-compact dans $\bar{\Omega}$ si :

(i) l'application $QN : \bar{\Omega} \to Z$ est continue et $QN(\bar{\Omega})$ est borné dans Z,

(ii) $K_{P,Q}N : \bar{\Omega} \to X$ est complètement continue.

5- Si L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro et que N est L-compact dans $\bar{\Omega}$, alors l'existence des solutions de l'équation $Lu = Nu, u \in \bar{\Omega}$, est équivalente à la conclusion que Φ a des points fixes dans $\bar{\Omega}$, où

$$\Phi := P + (JQ + K_{P,Q})\, N.$$

Théorème 3.2.1. *Soit $\Omega \subset X$ ouvert et borné, L un opérateur de Fredholm d'indice zéro et N L-compact sur $\bar{\Omega}$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1)- *$Lu \neq \lambda Nu$ pour tout $(u, \lambda) \in ((\mathrm{dom}(L) \setminus \mathrm{Ker}\, L) \cap \partial\Omega) \times]0, 1[$;*

(2)- *$QNu \neq \theta$ pour tout $u \in \mathrm{Ker}\, L \cap \partial\Omega$;*

(3)- *pour un isomorphisme $J : \mathrm{Im}\, Q \to \mathrm{Ker}\, L$, nous avons*

$$\deg\left(JQN|_{Ker\ L}\, ; \Omega \cap \mathrm{Ker}\, L, \theta\right) \neq 0,$$

où $Q : Z \to Z$ est un projection donné comme ci-dessus.

Alors, l'équation $Lu = Nu$ a au moins une solution dans $\mathrm{dom}(L) \cap \bar{\Omega}$.

Théorème 3.2.2. ***(Ascoli-Arzela)***

Considérons $X = C([a, b])$ muni de la norme $\|u\| = \underset{a \leqslant t \leqslant b}{max} |u(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Si M est un sous ensemble de X tel que :

(i) *M est borné :*

$$\|u(t)\| \leqslant r, \quad \forall u \in M \text{ et } \ r > 0$$

(ii) *M est équicontinu :*

$$\forall \epsilon > 0\ , \exists\ \delta > 0 \ \ tq \ \ , |t_1 - t_2| < \delta \ \ et \ \ \forall u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon.$$

*Alors, **M est relativement compact .***

Théorème 3.2.3. ***(Convergence dominée de lebesgue)***

Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que

i) *$f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.*

ii) *Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.*

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \ \textbf{\textit{et}} \ \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Pour étudier le problème (3.1)en utilisant le Théorème 3.2.1 ,nous introduisons les espaces $X = C^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ avec la norme $\|u\| = \max\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\}$, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme sup et $Z = L^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ avec la norme de Lebesgue notée $\|\cdot\|_1$. De plus, nous utiliserons l'espace de Sobolev défini par

$$X_0 := \{u : [0,1] \to \mathbb{R}^n \mid u, u' \text{ est absolument continue sur } [0,1] \text{ et } u'' \in Z\}$$

Ensuite, nous définissons l'opérateur $L : \mathrm{dom}(L) \subset X \to Z$ par $Lu := u''$, où

$$\mathrm{dom}(L) = \{u \in X_0 : u'(0) = \theta, u(1) = Au(\eta)\}$$

Lemme 3.2.1.

L'opérateur L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Preuve.

Soit $u \in \mathrm{dom}(L)$:

$$u'' = Lu$$

$$\Rightarrow \int_0^s u''(\tau)d\tau = \int_0^s Lu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow u'(s) - u'(0) = \int_0^s Lu(\tau)d\tau$$

et Comme $u'(0) = \theta$ (θ un vecteur nul dans $\mathbb{R}^n$) , alors :

$$\int_0^t u'(s)ds = \int_0^t ds \int_0^s Lu(\tau)d\tau$$

donc,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t ds \int_0^s Lu(\tau)d\tau, \quad t \in [0,1] \tag{3.2}$$

ainsi,

$$\mathrm{Ker}\, L = \{u \in \mathrm{dom}(L) \subset X : Lu(t) = 0, t \in [0,1]\};$$

$$Lu(t) = u''(t) = 0$$

$$\Rightarrow u'(t) = c_1$$

et comme $u'(0) = \theta$ alors :

$$c_1 = \theta$$

alors :

$$u(t) = c$$

d'autre part on à : $u(1) = Au(\eta)$,donc :

$$c = Ac$$

$$\Rightarrow (I - A)c = 0$$

$$\Rightarrow c \in \operatorname{Ker}(I - A)$$

donc :

$$\operatorname{Ker} L = \{u \in X : u(t) = c, t \in [0,1], c \in \operatorname{Ker}(I - A)\} \cong \operatorname{Ker}(I - A);$$

Maintenant, nous devons prouver que

$$\operatorname{Im} L = \{z \in Z : \phi(z) \in \operatorname{Im}(I - A)\}$$

où $\phi : Z \to \mathbb{R}^n$ est un opérateur linéaire continu défini par

$$\phi(z) = A\int_0^\eta ds \int_0^s z(\tau)d\tau - \int_0^1 ds \int_0^s z(\tau)d\tau, \quad z \in Z \tag{3.3}$$

En effet, soit $z \in \operatorname{Im} L$ de telle sorte que $z = Lu$, pour $u \in \operatorname{dom}(L)$. En utilisant la condition $u(1) = Au(\eta)$, il découle de (3.2) que

$$u(0) + \int_0^1 ds \int_0^s z(\tau)d\tau = A\left(u(0) + \int_0^\eta ds \int_0^s z(\tau)d\tau\right)$$

ce qui implique $\phi(z) = (I - A)u(0)$. Cela montre que $\phi(z) \in \operatorname{Im}(I - A)$, alors

$$\operatorname{Im} L \subset \{z \in Z : \phi(z) \in \operatorname{Im}(I - A)\}$$

En retour, si $z \in Z$ tel que $\phi(z) \in \operatorname{Im}(I - A)$, alors il est facile de voir que $z = Lu$, où $u \in \operatorname{dom}(L)$ est défini par

$$u(t) = \xi + \int_0^t ds \int_0^s z(\tau)d\tau$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant $(I - A)\xi = \phi(z)$. Cela signifie que $z \in \operatorname{Im} L$, alors

$$\{z \in Z : \phi(z) \in \operatorname{Im}(I - A)\} \subset \operatorname{Im} L$$

Ensuite, nous posons $P_A = \kappa(I - A)$, où

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{si la condition (A1) est vérifiée, c'est-à-dire, } A^2 = A \\ \frac{1}{2}, & \text{si la condition (A2) est vérifiée, c'est-à-dire, } A^2 = I \end{cases}$$

et considérons l'application linéaire continue $Q : Z \to Z$ définie par, pour $z \in Z$,

$$Qz(t) = \frac{2}{\eta^2 - 1} \left(I - P_A\right) \phi(z), \quad t \in [0,1] \tag{3.4}$$

Nous notons que si $z(t) = h \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,1]$, alors

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= A \int_0^\eta ds \int_0^s z(\tau) d\tau - \int_0^1 ds \int_0^s z(\tau) d\tau \\
&= A \int_0^\eta \int_0^s h d\tau ds - \int_0^1 \int_0^s h d\tau ds \\
&= (A \int_0^\eta \int_0^s d\tau ds - \int_0^1 \int_0^s d\tau ds) h \\
&= (A \int_0^\eta [\tau]_0^s ds - \int_0^1 [\tau]_0^s ds) h \\
&= (A \int_0^\eta s ds - \int_0^1 s ds) h \\
&= (A [\frac{s^2}{2}]_0^\eta - [\frac{s^2}{2}]_0^1) h \\
&= (A \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2}) h \\
&= \frac{1}{2} \left(\eta^2 A - I\right) h
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(z) = \frac{1}{2} \left(\eta^2 A - I\right) h \tag{3.5}$$

donc,

$$Qz(t) = \frac{2}{\eta^2 - 1} \left(I - P_A\right) \phi(z) = \frac{2}{\eta^2 - 1} \left(I - P_A\right) \frac{1}{2} \left(\eta^2 A - I\right) h = \frac{1}{\eta^2 - 1} \left(I - P_A\right) \left(\eta^2 A - I\right) h.$$

De plus, $\left(I - P_A\right)^2 = I - P_A$ et $\left(I - P_A\right)\left(\eta^2 A - I\right) = \left(\eta^2 - 1\right)\left(I - P_A\right)$. alors,

$$\begin{aligned}
Qz(t) &= \frac{1}{\eta^2 - 1} \left(I - P_A\right) \left(\eta^2 A - I\right) h \\
&= \frac{1}{\eta^2 - 1} \left(\eta^2 - 1\right) \left(I - P_A\right) h \\
&= \left(I - P_A\right) h \\
&= \left(I - P_A\right) z(t)
\end{aligned}$$

Par conséquent, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} Q^2 z(t) &= Q(Qz(t)) = (I - P_A)\, Qz(t) \\ &= (I - P_A)\,(I - P_A)\, z(t) \\ &= (I - P_A)\, z(t) \\ &= Qz(t) \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi, l'application Q est idempotente et par conséquent, Q est un projection linéaire continu. Nous prouvons maintenant les trois énoncés suivants

i/ $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$,

ii/ $Z = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q$,

iii/ $\operatorname{Im} Q = \operatorname{Ker} L$,

ce qui nous permet de conclure la preuve de ce lemme. Tout d'abord, il est clair que

$$\begin{aligned} z \in \operatorname{Ker} Q \quad &\Leftrightarrow \quad Qz(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\eta^2 - 1}\,(I - P_A)\,\phi(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (I - P_A)\,\phi(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \phi(z) = P_A \phi(z) \\ &\Leftrightarrow \quad \phi(z) \in \operatorname{Im} P_A \\ &\Leftrightarrow \quad \phi(z) \in \operatorname{Im} \kappa(I - A) \\ &\Leftrightarrow \quad \phi(z) \in \operatorname{Im}(I - A) \\ &\Leftrightarrow \quad z \in \operatorname{Im} L \end{aligned}$$

Cela montre que $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$. Par conséquent, nous obtenons également ii/, c'est-à-dire, $Z = \operatorname{Ker} Q \oplus \operatorname{Im} Q = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q$.

Maintenant, soit $z \in \operatorname{Im} Q$. Supposons que $z = Qz_1$, pour $z_1 \in Z$. Ensuite, puisque $P_A^2 = P_A$, nous avons :

$$P_A z(t) = P_A Q z_1(t) = P_A \frac{2}{\eta^2 - 1}\,(I - P_A)\,\phi\,(z_1) = \frac{2}{\eta^2 - 1} P_A\,(I - P_A)\,\phi\,(z_1) = \theta, \quad t \in [0, 1].$$

Cela implique que $Qz_1 \in \operatorname{Ker} P_A \equiv \operatorname{Ker}(I - A)$. Ainsi, $z \in \operatorname{Ker} L$, donc $\operatorname{Im}(Q) \subset \operatorname{Ker}(L)$.

Réciproquement, pour tout $z \in \operatorname{Ker} L$, il existe $\beta \in \operatorname{Ker} P_A$ tel que $z(t) = \beta$ pour tout $t \in [0,1]$. Ensuite, nous avons

$$Qz(t) = Q\beta = (I - P_A)\,\beta = \beta = z(t), \quad t \in [0,1]$$

Cela implique que $z \in \mathrm{Im}(Q)$,donc $\ker(L) \subset \mathrm{im}(Q)$.

Ainsi, nous obtenons $\mathrm{Im}\, Q = \mathrm{Ker}\, L$. Ensuite, le Lemme 3.2.1 est démontré.

$\square$

Maintenant, nous définissons un opérateur $P : X \to X$ par

$$Pu(t) = (I - P_A)\,u(0), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Lemme 3.2.2.

Nous avons

i/ L'application P définie par (3.6) est un projection continu satisfaisant les identités

$$\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Ker}\, L, \quad X = \mathrm{Ker}\, L \oplus \mathrm{Ker}\, P.$$

ii/ L'opérateur linéaire $K_P : \mathrm{Im}\, L \to \mathrm{dom}(L) \cap \mathrm{Ker}\, P$ peut être défini par

$$K_P z(t) = \kappa P_A \phi(z) + \int_0^t ds \int_0^s z(\tau)d\tau, \quad t \in [0,1] \tag{3.7}$$

où κ est défini comme dans la preuve du Lemme 3.2.1. De plus, K_P satisfait

$$K_P = \left(L|_{\mathrm{dom}(L)\cap \mathrm{Ker}\, P}\right)^{-1} \qquad et \qquad \|K_P z\| \leqslant C\|z\|_1,$$

avec $C = 1 + \kappa\, \|P_A\|_*\, (\eta\|A\|_* + 1)$ ($\|\cdot\|_*$ est la norme maximale des matrices).

Preuve.

i/ Il est clair que P est un projection continu. De plus, nous avons $\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Ker}\, L$. En effet, si $v \in \mathrm{Im}\, P$, alors il existe $u \in X$ tel que

$$v(t) = Pu(t) = (I - P_A)\,u(0), \quad \forall t \in [0,1] \tag{3.8}$$

Il est nécessaire de noter que

$$I - P_A = \begin{cases} A, & \text{si } A^2 = A \\ \frac{1}{2}(I + A), & \text{si } A^2 = I \end{cases}$$

donc,

$$(I-A)(I-P_A)=\begin{cases}(I-A)A, & \text{si } A^2=A\\ \frac{1}{2}(I-A)(I+A), & \text{si } A^2=I\end{cases}$$
$$=\begin{cases}A-A^2, & \text{si } A^2=A\\ \frac{1}{2}(I-A^2), & \text{si } A^2=I\end{cases}$$
$$=\theta$$

alors,

$$(I-A)\,(I-P_A)\,u(0)=\theta \Longrightarrow \quad (I-A)v(t)=\theta \Longrightarrow v(t)\subset \operatorname{Ker}(I-A)\Longrightarrow v\in \operatorname{Ker} L$$

Cela montre que $\operatorname{Im} P\subset \operatorname{Ker} L$. Inversement, si $v\in \operatorname{Ker} L$, alors

$$v(t)=\xi\in \operatorname{Ker}(I-A),\quad \forall t\in[0,1]$$

Ensuite, nous déduisons que

$$Pv(t)=(I-P_A)\,v(0)=(I-P_A)\,\xi=\xi=v(t),\quad \forall t\in[0,1]$$

Cela montre que $v\in \operatorname{Im} P$, donc $\operatorname{Ker} L\subset \operatorname{Im} P$. Par conséquent, nous pouvons conclure que $\operatorname{Im} P=\operatorname{Ker} L$ et comme

$$X=\operatorname{Im} P\oplus \operatorname{Ker} P$$

alors

$$X=\operatorname{Ker} L\oplus \operatorname{Ker} P$$

ii/ Soit $z\in \operatorname{Im} L$. Alors nous avons $\phi(z)\in \operatorname{Im}(I-A)$ ce qui signifie que $\phi(z)=(I-A)\beta$, où $\beta\in\mathbb{R}^n$. Il découle de (3.7) et (3.8)

$$\begin{aligned}PK_P(z(t))&=(I-P_A)\,K_Pz(0)\\&=(I-P_A)\left(\kappa P_A\phi(z)+\int_0^0 ds\int_0^s z(\tau)d\tau\right)\\&=\kappa\,(I-P_A)\,P_A\phi(z)\\&=\kappa\,(I-P_A)\,P_A(I-A)\beta\\&=\kappa P_A\,(I-P_A)\,(I-A)\beta\\&=\theta,\quad \forall t\in[0,1].\end{aligned}$$

Ainsi, $K_P z \in \operatorname{Ker} P$. Il est facile de montrer que $K_P z \in \operatorname{dom}(L)$. Donc K_P est bien défini. D'autre part, si $u \in \operatorname{dom}(L) \cap \operatorname{Ker} P$ alors

$$K_P L u(t) = \kappa P_A \phi\left(u''\right) + \int_0^t ds \int_0^s u''(\tau) d\tau$$

D'un autre côté et comme $u(1) = Au(\eta)$ on à,

$$\begin{aligned}
\phi\left(u''\right) &= A \int_0^\eta ds \int_0^s u''(\tau) d\tau - \int_0^1 ds \int_0^s u''(\tau) d\tau \\
&= A(u(\eta) - u(0)) - (u(1) - u(0)) \\
&= Au(\eta) - u(1) + u(0) - Au(0) \\
&= (I - A) u(0)
\end{aligned}$$

et aussi comme

$$\int_0^t ds \int_0^s u''(\tau) d\tau = u(t) - u(0)$$

alors

$$\begin{aligned}
K_P L u(t) &= \kappa P_A (I - A) u(0) + u(t) - u(0) \\
&= \kappa (P_A - I)(I - A) u(0) + \kappa (I - A) u(0) + u(t) - u(0) \\
&= P_A u(0) + u(t) - u(0) \\
&= u(t)
\end{aligned} \tag{*}$$

de plus,

$$\begin{aligned}
L K_P z(t) &= (\kappa P_A \phi(z) + \int_0^t ds \int_0^s z(\tau) d\tau)'' \\
&= z(t)
\end{aligned} \tag{**}$$

Cela montre que $K_P = \left(L|_{\operatorname{dom}(L) \cap \operatorname{Ker} P}\right)^{-1}$. Enfin, de la définition de K_P, nous avons

$$\begin{aligned}
\left(K_P z\right)'(t) &= (\kappa P_A \phi(z) + \int_0^t ds \int_0^s z(\tau) d\tau)' \\
&= \int_0^t z(s) ds, \quad t \in [0, 1]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

En combinant (3.3), (3.7) et (3.9),nous obtenons

(1) $\left\|K_p z(t)\right\|_\infty \leqslant \kappa \left\|P_A\right\|_* |\phi(z)| + \|z\|_1$

(2) $|\phi(z)| \leqslant (1 + \eta \|A\|_*) \|z\|_1$

(3) $\left\|\left(K_P z\right)'(t)\right\|_\infty \leqslant \|z\|_1$

Et comme $\|K_p z(t)\| = \max\left\{\|K_p z(t)\|_\infty, \|(K_p z)'(t)\|_\infty\right\}$ alors $\|K_P z\| \leqslant C\|z\|_1$. Le lemme est complètement prouvé. $\square$

Lemme 3.2.3.

L'opérateur $N : X \to Z$ défini par

$$Nu(t) = f\left(t, u(t), u'(t)\right), \qquad p.p.,\ t \in [0,1]$$

est L-complètement continu.

Preuve.

Soit Ω un ensemble borné dans X. Posons $R = \sup\{\|u\| : u \in \Omega\}$. Des hypothèses sur la fonction f, il existe une fonction $m_R \in Z$ telle que, pour tout $u \in \Omega$, nous avons

$$\begin{aligned} |Nu(t)| = |f\left(t, u(t), u'(t)\right)| &\leqslant \sup_{(x,y)\in(Imu, Imu')} |f(t,x,y)| \\ &\leqslant \sup_{(x,y)\in[-R,R]^2=k} |f(t,x,y)| = h_k(t) = m_R(t), \qquad \text{p.p., } t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Il découle de (3.3), (3.10) et de l'identité suivante

$$QNu(t) = \frac{2}{\eta^2 - 1}\left(I - P_A\right)\phi(Nu) \tag{3.11}$$

1- que $QN(\bar{\Omega})$ est borné car :

comme,

$$\phi(Nu) = A\int_0^\eta ds \int_0^s Nu(\tau)d\tau - \int_0^1 ds \int_0^s Nu(\tau)d\tau$$

alors,

$$\begin{aligned} |\phi(Nu)| &\leqslant \|A\|_* \int_0^\eta ds \int_0^s |Nu(\tau)|d\tau - \int_0^1 ds \int_0^s |Nu(\tau)|d\tau \\ &\leqslant \|A\|_* \int_0^\eta ds \int_0^s |m_R(\tau)|d\tau + \int_0^1 ds \int_0^s |m_R(\tau)|d\tau \\ &\leqslant \|A\|_* \int_0^\eta \|m_R\|_{L^1} ds + \int_0^1 \|m_R\|_{L^1} ds \\ &\leqslant \left(\|A\|_* \eta \|m_R\|_{L^1} + \|m_R\|_{L^1}\right) = c < \infty \end{aligned} \tag{3.12}$$

Donc :

$Q(Nu)$ est borné pour tout $u \in \Omega \Longrightarrow Q(Nu)$ est borné pour tout $u \in \bar{\Omega} \Longrightarrow QN(\bar{\Omega})$ est borné.

2- et que QN est continu :

soit $(u_n) \in \Omega$ tel que $u_n \longrightarrow u \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} Nu_n(t) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} f(t, u_n(t), {u_n}'(t)) \\ &= f(t, \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(t), \lim_{n\longrightarrow\infty} {u_n}'(t)) \\ &= f(t, u(t), u'(t)) \\ &= Nu(t)\end{aligned}$$

et on à $|Nu(t)| \leqslant m_R(t) \in L^1([0,1]), \forall n \in N$. Alors d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on à

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^s Nu_n(\tau)d\tau = \int_0^s \lim_{n\longrightarrow\infty} Nu_n(\tau)d\tau = \int_0^s Nu(\tau)$$

Donc on déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \phi(Nu_n) = \phi(Nu) \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \phi Nu_n = Nu \Longrightarrow QN \text{ est continu.}$$

Maintenant, nous allons prouver que $K_{P,Q}N$ est complètement continu. Tout d'abord, notons que, pour chaque $u \in \Omega$, nous avons

$$\begin{aligned}K_{P,Q}Nu(t) &= K_P(I-Q)Nu(t) \\ &= K_PNu(t) - \frac{2}{\eta^2-1}K_P\left(I-P_A\right)\phi(Nu) \\ &= \kappa P_A\phi(Nu) + \int_0^t ds \int_0^s Nu(\tau)d\tau - \frac{2}{\eta^2-1}K_P\left(I-P_A\right)\phi(Nu)\end{aligned} \tag{3.13}$$

et d'après la définition (3.7) de K_p et comme $P_A(I-P_A)=0$ alors :

$$K_{P,Q}Nu(t) = \int_0^t ds \int_0^s Nu(\tau)d\tau - \frac{t^2}{\eta^2-1}\left(I-P_A\right)\phi(Nu) + \kappa P_A\phi(Nu),$$

et nous avons

$$\left(K_{P,Q}Nu\right)'(t) = \int_0^t Nu(s)ds - \frac{2t}{\eta^2-1}\left(I-P_A\right)\phi(Nu)$$

De plus,on à

$$|\phi(Nu)| \leqslant \left(\eta\|A\|+1\right)\|m_R\|_1 \tag{3.14}$$

En combinant les équations (3.10) et (3.13)-(3.14), nous pouvons trouver deux constantes positives C_1, C_2 telles que

$$|K_{P,Q}Nu(t)| \leqslant C_1 \|m_R\|_1 , \quad \left|(K_{P,Q}Nu)'(t)\right| \leqslant C_2 \|m_R\|_1 ,$$

pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $u \in \Omega$. Cela montre que

$$\begin{aligned}\|K_{P,Q}Nu\| &= \max\{K_{P,Q}Nu(t), (K_{P,Q}Nu)'(t)\} \\ &\leqslant \max\{C_1 \|m_R\|_1 , C_2 \|m_R\|_1\} \\ &\leqslant \max\{C_1, C_2\} \|m_R\|_1 ,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, $K_{P,Q}N(\Omega)$ est uniformément borné dans X. D'autre part, pour $t_1, t_2 \in [0,1]$ avec $t_1 < t_2$, nous avons

$$\begin{aligned}|K_{P,Q}Nu(t_2) - K_{P,Q}Nu(t_1)| &\leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} ds \int_0^s Nu(\tau)d\tau\right| + \left|\frac{1}{\eta^2-1}\left(t_2^2 - t_1^2\right)(I - P_A)\phi(Nu)\right| \\ &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} ds \int_0^s |Nu(\tau)|d\tau + \frac{2}{\eta^2-1}|(t_2 - t_1)(I - P_A)\phi(Nu)| \\ &\leqslant |t_2 - t_1| \|m_R\|_1 + \frac{2}{\eta^2-1}|t_2 - t_1| \|I - P_A\|_\infty (\eta\|A\|_* + 1) \|m_R\|_1 \\ &\leqslant C_3 \|m_R\|_1 |t_2 - t_1|\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|(K_{P,Q}Nu)'(t_2) - (K_{P,Q}Nu)'(t_1)\right| &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} |Nu(s)|ds + \left|\frac{2}{\eta^2-1}(t_2 - t_1)(I - P_A)\phi(Nu)\right| \\ &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} m_R(s)ds + \left|\frac{2}{\eta^2-1}(t_2 - t_1)(I - P_A)(\eta\|A\|_* + 1)\|m_R\|_1\right| \\ &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} m_R(s)ds + \left|\frac{2}{\eta^2-1}(I - P_A)(\eta\|A\|_* + 1)\right| \|m_R\|_1 |t_2 - t_1| \\ &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} m_R(s)ds + C_4 \|m_R\|_1 |t_2 - t_1|\end{aligned}$$

ce qui prouve que la famille $K_{P,Q}N(\Omega)$ est équicontinue dans X. Comme $K_{P,Q}N(\Omega)$ est uniformément borné et equicontinue donc d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, $K_{P,Q}N(\Omega)$ est un sous-ensemble relativement compact dans X.

Enfin, il est facile de voir que $K_{P,Q}N$ est continu :

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} K_{P,Q}Nu_n(t) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} K_P(I-Q)Nu_n(t)\\ &= K_P(I-Q)\lim_{n\longrightarrow\infty} Nu_n(t)\\ &= K_P(I-Q)Nu(t) = K_{P,Q}Nu(t)\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur N est complètement continu pour L. La démonstration du lemme est complète. □

3.3 Résultat principal et exemple

Dans cette section, nous utilisons le Théorème 3.2.1 pour prouver l'existence des solutions du problème (3.1). À cette fin, nous supposons que les conditions suivantes sont remplies :

(B1) Il existe les fonctions positives $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $(\|I-P_A\|_* + C)(\|a\|_1 + \|b\|_1) < 1$ telles que

$$|f(t,u,v)| \leqslant a(t)|u| + b(t)|v| + c(t) \tag{3.15}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$, où C est la constante donnée dans le Lemme 3.2.2 ;

(B2) Il existe une constante positive Λ_1 telle que pour chaque $u \in \operatorname{dom} L$, si $|u(t)| > \Lambda_1, \forall t \in [0,1]$, alors

$$\int_\eta^1 ds \int_0^s f(\tau, u(\tau), u'(\tau))\, d\tau \notin \operatorname{Im}(I-A) \tag{3.16}$$

(B3) Il existe une constante positive Λ_2 telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$ avec $\alpha = A\alpha$ et $|\alpha| > \Lambda_2$, soit

$$\langle \alpha, QN(\alpha)\rangle \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad \langle \alpha, QN(\alpha)\rangle \geqslant 0 \tag{3.17}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ représente le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme 3.3.1.

Soit $\Omega_1 = \{u \in \mathrm{dom}(L) \setminus \mathrm{Ker}\, L : Lu = \lambda Nu, \lambda \in]0,1]\}$*. Alors,* Ω_1 *est borné dans* X*.*

Preuve*.*

Soit $u \in \Omega_1$. Supposons que $Lu = \lambda Nu$ pour $0 < \lambda \leqslant 1$. Alors il est clair que $Nu \in \mathrm{Im}\, L = \mathrm{Ker}\, Q$, ce qui implique également que $\phi(Nu) \in \mathrm{Im}(I - A)$ par la définition de $\mathrm{Im}\, L$. D'autre part, nous avons

$$\int_\eta^1 ds \int_0^s f(t, u(\tau), u'(\tau))\, d\tau = -\phi(Nu) - (I - A) \int_0^\eta ds \int_0^s f(t, u(\tau), u'(\tau))\, d\tau$$

Ainsi, $\int_\eta^1 ds \int_0^s f(\tau, u(\tau), u'(\tau))\, d\tau \in \mathrm{Im}(I - A)$. En utilisant l'hypothèse (B2), il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $|u(t_0)| \leqslant \Lambda_1$. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} |u(0)| &= \left| u(t_0) - \int_0^{t_0} u'(s) ds \right| \\ &\leqslant |u(t_0)| + \int_0^{t_0} |u'(s)|\, ds \\ &\leqslant \Lambda_1 + \int_0^1 |u'(s)|\, ds \\ &\leqslant \Lambda_1 + \|u'\|_\infty \end{aligned} \tag{3.18}$$

et

$$\begin{aligned} |u'(t)| &= \left| \int_0^t u''(s) + u'(0) ds \right| \\ &\leqslant \int_0^t |u''(s)|\, ds \\ &\leqslant \int_0^1 |u''(s)|\, ds = \|u''\|_1, \end{aligned} \tag{3.19}$$

pour tout $t \in [0,1]$. Mais,

$$\|u'\|_\infty = sup_{t\in[0,1]} |u'(t)| \leqslant sup_{t\in[0,1]} \|Lu\|_1 \quad = \|Lu\|_1 = \lambda \|Nu\|_1 \quad \leqslant \|Nu\|_1$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \|Pu\| &= \|(I - P_A)\, u(0)\| \\ &\leqslant \|I - P_A\|_* \, |u(0)| \\ &\leqslant \|I - P_A\|_* \, (\Lambda_1 + \|u'\|_\infty) \\ &\leqslant \|I - P_A\|_* \, (\Lambda_1 + \|Nu\|_1)\, . \end{aligned} \tag{3.20}$$

D'autre part, notez que $(Id-P)u \in \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$. Alors

$$\begin{aligned} \|(Id-P)u\| = \|K_P L(Id-P)u\| &= \|K_P Lu - K_P LPu\| \\ &\leqslant \|K_P Lu\| \\ &\leqslant C\|Lu\|_1 \\ &= C\lambda\|Nu\|_1 \leqslant C\|Nu\|_1 \end{aligned} \tag{3.21}$$

où la constante C est définie comme dans le Lemme 3.2.2 et Id est l'opérateur d'identité sur X. En utilisant (3.20), (3.21) nous obtenons

$$\|u\| = \|Pu+(Id-P)u\| \leqslant \|Pu\|+\|(Id-P)u\| \leqslant \Lambda_1 \|I-P_A\|_* + (\|I-P_A\|_* + C)\|Nu\|_1. \tag{3.22}$$

Par (B1) et la définition de N, nous avons

$$\begin{aligned} \|Nu\|_1 &\leqslant \int_0^1 |f(s,u(s),u'(s))|\,ds \\ &\leqslant \|a\|_1\|u\|_\infty + \|b\|_1\|u'\|_\infty + \|c\|_1 \\ &\leqslant \|a\|_1 \max(\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty) + \|b\|_1 \max(\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty) + \|c\|_1 \\ &= \|a\|_1\|u\| + \|b\|_1\|u\| + \|c\|_1 \\ &= (\|a\|_1 + \|b\|_1)\|u\| + \|c\|_1. \end{aligned} \tag{3.23}$$

En combinant (3.22) et (3.23), nous obtenons

$$\|Nu\|_1 \leqslant \frac{\Lambda_1 \|I-P_A\|_* (\|a\|_1+\|b\|_1) + \|c\|_1}{1-(\|I-P_A\|_* + C)(\|a\|_1+\|b\|_1)}$$

La dernière inégalité, combinée à (3.22), nous permet de déduire que

$$\sup_{u\in\Omega_1}\|u\| = \sup_{u\in\Omega_1}\max\{\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty\} < +\infty$$

Ainsi, Ω_1 est borné dans X. □

Lemme 3.3.2.

L'ensemble $\Omega_2 = \{u \in \operatorname{Ker} L : Nu \in \operatorname{Im} L\}$ est un sous-ensemble borné de X.

Preuve.

Soit $u \in \Omega_2$. Supposons que $u(t) = c, \forall t \in [0,1]$, où $c \in \operatorname{Ker}(I-A)$. Puisque $Nu \in \operatorname{Im} L$, nous avons $\phi(Nu) \in \operatorname{Im}(I-A)$. Par les mêmes arguments que dans la démonstration du Lemme 3.3.1, nous pouvons montrer que

$$\|u\| = \|u\|_\infty = |u(t_0)| = |c| \leqslant \Lambda_1.$$

Ainsi, Ω_2 est borné dans X. □

Lemme 3.3.3.

Les ensembles $\Omega_3^- = \{u \in \operatorname{Ker} L : -\lambda u + (1-\lambda)QNu = \theta, \lambda \in [0,1]\}$ *et*

$$\Omega_3^+ = \{u \in \operatorname{Ker} L : \lambda u + (1-\lambda)QNu = \theta, \lambda \in [0,1]\}$$

sont bornés dans X à condition que la première et la deuxième partie de (3.17) soient respectivement satisfaites.

Preuve.

Cas 1 : $\langle \alpha, QN\alpha \rangle \leqslant 0$. Soit $u \in \Omega_3^-$. Alors, il existe $\alpha \in \operatorname{Ker}(I-A)$ tel que $u(t) = \alpha, \forall t \in [0,1]$, et

$$(1-\lambda)QN\alpha = \lambda\alpha. \tag{3.24}$$

Si $\lambda = 0$, alors il découle de (3.24) que $N\alpha \in \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$, c'est-à-dire, $N\alpha \in \Omega_2$. En utilisant le Lemme 3.3.2, on déduit que $\|u\| \leqslant \Lambda_1$. D'autre part, si $\lambda \in]0,1]$ et $|\alpha| > \Lambda_2$ alors, par hypothèse (B3), on obtient une contradiction

$$0 < \lambda|\alpha|^2 = (1-\lambda)\langle \alpha, QN\alpha \rangle \leqslant 0$$

Ainsi $\|u\| = |\alpha| \leqslant \Lambda_2$. Par conséquent, on peut conclure que Ω_3^- est borné dans X.

Cas 2 : $\langle \alpha, QN\alpha \rangle \geqslant 0$. Dans ce cas, en utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, on peut également prouver que Ω_3^+ est également borné dans X.

Théorème 3.3.1. *Sous les hypothèses (B1)-(B3), le problème (3.1) a au moins une solution dans X.*

Preuve. Nous allons démontrer que toutes les conditions du Théorème 3.2.1 sont satisfaites, où Ω est ouvert et borné tel que $\bigcup_{i=1}^{3} \bar{\Omega}_i \subset \Omega$. En utilisant le Lemme 3.3.1 et le Lemme 3.3.2 ,nous l'avons donc :

$$\forall u \in ((\operatorname{dom}(L) \backslash \operatorname{Ker} L) \cap \partial\Omega) : u \notin \Omega_1 \Longrightarrow Lu \neq \lambda Nu, \forall \lambda \in]0,1[$$

Et

$$\forall u \in (\operatorname{Ker} L \cap \partial\Omega) : u \notin \Omega_2 \Longrightarrow QNu \neq \theta$$

Donc les conditions (1) et (2) du Théorème 3.2.1 sont vérifiées. Il reste donc à vérifier que la troisième condition est respectée. À cette fin, nous appliquons la propriété du degré d'invariance sous une homotopie. Définissons

$$H(u, \lambda) = \pm\lambda u + (1 - \lambda)QNu$$

où nous choisissons l'isomorphisme $J : \operatorname{Im} Q \to \operatorname{Ker} L$ comme l'opérateur identité. Par le Lemme 3.3.3, nous avons $H(u, \lambda) \neq \theta$ pour tous $(u, \lambda) \in (\operatorname{Ker} L \cap \partial\Omega) \times [0, 1]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\deg\left(QN|_{\operatorname{Ker} L}; \Omega \cap \operatorname{Ker} L, \theta\right) &= \deg(H(\cdot, 0), \Omega \cap \operatorname{Ker} L, \theta) \\
&= \deg(H(\cdot, 1), \Omega \cap \operatorname{Ker} L, \theta) \\
&= \deg(\pm Id, \Omega \cap \operatorname{Ker} L, \theta) \\
&= \pm 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

alors,la condition (3) du Théorème 3.2.1 est vérifie. Ainsi le Théorème 3.3.1 est démontré.

□

Exemple : Considérons le problème de valeur limite suivant pour le système d'équations différentielles du second ordre de la forme

$$\begin{cases}
x''(t) = f_1\left(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)\right), \quad t \in]0, 1[\\
y''(t) = f_2\left(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)\right), \quad t \in]0, 1[\\
x'(0) = y'(0) = 0 \\
x(1) = 2x(3/4) - 2y(3/4) \\
y(1) = x(3/4) - y(3/4)
\end{cases} \tag{3.25}$$

où $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, i = 1,2$, sont définies respectivement par

$$f_1(t, x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{t+2}{96\sqrt{2}}(|x_1| + |y_1|) + \frac{t^3}{48}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \tag{3.26}$$

$$f_2(t, x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{t+2}{96\sqrt{2}}(x_1 + y_1) + \frac{t^3}{48}\ln\left(1 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right) \tag{3.27}$$

pour tous $t \in [0,1]$ et $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Fixons $\eta = 3/4, A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et définissons la fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$f(t, u_1, u_2) = (f_1(t, u_1, u_2), f_2(t, u_1, u_2)) \tag{3.28}$$

pour tous $t \in [0,1]$ et $u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors le problème (3.25) a une solution si et seulement si le problème (3.1), avec A et f définis comme ci-dessus, a une solution. Ainsi, nous devons seulement montrer que les conditions du Théorème 3.3.1 sont satisfaites.

Tout d'abord, il est clair que $A^2 = A$. D'autre part, à partir de (3.26)-(3.28), il est évident que la fonction f satisfait la condition (a) et (b) de Carathéodory

Maintenant soit : $K \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ compact, alors K est borné

$$\Longrightarrow \exists r > 0, \forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in K, |x_i| \leqslant r / i = 1,2,3,4.$$

Et soit $(u, v) \in K : u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$

$$|f_1(t, u, v)| = |f_1(t, x_1, y_1, x_2, y_2)| \leqslant \frac{t+2}{96\sqrt{2}}(r + r) + \frac{t^3}{48}\sqrt{r^2 + r^2} = \left(\frac{t+2}{48\sqrt{2}} + \frac{t^3}{48}\sqrt{2}\right) r$$

De même on trouve :

$$\begin{aligned} |f_2(t, u, v)| = |f_2(t, x_1, y_1, x_2, y_2)| &\leqslant \frac{t+2}{96\sqrt{2}}(r + r) + \ln\left(1 + \sqrt{r^2 + r^2}\right) \\ &= \frac{t+2}{48\sqrt{2}} r + \frac{t^3}{48}\ln\left(1 + \sqrt{2} r\right) \\ &\leqslant \left(\frac{t+2}{48\sqrt{2}} + \frac{t^3}{48}\sqrt{2}\right) r \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sup_{(u,v)\in K}|f(t,u,v)| &= \sup_{(u,v)\in K}|\left(f_1\left(t,u,v\right),f_2\left(t,u,v\right)\right)| \\
&= \sup_{(u,v)\in K}\sqrt{f_1^2\left(t,u,v\right)+f_2^2\left(t,u,v\right)} \\
&\leqslant \sup_{(u,v)\in K}\sqrt{\left(\left(\frac{t+2}{48\sqrt{2}}+\frac{t^3}{48}\sqrt{2}\right)r\right)^2+\left(\left(\frac{t+2}{48\sqrt{2}}+\frac{t^3}{48}\sqrt{2}\right)r\right)^2} \\
&\leqslant \sup_{(u,v)\in K}\left(\frac{t+2}{48}+\frac{t^3}{24}\right)r=\left(\frac{t+2}{48}+\frac{t^3}{24}\right)r
\end{aligned}$$

Donc,

$$h_k(t)\leqslant\left(\frac{t+2}{48}+\frac{t^3}{24}\right)r$$

$$\Longrightarrow\int_0^1 h_k(t)\leqslant\int_0^1\left(\frac{t+2}{48}+\frac{t^3}{24}\right)r<\infty$$

Alors $h_k(t)\in L^1([0,1])$ c-à-d $h_k(t)$ est Lebesgue intégrable,donc la condition (c) est vérifie.

Ensuite, nous vérifierons les conditions (B1)-(B3). Il découle de (3.26), (3.27) et (3.28) que :

$$|f_1(t,u,v)|=|f_1(t,x_1,y_1,x_2,y_2)|=\left|\frac{t+2}{96\sqrt{2}}(|x_1|+|y_1|)+\frac{t^3}{48}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right|$$

on à :

$$|x_1|+|y_1|\leqslant\max(|x_1|,|y_1|)+\max(|x_1|,|y_1|)=2\|u\|=2|u|$$

et on à :

$$\sqrt{x_2^2+y_2^2}\leqslant\sqrt{2}|v|$$

Alors :

$$|f_1(t,u,v)|\leqslant\frac{t+2}{96\sqrt{2}}2|u|+\frac{t^3}{48}\sqrt{2}|v|=\frac{t+2}{48\sqrt{2}}|u|+\frac{\sqrt{2}t^3}{48}|v| \qquad (*)$$

De même on trouve :

$$|f_2(t,u,v)|\leqslant\frac{t+2}{96\sqrt{2}}2|u|+\frac{t^3}{48}\ln(1+\sqrt{2}|v|)\leqslant\frac{t+2}{48\sqrt{2}}|u|+\frac{\sqrt{2}t^3}{48}|v| \qquad (**)$$

Donc d'après (*)et(**) :

$$|f(t,u,v)|=\sqrt{f_1^2\left(t,u,v\right)+f_2^2\left(t,u,v\right)}\leqslant\sqrt{2\left(\frac{t+2}{48\sqrt{2}}|u|+\frac{\sqrt{2}t^3}{48}|v|\right)^2}=\frac{t+2}{48}|u|+\frac{t^3}{24}|v|$$

Alors,

$$|f(t,u,v)|\leqslant a(t)|u|+b(t)|v|$$

Pour tout $t \in [0,1]$ et $u, v \in \mathbb{R}^2$,où

$$a(t) = \frac{t+2}{48}, \quad b(t) = \frac{t^3}{24}.$$

Puisque $a, b \in L^1([0,1]; \mathbb{R}^+)$ et $(\|I - P_A\|_* + C)(\|a\|_1 + \|b\|_1) = 1/2 < 1$, la condition (B1) est satisfaite.

Maintenant nous vérifierons la condition (B2), soit $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$;

$$(I - A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow (I - A)\beta = \begin{bmatrix} -\beta_1 + 2\beta_2 \\ -\beta_1 + 2\beta_2 \end{bmatrix}$$

on remarque que :$-\beta_1 + 2\beta_2 = -\beta_1 + 2\beta_2$ donc :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (I - A)\beta \in \operatorname{Im}(I - A) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

alors,

$$\operatorname{Im}(I - A) = \{(q, q) : q \in \mathbb{R}\} \tag{***}$$

Pour tout $u = (x, y) \in \operatorname{dom}(L)$ on à

$$|x| + |y| \geqslant x + y \quad \text{et} \quad \sqrt{(x')^2 + (y')^2} > \ln(1 + \sqrt{(x')^2 + (y')^2})$$

Alors,

$$f_1(t, u(t), u'(t)) > f_2(t, u(t), u'(t)), \quad t \in [0,1]$$

Cela implique que

$$\int_\eta^1 ds \int_0^s f_1(t, u(t), u'(t))\, dt \neq \int_\eta^1 ds \int_0^s f_2(t, u(t), u'(t))\, dt$$

Par conséquent,et en raison de (***) :

$$\int_\eta^1 ds \int_0^s f(t, u(t), u'(t))\, dt \notin \operatorname{Im}(I - A)$$

Alors $\exists \Lambda_1 = 0$,$\forall u \in \operatorname{dom}(L)$, $|u(t)| > 0$ et $\forall t \in [0,1]$ la condition (B2) est vérifie.

Enfin, par un calcul simple, nous avons

$$Qz(t) = \frac{2}{\eta^2 - 1}(I - P_A)\phi(z) = \frac{2}{(\frac{3}{4})^2 - 1} A\phi(z) = \begin{bmatrix} -64/7 & 64/7 \\ -32/7 & 32/7 \end{bmatrix} \phi(z)$$

pour tout $z \in L^1([0,1];\mathbb{R}^2)$, où $\phi(z) = A\int_0^{3/4} ds \int_0^s z(\tau)d\tau - \int_0^1 ds\int_0^s z(\tau)d\tau$.

Soit $\alpha = (2\alpha_0, \alpha_0) \in \mathrm{Ker}(I-A)$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
N\alpha &= (f_1(t,\alpha,0), f_2(t,\alpha,0))\\
&= \left(\frac{t+2}{96\sqrt{2}}(2|\alpha_0|+|\alpha|), \frac{t+2}{96\sqrt{2}}(2\alpha_0+\alpha)\right)\\
&= \left(\frac{t+2}{96\sqrt{2}}(3|\alpha_0|), \frac{t+2}{96\sqrt{2}}(3\alpha_0)\right)\\
&= \left(\frac{t+2}{96\sqrt{2}}\gamma_1, \frac{t+2}{96\sqrt{2}}\gamma_2\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\phi(N\alpha) &= A\int_0^{3/4} ds\int_0^s N\alpha(\tau)d\tau - \int_0^1 ds\int_0^s N\alpha(\tau)d\tau\\
&= A\int_0^{3/4} ds\int_0^s \left(\frac{\tau+2}{96\sqrt{2}}\gamma_1, \frac{\tau+2}{96\sqrt{2}}\gamma_2\right)d\tau - \int_0^1 ds\int_0^s \left(\frac{\tau+2}{96\sqrt{2}}\gamma_1, \frac{\tau+2}{96\sqrt{2}}\gamma_2\right)d\tau\\
&= A\int_0^{3/4}\left(\frac{\sqrt{2}(s^2+4s)}{384}\gamma_1, \frac{\sqrt{2}(s^2+4s)}{384}\gamma_2\right)ds - \int_0^1\left(\frac{\sqrt{2}(s^2+4s)}{384}\gamma_1, \frac{\sqrt{2}(s^2+4s)}{384}\gamma_2\right)ds\\
&= \begin{bmatrix} 2 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\left(\frac{27\sqrt{2}}{8192}\gamma_1, \frac{27\sqrt{2}}{8192}\gamma_2\right) - \left(\frac{7\sqrt{2}}{1152}\gamma_1, \frac{7\sqrt{2}}{1152}\gamma_2\right)\\
&= \left(\frac{27}{2048\sqrt{2}}\gamma_1 - \frac{27}{2048}\gamma_2, \frac{27\sqrt{2}}{8192}\gamma_1 - \frac{27}{8192}\gamma_2\right) - \left(\frac{7\sqrt{2}}{1152}\gamma_1, \frac{7\sqrt{2}}{1152}\gamma_2\right)\\
&= \left(\frac{19}{18432\sqrt{2}}\gamma_1 - \frac{27}{2048\sqrt{2}}\gamma_2, \frac{27\sqrt{2}}{8192}\gamma_1 - \frac{691}{36864\sqrt{2}}\gamma_2\right)\\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}}\left(\frac{19}{1536}\gamma_1 - \frac{81}{512}\gamma_2, \frac{81}{1024}\gamma_1 - \frac{691}{3072}\gamma_2\right)
\end{aligned}$$

où $\gamma_1 = 3|\alpha_0|, \gamma_2 = 3\alpha_0$. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
Q(N\alpha) &= \frac{2}{\eta^2-1}(I-P_A)\phi(N\alpha)\\
&= \frac{2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2-1}\times A\times\frac{1}{12\sqrt{2}}\left(\frac{19}{1536}\gamma_1 - \frac{81}{512}\gamma_2, \frac{81}{1024}\gamma_1 - \frac{691}{3072}\gamma_2\right)\\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix} \frac{-64}{7} & \frac{64}{7}\\ \frac{-32}{7} & \frac{32}{7}\end{bmatrix}\left(\frac{19}{1536}\gamma_1 - \frac{81}{512}\gamma_2, \frac{81}{1024}\gamma_1 - \frac{691}{3072}\gamma_2\right)\right)\\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}}\left(\frac{-19}{168}\gamma_1 + \frac{81}{56}\gamma_2 + \frac{81}{112}\gamma_1 - \frac{691}{336}\gamma_2, \frac{-19}{336}\gamma_1 + \frac{81}{112}\gamma_2 + \frac{81}{224}\gamma_1 - \frac{691}{672}\gamma_2\right)\\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}}\left(\frac{205}{336}(\gamma_1-\gamma_2), \frac{205}{672}(\gamma_1-\gamma_2)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, QN\alpha \rangle &= \left\langle (2\alpha_0, \alpha_0), \left(\frac{1}{12\sqrt{2}} \times \frac{205}{336} (3|\alpha_0| - 3\alpha_0), \frac{1}{12\sqrt{2}} \times \frac{205}{672} (3|\alpha_0| - 3\alpha_0) \right) \right\rangle \\
&= \left\langle (2\alpha_0, \alpha_0), \left(\frac{205}{4032\sqrt{2}} (3|\alpha_0| - 3\alpha_0), \frac{205}{8064} (3|\alpha_0| - 3\alpha_0) \right) \right\rangle \\
&= \frac{1025}{2688\sqrt{2}} \alpha_0 |\alpha_0| - \frac{1025}{2688\sqrt{2}} \alpha_0^2 \\
&= \frac{1025}{5376} \sqrt{2} \left(-\alpha_0^2 + \alpha_0 |\alpha_0| \right)
\end{aligned}$$

Cela montre que $\langle \alpha, QN\alpha \rangle \leqslant 0$ pour tout $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, alors $\exists \Lambda_2 = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha = A\alpha$ et $|\alpha| > \Lambda_2$: $\langle \alpha, QN\alpha \rangle \leqslant 0$ c'est-à-dire que (B3) est satisfaite. Grâce au Théorème 3.3.1, le problème (3.25) a au moins une solution.

Conclusion

Notre objectif principal dans ce mémoire est d'appliquer le concept de coïncidence de Mawhin pour étudier l'existence d'au moins une solution pour un problème en résonance dans $\mathbb{R}^n$ avec des conditions aux limites.Pour mieux illustrer nos conclusions, nous présentons un exemple concret.

Bibliographie

[1] D. OíRegan, Y. Je Cho and Y.Q. Chen, Topological Degree Theory and Applications, Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 10, Chapman and Hall/CRC, (2006).

[2] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math ematiques Applications. Springer-Verlag, 1993.

[3] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. OíRegan, Fixed point theory and applications, Combridge Tracts in Mathematics, Vol. 141, Cambridge University Press 2001.

[4] S. Banach, Sur les opÈrations dans les ensembles abstraits et leur application, Fund. Math. 3(1922).

[5] V. IS. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fundamenta Math., 3 (1922), pp. 133-181.

[6] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math ematiques and Applications. Springer-Verlag, 1993.

[7] R. P. Agarwal, D. OíRegan and D. R. Sahu, Fixed point theory for lipschitzian-type mapping with applications, Vol 6. Cambridge university Press Springer, 2000

[8] E. Hairer and G. Wanner, Analysis by its history, Springer Verlag, Berlin, 1997

[9] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. OíRegan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 141, 2001.

[10] A. Sirma, S. Sevgin, A Note on Coincidence Degree Theory, Int. J. Math. Math. Sc, Volume 2012Article ID 370946, 18 pages

[11] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[12] J. R. Graef, B. Yang, Positive solutions of a third order eigenvalue problem, Dynam. Systems Appl. 15 (2006), 97-110.

[13] D. O.Regan, M. Zima, Leggett.Williams norm-type theorems for coincidences, Arch. Math. 87 (2006) 233-244.

[14] J. Mawhin, Leray-Schauder continuation theorems in the absence of a priori bounds, in Topological Methods in Nonlinear Analysis., J. of the Schauder Center, Vol. 9, 1997, 179-200.

[15] J. Mawhin Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, Conference Board of the Mathematical Sciences (040), AMS, 1979.

[16] J. Mawhin, Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory, J. Differential Equations 12 (1972), 610-636.

[17] D. O'Regan, Y. J. Chao, Y. Q. Chen ; Topological Degree Theory and Application, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2006.

[18] Christine Poirier ; Université de Versailles-Saint Quentin Licence de Mathématiques - Cours d'Analyse Numérique - Année - 2016/2017

[19] J. Mawhin, Topological degree and boundary value problems for non linear differential equations. In : Furi M., Zecca P. (eds) Topological Methods for Ordinary Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol 1537. Springer, Berlin, Heidelberg.

[20] J. Mawhin, Leray-Schauder degree : A half century of extensions and applications, J.of the J. Schauder Center, Vol.14 (1999), 195-228.

[21] P.D. Phung, L.X. Truong .On the existence of a three point boundary value problem at resonance in $\mathbb{R}^n$. J. Math. Anal. Appl. 416 (2014) 522–533

[22] W. Feng, J.R.L. Webb, Solvability of three-point boundary value problems at resonance, Nonlinear Anal. 30 (6) (1997) 3227-3238.

[23] W. Feng, J.R.L. Webb, Solvability of m-point boundary value problems with nonlinear growth, J. Math. Anal. Appl. 212 (1997) 467-480.

[24] R.E. Gaines, J. Mawhin, Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations, Lecture Notes in Math., vol. 568, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[25] C.P. Gupta, Existence theorems for a second order m-point boundary value problem at resonance, Int. J. Math. Math. Sci. 18 (4) (1995) 705-710.

[26] X. Han, Positive solutions for a three-point boundary-value problem at resonance, J. Math. Anal. Appl. 336 (2007) 556-568.

[27] V.A. Il'in, E.I. Moiseev, Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm–Liouville operator, J. Differential Equations 23 (1987) 803–810.

[28] V.A. Il'in, E.I. Moiseev, Nonlocal boundary value problems of the second kind for a Sturm–Liouville operator, J. Differential Equations 23 (1987) 979–987.

[29] N. Kosmatov, A multi-point boundary value problem with two critical conditions, Nonlinear Anal. 65 (2006) 622–633.

[30] N. Kosmatov, A singular non-local problem at resonance, J. Math. Anal. Appl. 394 (2012) 425–431.

[31] S. Lu, W. Ge, On the existence of m-point boundary value problem at resonance for higher order differential equation, J. Math. Anal. Appl. 287 (2003) 522–539.

[32] R. Ma, Existence results of a m-point boundary value problem at resonance, J. Math. Anal. Appl. 294 (2004) 147–157.

[33] J. Mawhin, Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., vol. 40, American Mathematical Society, Providence, 1979.

[34] L.X. Truong, P.D. Phung, Existence of positive solutions for a multi-point fourth order boundary value problem, Electron. J. Differential Equations 2011 (129) (2011) 1–10.

[35] L.X. Truong, P.D. Phung, B.T. Quan, Positive pseudo-symmetric solutions for a nonlocal p-Laplacian boundary value problem, Differ. Equ. Appl. 5 (1) (2013) 53–68.

abstract

In this thesis, We apply Mawhin's coincidence degree theorem to obtain a sufficient condition for the existence of at least one solution for a class of nonlinear second-order differential equations in $\mathbb{R}^n$associated with three-point boundary conditions.To make our conclusions clearer, we propose a concrete example.

Keywords : Three-point boundary value problem,Fixed point theorems, Resonance, Coincidence degree theory.

Résumé

Dans cette mémoire, Nous appliquons le théorème du degré de coïncidence de Mawhin pour obtenir une condition suffisante pour l'existence d'au moins une solution pour une classe d'équations différentielles non linéaires du deuxième ordre dans $\mathbb{R}^n$, associées à des conditions aux limites à trois points. Pour rendre nos conclusions plus claires, nous proposons un exemple concret.

Mots-clés : Problème aux limites à trois points,Théorèmes des points fixes, Résonance, Théorie du degré de coïncidence.

ملخص

نستخدم نظرية درجة الصدف لماوهين للحصول على شرط كاف يضمن وجود على الاقل حلاً واحداً لفئة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية غير الخطية في $\mathbb{R}^n$ المرتبطة بشروط حدودية تتكون من ثلاث نقاط. لجعل استنتاجاتنا أكثر وضوحا، نقترح مثالا عمليا.

كلمات مفتاحية : مشكلة الحدود ثلاثية النقاط، نظريات النقطة الثابتة، الرنين، نظرية درجة التزامن.