UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE LA MATIÉRE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire du Projet de Fin d'tudes

en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Sous le theme :

Double transformation de Laplace pour résoudre des équation aux dérivées partielles fractionnaires

Presentation par :
Zerrouki Hibat Errahmane

Soutenu le 26 Juin 2024, devant le jury compose de :

Pr. Ziane Djelloul	**- Encadrant**
Pr. Bensayah Abdallah	**- Examinateur**
Pr. Tellab Ibrahim	**- Président**

Annee universitaire 2023-2024

إهداء

إلى جنتي في الدنيا, روح الروح أمي و أبي.

إلى حبيبات قلبي أخواتي: فاطمة الزهراء, اية أم ياسين, مريم البتول و جويرية.

إلى عائلتي : جدتي, عمي, عمتي, أخوالي, خالتي و أزواجهم و أبنائهم.

إلى غالياتي: كلثوم, اية ادريسي ,أنفال, تقوى, حفصة, فادية, أمينة.

إلى أستاذي زياني جلول الذي صبر معي و أرشدني.

إلى **متنفسي**, مصلى الطالبات خديجة بنت خويلد, و رفيقات أسرة آل الإحسان, المجاهدين, الوسطاء و حبيبات المصطفى, من جعلوا أيامي في الإقامة كلها خير.

أهديكم نجاح هذا العمل ...

إلى **"وأعدوا"**, **"مقرأة آية"**, **"عالم المناظرة"**, **"حصيف"**, **"البناء المنهجي"**, و كل المشاريع الخادمة للأمة.

إلى أبطال طوفان الأقصى حتى الآن, إلى كل المرابطين في الثغور, إلى المجاهدين في سبيل الله في كل مكان.

لكم نفسي الفداء...

ملخص

في هذا العمل، نحن مهتمون بـ " التحويل المزدوج لـلابلاس " و تطبيقاته لحل المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة و غير المتجانسة من الرتب الكسرية α حيث $0 < \alpha \leq 1$ ، و المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتب الكسرية α حيث $1 < \alpha \leq 2$, كما قمنا بمقارنة حلول المعادلات التي تم الحصول عليها مع نتائج أعمال أخرى لإثبات فاعلية هذه الطريقة.

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à la méthode "double transformation de Laplace" et à ses applications pour résoudre des équations aux dérivées partielles homogènes et non-homogènes d'ordres fractionnaires α où $0 < \alpha \leq 1$, et des équations aux dérivées partielles d'ordres fractionnaires α où $1 < \alpha \leq 2$**.** Nous comparons également les solutions des équations obtenues avec des résultats d'autres travaux afin de prouver l'efficacité de cette méthode.

Abstract

In this work, we are interested in the "double transformation of Laplace" and its applications to solve homogeneous and non-homogeneous partial differential equations of fractional orders α where $0 < \alpha \leq 1$**,** and partial differential equations of fractional orders α where $1< \alpha \leq 2$ We also compare the solutions of the equations obtained with results from other works in order to prove the effectiveness of this method.

Notation

Γ	Fonction Gamma.
β	Fonction bêta
$E_{\alpha,s}$	Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
E_a	Fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre.
${}^{RL}D_a^{\alpha}$	Dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville
${}^{C}D_a^{\alpha}$	Dérivée fractionnaire de Caputo
I_a	Intégrales fractionnaire de Riemann- Liouville.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
$F(s) = L\{f(t); s\}$	Transformation de Laplace.
$F(p, s)\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x, t); p, s\}$	Double transformation de Laplace.
$L\{f(t) \star g(t); s\}$	Transformation de Laplace de la convolution.
$AC^n[a, b]$	AC est désigne des fonctions absolument continues.

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont plus importantes que d'autres, en raison de leurs multiples utilisations scientifiques, ou elles sont impliquées dans l'étude de certains phénoménes liés à la vie humaine et à l'univers, tels que les phénoménes d'ingénierie, les phénoménes mécaniques, les phénoménes chimiques et les phénoménes biologiques.

Selon l'importance de ce type d'équations vient l'importance de connaître leurs solutions et comment les atteindre. C'est pourquoi de nombreux chercheurs s'efforcent de découvrir des méthode qui faciliteraient la résolution de ce type d'équations, qu'elles soient d'ordre ordinaire ou fractionnaire.

Parmi les méthodes les plus connues et les plus utilisées dans ce domaine se trouve " la méthode transformation de Laplace" qui, malgré son apparence ancienne, est encore utilisée aujourd'hui, car elle transforme une équation différentielle en une équation algébrique facile à résoudre, et en utilisant sa transformation inverse, nous obtenons la solution souhaitée.

Cette transformation est une transformation intégrale (c'est-à-dire dffinie à l'aide d'une intégrale), attribuée au mathématicien francais Simon Laplace (1749-1827), elle porte donc son nom. En raison de l'apport précieux qu'il a apporté aux chercheurs dans le domaine des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles, il a acquis une grande renommée parmi les chercheurs du monde entier.

L'objectif principal de ce mémoire est avant tout de présenter une nouvelle méthode pour résoudre des équations aux dérivées partielles linéaire d'ordre fractionnaires, cette méthode est appelée double transformation de Laplace a . Elle est efficace pour résoudre ce type d'équations, car en quelques étapes on atteint la solution exacte, et c'est pourquoi elle est considérée comme une méthode rapide par rapport aux autres méthodes.

Ce mémoire se compose d'une introduction et trois chapitres. Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions de bases du calcul fractionnairre à savoir les définitions des fonctions Gamma, Bita et la fonction Mittag-Leffter, et l'intégrale et dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo.

Le deuxiéme chapitre est consacré à la présentation de la définition de la transformation de Laplace ordinaire, ainsi que des conditions díexistence et de quelques propriétés de base. Nous avons également présenté la définition et les propriétés de la double transformation de Laplac, ainsi que les formules fondamentales de la double transformation de Laplace pour les dérivées partielles ordinaires ainsi que pour les dérivées partielles d'ordre fractionnaire.

Dans le troisiéme chapitre, nous nous intéresserons à l'application de la méthode que nous avons présentée dans le deuxiéme chapitre à des exemples d'équations aux dérivées partielles homogènes et non-homogènes d'ordres fractionnaires , et nous l'appliquerons également à des équations aux dérivées partielles d'ordres fractionnaires .

Chapitre 1

Notion de base du calcul fractionnaire

1.1 Fonctions de base

Dans cette partie, nous allons exposer les fonctions les plus captivantes dans le domaine du calcul fractionnaire. Ces fonctions sont essentielles pour notre travail car elles jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

La première fonction que nous allons découvrir est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(.)$, cette fonction généralise le factoriel n !, et permet à n de prendre des valeurs réelles ou même complexes.

Définition 1.1 *[1] Pour tout* $(z \in \mathbb{C},\ \mathcal{R}(z) > 0)$. *On définit la fonction Gamma d'Euler* $\Gamma(.)$ *par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.1}$$

En particulier :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0. \tag{1.2}$$

Propriétés :
On va présenter quelques propriétés et résultats de cette fonction :

1. Γ est **dérivable** dans $]0, +\infty[$ et on a :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln t \times t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{1.3}$$

2. Γ est de classe C^{∞} dans $]0, +\infty[$ et on a :

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (lnt)^k \times t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{1.4}$$

3. La troisième propriété :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En effet,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^{z+1-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt.\end{aligned}$$

Par l'intégration par partie :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt &= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z),\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.5}$$

4. Pour tout $z \in \mathbb{N}^*$, et d'aprés la relation (1.5) on a :

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.6}$$

Preuve : D'aprés la formule (1.5), on obtient les formules suivantes :

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1\Gamma(1) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2.1\Gamma(1) = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)....2.1 = n!.$$

Remarque : D'aprés (1.1) on a : $\Gamma(1) = 1$.

5. La Cinquième propriété :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

par définition :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt. \tag{1.7}$$

On pose $t = u^2$ *et* $dt = 2udu$, alors la relation (1.7) devient :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u\, du$$
$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-u2} du.$$

L'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

d'où $\quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Tableau de quelques valeurs de la fonction Gamma :

Au tableau ci-dessous, nous allons exposer quelques valeurs de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ pour des nombres entiers et demi-entiers 2.

z	$\Gamma(z)$	z	$\Gamma(z)$
$\frac{-3}{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\pi}$
-1	1	1	1
$\frac{-1}{2}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
0	1	2	1
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$	3	2

1.1.2 Fonction Bêta

Une autre fonction qui est très utilisée dans le calcul fractionnaire, est la fonction Bêta (ou la fonction de Bessel de second espèce). En mathématiques, la fonction Bêta est une des deux intégrales d'Euler, et elle a été étudiée par Euler et Legendre et doit son nom à Jacques Binet. Elle est en relation avec la fonction Gamma.

Définition 1.2 *[1] La fonction Bêta est donnée par :*

pour tout p,q $\in \mathbb{C}$*, avec* $\Re(p) > 0$*, on a :*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt. \tag{1.8}$$

Propriétés :
Nous présenterons quelques propriétés de la fonction Bêta.
1. Les fonctions Bêta et Gamma sont liées par :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.9}$$

D'aprés la relation (1.9), on conclure que La fonction Béta est symétrique alors :

$$B(p,q) = B(q,p).$$

2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$.

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La troisième fonction que nous allons découvrir est la fonction Mittag-Leffler, le rôle de cette fonction est nécessaire pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Définition 1.3 *[1] La fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(.)$ est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \;\; (\mathcal{R}(\alpha) > 0\,;\; z \in \mathbb{C}). \tag{1.10}$$

La fonction Mittag-Leffler généralisée est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad (\mathcal{R}(\alpha) > 0\,;\; \beta, z \in \mathbb{C}). \tag{1.11}$$

Cas particulier :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \tag{1.12}$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1). \tag{1.13}$$

Propriétés :

On va présenter quelque propriétés de la fonction Mittag-Leffler.

1. Pour |z| < 1, la fonction Mittag-Leffler satisfait :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha\}} dt = \frac{1}{z-1}. \tag{1.14}$$

2. L'intégrale de la fonction Mettag-Leffler est donnée par :

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha). \tag{1.15}$$

3. La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction Mettag-Leffler est donnée par :

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(z^\alpha). \tag{1.16}$$

1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Les débuts de la dérivée fractionnaire sont attribués à Liouville. De manière indépendante, Riemann propose une approche qui a principalement été prouvée à Liouville. Ensuite, cette théorie est appelée théorie de Riemann-Liouville.

1.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'intégral fractionnaire d'une fonction f est une généralisation d'un concept élémentaire de n intégrations successives appliquées à une fonction f. La première généralisation est celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.4 *[1] Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux sur $(0, \infty)$ et intégrable sur tout sou-intervalle fini de $[0, \infty]$, pour $t > 0$ l'intégrale fractionnaire à gauche de RiemannLiouville d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ est définie par :*

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \tag{1.17}$$

Γ est la fonction Gamma d'Euler.

En particulier, si $a = 0$, on obtient :

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \tag{1.18}$$

Propriétés :

On va présenter quelque propriétés de l'intégrale fractionaire de Riemann-Liouville.

1. Si f est au moins de classe C^1 sur $[a, b]$, alors :

$$I_{a+}^{0} f(x) = f(x).$$

2. $I_{a_+}^{\alpha}$ est un opérateur linéaire :

$$I_{a+}^{\alpha}(\lambda g(t) + \mu g(t) = \lambda(I_{a+}^{\alpha} f)(t) + \mu(I_{a+}^{\alpha} g)(t).$$

3. Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$I_{a+}^{\alpha} \circ I_{a+}^{\beta} = I_{a+}^{\beta} \circ I_{a+}^{\alpha} = I_{a+}^{\alpha+\beta}.$$

Cette propriété est dite propriété de semi groupe.

4. L'intégrale fractionnaire de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ est :

$$I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\beta}. \tag{1.19}$$

Si on prend $a = 0$, on trouve :

$$I_{a+}^{\beta}(t)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}t^{\beta}. \tag{1.20}$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.5 *[2] Soit α un nombre réel positif et $n = [\alpha] + 1$, alors l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α d'une fonction f est définie par :*

$$^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = D^n[I_a^{n-\alpha} f(x)], \tag{1.21}$$

avec $D^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n$.

Remarque :
Pour $n = [\alpha] + 1;\ x > a$, la dérivée fractionnaire a droite est :

$$^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n [I_{a+}^{n-\alpha} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \tag{1.22}$$

Pour $n = [\alpha] + 1;\ x < b$, la dérivée fractionnaire a gauche est :

$$^{RL}D_{b-}^{\alpha} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n [I_{b-}^{n-\alpha} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_b^x \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}. \tag{1.23}$$

Propriétés :
On va présenter quelque prpriétés la dérivée fractionnaire des fonctions spéciales au sens de Riemann-Liouville :

1. Dérivée fractionaire de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$:

$$^{RL}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.24}$$

2. Dérivée fractionaire de la fonction constante :

$$^{RL}D_{a+}^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}. \tag{1.25}$$

Preuve :
Prenons $f(t) = C,\ C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_{a+}^{\alpha} C &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} C ds, \\
&= \frac{-C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{((t-s)^{1-\alpha})'}{1-\alpha} ds, \\
&= \frac{-C}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} \frac{d}{dt} [-(t)^{1-\alpha}]_0^t, \\
&= \frac{-C}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} [-(t)^{1-\alpha}]_0^t \\
&= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Remarque :
La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville on générale n'est pas nulle.

1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

1.3.1 Intoduction

Les définitions des dérivées fractionnaires permettent de modéliser mathématiquement des problèmes de sciences physiques et d'ingénierie, ce qui permet d'utiliser des conditions initiales qui peuvent être interprétées physiquement, telles que $f(a), f'(a), ...$, même si des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement. Ses problèmes ont été résolus par la définition de M. Caputo (années soixante), qu'il a adaptée avec Mainardi dans la structure de la théorie de la viscoélasticité. Sa dérivée fractionnaire est plus appropriée que celle de Riemann-Liouville.

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans cette partie, nous allons exposer la didinition et quelque propriétés du dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Définition 1.6 *:[1] Sur l'intervalle $[a, b]$, la dérivée fractionnaire de Caputo $({}^{C}D_{a+}^{\alpha})(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathcal{C}(\mathcal{R}(\alpha) \geq 0)$,est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :*

$$({}^{C}D_{a+}^{\alpha} f)(t) := \left({}^{RL}D_{b+}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right)(t), \tag{1.26}$$

où

$$n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1 \textit{ pour } \alpha \notin N, \textit{ et } n = \alpha \textit{ pour } \alpha \in N. \tag{1.27}$$

En particulier,la formule (1.26) *prend la forme :*

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}(f)(t) = D^{\alpha}_{a+}[f(t) - f(a)], \tag{1.28}$$

pour $0 < \mathcal{R}(\alpha) \leq 1$.

Théorème : **[1]** Si $f \in AC^n[a,b]$, la dérivée fractionnaire de Caputo existe presque partout sur $[a,b]$. Soient $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$, et n donné par (1.27), et si $\alpha \notin N$, $(^{C}D^{\alpha}_{a_+}f)(t)$ est définie par :

$$(^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a+}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds = (I^{n-\alpha}_{a+} D^n f)(t), \tag{1.29}$$

avec

$$D = \frac{d}{dt} \textit{ et } n = [\alpha] + 1, \; AC^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathcal{C} \textit{ et } (D^{n-1}f)(t) \in AC[a,b]\}.$$

Indication : Indication AC est désigne des fonctions absolument continues.

Propriétés :

Dans les propriétés suivantes, on va présenter les relations entre l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo.

1. La différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$^{C}D^{\alpha}_{a_+}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda(^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(t) + \mu(^{C}D^{\alpha}_{a+}g)(t). \tag{1.30}$$

2. Soient $\mathcal{R}(\alpha) > 0$, et n donné par (1.27), si $f \in AC^n[a,b] ou f \in C^n[a,b]$, alors :

$$(I^{\alpha}_{a+} {}^{C}D^{\alpha}_{a_+}f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \tag{1.31}$$

et

$$(I^{\alpha}_{b-} {}^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k. \tag{1.32}$$

En particulier : si $\mathcal{R}(\alpha) > 0$,et $f(t) \in AC[a,b], ou f(t) \in C[a,b]$, on trouve :

$$(I^{\alpha}_{a+} {}^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(t) = f(t) - f(a), et (I^{\alpha}_{b-} {}^{C}D^{\alpha}_{b-}f)(t) = f(t) - f(b). \tag{1.33}$$

3. Soit $\mathcal{R}(\alpha) > 0$, et n donné par(1.30). Si $f \in [a,b]$, alors :

$$(I_{a+}^{\alpha}\, {}^{C}D_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(t). \tag{1.34}$$

4. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est égale à zéro, c'est :

$$({}^{C}D_{a+}^{\alpha} C)(t) = 0, \quad (\alpha > 0). \tag{1.35}$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$

Soit α non entier et $0 < n-1 < \alpha < n \; et \; \beta > n$, alors on a :

$$ {}^{C}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \Big((s-a)^{\beta} \Big)^{(n)} ds, \tag{1.36}$$

et on a :

$$\Big((t-a)^{\beta} \Big)^{(n)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta} - n, \tag{1.37}$$

donc, on trouve :

$$ {}^{C}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{\beta-n} ds. \tag{1.38}$$

En utilise le changement de variable $s = a + \tau(t-a)$, on aura :

$$Pour \; s = a \Longrightarrow \tau = 0,$$

$$Pour \; s = t \Longrightarrow \tau = 1,$$

d'où

$$ {}^{C}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_a^t (1-\tau)^{(n-\alpha-1} (\tau)^{\beta-n} d\tau,$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)(\Gamma(n-\alpha, \beta-n-1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n-1)} (t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)(\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n-1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n-1)\Gamma(\beta-\alpha-1)} (t-a)^{\beta-\alpha},$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha},$$

alors :

$$
{}^{C}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.39}
$$

Chapitre 2

Double transformation de Laplace

Dans ce chapitre, nous présenterons la transformation de Laplace ordinaire, puis nous concentrerons sur double transformation de Laplace, et au cours de cela nous présenterons les définitions et propriétés importantes de cette transformation. Aussi, la transformation de Laplace normale et double pour les dérivées fractionnaires.

2.1 Transformation de Laplace

2.1.1 Définitions et condition d'existence

Définition 2.1 *: [2] La transformation de Laplace d'une fonction continue f de la variable réelle $t \in \mathbb{R}_+$ est définie par :*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s \in C. \tag{2.1}$$

Où le symbole $\mathcal{L}\{f(t)\}$ signifie la transformation de Laplace de f(t). La transformation de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale (2.1) est convergente, pour cela l'originale doit être d'ordre exponentiel, c'est-à-dire il exist $M > 0$ et $a > 0$ tel que :

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad pour\ t > T, \tag{2.2}$$

dans ce cas la transformation de Laplace existe pour $s > a$.

Définition 2.2 *: [2] l'originale f(t) est appelée la transformation de Laplace inverse :*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}(F(t))\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)ds, \quad c = \mathcal{R}(s) > C_0. \tag{2.3}$$

Exemple :

Soit la fonction constante $f(t) = c \; si \; t \geq 0 \; et \; f(t) = 0 \; si \; t < 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(s)\} = \int_0^{+\infty} 2e^{-st}dt = c\int_0^{+\infty} e^{-st}dt, \\
&= c \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-st}dt, \\
&= -\frac{c}{s} \lim_{x\to\infty} [e^{-st}]_0^x, \\
&= -\frac{c}{s} \lim_{x\to\infty} [e^{-xt} - 1] \quad (e^{xt} \longrightarrow 0 \; lorsque \; x \longrightarrow \infty), \\
&= \frac{c}{s}.
\end{aligned}$$

2.1.2 Propriétés

Dans cette partie, on va présenter quelques propriétés de cette transformation.

1. **Linéarité** :
Soit $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformations de Laplace F(s) et G(s), et soit λ et β deux réels, alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\lambda f(x) + \beta g(x)\} &= \int_0^{+\infty} (\lambda f(x) + \beta g(x))e^{-sx}dx, \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx + \beta \int_0^{+\infty} g(x)e^{-sx}dx, \\
&= \lambda\mathcal{L}\{f(s)\} + \beta\mathcal{L}\{g(s)\}, \\
&= \lambda F(s) + \beta G(s).
\end{aligned}$$

2. **Transformation d'une translation** :
Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$, alors :

$$\mathcal{L}\{f(t-c)\} = e^{-cs}F(s). \tag{2.4}$$

Preuve :
Posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x-c) & \text{si} \quad x > c \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
L\{g(t)\} &= \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{c} g(t)e^{-st}dt + \int_c^{+\infty} g(t)e^{-st}dt \\
&= \int_c^{+\infty} f(t-c)e^{-st}dt \\
&= e^{-sc}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx, \quad x = t-c \\
&= e^{-sc}F(s)
\end{aligned}
$$

3. **Transformation du produit de convolution** :

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, et $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, alors :

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s). \tag{2.5}$$

5. **Transformation de Laplace des dérivées** :
La transformation de Laplace de la dérivée d'ordre $n \in N^*$ de la fonction f est donnée par :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(s)\} = s^n\mathcal{L}\{f(s)\} - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1}f^{(n-k)}(0). \tag{2.6}$$

6. **Changement d'échelle** :
Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$, alors :

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{c}F(\frac{s}{c}), \quad c > 0. \tag{2.7}$$

Preuve :
En effet, on a

$$
\begin{aligned}
L\{f(ct)\} &= \int_0^{+\infty} f(ct)e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} f(x)e^{\frac{-s}{c}x}dx \\
&= \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)
\end{aligned}
$$

où $x = ct$, ce qui achève la démonstration.

2.2 Transformation de Laplace des dérivées fractionnaires

Dans cette partie nous donnons quelques outils de bases, et des formules fondamentales de la transformation de Laplace pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.[**2**]

2.2.1 Transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$ comme suit **[2]** :

$$ {}^{RL}D_{0+}^{\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t). \tag{2.8} $$

La transformation de Laplace de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$ G(s) = \mathcal{L}\{(g(t))(s)\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}. \tag{2.9} $$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformation de Laplace de convolution, on obtient la transformation de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

$$ \mathcal{L}\{{}^{RL}D_{0+}^{\alpha} f(s)\} = s^{-\alpha} F(s). \tag{2.10} $$

Nous intéressons maintenant au calcul de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, qui pour cela nous l'écrivons sous la forme

$$ {}^{RL}D_{0+}^{\alpha} f(t) = g^{(n)}(t). \tag{2.11} $$

$$ g(t) = {}^{RL}D_{0+}^{-(n-\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \ (n-1 < \alpha \leq n). \tag{2.12} $$

L'utilisation de la transformation de Laplace de dérivée d'ordre fractinnaire donne :

$$ \mathcal{L}\{{}^{RL}D_{0+}^{\alpha} f(s)\} = s^{\alpha} G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0). \tag{2.13} $$

Ou la transformation de Laplace de la fonction $g(t)$ est déterminée par (2.10) :

$$ G(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s). \tag{2.14} $$

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on trouve :

$$ g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{(n-k-1}}{dt^{(n-k-1}} {}^{RL}D_{0+}^{-(n-\alpha)} f(t) = {}^{RL}D_{0+}^{\alpha-k-1} f(t). \tag{2.15} $$

En substituant (2.14) et (2.15) dans (2.13), nous obtenons l'expression finale suivante pour la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$ \mathcal{L}\{{}^{RL}D_{0+}^{\alpha} f(s)\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}^{RL}D_{0+}^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0}, \ (n-1 < \alpha \leq n). \tag{2.16} $$

2.2.2 Transformation de Laplace de la dérivée fractionnaires de Caputo

Afin d'établir la formule de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo, réécrivons la dérivée de Caputo (1.26) sous la forme **[2]** :

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a+}f(t) = {}^{C}D^{-(n-\alpha)}_{0+}g(t), g(t) = f^{(n)}(t),\ (n-1 < \alpha \leq n). \tag{2.17}$$

$$(n-1 < \alpha \leq n). \tag{2.18}$$

En utilisant la formule (2.4) de la transformation de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, on aura :

$$\mathcal{L}\{{}^{C}D^{\alpha}_{t}f(s)\} = s^{n-\alpha}G(s), \tag{2.19}$$

où, grâce à (2.13) :

$$G(s) = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}f^{(k)}(0) = s^{n}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k}f^{(n-k-1)}(0). \tag{2.20}$$

En introduisant (2.19) dans (2.20), on arrive à la formule de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$\mathcal{L}\{{}^{C}D^{\alpha}_{+0}f(s)\} = s^{n}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0),\ \ (n-1 < \alpha \leq n). \tag{2.21}$$

2.3 Double transformation de Laplace

2.3.1 Definitions et propriétés

Définition 2.3 *: [3] La double transformation de Laplace d'une fonction continue $f(x,t)$ est définie par :*

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} = F(p,s) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\int_0^{+\infty} e^{-st}f(x,t)dtdx. \tag{2.22}$$

Cette intégrale exist si p et s sont complex nembres et $x,t > 0$.

Exemple :

Soit $f(x,t) = c$ une fonction continue, la transformation de Laplace se révèle facilement être la suivante suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-px}\int_0^{+\infty} e^{-st}f(x,t)dtdx, \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-px}dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-st}dt, \\
&= \frac{c}{p} \times \frac{c}{s} = \frac{c}{ps}.
\end{aligned}$$

Définition 2.4 *: [3] L'inverse de la double transformation de Laplace , il s'écrit sous la forme*

$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s)\} = f(x,t)$ *est définie par :*

$$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s)\} = f(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(p,s)ds\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px}F(p,s)dp. \tag{2.23}$$

Propriétés

Dans cette section, nous considérerons quelques propriétés de la double transformation de Laplace.

1. Linéarité :

Soit $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformations de Laplace $F(p,s)$ et $G(p,s)$, et soit λ et β deux réels, alors :

$$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{\lambda F(p,s) + \beta g(p,s) \ = \lambda\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s) \ + \beta\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{g(p,s)\}. \tag{2.24}$$

Preuve :

Cela découle facilement de la linéarité de l'intégrale [**8**].

2. Division par xt :

On a :

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} = F(p,s),$$

alors :

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{f(x,t)}{xt}\} = \int_p^{+\infty}\int_s^{+\infty} F(u,v)dudv. \tag{2.25}$$

Preuve :

$$\int_p^{\infty}\int_s^{\infty} F(u,v)dudv \quad \text{exists .}$$

intégrant les deux côtés de

$$F(u,v) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-ux-vt}f(x,t)dxdt.$$

par rapport à u de p à ∞ et par rapport à v de s à ∞, on obtient :

$$\begin{aligned} m\int_p^{\infty}\int_s^{\infty} F(u,v)dudv &= \int_p^{\infty}\int_t^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-px}e^{-st}f(x,t)dxdtdudv, \\ &= \int_s^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\frac{e^{-px}}{-x}\right]_{u=p}^{\infty} e^{-st}f(x,t)dxdtdv, \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[0+\frac{e^{-px}}{x}\right]\left[\frac{e^{-st}}{-t}\right]_{v=s}^{\infty} f(x,t)dxdt, \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-px}e^{-st}\frac{f(x,t)}{xt}dxdt, \\ &= L_tL_x\left\{\frac{f(x,t)}{xt}\right\}, \end{aligned}$$

ainsi

$$L_t L_x \left\{ \frac{f(x,t)}{xt} \right\} = \int_p^\infty \int_s^\infty F(u,v) du dv.$$

3. Changement d'échelle :
On a :

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{f(x,t)\} = F(p,s),$$

alors :

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{f(ax,bt)\} = \frac{1}{ab} F(\frac{p}{a}, \frac{s}{b}). \tag{2.26}$$

Preuve :

$$L_t L_x \{f(ax,bt)\} = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-px} f(ax,bt) dx dt. \tag{2.27}$$

Mettre $ax = u$ et $bt = v$ dans l'intégrale de (3.3), où u et v prennent la limite de 0 à ∞. Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} L_x L_t \{f(ax,bt)\} &= \int_0^\infty e^{-s(\frac{v}{b}} \int_0^\infty e^{-p\frac{u}{a}} f(u,v) \frac{du}{a} \frac{dv}{b}, \\ &= \frac{1}{ab} \int_0^\infty e^{-s(\frac{v}{b})} \int_0^\infty e^{-p\frac{u}{a}} f(u,v) du dv, \\ &= \frac{1}{ab} F\left(\frac{p}{a}, \frac{s}{b}\right), \end{aligned}$$

ainsi :

$$L_x L_t \{f(ax,bt)\} = \frac{1}{ab} F\left(\frac{p}{a}, \frac{s}{b}\right).$$

4. Premier déplacement :
On a :

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{\{f(x,t)\} = F(p,s)\},$$

alors :

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{e^{ax+bt} f(x,t)\} = F(p-a, s-b). \tag{2.28}$$

Où a et b sont des constantes non nulles.
Preuve : D'après (2.1), nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{e^{ax+bt} f(x,t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^{+\infty} e^{-px}) e^{ax+bt} f(x,t) dx dt \Big) dt dx, \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-b)t} \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)x} f(x,t) dx dt = F(p-a, s-b). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{e^{ax+bt} f(x,t)\} = F(p-a, s-b).$$

2.3.2 Double transformation de Laplace des dérivées

Dans cette section nous présentons la transformation de Laplace double des dérivées partielles d'un les fonctions.

Théorème 2.1 *[3]*

(Double transformation de Laplace de la dérivée partielle d'ordre 1)

Si $f(x,t)$*est une fonction continue et que ses dérivées partielles du premier ordre sont de ordre exponentiel alors :*

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\} = p\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} - \mathcal{L}_t\{f(0,t)\}. \tag{2.29}$$

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\} = s\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} - \mathcal{L}_x\{f(x,0)\}, \tag{2.30}$$

où x,t > 0.

Preuve : D'aprés (2.12),la définition de la transformation de Laplace double on a :

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial f}{\partial t}\} = \int_0^{+\infty} e^{-px}\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\partial f}{\partial t}dtdx.$$

On pose :

$$\begin{cases} f = e^{-st} \Rightarrow f' = -se^{-st} \\ g = \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow g' = f(x,t) \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial f}{\partial t}\} &= \int_0^{+\infty} e^{-px}\left(\left[e^{-st}f(x,t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-se^{-st})f(x,t)\right)dtdx, \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-px}\left([-f(x,0)] + s\int_0^{+\infty} e^{-st}f(x,t)\right)dtdx, \\
&= -\int_0^{+\infty} e^{-px}f(x,0)dx + s\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-st}f(x,t)dtdx, \\
&= s\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} - \mathcal{L}_x\{f(x,0)\}.
\end{aligned}$$

De la même manière, nous pouvons la formule (2.29).

Théorème 2.2 *[3]*

(Double transformation de Laplace de la dérivée partielle d'ordre 2

Soit f (x,t) une fonction continue d'ordre xponentiel telle que sa deuxième partielle les dérivées sont également une fonction continue de l'ordre xponentiel

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\} = p^2\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} - p\mathcal{L}_t\{f(0,t)\} - \mathcal{L}_t\{\frac{\partial f(0,t)}{\partial x}\}. \tag{2.31}$$

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\} = s^2\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} - s\mathcal{L}_x\{f(x,0)\} - \mathcal{L}_x\{\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\}. \tag{2.32}$$

Preuve :

D'aprés (2.29), on a :

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f_x(x,t)\} = p\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} - \mathcal{L}_t\{f(0,t)\}.$$

En utilise (2.29), alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\} &= p[p\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} - \mathcal{L}_t\{f(0,t)\}] - \mathcal{L}_t\{f_x(0,t)\}\\ &= p^2\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} - p\mathcal{L}_t\{f(0,t)\} - \mathcal{L}_t\{f_x(0,t)\}.\end{aligned}$$

Alors nous trouvons :

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\} = p^2\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\} - p\mathcal{L}_t\{f(0,t)\} - \mathcal{L}_t\{\frac{\partial f(0,t)}{\partial x}\}.$$

De la même manière, nous pouvons la formule (2.32).

2.3.3 Double convolution :

Définition 2.5 *[3] La double convolution entre deux fonctions continues $f(x,t)$ et $g(x,t)$ est défini par :*

$$f(x,t) **g(x,t) = \int_0^x \int_0^t f(\upsilon,\tau)g(x-\upsilon,t-\tau)d\tau d\upsilon. \tag{2.33}$$

Propriétés :

Nous prendrons ici quelques propriétés du double convolution.

1. commutativité : $f(x,t) **g(x,t) = g(x,t) **f(x,t)$.

2. Transformation de Laplace double de convolution :
$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t) **g(x,t)\} = \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{f(x,t)\}\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{g(x,t)\}$.

2.3.4 Double transformation de Laplace des dérivées partielles fractionnaires

Si $L_xL_t\{f(x,t)\} = F(p,s)$, alors on a :

1. **dans le cas** $0 < \alpha \leq 1$

   on obtient :

$$L_xL_t\left\{\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial x^\alpha}\right\} = p^\alpha F(p,s) - p^{\alpha-1}L_t(f(0,t)). \tag{2.34}$$

$$L_xL_t\left\{\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha}\right\} = s^\alpha F(p,s) - s^{\alpha-1}L_x(f(x,0)). \tag{2.35}$$

2. **dans le cas** $1 < \alpha \leq 2$

   on obtient :

$$L_xL_t\left\{\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial x^\alpha}\right\} = p^\alpha F(p,s) - p^{\alpha-1}L_t(f(0,t)) - s^{\alpha-2}L_t\left(\frac{\partial^\alpha f(0,t)}{\partial x^\alpha}\right). \tag{2.36}$$

$$L_xL_t\left\{\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha}\right\} = s^\alpha F(p,s) - s^{\alpha-1}L_x\{f(x,0)\} - s^{\alpha-2}L_x\left(\frac{\partial^\alpha f(x,0)}{\partial t^\alpha}\right), \tag{2.37}$$

où :

$$\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha} = {}^C D^\alpha_{0+,t}f(x,t),$$

et :

$$\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial x^\alpha} = {}^C D^\alpha_{0+,x}f(x,t).$$

2.3.5 Double transformation de Laplace pour quelques fonctions d'ordre fractionnaires

$f(x,t)$	$L_x L_t\{f(x,t)\}$	Remarques
1	$\frac{1}{p^{\alpha}S^{\alpha}}$	
$\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$	$\frac{1}{p^{\alpha}s}$	
$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$	$\frac{1}{ps^{\alpha}}$	
$\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$	$\frac{1}{p^{\alpha}s^{\alpha}}$	
$E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)$	$\frac{s^{\alpha-1}}{p(s^{\alpha}+a)}$	$E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}$
$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}E_{\alpha}\left(bx^{\alpha}\right)$	$\frac{p^{\alpha-1}}{(p^{\alpha}+b)s^{\alpha}}$	
$\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)$	$\frac{s^{\alpha-1}}{p^{\alpha}(s^{\alpha}+a)}$	
$\sin\left(ax^{\alpha}\right)$	$\frac{a}{(p^{\alpha}+a^2)s}$	$\sin\left(x^{\alpha}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{x^{(2m+1)\alpha}}{\Gamma(1+(2m+1)\alpha)}$
$\sin\left(at^{\alpha}\right)$	$\frac{a}{p(s^{\alpha}+a^2)}$	
$\cos\left(ax^{\alpha}\right)$	$\frac{p^{\alpha}}{(p^{\alpha}+a^2)s}$	$\cos\left(x^{\alpha}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{x^{2m\alpha}}{\Gamma(1+2m\alpha)}$
$\cos\left(at^{\alpha}\right)$	$\frac{s^{\alpha}}{p(s^{\alpha}+a^2)}$	
$\sinh\left(ax^{\alpha}\right)$	$\frac{a}{(p^{\alpha}-a^2)s}$	$\sinh\left(ax^{\alpha}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{(2m+1)\alpha}}{\Gamma(1+(2m+1)\alpha)}$
$\sinh\left(at^{\alpha}\right)$	$\frac{a}{p(s^{\alpha}-a^2)}$	

Chapitre 3

Application

Dans cette section, nous appliquerons la méthode du double transformation de Laplace d'ordre fractionnaire pour résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires fractionnaires homogène et non-homogène, et l'ordredes équations proposées soit selon les valeurs de α où $0 < \alpha \leq 1$. et $1 < \alpha \leq 2$.

Nous suivrons la méthode suivante pour résoudre : :

1. On transforme les équations aux dérivées partielles et les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire en équations algébriques, puis en utilisant la double transformation de laplace .

2. Utiliser la double transformation inverse pour obtenir la solution des équations données.

3.1 Equation aux dérivées partielles homogène d'ordre 1

Exemple 1

Considérons une équation aux dérivées partielles homogène de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x},\ x, t \geq 0, \tag{3.1}$$

avec condition initiales : u(x,0)=x, u(0,t)= t.

Nous appliquons la double transformée de Laplace à(3.1), on obtient :

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial u}{\partial t}\} = \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial u}{\partial x}\}. \tag{3.2}$$

On pose : $\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{u(x,t)\} = F(p,s)$.

D'aprés (2.29) et (2.30), on trouve :

$$sF(p,s) - \mathcal{L}_x\{u(x,0)\} = pF(p,s) - \mathcal{L}_t\{u(0,t)\},$$

donc :

$$sF(p,s) - \frac{1}{p^2} = pF(p,s) - \frac{1}{s^2},$$

donc :

$$
\begin{aligned}
(s-p)F(p,s) &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{s^2} \\
&= \frac{s^2-p^2}{p^2s^2} = \frac{(s-p)(s+p)}{p^2s^2}
\end{aligned}
$$

A partir de là, l'équation devient la suivant :

$$F(p,s) = \frac{s+p}{p^2s^2} = \frac{s}{p^2s^2} + \frac{p}{p^2s^2}$$

$$F(p,s) = \frac{1}{p^2s} + \frac{1}{ps^2}$$

Nous appliquons la double transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s)\} = \mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{\frac{1}{p^2s} + \frac{1}{ps^2}\}, \tag{3.3}$$

alors, La solution de l'équation est :

$$u(x,t) = x + t.$$

Exemple 2

une équation aux dérivées partielles homogène de la forme :

$$2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - u,\ x,t \geq 0, \tag{3.4}$$

avec condition initiales : $u(x,0) = 6e^{-3x}, u(0,t) = 6e^{-2t}$.

Nous appliquons la double transformée de Laplace à(3.4), on obtient :

$$2\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial u}{\partial t}\} = \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial u}{\partial x}\} - \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{u\}. \tag{3.5}$$

On pose : $\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{u(x,t)\} = F(p,s)$.
D'aprés (2.29) et (2.30), on trouve :

$$2sF(p,s) - 2\mathcal{L}_x\{u(x,0)\} = pF(p,s) - \mathcal{L}_t\{u(0,t)\} - F(p,s),$$

donc :

$$
\begin{aligned}
(2s-p+1)F(p,s) &= 2\mathcal{L}_x\{u(x,0)\} - \mathcal{L}_t\{u(0,t)\} \\
&= 2\frac{6}{p+3} - \frac{6}{s+2} \\
&= \frac{12s+24-6p-18}{(p+3)(s+2)} \\
&= \frac{12s+-6p+6}{(p+3)(s+2)}
\end{aligned}
$$

A partir de là, l'équation devient la suivant :

$$F(p,s) = 6\frac{1}{p+3}\frac{1}{s+2}$$

Nous appliquons la double transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s)\} = \mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{6\frac{1}{p+3}\frac{1}{s+2}\}, \tag{3.6}$$

alors, La solution de l'équation est :

$$u(x,t) = 6e^{-3x}e^{-2t}$$

3.2 Equation aux dérivées partielles non-homogène d'ordre 2

On prend l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x, t \geq 0, \tag{3.7}$$

avec condition initiales : $u(x,0) = sinx, u_t(x,0) = 2$,
et conditions aux limites :$u(0,t) = 2t, u_x(0,t) = cos(ct)$.
Nous appliquons la double transformée de Laplace à(3.7), on obtient :

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\} = c^2\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\} \tag{3.8}$$

D'aprés (2.36) et (2.37), on trouve :

$$s^2F(p,s) - sF(p,0) - \frac{\partial F(p,0)}{\partial t} = c^2\left(p^2F(p,s) - pF(0,s) - \frac{\partial F(0,s)}{\partial x}\right)$$

donc :

$$s^2F(p,s) - \frac{s}{p^2+1} - \frac{2}{p} = c^2p^2F(p,s) - c^2\frac{2p}{s^2} - c^2\frac{s}{s^2+c^2},$$

alors :

$$\begin{aligned}(s^2 - c^2p^2)F(p,s) &= \frac{s}{p^2+1} + \frac{2}{p} - c^2\frac{2p}{s^2} - c^2\frac{s}{s^2+c^2},\\ &= \frac{2s^2 - 2c^2p^2}{ps^2} + \frac{s(s^2+c^2) - (c^2s)(p^2+1)}{(p^2+1)(s^2+c^2)}\\ &= \frac{2(s^2 - c^2p^2)}{ps^2} + \frac{s(s^2+c^2-c^2p^2-c^2)}{(p^2+1)(s^2+c^2)}\end{aligned}$$

A partir de là, l'équation devient la suivant :

$$F(p,s) = \frac{2}{ps^2} + \frac{1}{p^2+1}\frac{s}{s^2+c^2}.$$

Nous appliquons la double transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s)\} = \mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{\frac{2}{ps^2} + \frac{1}{p^2+1}\frac{s}{s^2+c^2}.\}, \tag{3.9}$$

alors, La solution de l'équation est :

$$u(x,t) = 2t + sin(x)cos(ct).$$

3.3 Equation aux dérivées partielles non-homogène d'ordre 2

On prend l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6t + 2x, \ x, t \geq 0, \tag{3.10}$$

avec condition initiales : $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = sinx$,
et conditions aux limites :$u(0,t) = t^3, u_x(0,t) = t^2 sint$.
Nous appliquons la double transformée de Laplace à(3.10), on obtient :

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\} - \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\} = \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{6t + 2x\} \tag{3.11}$$

D'aprés (2.29) et (2.30), on trouve :

$$s^2F(p,s) - sF(p,0) - \frac{\partial u}{\partial t} - (p^2F(p,s) - F(0,s) - \frac{\partial F(0,s)}{\partial x}) = \frac{6}{ps^2} + \frac{2}{p^2s}$$

donc :

$$s^2F(p,s) - \frac{1}{p^2+1} - p^2F(p,s) + \frac{6p}{s^4} + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2+1} = \frac{6}{ps^2} + \frac{2}{p^2s},$$

alors :

$$(s^2 - p^2)F(p,s) = \frac{6}{ps^2} + \frac{2}{p^2s} - \frac{6p}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{s^2 - p^2}{(s^2+1)(p^2+1)}.$$

A partir de là, l'équation devient la suivant :

$$F(p,s) = \frac{6}{ps^4} + \frac{2}{p^2s^3} + \frac{1}{(s^2+1)(p^2+1)}$$

Nous appliquons la double transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s)\} = \mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{\frac{6}{ps^4} + \frac{2}{p^2s^3} + \frac{1}{(s^2+1)(p^2+1)}\}, \tag{3.12}$$

alors, La solution de l'équation est :

$$u(x,t) = xt^2 + t^3 + sin(x)sin(t).$$

3.4 Equation aux dérivées partielles homogène d'ordre fractionnaire α , $0 < \alpha \leq 1$

Exemple 1
On prend l'équation fractionnaire suivante :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}, \ x, t \geq 0, \tag{3.13}$$

où :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = {}^C D^\alpha_{0+,t} u.$$

avec condition initiales : $u(x,0) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, u(0,t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$.

Nous appliquons la double transformée de Laplace à(3.13), on obtient :

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\} = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\}, \tag{3.14}$$

D'aprés (2.), on trouve :

$$s^\alpha F(p,s) - s^{\alpha-1}\mathcal{L}_x u(x,0) = p^\alpha F(p,s) - p^{\alpha-1}\mathcal{L}_t u(0,t),$$

donc :

$$s^\alpha F(p,s) - s^{\alpha-1}\frac{1}{p^{\alpha+1}} = p^\alpha F(p,s) - p^{\alpha-1}\frac{1}{s^{\alpha+1}},$$

alors :

$$\begin{aligned}(s^\alpha - p^\alpha)F(p,s) &= \frac{s^{\alpha-1}}{p^{\alpha+1}} - \frac{p^{\alpha-1}}{s^{\alpha+1}}(s^\alpha)^2 \\ &= \frac{s^{2\alpha} - p^{2\alpha}}{p\alpha + 1 s^{\alpha+1}} = \frac{(s^\alpha - p^\alpha)(s^\alpha + p^\alpha)}{p^{\alpha+1}s^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

A partir de là, l'équation devient la suivant :

$$\begin{aligned}F(p,s) &= \frac{s^\alpha}{p^{\alpha+1}s^{\alpha+1}} + \frac{p^\alpha}{p^{\alpha+1}s^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{p^{\alpha+1}s} + \frac{1}{ps^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

Nous appliquons la double transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s)\} = \mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{\frac{1}{p^{\alpha+1}s} + \frac{1}{ps^{\alpha+1}}\}, \tag{3.15}$$

alors, La solution de l'équation est :

$$u(x,t) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$

Remarque : D'aprés (1.6), et dans le cas où $\alpha = 1$ on obtint :

$$u(x,t) = x + t.$$

Comparé au résultat de la résolution de l'équation différentielle(3.1), le résultat est également le même dans l'ordre fractionnaire.

Exemple 2
une autre équation aux dérivées partielles homogène de la forme :

$$2\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} - u, \; x,t \geq 0, \tag{3.16}$$

avec condition initiales : $u(x,0) = 6E_\alpha(-3x^\alpha), u(0,t) = 6E_\alpha(-2t^\alpha)$.

Nous appliquons la double transformée de Laplace à(3.16), on obtient :

$$2\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{2\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\} = \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\} - \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{u\}. \tag{3.17}$$

D'aprés (2.34) et (2.35), on trouve :

$$2[s^\alpha F(p,s) - s^{\alpha-1}\mathcal{L}_x\{u(x,0)\}] = p^\alpha F(p,s) - p^{\alpha-1}\mathcal{L}_t\{u(0,t)\} - F(p,s),$$

donc :

$$\begin{aligned}(2s^\alpha - p^\alpha + 1)F(p,s) &= 2s^{\alpha-1}\mathcal{L}_x\{u(x,0)\} - p^{\alpha-1}\mathcal{L}_t\{u(0,t)\},\\ &= 2s^{\alpha-1}\frac{6p^{\alpha-1}}{p^\alpha+3} - p^{\alpha-1}\frac{6s^{\alpha-1}}{s^\alpha+2},\\ &= s^{\alpha-1}p^{\alpha-1}[\frac{12}{p^\alpha+3} - \frac{6}{s^\alpha+2}],\\ &= s^{\alpha-1}p^{\alpha-1}\frac{6(2s^\alpha+4-p^\alpha-3)}{(p^\alpha+3)(s^\alpha+2)},\\ &= s^{\alpha-1}p^{\alpha-1}\frac{6(2s^\alpha-p^\alpha+1)}{(p^\alpha+3)(s^\alpha+2)}.\end{aligned}$$

A partir de là, l'équation devient la suivant :

$$F(p,s) = 6\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha+3}\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+2}$$

Nous appliquons la double transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s)\} = \mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{6\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha+3}\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+2}\}, \tag{3.18}$$

alors, La solution de l'équation est :

$$u(x,t) = 6E_\alpha(-3x^\alpha)E_\alpha(-2t^\alpha),$$

dans le cas où $\alpha = 1$, on obtient :

$$u(x,t) = 6e^{-3x}e^{-2t}.$$

3.5 Equation aux dérivées partielles homogène d'ordre fractionnaire α , $1 < \alpha \leq 2$

On prend l'équation télégraphique fractionnaire spatiale homogène :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + u, \quad 1 < \alpha \leq 2, x, t \geq 0, \tag{3.19}$$

où :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = {}^C D^\alpha_{0+,x}u.$$

avec les conditions : $u(x,0) = E_\alpha(x^\alpha) + E_{\alpha,2}(x^\alpha), u(0,t) = e^{-2}u_t(x,0) = -[E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(x^{\alpha,2})], u(_x0,t) = e^{-2}$
Nous appliquons la double transformée de Laplace à(3.19), on obtient :

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\} = \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\} + \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial u}{\partial t}\} + \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{u\}. \tag{3.20}$$

D'aprés (2.36), (2.32)et (2.30) on trouve :

$$p^\alpha F(p,s) - p^{\alpha-1}\mathcal{L}_x\{\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}\} - p^{\alpha-2}\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = s^2F(p,s) - s\mathcal{L}_x\{u(x,0)\} - \mathcal{L}_x\{\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\}$$

$$+sF(p,s) - \mathcal{L}_x\{u(x,0)\} + F(p,s),$$

donc :

$$(p^\alpha - s^2 - s - 1)F(p,s) = p^{\alpha-1}\frac{1}{s+1} - p^{\alpha-2}\frac{1}{s+1} - s(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2})\frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}} + (\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2})\frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}} + (\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2})\frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}}$$

$$-(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2})\frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}},$$

alors :

$$F(p,s) = \frac{1}{p^\alpha - s^2 - s - 1}[p^{\alpha-1}\frac{1}{s+1} - p^{\alpha-2}\frac{1}{s+1} - s(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2})\frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}} +$$

$$(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2})\frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}} + (\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2})\frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}},]$$

donc :

$$u(x,t) = \frac{1}{s+1}(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2})\frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}}.$$

Nous appliquons la double transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s)\} = \mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{\frac{1}{s+1}(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2})\frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}}\},$$

alors la solution est :

$$u(x,t) = e^{-t}[E_\alpha(x^\alpha) + xE_\alpha(x^{\alpha,2})].$$

Si nous prenons $\alpha = 2$, on obtient :

$$u(x,t) = e^{x-t}.$$

3.5.1 Equation aux dérivées partielles non-homogène d'ordre fractionnaire α , $1 < \alpha \leq 2$

On prend l'équation télégraphique fractionnaire spatiale non-homogène :

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + u - x^2 - t + 1, \quad 1 < \alpha \leq 2, x, t \geq 0, \tag{3.21}$$

où :

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}} = {}^{C}D^{\alpha}_{0+,x} u.$$

avec les conditions : $u(x,0) = x^2 - 2 - 2x^2 E_{\alpha,3}(x^{\alpha}) + 2E_{\alpha,1}(x^{\alpha}), u(0,t) = t, u_t(x,0) = 1, u_x(0,t) = 0$.
Nous appliquons la double transformée de Laplace à(3.21), on obtient :

$$\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}}\} = \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\} + \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{\frac{\partial u}{\partial t}\} + \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{u\} + \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{-x^2 - t + 1\} \tag{3.22}$$

D'aprés (2.36), (2.32)et (2.30) on trouve :

$$p^{\alpha}F(p,s) - p^{\alpha-1}\mathcal{L}_x\{\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}\} - p^{\alpha-2}\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = s^2F(p,s) - s\mathcal{L}_x\{u(x,0)\} - \mathcal{L}_x\{\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\}$$

$$+sF(p,s) - \mathcal{L}_x\{u(x,0)\} + F(p,s) - \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\{x^2\} - \frac{2}{p^3 s} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{ps},$$

donc :

$$(p^{\alpha} - s^2 - s - 1)F(p,s) = p^{\alpha-1}\frac{1}{s^2} - s\frac{2(p^2-1)}{p^3(p^{\alpha}-1)} - \frac{1}{p} - \frac{2(p^2-1)}{p^3(p^{\alpha}-1)} - \frac{2}{p^3 s} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{ps}$$

$$-(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2})\frac{p^{\alpha}}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{ps^2} - \frac{1}{ps},$$

alors :

$$F(p,s) = \frac{1}{p^{\alpha} - s^2 - s - 1}[p^{\alpha-1}\frac{1}{s+1} - p^{\alpha-2}\frac{1}{s+1} - s(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2})\frac{p^{\alpha}}{p^{\alpha-1}} +$$

$$(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2})\frac{p^{\alpha}}{p^{\alpha-1}} + (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2})\frac{p^{\alpha}}{p^{\alpha-1}}],$$

donc :

$$F(p,s) = \frac{1}{ps^2} + \frac{2(p^2-1)}{p^3 s(p^{\alpha}-1)}.$$

Nous appliquons la double transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{F(p,s)\} = \mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{\frac{1}{ps^2} + \frac{2(p^2-1)}{p^3 s(p^{\alpha}-1)}\},$$

alors la solution est :

$$u(x,t) = t + x^2 - 2 - 2x^2 E_{\alpha,3}(x^{\alpha}) + 2E_{\alpha,1}(x^{\alpha}).$$

Si nous prenons $\alpha = 2$, on obtient :

$$u(x,t) = t + x^2.$$

Remarque

L'équation télégraphique développée par Oliver Heaviside en 1880 est largement utilisé en science et en ingénierie. Ses applications se posent dans l'analyse du signal pour la transmission et la propagation de signaux électriques et également modélisation de la diffusion des réactions, et la double transformée de Laplace aide à résoudre cette équation.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons essayé de présenter la méthode "double trasformation de Laplace" pour résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre fractionnaire α, et nous avons pris seulement les deux cas $\alpha \in]0, 1]$ et $\alpha \in]1, 2]$. A la fin de chaque exemple résolu, nous avons comparé les résultas des exemples présentés avec des résultas d'autres travaux similaires publiés dans des recherches reconnues.

Bibliographie

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam (2006).

[2] I. Podlubny. Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[3] B.Housam, The double Laplace transform, [Unpublished master thesis]. Graduate School of Natural and Applied Sciences, Çankaya University.

[4] M. Omran and Adem Kiliçman, Fractional Double Laplace Transform And Its Properties, 2nd International Conference and Workshop on Mathematical Analysis, (ICWOMA2016), 2016.

[5] O.Maryam, A Note on Fractional Double Natural Transform,

[6] D.O. Anongo ,Y.S. Awari (2021), Solution of Onedimensional Partial Differential Equation with Higher-Order Derivative by Double Laplace Transform Method. African Journal of Mathematics and Statistics Studies 4(3), 1-11. DOI : 10.52589/AJMSS-1OHGJPNR.

[7] D. Ziane, Méthode combinée des perturbations HPM et VIM pour la résolution des équations différentielles ordinaires et EDP d'ordre fractionnaire, Doctorat en mathématiques, Option EDP-Analyse Numérique, Université D'Oran 1, Ahmed Ben Bella, 2016.

[8] Ditkin V. A., Prudnikov A. P., (1962), "Operational Calculus in Two Variables and its Applications", Pergamon Press LTD , Oxford, London W.I., pp. 3-28., 30-31.

[9] Dhunde, R. R., Waghmare, G. L. (2016). Double Laplace transform method for solving space and time fractional telegraph equations. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2016.

[10] Abaker. A. Hassaballa, Yagoub. A. Salih. (n.d.). On Double Elzaki Transform and Double Laplace Transform. IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), pp. 1-41. www.iosrjournals.org.