



**UNIVERSITÉ KASDI MERBAH  
OUARGLA**

**Faculté des Mathématiques et des Sciences  
de la Matière**

N° d'ordre :  
N° de série :

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**Master**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Modélisation et Analyse Numérique**

**Par : KOUARTA Salah-eddine**

**Thème**

**Equation de Navier-Stokes stationnaire : modélisation et  
résolution par la méthode de compacité**

**Soutenue publiquement le : 20/06/2024**

**Devant le jury composé de :**

Dr. MESSAOUDI Djemaa	M.C.B. Université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Dr. KALICHE Keltoum	M.C.B. Université de KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
Dr. AGTI Mohamed	M.C.A. Université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

---

---

# Dédicaces

---

Je désire dédier ce mémoire :

À mes parents :

Ma mère, qui a travaillé pour ma réussite, par son amour, son soutien, tous les sacrifices accordés et ses précieux conseils, pour toute son aide et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de ma reconnaissance éternelle. Puisse Dieu te donner longue vie avec beaucoup de bonheur et de santé.

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte ses fruits, Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien constant venu de toi. Puisse Dieu lui donner longue vie.

A mon frère : Aladin et Hamza .

A toutes les familles : KOUARTA .

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à mon superviseur, M. AGTI Mohamed, qui a su me guider pour développer ce travail.

À tous mes amis : Hichem LAIB et Mohammed-El-Assyl, à tous mes amis de la catégorie de la modélisation numérique et de l'analyse. À ceux qui croyaient en moi. Pour ceux qui croient en moi. Et pour ceux qui croiront toujours en moi. À vous tous, merci beaucoup.

---

---

# Remerciements

---

Au début de ce mémoire, je remercie Dieu Tout-Puissant qui m'aide et m'a donné patience et courage pendant les années d'étude.

j'adresse mes sincères remerciements au à l'honorable **Dr. AGTI Mohamed**, que Dieu la protège et prolonge sa vie.

Ensuite, je voudrais remercier les honorables membres du comité de discussion **Dr. MESSAOUDI Djemaa** et **Dr. KALICHE Keltoum**, pour leur présence à mes côtés en ce jour spécial.

J'adresse également mes remerciements à tous mes professeurs qui m'ont enseigné et qui m'ont soutenu avec leur compétence dans la poursuite de mes études et qui ont contribué à ce couronnement, ainsi qu' à soutenu dans ce cheminement.

Je tiens également à remercier tous mes amis (Hichem LAIB et Mohammed-El-Assyl) pour leurs encouragements et leur soutien pour continuer la réalisation de ce travail , Merci à tous

Enfin, un grand merci à ma famille pour son soutien et ses encouragements. Merci beaucoup à ma mère pour son soutien particulier pour moi, merci à mon père, merci à mes frères (Hamza et Aladin). Merci pour tout !

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Dédicaces</b>	<b>I</b>
<b>Remerciements</b>	<b>II</b>
<b>LISTES DES FIGURES</b>	<b>V</b>
<b>NOTATIONS</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
<b>1 Notions générales</b>	<b>5</b>
1.1 L'espace Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	5
1.2 Espace séparé . . . . .	6
1.3 Espace séparable . . . . .	6
1.4 Formule de Green . . . . .	6
1.5 Convergences forte, faible et faible* . . . . .	6
1.5.1 Convergences forte . . . . .	6
1.5.2 Convergences faible . . . . .	7
1.5.3 Convergences faible* . . . . .	7
1.6 Théorème de Lax-Milgram . . . . .	7
<b>2 Méthode de compacité</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction . . . . .	9
2.1.1 Lemmes de compacité . . . . .	9
2.2 Un théorème d'existence et d'unicité . . . . .	13

---

<b>3</b>	<b>Modélisation de l'équation de (N-S) stationnaire</b>	<b>16</b>
3.1	Les Équations de Navier-Stokes . . . . .	16
3.1.1	Vecteur contrainte . . . . .	16
3.1.2	Le tenseur des contraintes . . . . .	18
3.1.3	Tenseurs (Rotation des Axes) . . . . .	19
3.1.4	Le fluide newtonien . . . . .	22
3.1.5	Diffusion du rotationnel de la vitesse dans un écoulement visqueux . .	24
3.1.6	Le nombre de Reynolds . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Résolution de l'équation de Navier-Stokes stationnaire</b>	<b>29</b>
4.1	Équations de Navier-Stokes (cas stationnaire) . . . . .	29
4.1.1	Le problème homogène . . . . .	29
4.1.2	Le problème non homogène . . . . .	34
	<b>CONCLUSION</b>	<b>39</b>
	<b>RÉFÉRENCES</b>	<b>41</b>

---

# LISTES DES FIGURES

3.1	Le volume matériel $V(t)$ . . . . .	16
3.2	Le tétraèdre $\mathcal{T}_\varepsilon$ . . . . .	18
3.3	Les systèmes de coordonnées $Oxyz$ et $Ox'y'z'$ . . . . .	19

---

# NOTATIONS

---

- ♣  $\Omega$  : Un Ouvert.
- ♣  $\Omega'$  : Un Ouvert.
- ♣  $\partial\Omega$  : La frontière de  $\Omega$ .
- ♣  $\nabla u$  : Gradient de  $u$  définit par  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ .
- ♣  $\Delta u$  : Laplacien de  $u$  définit par  $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ .
- ♣  $(E, \|\cdot\|)$  : un espace vectoriel normé.
- ♣  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  : une suite.
- ♣  $u_\infty$  : un vecteur non-nul.
- ♣  $\|\cdot\|_{L^p}$  : la norme des espaces de Lebesgue.
- ♣  $(E, \theta)$  : un espace métrisable.
- ♣  $\mathcal{D}$  : l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ .
- ♣  $\mathcal{D}'$  : l'espace des distributions sur  $\Omega$ .
- ♣  $L^p(\Omega)$  : l'espace des fonctions de puissance  $p$ -ième intégrable sur  $\Omega$  pour la mesure de Lebesgue.
- ♣  $L^\infty(\Omega)$  : l'espace des fonctions (classes) essentiellement bornées.

Si  $X$  un espace de Banach :

- ♣  $L^p(0, T; X) = \left\{ f : ]0, T[ \rightarrow X \text{ mesurable, } \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty \right\}$  ,.
- ♣  $L^\infty(0, T; X) = \left\{ f : ]0, T[ \rightarrow X \text{ mesurable, } \sup_{t \in ]0, T[} \text{ess } \|f(t)\|_X < \infty \right\}$  .

---

# INTRODUCTION

---

La modélisation des écoulements des fluides a connu une avancée significative au XIXe siècle. Les équations formulées par L.M.H. Navier et C.G. Stokes, désormais connues sous leurs noms, en sont la manifestation la plus notable. Dans ce travail, nous nous concentrons sur l'étude du problème de Navier-Stokes. Ce problème modélise les écoulements stationnaires lents de fluides visqueux dans  $\mathbb{R}^2$ . Dans sa forme la plus simple, ce problème s'exprime comme suit :

$$(NS) \quad \begin{cases} -v\Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u & = f - \nabla p \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u & = 0, \\ u & = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Elle est en particulier d'énergie finie sous des hypothèses convenables de régularité et de décroissance de  $\mathbf{f}$ . De plus, pour cette solution, l'énergie dissipée par viscosité équilibre le travail des forces extérieures dans l'écoulement. Plus important encore, une étude fine de la structure asymptotique de la vitesse met en évidence la formation d'un sillage parabolique à l'arrière de l'obstacle. Ce fait est remarquable pour sa concordance qualitative avec les caractéristiques physiques de l'écoulement considéré.

Dans ce travail, nous étudions l'équation de Navier-Stokes stationnaire par la méthode de compacité . Ce travail est divisé en quatre chapitres.

**Premier chapitre :** nous mentionnerons les définitions des espaces de Sobolev, et mentionnerons les théorèmes et les définitions utilisées pour résoudre l'équation de Navier-Stokes stationnaire, en plus de cela nous présentons quelques notations géométriques.

**Deuxième chapitre :** Dans le deuxième chapitre, nous avons défini la méthode de compacité, ses principes et ses conditions d'application, et nous l'avons appliquée à l'équation de Navier-Stokes stationnaire.

**Troisième chapitre :** Dans ce chapitre, nous avons défini les tenseurs et les contraintes vectorielles, nous avons également défini le fluide newtonien et nous avons modélisé l'équation



de Navier-Stokes stationnaire en utilisant ce qui précède.

**Quatrième chapitre :** Dans le quatrième et dernier chapitre, nous avons étudié l'équation de Navier-Stokes stationnaire, et nous avons posé le problème homogène et le problème non-homogène, et nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution dans les deux cas, homogène et non-homogène, dans une manière classique normale.

## **CHAPITRE 1**

---

### **Notions générales**

---

---

---

# CHAPITRE 1

---

## NOTIONS GÉNÉRALES

### 1.1 L'espace Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

**Définition 1.1.** [1] Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert quelconque,  $p$  un réel tel que  $1 \leq p \leq \infty$  et  $m$  un entier naturel positif. On définit l'espace de Sobolev  $W^{m,p}$  par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

où  $\alpha$  est un multi-indice tel que  $0 \leq |\alpha| \leq m$ ,  $D^\alpha$  est une dérivée partielle de  $u$  au sens faible (i.e. au sens des distributions) et  $L^p$  un espace de Lebesgue.

La norme sur  $W^{m,p}$  est :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & , 1 \leq p \leq \infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & , p = \infty \end{cases}$$

où  $\|\cdot\|_{L^p}$  désigne la norme des espaces de Lebesgue.  $W^{m,p}$  Muni de cette norme est un espace de Banach. Dans le cas où  $p < \infty$ , c'est aussi un espace séparable. La norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p} \right)^{1/p} & , 1 \leq p \leq \infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & , p = \infty \end{cases}$$

est une norme équivalente à la norme précédente.

1.2. ESPACE SÉPARÉ

## 1.2 Espace séparé

**Définition 1.2.** Soit  $(E, \mathcal{O})$  un espace topologique. Nous dirons que  $(E, \mathcal{O})$  est un espace topologique séparé (ou un espace de Hausdorff) si et seulement si pour deux éléments distincts de  $E$  il existe toujours deux voisinages disjoints.

**Définition 1.3.** Un espace topologique  $(E, \mathcal{O})$  est dit localement séparé si tout point de  $E$  admet un voisinage séparé.

## 1.3 Espace séparable

**Définition 1.4.** Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble  $D$  dense et dénombrable .

**Théorème 1.1.** Soit  $E$  un espace de Banach séparable ; alors toute suite bornée  $(x_n)_n$  dans  $E'$  admet au moins une sous-suite faiblement\* convergente.

## 1.4 Formule de Green

Pour toute  $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n), \forall v \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$  la formule de green suivante est valable

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_n} v \, dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial v}{\partial x_n} \, dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x', 0) v(x', 0) \, dx'.$$

## 1.5 Convergences forte, faible et faible\*

### 1.5.1 Convergences forte

**Définition 1.5.** i En topologie, on considère un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  et une suite  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $E$ .

On dit que  $x$  converge fortement vers un élément  $x_\infty \in E$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x_\infty\| = 0.$$

Autrement dit,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tq  $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - x_\infty\| \leq \varepsilon$ . On dit alors que  $x_\infty$  est limite forte de  $x$  et l'on parle de convergence forte.

ii En théorie de la mesure, on appelle parfois convergence forte la convergence presque partout (en calcul des probabilités, c'est la convergence presque sûre).

1.6. THÉORÈME DE LAX-MILGRAM

1.5.2 Convergences faible

**Définition 1.6.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  et  $u \in E$ . On dit que  $u_n \rightarrow u$  faiblement dans  $E$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  si  $T(u_n) \rightarrow T(u)$  pour tout  $T \in E'$ .

1.5.3 Convergences faible\*

**Définition 1.7.** Soient  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$  et  $T \in E'$ . On dit que  $T_n \rightarrow T$  dans  $E'$  faible\* si  $T_n(x) \rightarrow T(x)$  pour tout  $x \in E$ .

1.6 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram [2] est un théorème très important. Considérons un problème variationnel sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tels que} \\ a(u, v) = F(v), \forall v \in V. \end{cases}$$

**Thoérème 1.2.** (Lax-Milgram)

Soit  $V$  un espace de Hilbert équipé de la norme  $\|\cdot\|_V$ . On suppose que :

(i) la forme bilinéaire  $a$  est continue,

$$\exists \beta < +\infty, \forall (u, v) \in V \times V, |a(u, v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V$$

(ii) la forme bilinéaire  $a$  est coercive (on dit également  $V$ -elliptique)

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in V, a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2. \tag{1.1}$$

(iii) la forme linéaire est continue,

$$\exists \gamma < +\infty, \forall v \in V, |F(v)| \leq \gamma \|v\|_V;$$

Alors, le problème admet une et une seule solution. De plus, son unique solution satisfait l'estimation a priori

$$\|u\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \tag{1.2}$$

**Lemme 1.1.** L'espace  $V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$  est séparable.

## CHAPITRE 2

---

# Méthode de compacité

---

---

---

# CHAPITRE 2

---

## MÉTHODE DE COMPACTITÉ

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Lemmes de compacité

Les notations seront les suivantes : on se donne trois espaces de Banach  $B_0, B, B_1$ , avec

$$B_0 \subset B \subset B_1, B_i \text{ réflexif, } i = 0, 1, \quad (2.1)$$

$$\text{l'injection } B_0 \rightarrow B \text{ est compacte.} \quad (2.2)$$

On définit

$$W = \left\{ v \mid v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\} \quad (2.3)$$

où  $T$  est fini et où  $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$ .

Muni de la norme

$$\|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)},$$

$W$  est un espace de Banach.

Evidemment  $W \subset L^{p_0}(0, T; B)$ .

On a alors le résultat suivant :

- Dont une variante "non linéaire" sera donnée, dans un cadre concret.
- " $\subset$ " signifie inclusion algébrique et topologique.

**Lemme 2.1.** *Sous l'hypothèse,  $\forall \eta > 0$ , il existe  $c_\eta$  telle que*

$$\|v\|_B \leq \eta \|v\|_{B_0} + c_\eta \|v\|_{B_1}. \quad (2.4)$$

## 2.1. INTRODUCTION

Par conséquent,  $\forall \eta > 0$ , il existe  $d_\eta$  telle que

$$\|v_n\|_{L^{P_0}(0,T;B)} \leq \eta \|v_n\|_{L^{P_0}(0,T;B_0)} + d_n \|v_n\|_{L^{P_0}(0,T;B_1)}. \quad (2.5)$$

Soit alors  $\varepsilon > 0$  donné; puisque

$$\|v_n\|_{L^{P_0}(0,T;B_0)} \leq c,$$

on aura

$$\|v_n\|_{L^{P_0}(0,T;B)} \leq \varepsilon/2 + d_n \|v_n\|_{L^{P_0}(0,T;B_1)}$$

si l'on choisit  $\eta$  avec  $\eta c \leq \varepsilon/2$ .

Tout revient donc à montrer que

$$v_n \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^{P_0}(0,T;B_1). \quad (2.6)$$

Comme  $W \subset C^0([0,T];B_1)$  on a :  $\|v_n(t)\|_{B_1} \leq \text{constante}$ , de sorte que, d'après le Théorème de Lebesgue, on aura (2,6) si l'on montre que

$$v_n(s) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad B_1 \text{ fort, } \forall s \in [0,T].$$

Comme  $s$  ne joue aucun rôle spécial, tout revient finalement à montrer que

$$v_n(0) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad B_1. \quad (2.7)$$

Mais si l'on introduit  $w_n$  par

$$w_n(t) = v_n(\lambda t), \lambda > 0 \text{ à fixer,} \quad (2.8)$$

on a :

$$\begin{cases} v_n(0) = w_n(0), \\ \|w_n\|_{L^{P_0}(0,T;B_0)} \leq e_1 \lambda^{-1/P_0}, \|w'_n\|_{L^{P_0}(0,T;B_1)} \leq e_2 \lambda^{1-1/P_1}. \end{cases} \quad (2.9)$$

telle que  $e_1, e_2$  des constants.

On utilise ici le fait que  $L^p(0,T;B_i)$  est réflexif, si  $1 < p_c < \infty$ , lorsque  $B_1$  est réflexif.

Si  $\varphi$  est une fonction  $C^1$  dans  $[0,T]$ ,  $\varphi(0) = -1, \varphi(T) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} w_n(0) &= \int_0^T (\varphi w_n)' dt = \beta_n + \gamma_n, \\ \beta_n &= \int_0^T \varphi w'_n dt, \quad \gamma_n = \int_0^T \varphi' w_n dt. \end{aligned}$$

D'après (2,9) on en déduit

$$\|v_n(0)\|_{B_1} \leq \|\beta_n\|_{B_1} + \|\gamma_n\|_{B_1} \leq c_3 \lambda^{1-1/P_1} + \|\gamma_n\|_{B_1} \quad (2.10)$$



2.1. INTRODUCTION

Si  $\varepsilon > 0$ , on choisit  $\lambda$  de façon que  $c_3\lambda^{1-1/P} \leq \varepsilon/2$  et on aura donc (2,7) si l'on montre que

$$\gamma_n \rightarrow 0 \text{ dans } B_1. \quad (2.11)$$

Or  $w_n \rightarrow 0$  dans  $L^{p_0}(0, T; B_0)$  faible ( $\lambda$  est fixé, et on peut toujours le supposer  $\leq 1$ ), donne  $\gamma_n \rightarrow 0$  dans  $B_0$  faible. Comme  $B_0 \rightarrow B_1$  est compacte, on en déduit (2,11).

**Théorème 2.1.** *Sous les hypothèses (2,1), (2,2) et si  $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$  l'injection de  $W$  dans  $L^{p_0}(0, T; B)$  est compacte.*

**Remarque 2.1.** *Dans les applications, on obtiendra une première estimation a priori dans un espace du type  $L^{p_0}(0, T; B_0)$ ,  $B_0$  étant un espace de Sobolev du type*

$$B_0 = W^{m,p}(\Omega). \quad (2.12)$$

On aura besoin, afin d'avoir convergence presque partout, de la conclusion du Théorème 2.1 avec par exemple

$$B = L^p(\Omega) \quad (2.13)$$

L'hypothèse (2,2) a lieu, d'après un Théorème de KondRachofF [5], si  $\Omega$  est borné de frontière assez régulière.

Alors la conclusion «pratique» du Théorème 2.1 est qu'on obtient le résultat désiré si l'on a une estimation a priori pour  $v'$  dans  $L^p(0, T; B_1)$ , où  $B_1$  peut être choisi «arbitrairement grand».

C'est cette remarque qui permettra de résoudre le problème de l'existence dans les équations de Navier-Stokes en dimension quelconque d'espace.

Si  $\gamma$  est un nombre  $> 0$  donné, on définit

les espaces  $B_0, B, B_1$  sont des Hilbert.

$$H^\gamma(\mathbf{R}, B_0, B_1) = \{v \mid v \in L^2(\mathbf{R}, B_0), \tau|\gamma\hat{v} \in L^2(\mathbf{R}; B_1)\}$$

ou

$$\hat{v}(\tau) = (\text{transformée de Fourier en } t \text{ et } v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t \tau} v(t) dt.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{H^\gamma(\mathbf{R}, B_0, B_1)} = (\|v\|_{L^2(\mathbf{R}, B_0)}^2 + \||\tau|\gamma\hat{v}\|_{L^2(\mathbf{R}, B_1)}^2)^{1/2}$$

$H^\gamma(\mathbf{R}, B_0, B_1)$  est un espace de Hilbert.

On introduit ensuite

$$H^\gamma(0, T; B_0, B_1) = \text{espace des restrictions à } (0, T) \text{ des fonctions de } H^\gamma(\mathbf{R}, B_0, B_1)$$

2.1. INTRODUCTION

**Thoérème 2.2.** *On suppose que (2,1) (2,2) , les espaces  $B_0, B, B_1$  sont des Hilbert ont lieu. Alors l'injection de  $H^\gamma(0, T; B_0, B_1) \rightarrow L^2(0, T; B)$  est compacte.*

**Démonstration :** Tout revient à montrer ceci : si  $v_n \rightarrow 0$  dans  $H^\gamma(0, T; B_0, B_1)$  faible, alors  $v_n \rightarrow 0$  dans  $L^2(0, T; B_1)$  fort.

On peut supposer que  $v_n$  est la restriction à  $(0, T)$  de  $w_R \in H^\gamma(\mathbf{R}; B_0, B_1)$ ,  $w_n$  à support dans  $[-1, T + 1]$ ,  $w_n \rightarrow 0$  dans  $H^\gamma(\mathbf{R}; B_0, B_1)$  faible. Et il faut montrer que  $w_n \rightarrow 0$  dans  $L^2(\mathbf{R}; B_1)$  ou encore que

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{w}_n(\tau)\|_{B_1}^2 d\tau \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Or

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{|\tau| \leq M} \|\hat{w}_n(\tau)\|_{B_1}^2 d\tau + \int_{|\tau| \geq M} (1 + |\tau|^{2\gamma}) \|\hat{w}_n(\tau)\|_{B_1}^2 \cdot \frac{1}{1 + |\tau|^{2\gamma}} d\tau \\ &\leq \int_{|\tau| \leq M} \|\hat{w}_n(\tau)\|_{B_1}^2 d\tau + \frac{C}{1 + M^{2\gamma}}. \end{aligned}$$

Pour  $c > 0$  donné, on choisit  $M$  de façon que

$$\frac{c}{1 + M^{2\gamma}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On aura alors (2,14) si l'on montre que

$$\int_{|\tau| \leq M} \|\hat{w}_n(\tau)\|_{B_1}^2 d\tau \rightarrow 0, \quad M \text{ fixé}. \quad (2.15)$$

Si  $\psi$  est une fonction continue à support compact,  $\psi = 1$  sur  $[-1, T + 1]$ , alors  $w_n = \psi w_n$  et donc

$$\hat{w}_n(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_n(t) (e^{-2\pi i t \tau} \psi(t)) dt;$$

donc  $\hat{w}_n(\tau) \rightarrow 0$  dans  $B_0$  faible, donc dans  $B$  fort et a fortiori dans  $B_1$  fort ; par ailleurs

$$\|\hat{w}_n(\tau)\|_{B_1} \leq \|w_n\|_{L^2(\mathbf{L}; B_1)} \|e^{-2\pi i f \tau} \psi\|_{L^2(k)}$$

et (2, 15) résulte alors du Théorème de Lebesgue.

**Exemple 2.1.** *On va prendre l'équation suivante :*

$$u'' - \Delta u + |u'|^p u' = f \text{ dans } Q = \Omega \times ]0, T[, \quad (2.16)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (2.17)$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \quad (2.18)$$

Pour démontrer cette équation on utilise le théorème suivant :

2.2. UN THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

## 2.2 Un théorème d'existence et d'unicité

**Thoérème 2.3.** *On suppose  $f, u_0, u_1$  donnés avec*

$$\begin{aligned} f &\in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), f' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q), \\ u_0 &\in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ u_1 &\in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \end{aligned}$$

*On suppose que  $\Omega$  est borné, de frontière régulière.*

*Il existe une fonction  $u$  et une seule, solution de*

$$u'' - \Delta u + |u'|^\rho u' = f, x \in \Omega, t \in ]0, T[,$$

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u'(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega.$$

*avec*

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$u' \in L^{\rho+2}(Q).$$

**Démonstration :** (voir [5])

**Proposition 2.1.** *On suppose  $f, u_0, u_1$  donnés avec*

$$f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.19}$$

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{2.20}$$

$$u_1 \in H_0^1(\Omega) \tag{2.21}$$

*On suppose  $\Omega$  borné de frontière régulière.*

*Il existe alors une fonction  $u$  et une seule, solution de (2, 16)(2, 17)(2, 18), avec*

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{2.22}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{\rho+2}(Q). \tag{2.23}$$

2.2. UN THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

**Démonstration :**

- 1) On construit la solution approchée  $u_m$  comme dans la Démonstration du Théorème 2.3 (cf. (2,22)), avec

$$\begin{aligned} u_{0m} &\rightarrow u_0 \text{ dans } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ u_{1m} &\rightarrow u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

et les  $w_j$  étant choisis fonctions propres de  $-\Delta$ .

On ne montrera pas ici l'unicité.

- 2) Les estimations a priori (I) (II) de la Démonstration du Théorème 2.3 sont valables ; donc

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^P(Q), \\ p = \rho + 2. \end{cases} \quad (2.25)$$

- 3) On applique maintenant le Théorème de compacité , à la suite  $u'_m$ , avec

$$\begin{cases} B_0 = H_0^1(\Omega), & p_0 = 2 \text{ (par exemple)} \\ B_1 = D(A^N)', & p_1 = p', \end{cases} \quad (2.26)$$

et avec

$$B = L^2(\Omega) \text{ (loisible car } H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \text{ est compacte)}. \quad (2.27)$$

On en déduit que l'on peut extraire une suite  $u'_\mu$  telle que

$$u'_\mu \rightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et p. p. dans } Q. \quad (2.28)$$

Par ailleurs on peut supposer que

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \text{ faible } *, \quad (2.29)$$

$$u'_\mu \rightarrow u' \text{ dans } L^P(Q) \text{ faible et dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible } *, \quad (2.30)$$

$$|u'_\rho|^\rho u'_\rho \rightarrow \chi \text{ dans } L^{p'}(Q) \text{ faible.} \quad (2.31)$$

Mais d'après (2,34) et le Lemme suivant :

**Lemme 2.2.** Soit  $\theta$  un ouvert borné de  $R_x^n \times R_p g_\mu$  et  $g$  des fonctions de  $L^q(\theta)$ ,  $1 < q < \infty$ , telle que

$$\|g_\mu\|_{L^q(\theta)} \leq C, \quad g_\mu \rightarrow g \text{ p.p. dans } \theta$$

Alors  $g_\mu \rightarrow g$  dans  $L^q$  faible.

On en déduit que  $\chi = |u'|^\rho u'$  et on achève la Démonstration comme au Théorème 2.3.

## CHAPITRE 3

---

# Modélisation de l'équation de Navier-Stokes stationnaire

---

---

---

## CHAPITRE 3

---

# MODÉLISATION DE L'ÉQUATION DE (N-S) STATIONNAIRE

### 3.1 Les Équations de Navier-Stokes

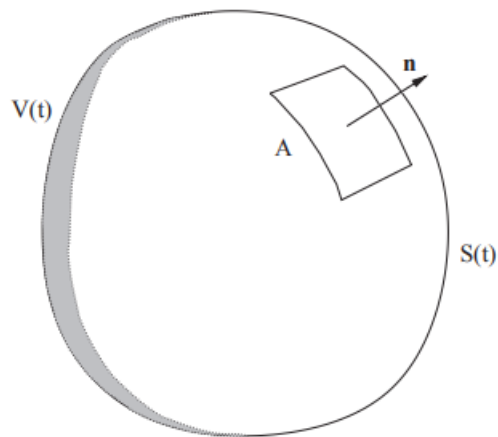


FIGURE 3.1 : Le volume matériel  $V(t)$ .

#### 3.1.1 Vecteur contrainte

Supposons qu'un ensemble de particules de fluide occupe un volume  $V(t)$  ayant pour frontière fermée  $S(t)$  avec comme vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$ , comme indiqué sur la figure 3.1. Pour un fluide idéal la force exercée sur un élément de surface d'une superficie  $\delta S$  dans

3.1. LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

---

le fluide est

$$\pm pn\delta S. \quad (3.1)$$

Maintenant on voudrait considérer un fluide plus générale qu'un fluide idéal. Dans cette optique considérons un petit élément de surface  $A$  ayant vecteur position  $x$  et de superficie  $\delta S$ . On définit le vecteur contrainte  $s_n(x, t)$  en imposant que la force exercée au temps  $t$  sur l'élément  $A$  par le fluide à l'extérieur de  $V(t)$  est  $s_n\delta S$ .

La force totale sur toute la surface  $S$  est alors

$$\int_{S(t)} s_n dS \quad (3.2)$$

et la force totale subie par le fluide qui occupe  $V(t)$  va être

$$\int_{S(t)} s_n dS + \int_{V(t)} \rho g dV \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{g}$  désigne une force par unité de masse.

### 3.1.1.1 Conservation de la quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement est donnée

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v dV - \int_{S(t)} s_n(x, t) dS + \int_{V(t)} \rho g dV. \quad (3.4)$$

En faisant passer la dérivée temporelle du membre de gauche de (3,4) dans l'intégrale par le théorème du transport de Reynolds, et en utilisant l'équation de conservation de la masse , on a

$$\int_{V(t)} \rho \frac{Dv}{Dt} dV = \int_{S(t)} s_n(\mathbf{x}, t) dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV. \quad (3.5)$$

### 3.1.1.2 Conservation du moment

Une autre loi de la mécanique stipule le principe de conservation du moment. En appliquant cette loi au volume  $V(t)$  on obtient, en supposant que le couple est seulement dû à la contrainte  $s_n$  et à la force massique  $\mathbf{g}$ .

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_{S(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{s}_n) dS + \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g}) dV. \quad (3.6)$$

En utilisant à nouveau le théorème de transport de Reynolds qui nous permet de transférer la dérivée matérielle à l'intérieur de l'intégrale du membre de gauche, et en utilisant l'équation de conservation de la masse on obtient

$$\int_{V(t)} \left( \mathbf{x} \times \rho \frac{Dv}{Dt} \right) dV = \int_{S(t)} (\mathbf{x} \times s_n) dS + \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g}) dV. \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Le tenseur des contraintes

Les lois d'Euler appliquées à un fluide conduit aux équations (3,5) et (3,7). Nous allons tout d'abord utiliser les équations (3,5) et (3,7) pour démontrer l'existence d'un tenseur des contraintes  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  ayant la propriété suivante :

$$s_n(x, t) = \sigma \cdot n,$$

et ensuite la symétrie du tenseur des contraintes.

**Thoérème 3.1.** *Soit  $\mathcal{D}$  une région fermée et bornée de  $\mathbb{R}^3$  et  $s_n(x, t)$  le vecteur contrainte introduit ci-dessus et défini dans  $\mathcal{D}$ . Alors il existe un tenseur de second ordre  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  tel que dans  $\mathcal{D}$  on ait :*

i.  $s_n = \sigma \cdot n,$

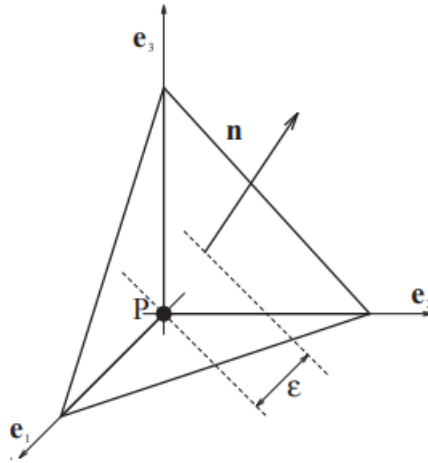


FIGURE 3.2 : Le tétraèdre  $\mathcal{T}_\varepsilon$  .

ii.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho g$$

iii.  $\sigma$  est symétrique.

• **Démonstration.**

Pour la démonstration (voir[4]).



### 3.1.3 Tenseurs (Rotation des Axes)

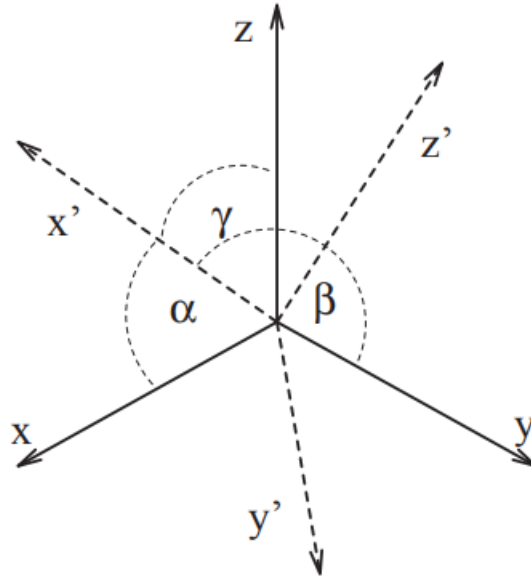


FIGURE 3.3 : Les systèmes de coordonnées  $Oxyz$  et  $Ox'y'z'$ .

Considérons deux systèmes de coordonnées cartésiennes d'axes  $Oxyz$  et  $Ox'y'z'$  comme indiqués sur la Figure 3.3. On appelle  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles que l'axe  $x'$  fait respectivement avec les axes  $x, y$  et  $z$ . Les cosinus directeurs correspondants sont donnés par les cosinus de ces angles et on les note  $l_{11}, l_{12}$  et  $l_{13}$ .

Il découle de principes élémentaires de géométrie que

$$l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2 = 1. \quad (3.8)$$

Les autres cosinus directeurs relatifs aux axes de  $y'$  et  $z'$  sont notés de manière analogue et on aboutit au tableau des cosinus directeurs suivant :

$O$	$x$	$y$	$z$
$x'$	$l_{11}$	$l_{12}$	$l_{13}$
$y'$	$l_{21}$	$l_{22}$	$l_{23}$
$z'$	$l_{31}$	$l_{32}$	$l_{33}$

On peut voir que les cosinus directeurs relatifs à l'axe  $x$  apparaissent dans la première colonne, ceux de l'axe  $y$  dans la deuxième et ceux de l'axe  $z$  dans la troisième colonne.

Puisque les axes  $Ox', Oy'$  et  $Oz'$  sont perpendiculaires entre eux on a

$$\sum_{j=1}^3 l_{rj}l_{sj} = \delta_{rs} \quad (3.9)$$

3.1. LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

---

et de même, en considérant les axes  $Ox, Oy$  et  $Oz$ , on a

$$\sum_{r=1}^3 l_{ri} l_{rj} = \delta_{ij}. \quad (3.10)$$

**3.1.3.1 Tenseurs cartésiens**

Soit  $\mathbf{A}$  une quantité mathématique ou physique qui, lorsque associée à un système de coordonnées cartésiennes  $x_1, x_2, x_3$ , peut être représentée par une famille de  $3^n$  scalaires  $a_{ij}$ , où il y a  $n$  suffixes attachés à  $a$ . Chacun des suffixes prend une des valeurs 1,2 ou 3. Soit  $a'_{rs\dots}$  une famille de scalaires représentant  $A$  dans le repère  $Ox'_1x'_2x'_3$ , et supposez que

$$a'_{rs\dots} = l_{ri} l_{sj} \dots a_{ij} \dots \quad (3.11)$$

Si les scalaires représentant  $\mathbf{A}$  sont invariants par translation des axes,  $\mathbf{A}$  est appelé un tenseur cartésien d'ordre  $n$ . On note que selon (3,11),  $\mathbf{A}$  est un tenseur cartésien si

$$a'_{rs\dots} = \frac{\partial x'_r}{\partial x_i} \frac{\partial x'_s}{\partial x_j} \dots a_{ij\dots}, \quad (\text{tenseur contravariant}), \quad (3.12)$$

ou bien

$$a'_{rs\dots} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_j}{\partial x'_s} \dots a_{ij\dots}, \quad (\text{tenseur covariant}), \quad (3.13)$$

les deux règles de transformation des tenseurs ci-dessus étant les mêmes pour les tenseurs cartésiens.

Dans le cas  $n = 2$ , (3,11) veut dire qu'avec un changement orthogonal de coordonnées

$$\mathbf{x}' = Q\mathbf{x} + c, \quad \text{où } Q_{ij} = l_{ij}, \quad (3.14)$$

$A$  est un tenseur cartésien du second ordre si elle se transforme selon

$$A' = QAQ^T. \quad (3.15)$$

**3.1.3.2 Tenseurs isotropes**

Un tenseur cartésien est dit isotrope si toutes ses composantes restent inchangées dans tout système de coordonnées cartésiennes.

- Tenseurs du second ordre

Soit  $U$  un tenseur isotrope du second ordre. Donc

$$u_{pq} = I_{pi} I_{qj} u_{ij}. \quad (3.16)$$

CHAPITRE 3. MODÉLISATION DE L'ÉQUATION DE (N-S) STATIONNAIRE

3.1. LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

---

On considère premièrement une rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $Ox_3$ . Pour cette rotation,

$$l_{11} = l_{22} = -1, l_{33} = 1, \text{ et } l_{ij} = 0, \text{ autrement,} \quad (3.17)$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} u_{13} &= l_{1i}l_{3j}u_{ij} = l_{11}l_{33}u_{13} = -u_{13}, \\ \Rightarrow u_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De la même manière

$$\begin{aligned} u_{23} &= l_{2i}l_{3j}u_{ij} = l_{22}l_{33}u_{23} = -u_{23}, \\ \Rightarrow u_{2,3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

En prenant des rotations de  $\pi$  autour des axes  $Ox_1$  et  $Ox_2$  en obtiendra  $u_{21} = u_{31} = u_{12} = u_{32} = 0$ .

Une rotation de  $\pi/2$  autour de l'axe  $Ox_3$  a les cosinus directeurs

$$l_{12} = l_{33} = 1, l_{21} = -1, \text{ et } l_{ij} = 0, \text{ autrement.} \quad (3.20)$$

De la même façon que ci-dessus on obtiendrait immédiatement le résultat  $u_{11} = u_{22}$  et en faisant une rotation autour de l'axe  $Ox_1$  on conclut que  $u_{11} = u_{22} = u_{33}$  avec  $u_{ij} = 0$  autrement.

En conclusion le tenseur isotrope du second ordre le plus général est

$$U = \lambda \delta \quad (3.21)$$

où  $\lambda$  est un invariant scalaire.

- Tenseurs d'ordre 4

Le tenseur isotrope du quatrième ordre  $\mathbf{U}$  le plus général est

$$u_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu \delta_{ik} \delta_{jm} + v \delta_{im} \delta_{jk}$$

où  $\lambda, \mu$  et  $v$  sont des invariants scalaires.

3.1. LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

3.1.4 Le fluide newtonien

Pour dériver une forme explicite du tenseur des contraintes, on écrit

$$\sigma = -pI + T_1 \quad (3.22)$$

où  $p$  est la pression et  $T$  est appelé le tenseur des extra-tensions ou le déviateur des contraintes. La forme fonctionnelle de  $T$  peut être déduite des trois hypothèses suivantes :

1.  $T$  est une fonction linéaire du gradient de la vitesse  $\nabla v$ ,
2.  $T = 0$  lorsqu'il n'y a pas de déformation des éléments du fluide,
3. La relation entre  $T$  et le gradient de la vitesse  $\nabla v$  est isotrope, c'est à dire, identique pour tout repère cartésien rectangulaire, telle que le déviateur des contraintes engendré dans un élément de fluide est indépendant de l'orientation de l'élément.

Des deux premières hypothèses on peut écrire

$$\begin{aligned} T_{ij} &= A_{ijU} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}, \\ &= \frac{1}{2} A_{ijkl} \gamma_{kl} - \frac{1}{2} A_{ij\mu l} S_{kl}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $A$  est un tenseur de quatrième ordre et les tenseurs  $\dot{\gamma}$  et  $S$  sont définis, respectivement, comme suit :

$$\dot{\psi} = \nabla v + \nabla v^T, \quad (\text{tenseur de vitesse de déformation ou des taux de déformation}), \quad (3.24)$$

$$S = \nabla v^T - \nabla v \quad (3.25)$$

De la troisième hypothèse on constate qu'il faut utiliser un tenseur  $A$  isotrope, dont la forme la plus générale (voir feuilles séparées) est en fonction des tenseurs delta :

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{jj} \delta_{il} + \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \nu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (3.26)$$

où  $\lambda, \eta$  et  $\nu$  sont des coefficients scalaires. Puisque  $T$  est symétrique,  $A$  doit être symétrique dans ses deux premiers indices et par conséquent  $\nu = \eta$ . Mais on observe de (3,26) que  $A$  est aussi symétrique par rapport à ses deux derniers indices  $k$  et  $l$  qui nécessite (rappelant que le tenseur  $S$  est anti-symétrique) que le deuxième terme du membre de droite de (3,23) est nul. En tenant compte des remarques faites ci-dessus on peut écrire

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{\lambda}{2} \delta_{ij} \delta_{ii} + \frac{\eta}{2} (\delta_{ik} \delta_{ji} + \delta_{il} \delta_{jk}) j_{kr} \\ &= \frac{\lambda}{2} \delta_{ij} \dot{\mu}_k + \eta \dot{\partial}_j \end{aligned} \quad (3.27)$$

CHAPITRE 3. MODÉLISATION DE L'ÉQUATION DE (N-S) STATIONNAIRE

3.1. LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

---

On note que  $\dot{\lambda}_k = 2\nabla \cdot \mathbf{v}$ , de sorte que pour un fluide incompressible

$$T = \eta\dot{\gamma}, \quad (3.28)$$

où la constante  $\eta$  maintenant désigne la viscosité du fluide.

On note aussi que pour un fluide incompressible la pression s'exprime par la valeur moyenne des contraintes normales :

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \quad (3.29)$$

Considérons ensuite le tenseur  $\dot{\gamma}$  pour un écoulement bidimensionnel. Selon la figure il apparaît que, pendant l'intervalle de temps  $\delta t$ , l'élongation du côté  $AB$  de la particule dans la direction  $e_1$  est Égale à

$$(v_1(x_1 + \delta x_1) - v_1(x_1)) \delta t \approx \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta x_1 \delta t. \quad (3.30)$$

Par conséquent, le taux d'élongation dans la direction  $e_1$  devient  $\partial v_1/\partial x_1$ . De la même manière on voit que  $\partial v_2/\partial x_2$  représente le taux d'élongation du côté  $AC$  dans la direction  $e_2$ . Ces termes correspondent aux éléments diagonaux du tenseur  $\dot{\gamma}$  - En ce qui concerne les termes non diagonaux, on voit d'après la figure que, pendant l'intervalle de temps  $\delta t$ , les deux côtés de la particule centrés au point  $A$  ont accompli une rotation  $\delta\alpha$  et  $\delta\beta$  dans le même sens. Ces rotations correspondent donc à une déformation par cisaillement de la particule. Cependant, les angles  $\delta\alpha$  et  $\delta\beta$  sont exprimés par

$$\begin{aligned} \delta\alpha &\approx \tan \delta\alpha = \frac{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta x_1 \delta t + \dots}{\delta x_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta x_1 \delta t + \dots} \approx \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta t \\ \delta\beta &\approx -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \delta t \end{aligned} \quad (3.31)$$

Il s'en suit que le taux de déformation par cisaillement s'exprime dans le plan  $x_1x_2$  par

$$(\delta\alpha - \delta\beta)(\delta t)^{-1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (3.32)$$

La somme des deux termes diagonaux a aussi une signification physique. Puisque  $\partial v_1/\partial x_1$  représente le taux d'élongation dans la direction  $e_1$ , la longueur de la particule dans cette même direction devient, après un intervalle de temps  $\delta t$ ,  $\delta x_1(1 + \partial v_1/\partial x_1 \delta t + \dots)$  (projection de la distance  $AB$  sur l'axe  $x_1$ ). Par conséquent, la superficie de la particule après  $\delta t$  est égal à

$$\begin{aligned} &\delta x_1 (1 + \partial v_1/\partial x_1 \delta t + \dots) \delta x_2 (1 + \partial v_2/\partial x_2 \delta t + \dots) \\ &= \delta x_1 \delta x_2 (1 + \nabla \cdot \mathbf{v} \delta t + O(\delta t)^2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Le taux de changement de la superficie de la particule est traduite donc par la divergence du vecteur vitesse  $\mathbf{v}$ .

3.1. LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

3.1.4.1 Les équations de Navier-Stokes

D'après (3,22) les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma$  sont alors données par

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\hat{\gamma}_{ij}. \quad (3.34)$$

Le stage final pour la dérivation de l'équation de mouvement pour un fluide newtonien est d'injecter (3,34) dans l'équation de mouvement pour obtenir

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_i}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \rho g_i \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i \end{aligned} \quad (3.35)$$

car

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot v) = 0.$$

On a donc sous forme vectorielle les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible :

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\nabla p + \eta \nabla^2 v + \rho g \\ \nabla \cdot v &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.1.5 Diffusion du rotationnel de la vitesse dans un écoulement visqueux

L'équation de la quantité de mouvement d'un fluide visqueux peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \omega \times v = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) + v \nabla^2 v + g. \quad (3.37)$$

où nous avons utilisé l'identité de Acheson. En calculant le produit vectoriel entre  $\nabla$  et (3,37) on obtient pour un fluide incompressible

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times v) &= v \nabla \times \nabla^2 v \\ \Rightarrow \frac{D\omega}{Dt} - (\omega \cdot \nabla)v &= v \nabla \times \nabla^2 v. \end{aligned} \quad (3.38)$$

En utilisant l'identité de Acheson deux fois on voit que

$$\nabla \times \nabla^2 v = -\nabla \times \nabla \times (\nabla \times v) = -\nabla \times \nabla \times \omega = \nabla^2 \omega. \quad (3.39)$$

3.1. LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

---

Donc, pour un fluide incompressible

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla v + v \nabla^2 \omega. \quad (3.40)$$

L'effet de la viscosité est représenté par le deuxième terme du membre de droite, qui exprime la diffusion de  $\omega$  dans l'écoulement.

**3.1.5.1 L'écoulement dû au déplacement impulsif d'une plaque plane.**

On suppose qu'un fluide visqueux occupe la région  $0 < y < \infty$  et qu'au temps  $t = 0$  la frontière rigide  $y = 0$  est soudainement mise en mouvement dans la direction  $x$  avec une vitesse constante  $U$ . On suppose que le fluide s'écoule sous l'influence du déplacement de la frontière seule (et donc qu'il n'y a pas de gradients de pression externes imposés). On suppose que les pressions en  $x = \pm\infty$  sont égales et que  $\partial p / \partial x$  est constante, ces hypothèses voulant dire que  $\partial p / \partial x = 0$ . Il s'en suit que la vitesse  $u(y, t)$  satisfait équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.41)$$

la condition initiale

$$u(y, 0) = 0, \quad y > 0, \quad (3.42)$$

et les conditions limites

$$u(0, t) = U, u(\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.43)$$

On essaiera de trouver une solution "auto-similaire" en cherchant  $u$  en fonction d'une seule variable  $\eta$  :

$$u = f(\eta) \text{ où } \eta = \frac{y}{g(t)}, \quad (3.44)$$

impliquant que le profil de vitesse en temps  $t > 0$  sera une version étirée de celui en tout autre temps  $t' > 0$ . La fonction  $g(t)$  est à déterminer. En substituant  $u = f(\eta)$ , l'équation (3,41) devient

$$-yg'f' = vf''. \quad (3.45)$$

Donc

$$-yg'/v = f''/f'. \quad (3.46)$$

doit être une fonction de  $\eta$  uniquement et puisque  $y$  apparaît au membre de gauche de (3,46) on prend cette fonction égale à -7 . Ainsi

$$-\frac{yg'}{v} = -\frac{y}{g} \quad (3.47)$$

dont la solution la plus simple est  $g = \sqrt{2vt}$ . L'équation (3,41) se transforme maintenant en

$$f'' + \eta f' = 0 \quad (3.48)$$

3.1. LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

---

En intégrant,

$$f' = B \exp(-\eta^2/2) \quad (3.49)$$

d'où

$$f = A + B \int_0^\pi \exp(-s^2/2) ds, \quad (3.50)$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes d'intégration. Des conditions limites et initiales on a

$$f(0) = U, \quad f(\infty) = 0, \quad (3.51)$$

de sorte que

$$u = U \left[ 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\eta \exp(-s^2/2) ds \right] \quad (3.52)$$

Le rotationnel de la vitesse est  $\omega k$  où

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{\sqrt{\pi vt}} \exp\left(-\frac{y^2}{4vt}\right), \quad (3.53)$$

et lorsque  $y = 2\sqrt{vt}$ ,  $\omega$  est amortie à  $\exp(-1)$  de sa valeur à la plaque. La dissipation du rotationnel par les forces visqueuses lisse ce qui était, au début, une concentration infinie du rotationnel de la vitesse à la frontière. Autrement dit, le rotationnel se diffuse sur une distance de l'ordre  $(\nu t)^{1/2}$  en temps  $t$ .

### 3.1.6 Le nombre de Reynolds

Le champ d'écoulement d'un fluide est caractérisé par une vitesse  $U$ , une longueur caractéristique  $L$ , par exemple le diamètre d'un cylindre ou encore la longueur d'un profil, alors qu'un fluide newtonien est décrit par  $\eta$  et  $\rho$ . Introduisons dans les équations de Navier-Stokes (3,36) de nouvelles variables adimensionnelles indépendantes et dépendantes

$$x^* = x/L, t^* = t/(L/U), v^* = v/U, p^* = p/\rho U^2, \quad (3.54)$$

d'où, négligeant les forces massiques, il découle que

$$\frac{\rho U^2}{L} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{\rho U^2}{L} (v^* \cdot \nabla^*) v^* = -\frac{\rho U^2}{L} \nabla^* p^* + \frac{\eta U}{L^2} \nabla^{*2} v^*. \quad (3.55)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial \tau^*} + (v^* \cdot \nabla^*) v^* &= -\nabla^* p^* + \frac{\eta}{\rho U L} \nabla^{*2} v^* \\ \nabla^* \cdot v^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

La combinaison

$$\frac{\rho U L}{\eta} \equiv Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (3.57)$$



3.1. LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

---

représente le nombre de Reynolds.

L'importance du nombre de Reynolds provient du développement conduisant à (255). L'ordre de grandeur du terme  $(v \cdot \nabla)v$  représentant l'accélération d'une particule liée à son inertie, devient  $U^2/L$ . De la même façon, l'ordre de grandeur du terme  $v\nabla^2v$ , représentant les effets visqueux sur la particule, devient  $vU/L^2$ . Le rapport entre les facteurs  $U^2/L$  et  $vU/L^2$  définit le nombre de Reynolds. Les caractéristiques des écoulements à nombre de Reynolds faible et à nombre de Reynolds élevé sont très différentes.

Il faut mentionner aussi que le comportement d'un fluide d'une petite viscosité (nombre de Reynolds élevé) peut être complètement différent de celui d'un fluide idéal (nombre de Reynolds infini) à cause de la séparation de la couche limite.

## CHAPITRE 4

---

# Résolution de l'équation de Navier-Stokes stationnaire

---

---

---

# CHAPITRE 4

---

## RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRE

### 4.1 Équations de Navier-Stokes (cas stationnaire)

#### 4.1.1 Le problème homogène

Le problème stationnaire précédent consiste à chercher  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$  et  $p$  vérifiant

$$\begin{cases} -v\Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u & = f - \nabla p \text{ dans } \Omega, & (4.1) \\ \operatorname{div} u & = 0, & (4.2) \\ u & = 0 \text{ sur } \Gamma. & (4.3) \end{cases}$$

On peut formuler (de façon "faible ") le problème précédent sous la forme du

Problème (4, 1). Soit  $f$  donné dans  $V'$ . Trouver  $u \in V$  défini en

$$V_s = \text{adhérence de } \gamma \text{ dans } (H^s(\Omega))^n, \quad \|u\|_s = ((u, u))_s^{1/2}.$$

et

$$V_1 = V_1 \|u\|_1 = \|u\|.$$

solution de

$$va(u, v) + b(u, u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \cap (L''(\Omega))^n \quad (4.1)$$

CHAPITRE 4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRE  
 4.1. ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES (CAS STATIONNAIRE)

---

où les notations sont définies en

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx, \quad u, v \in V,$$

$$b(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i dx$$

le problème a un sens d'après le Lemme suivant :

**Lemme 4.1.** *La forme trilinéaire  $u, v, w \rightarrow b(u, v, w)$  est continue sur  $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$ .*

On va démontrer le

**Théorème 4.1.** *Pour tout  $f$  donné dans  $V'$ , il existe  $u$  dans  $V$  solution de (4, 4).*

**Démonstration :**

- On introduit l'espace

$$W = \left\{ v \mid v \in V, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^{n/2}(\Omega) \right\}, \quad (4.2)$$

i. e.  $\forall v \in V$  si  $n \leq 4$ .

que l'on munit de la norme

$$\|v\|_V + \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^{n/2}(\Omega)}.$$

On observe que :

- (i)  $W = V$  si  $n \leq 4$ ;
- (ii)  $v \in W \Rightarrow v \in (L^n(\Omega))^n$  d'après le Théorème de Sobolev.

On choisit ensuite une «base»  $w_1, \dots, w_m, \dots$  de  $W$  et on considère le problème approché suivant : on cherche  $u_m \in [w_1, \dots, w_m]$ , vérifiant

$$va(u_m, w_j) + b(u_m, u_m, w_j) = (f, w_j), \quad 1 \leq j \leq m. \quad (4.3)$$

On note que

$$va(u_m, u_m) + b(u_m, u_m, u_m) = va(u_m, u_m) = v \|u_m\|^2, \quad (4.4)$$

de sorte que l'on peut appliquer le Lemme suivant :

CHAPITRE 4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRE  
4.1. ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES (CAS STATIONNAIRE)

---

**Lemme 4.2.** Soit  $\xi \rightarrow P(\xi)$  une application continue de  $\mathbb{R}^m$  dans lui-même. telle que, pour un  $\rho > 0$  convenable, on ait :

$$(P(\xi), \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \text{ tel que } |\xi| = \rho,$$

où si  $\xi = \{\xi_i\}, \eta = \{\eta_i\} \in \mathbb{R}^m$  :

$$(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \xi_i \eta_i, |\xi| = (\xi, \xi)^{1/2}.$$

Alors il existe  $\xi, |\xi| \leq \rho$ , tel que  $P(\xi) = 0$ .

Donc il existe  $u_m$  solution de (4, 6) et grâce à (4, 7) on en déduit que

$$v \|u_m\|^2 \leq \|f\|_{v^-} \|u_m\|,$$

donc

$$\|u_m\| \leq \frac{1}{v} \|f\|_{v^-}. \quad (4.5)$$

- On peut alors extraire une suite  $u_\mu$  telle que

$$u_\mu \rightharpoonup u \text{ dans } V \quad (4.6)$$

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } H \text{ p. p.} \quad (4.7)$$

Par ailleurs les  $u_{\mu_i} u_{\mu_j}$  demeurent dans un borné de  $L^{q/2}(\Omega)$  ( $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ , ou  $q$  fini quelconque si  $n = 2$ ) et on peut donc supposer que

$$u_{\mu_i} u_{\mu_j} \rightharpoonup \chi_{ij} \text{ dans } L^{q/2}(\Omega) \forall i, j. \quad (4.8)$$

Utilisant le Lemme suivant :

**Lemme 4.3.** Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_i$ ,  $g_\mu$  et  $g$  des fonctions de  $L^q(\mathcal{O})$ ,  $1 < q < \infty$ , telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C, \quad g_\mu \rightarrow g \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O}.$$

Alors  $g_\mu \rightarrow g$  dans  $L^q$  faible. (On appliquera ce Lemme avec

$$\mathcal{O} = Q, \quad g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu, \quad q = \frac{\rho + 2}{\rho + 1} = p';$$

i.e.  $\int_0^T (u_\mu(t), g(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u(t), g(t)) dt \quad \forall g \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)).$   
D'après

$$u_\mu \rightharpoonup^* u \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^P(\Omega))$$

CHAPITRE 4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRE  
 4.1. ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES (CAS STATIONNAIRE)

$u'_\alpha \rightarrow u'$  dans  $\mathcal{D}'(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^P(\Omega))$ , donc la limite "faible\*" de  $u'_\mu$  est nécessairement  $u'$

d'après

$$\begin{aligned} u_\mu &\rightarrow u \text{ dans } L^2(Q) \\ g_\mu &\rightharpoonup |u|^p u = g \text{ p.p. et } g_\mu \rightarrow w \text{ dans } L^q(\mathcal{O}) \\ |u_\mu|' u_\mu &\rightharpoonup^* w \text{ dans } L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega)) \end{aligned}$$

d'où

$$w = g = |u|^p u \text{ d'après le Lemme.}$$

on en déduit que

$$\chi_{ij} = u_i u_j \tag{4.9}$$

Prenons alors  $j$  fixé,  $\mu > j$  et montrons que

$$b(u_\mu, u_j, w_j) \rightarrow b(u, u, w_j). \tag{4.10}$$

En effet,

$$\begin{aligned} b(u_\mu, u_j, w_j) &= -b(u_\mu, w_j, u_\mu) \\ &= - \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} u_{\mu i} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} u_{\mu k} \, dx \end{aligned}$$

$u_{\mu i} u_{\mu k} \rightharpoonup u_i u_j$  dans  $L^{q/2}(\Omega)$  d'après (4, 11), (4, 12) et  $\frac{\partial w_j}{\partial x_k} \in L^{n/2}(\Omega)$ ,  
 d'où le résultat puisque  $\frac{1}{(q/2)} + \frac{1}{(n/2)} = 1$ .

Donc on a (4, 13) et par conséquent

$$va(u, w_j) + b(u, u, w_j) = (f, w_j)$$

et cela  $\forall j$ , donc par passage a la limite on a (4, 4)  $\forall v \in W$ , puis  $\forall v \in V \cap (L^n(\Omega))$ .

**Remarque 4.1.** *Le cas "  $\Omega$  non borné"*

*Le Problème analogue à (4, 1) pour  $\Omega$  non borné nécessite quelques modifications dans le choix des espaces.*

*On introduit*

$$\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega) = \text{complété de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ pour } \left( \int_{\Omega} |\text{grad } \varphi|^2 \, dx \right)^{1/2}; \tag{4.11}$$

CHAPITRE 4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRE  
4.1. ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES (CAS STATIONNAIRE)

$\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$  s'identifie à un sous-espace de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si  $n \geq 3$  et si  $n = 2$  lorsque  $\mathfrak{C}\Omega$  est de capacité  $> 0$ .

Supposons  $n \geq 3$  pour un peu simplifier. Alors

$$\hat{\mathcal{D}}'(\Omega) = \left\{ v : v \in L'(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right\}. \quad (4.12)$$

On introduit ensuite

$$\hat{V} = \left\{ v \mid v \in \left( \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega) \right)^n, \operatorname{div} v = 0 \right\} \quad (4.13)$$

$\hat{V}$  coïncide avec l'adhérence de  $V$  dans l'espace des  $v \in (L^q(\Omega))^n$  tels que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} \in (L^2(\Omega))^n.$$

On a alors le

**Thoérème 4.2.** Pour  $f \in (\hat{V})'$ , il existe  $u \in \hat{V}$  vérifiant  
(4,4 bis)

$$va(u, v) + b(u, u; v) = (f, v) \quad \forall v \in \hat{V} \cap (L^n(\Omega))^n$$

.

**Démonstration :** On opère par la méthode "standard" ; on considère

$$\Omega_R = \Omega \cap \{x \mid |x| < R\}.$$

On résout (4,4) dans  $\Omega_R$  ; il existe donc (avec des notations évidentes)  $u_R \in V(\Omega_R)$  tel que

$$\begin{cases} va_{\Omega_R}(u_R, v) + b_{\Omega_R}(u_R, u_R, v) = (f, v)_{\Omega_R} \\ \forall v \in V(\Omega_R) \cap (L^n(\Omega_R))^n. \end{cases} \quad (4.14)$$

En outre on peut supposer que

$$\|u_R\|_{(\Omega_R)} \leq \text{constante}. \quad (4.15)$$

On introduit

$\tilde{u}_R =$  prolongement de  $u_R$  à  $\Omega$  par 0 hors de  $\Omega_R$  ; d'après (4,18)  $\tilde{u}_R$  demeure dans un borné de  $\hat{V}$ .

Cette fois l'injection de  $\hat{V}$  dans  $H$  n'est pas compacte, mais on peut extraire une suite telle que

$$(\tilde{u}_R)_i \rightarrow u_i \text{ dans } L^2_{\text{local}},$$

i.e.  $(\tilde{u}_R)_i \rightarrow u_i$  dans  $L^2(0)$ ,  $\forall \theta \subset \Omega$ , 0 borné.

On peut alors passer à la limite ; on prend d'abord  $v \in V$  ; on déduit ( (4,4) bis)  $\forall v \in V$  puis par densité,  $\forall v \in \hat{V} \cap (L^n(\Omega))^n$ .

### 4.1.2 Le problème non homogène

On se donne un vecteur  $\psi$  ayant les propriétés suivantes ( $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ ) :

$$\psi_i \in H^2(\Omega), \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_i \in L^n(\Omega), \quad \psi_i \in L^\infty(\Omega) \quad (4.16)$$

(Noter que si  $n \leq 3$ , la première condition (4, 19) entraîne les deux autres.) On introduit ensuite

$$F = \text{rot } \psi \quad (4.17)$$

Il résulte de (4, 19) que

$$F \in (L^n(\Omega))^n \cap (H^1(\Omega))^n \quad (4.18)$$

Ici "rot" est en fait un système différentiel homogène du premier ordre à coefficients constants tel que  $\text{div}(\text{rot } \psi) = 0$ .

On cherche un vecteur  $U = \{U_1, \dots, U_n\}$  tel que

$$\begin{cases} -v\Delta U + \sum_{i=1}^n U_i D_i U = f - \nabla p \text{ dans } \Omega, & (4.19) \\ \text{div } U = 0, & (4.20) \\ U - F \in (H_0^1(\Omega))^n & (4.21). \end{cases}$$

**Remarque 4.2.** La condition (4, 24) signifie que

$$U_i = F_i \text{ sur } \Gamma, i = 1, \dots, n.$$

Les conditions aux limites sont dites «non homogènes».

On va montrer le

**Thoérème 4.3.** On suppose  $f = \{f_1, \dots, f_n\}$  donné avec  $f_i \in H^{-1}(\Omega) \forall i$  et  $F$  donné par (4, 20) avec (4, 19). Il existe alors un vecteur  $U \in (H^1(\Omega))^n$  et une distribution  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  vérifiant (4, 22), (4, 23), (4, 24).

**Démonstration :**

- Soit  $G$  un vecteur ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} G \in (L^2(\Omega))^n \cap (L^n(\Omega))^n, \quad \text{div } G = 0, \\ G = F \text{ sur } I. \end{cases} \quad (4.19)$$

On pose

$$u = U - G \quad (4.20)$$

**Remarque 4.3.** On peut prendre, a priori,  $G = F$  ; on va voir qu'en fait il est essentiel de ne pas prendre  $G = F$  (à la différence du cas linéaire) : toute la difficulté du problème va consister à choisir  $G$ .



CHAPITRE 4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRE  
4.1. ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES (CAS STATIONNAIRE)

---

Donc  $U = u + G$  et portant dans (4, 22) on trouve :

$$-v\Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u + \sum_{i=1}^n u_i D_i G + \sum_{i=1}^n G_i D_i u = \tilde{f} - \nabla p, \quad (4.21)$$

où

$$\tilde{f} = f + v\Delta G - \sum_{i=1}^n G_i D_i G; \quad (4.22)$$

on note que

$$\tilde{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n. \quad (4.23)$$

Par ailleurs :

$$\operatorname{div} u = 0$$

et (4, 24) équivaut à  $u \in V$ .

On est donc ramené à trouver  $u \in V$  tel que

$$\begin{cases} va(u, v) + b(u, u, v) + b(u, G, v) + b(G, u, v) = (\tilde{f}, v) \\ \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n \end{cases} \quad (4.24)$$

- La méthode de démonstration du Théorème 4.1 montre qu'on aura existence de  $u$  solution de (4, 30) si l'on peut choisir  $G$  de sorte que

$$\begin{cases} va(v, v) + b(v, v, v) + b(v, G, v) + b(G, v, v) = X \geq \alpha \|v\|^2, \alpha > 0 \\ \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n \end{cases}$$

Or

$$X = va(v, v) + b(v, G, v) = v\|v\|^2 + b(v, G, v)$$

et donc le Théorème résultera du

**Lemme 4.4.** *Quel que soit  $\beta > 0$ , on peut choisir  $G$  vérifiant (4, 25) de façon que*

$$|b(v, G, v)| \leq \beta \|v\|^2. \quad (4.25)$$

- Avant de démontrer le Lemme vérifions deux autres Lemmes.

**Lemme 4.5.** *On pose  $\rho(x) =$  distance de  $x$  à  $\Gamma$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  (assez petit), il existe une fonction  $\theta_\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega})$  telle que*

$$\theta_\varepsilon = 1 \text{ dans un voisinage (variable avec } \varepsilon \text{) de } \Gamma, \quad (4.26)$$

$$\theta_\varepsilon(x) = 0 \text{ si } \rho(x) \geq \delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon), \quad (4.27)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_k} \theta_\varepsilon(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{\rho(x)} \quad \text{si } \rho(x) \leq \delta(\varepsilon), \quad \forall k. \quad (4.28)$$

CHAPITRE 4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRE  
4.1. ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES (CAS STATIONNAIRE)

---

**Démonstration :**

On définit d'abord la fonction  $\lambda \rightarrow \xi_x(\lambda)$  pour  $\lambda \geq 0$  par

$$\xi_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda < \delta(\varepsilon)^2, \\ \varepsilon \log\left(\frac{\delta(\varepsilon)}{\lambda}\right) & \text{pour } \delta(\varepsilon)^2 < \lambda < \delta(\varepsilon), \\ 0 & \text{pour } \lambda > \delta(\varepsilon), \end{cases} \quad (4.29)$$

puis l'on définit  $\chi_\varepsilon$  par

$$\chi_\varepsilon(x) = \xi_\varepsilon(\rho(x)). \quad (4.30)$$

Comme  $\Gamma$  est régulière,  $\chi_\varepsilon$  vérifie (4, 32), (4, 33), (4, 34) et on obtient  $\theta_\varepsilon$  par régularisation de  $\chi_\varepsilon$ .

**Lemme 4.6.** *Il existe une constante  $c_1$  telle que*

$$\left\| \frac{1}{\rho} v \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.31)$$

**Démonstration :** Par usage d'une partition de l'unité et cartes locales, tout résulte finalement de l'inégalité :

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \varphi(x) \right|^2 dx \leq 2 \int_0^\infty \left| \varphi'(x) \right|^2 dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(]0, \infty[) \quad (4.32)$$

ce qui est immédiat ( $\frac{1}{x}\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi'(y) dy$ ). puis usage de l'inégalité de Hardy).

**Démonstration :**

- Démonstration du Lemme 4.4 .

On introduit, avec les notations du Lemme 4.5 :

$$G = \text{rot}(\theta_\varepsilon \psi); \quad (4.33)$$

on a bien (4, 25) et on va montrer qu'on peut choisir  $\varepsilon$  de façon que (4, 31) ait lieu. Des propriétés de  $\theta_\varepsilon$  il résulte que

$$|G_j(x)| \leq c_2 \left( \frac{\varepsilon}{\rho(x)} |\psi(x)| + |D\psi(x)| \right) \quad \forall j, \text{ si } \rho(x) \leq \delta(\varepsilon), \quad (4.34)$$

ou

$$|D\psi(x)| = \left( \sum_{i,j=1}^n |D_i \psi_j(x)|^2 \right)^{1/2},$$

CHAPITRE 4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRE  
4.1. ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES (CAS STATIONNAIRE)

---

et  $G_i = 0$  si  $\rho(x) > \delta(\varepsilon)$ .

Comme on a supposé que  $\psi_i \in L^\infty(\Omega)$ , on déduit de (4, 40) que

$$|G_j(x)| \leq c_3 \left( \frac{\varepsilon}{\rho(x)} + |D\psi(x)| \right) \quad \forall j, \rho(x) \leq \delta(\varepsilon). \quad (4.35)$$

On a par conséquent

$$\|v_i G_j\|_{L^2(\Omega)} \leq c_3 \left( \varepsilon \left\| \frac{v_i}{\rho} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) + \left( \int_{\rho \leq \delta(\varepsilon)} v_i^2 |D\psi|^2 dx \right)^{1/n}. \quad (4.36)$$

Introduisons

$$\varphi(\varepsilon) = \left( \int_{\rho \leq \delta(\varepsilon)} |D\psi|^n dx \right)^{1/n} \quad (4.37)$$

( $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$  grâce à l'hypothèse  $\ll \partial/\partial x_j \psi_i \in L^n(\Omega) \gg$ );

on déduit de (4, 42) et du Lemme 4.6 :

$$\|v_i G_j\|_{L^2(\Omega)} \leq c_4 \varepsilon \|v\| + c_3 \|v_i\|_{L^v(\Omega)} \varphi(\varepsilon), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},$$

et donc

$$\|v_i G_j\|_{L^2(\rho)} \leq c_5 (\varepsilon + \varphi(\varepsilon)) \|v\|. \quad (4.38)$$

On va en déduire aisément (4, 31); en effet

$$\begin{aligned} |b(v, G, v)| &\leq c_7 \|v\| \sum_{i,j=1}^n \|v_i G_j\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_6 \|v\|^2 (\varepsilon + \varphi(\varepsilon)). \quad (\text{par (4, 44)}) \end{aligned}$$

**Remarque 4.4.** *On résoudra par des considérations analogues les problèmes non homogènes dans le cas des équations d'évolution .*

**Remarque 4.5.** *Si  $v \in (H^1(\Omega))^H$  avec  $\operatorname{div} v = 0$ , alors,  $v_j|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$  et*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v \, dx = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} v_j \cos n_j \, d\Gamma = 0.$$

*Réciproquement, si  $g_1, \dots, g_n$  sont donnés dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ , avec*

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} g_j \cos n_j \, d\Gamma = 0$$

*alors il existe  $v \in (H^1(\Omega))^n$ ,  $\operatorname{div} v = 0$ ,  $v_j = g_j$  sur  $\Gamma$ .*

CHAPITRE 4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRE  
 4.1. ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES (CAS STATIONNAIRE)

---

**Remarque 4.6.** Si  $n \leq 3$ , on a l'unicité de la solution lorsque  $\|f\|_{V'}$  est «suffisamment petit» ; en effet soient  $u$  et  $u^*$  deux solutions ; si  $w = u - u^*$ , on a :

$$va(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0. \quad (4.39)$$

Sous la seule hypothèse "  $f \in V'$ ",  $u, u^*$  sont dans  $V$  sans propriété de régularité supplémentaire et donc aussi pour  $w$  ; il n'est alors loisible de faire  $v = w$  dans (4, 45) que si  $n \leq 3$  (puisque alors la forme tri-linéaire  $u, v, w \rightarrow b(u, v, w)$  est continue sur  $V$  ) ; faisant donc  $v = w$  dans (4, 45) on trouve

$$v\|w\|^2 = -b(w, u, w)$$

donc

$$v\|w\|^2 \leq c\|u\|\|w\|^2$$

et comme

$$v\|u\|^2 = (f, u) \leq \|f\|_{V'} \cdot \|u\|,$$

on a finalement

$$\left(v - \frac{c}{v}\|f\|_{V'}\right) \|w\|^2 \leq 0$$

et donc  $w = 0$  si

$$v^2 > c\|f\|_{V'}, \quad (4.40)$$

ce qu'on peut interpréter comme «  $\|f\|_{V'}$  assez petit » ou «  $v$  assez grand » !

---

## CONCLUSION

---

La méthode de compacité est un outil mathématique efficace pour démontrer l'existence de solutions aux équations de Navier-Stokes stationnaires en utilisant les espaces de Sobolev, en gérant les complications dues à leur nature non linéaire, notamment le théorème de Lax-Milgram et les Convergences. Elle repose sur des théories avancées des espaces fonctionnels pour assurer la convergence des solutions approximatives vers des solutions exactes. Cette méthode représente une avancée significative dans la compréhension des solutions en régime permanent. Cependant, des défis subsistent, notamment en ce qui concerne l'unicité et la régularité des solutions dans des conditions générales.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 46 :227–272, 1971.
- [2] Haim Brezis and Haim Brézis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, volume 2. Springer, 2011.
- [3] J. Deny et J. L. Lions [I], Les espaces du type de Beppo Levi. Ann. Inst. Fourier, 5 (1953-54), 305-370.
- [4] Jean Salençon, Mécanique des milieux continus-Tome 1-Concepts généraux-390 pages-ISBN 978-2-7302-1245-8.
- [5] J.L.Lions et E.Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1 et 2, Paris. Dunod. (1968).
- [6] G. N. Agale [II], Résolution d'équations opérationnelles dans les espaces de Banach. Doklady, 174 (1967). Soviet Mathematics, 8 (1967), 726-730.
- [7] L. Agostini et J. Bass [1], Les théories de la turbulence. Publ. Sc. et Tech. du Ministère de l'Air, 2e édition. Paris, 1960.
- [8] M. O. Deville, An Introduction to the Mechanics of Incompressible Fluids
- [9] M. S. Agranovich [1], Sur la théorie des conditions aux limites pour des systèmes symétrisables du premier ordre. Mat. Sbornik, 13 (115), (1967), 161-197.
- [10] M. S. Agranovich, I. M. Vishik [I], Problèmes elliptiques avec paramètre et problèmes paraboliques de type général. Uspechi Mat. Nauk, 19 (1964), 53-161.

- [11] S. Agmon [1], The  $L_p$  approach to the Dirichlet problem. I. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisu, (1959), 405 – 448.
- [12] S. Albertoni et C. Cercignani [1], Metodi Approssimati per la risoluzione dellequazione di Boltzmana. Aspette generali e loro applicazioni. Univ, di Milano, 1966.
- [13] H. Brézis pour l'analyse fonctionnelle et les résultats principaux sur les Sobolev : H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Masson, 1983

**ملخص:**

نهتم في هذا العمل بدراسة مسألة نافير ستوكس ثابت في  $\mathbb{R}^2$  بطريقة الضغط. تُستخدم مساحات سوبوليف كإطار وظيفي لوصف سلوك الوظائف عند اللانهاية. سوف نقدم النتائج المتعلقة بمشغلي التدرج والاختلاف.

**الكلمات المفتاحية:**

طريقة الاكتناز، مساحات سوبوليف، نافير ستوكس ثابت.

**Abstract :**

In this work, we are interested in the study of the Navier-Stokes stationary problem in  $\mathbb{R}^2$  by the compactness method. Sobolev spaces are used as a functional framework to describe the behavior of functions at infinity. We will present results concerning the gradient and divergence operators.

**Keywords:**

Compactness method, Sobolev spaces, Navier-Stokes stationary.

**Résumé :**

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude du problème de Navier-Stokes stationnaire dans  $\mathbb{R}^2$  par la méthode de compacité. Les espaces de Sobolev sont utilisés comme cadre fonctionnel pour décrire le comportement des fonctions à l'infini. Nous présenterons des résultats concernant les opérateurs gradient et divergence.

**Mots clés :**

Méthode de compacité, Les espaces de Sobolev, Navier-Stokes stationnaire .