Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Kasdi Merbah Ouargla
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière
Département de Mathématique

Mémoire de Master

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse fonctionnelle

Thème :

Dérivée Fractionnaire Conformable
Introduction et Applications

Présentée par :

Bettayeb Khaoula

Soutenu **le 25/06/2024** devant le jury composé de

Mr. Bensayah Abdallah .... Président
Mr. Ziane Djelloul .... Encadrant
Mr. Ghezal Abderrezak .... Examinateur

Année Universitaire : 2023/2024

Remerciement

Mes remerciements vont tout premièrement, à Allah qui je aide et je donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude. je ten à porter notre gratitude et remerciement à encadreur **Mr. Ziane Djelloul** pour sa contribution et son aide apportées pour la réalisation de ce modeste travail. Nos vifs remerciements vont également à **Mr. Bensayah Abdallah** et **Mr. Ghezal Abderrezak** pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions. je ne saurais jamais suffisant remercie mon père et ma mère, que je porte toujours avec moi dans ma pensée. Sans leurs confiances immenses en moi, sans leurs aides, je n'aurais pas pu aller au bout de mes projets. Enfin, nous tenons à remercier l'ensemble du corps enseignant de la filière Mathématiques .

Dédicace

A l'aide de dieu tout puissant, qui m'a tracé le chemin de ma vie, j'ai pu réaliser ce travail que je dédie :

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études, A mes chères sœurs pour leurs encouragements permanents et leur soutien moral.

A mon cher frère pour son appui et son encouragement.

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Merci d'être toujours là pour moi.

A tous ceux qui m'aiment.

ملخص

في هذا العمل، بالإضافة إلى تقديم مشتقتين تعتبران من المشتقات الأكثر استخداما في المعادلات التفاضلية الكسرية، وهما مشتقة ريمان-ليوفيل الكسرية ومشتقة كابوتو الكسرية، سنقدم مشتقة جديدة وهي « المشتقة الكسرية المتطابقة » يليه عرض عام لطريقتين مهمتين تستخدمان في حل المعادلات التفاضلية: « طريقة تحويل لابلاس »و طريقة «أدوميان» مع تطبيقاتهما في حل المعادلات التفاضلية الكسرية مع المشتق المطابق.

Résumé

Dans ce travail, en plus de présenter deux dérivées considérées parmi les dérivées les plus utilisées dans les équations différentielles fractionnaires, à savoir la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fraction- naire de Caputo, nous présenterons une nouvelle dérivée, qui est la « dérivée fractionnaire conformable », suivie d'une présentation générale de deux méthodes importantes utilisées dans la résolution d'équations différentielle : « la méthode transformation de Laplace » et la méthode « ADM » avec leurs applications dans la résolution d'équations différentielles fractionnaires avec la dérivée au sens conformable.

Abstract

In this work, in addition to presenting two derivatives considered among the most used derivatives in fractional differential equations, namely the Riemann-Liouville fractional derivative and the Caputo fractional derivative, we will present a new derivative, which is the « conformable fractional derivative », followed by a general presentation of two important methods used in the resolution of differential equations: « the Laplace transformation method » and the « ADM » method with their applications in the resolution of fractional differential equations with the derivative in the conformable sense.

Table des matières

Introduction

L'idée de la dérivée fractionnaire a commencé avec une simple question posée en 1965 par le Marquis de L'Hopital (1661-1704) à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quelle est la dérivée de la fonction y si l'ordre de la dérivée est un demi ?. Leibniz écrivait à L'Hospital : "...C'est un paradoxe apparent dont on tirera un jour des conséquences utiles..."

Cette question n'a pas reçu l'attention nécessaire au cours de cette période, sauf au cours des cinquante dernières années, lorsque l'intérêt pour elle a été renouvelé par de nombreux chercheurs et scientifiques jusqu'à ce qu'elle devienne une branche de mathématiques appelée « calcul fractionnaire », il est devenu enseigné dans les universités comme une spécialité comme les autres spécialités.

Ce qui confirme ce point de vue, c'est la quantité de recherches scientifiques qui ont été publiées et qui sont encore publiées, qui incluent le terme devienne une branche de mathématiques appelée «calcul fractionnaire », il est devenu enseigné dans les universités comme une spécialité comme les autres spécialités.

Ce qui confirme ce point de vue, c'est la quantité de recherches scientifiques qui ont été publiées et qui sont encore publiées, qui incluent le terme (dérivée fractionnaire) dans leur titre, en plus des livres qui ont été écrits et qui sont devenus des livres de base pour cette nouvelle branche des mathé- matiques, nous citons par exemple les livres (voir [11], [2], [1], [12],[10], [5], [14]).

L'objectif principal de cette thèse est avant tout de présenter une nouvelle dérivée fractionnaire qui est découvert par R.Khalil et autre [14] en 2014, cette dérivée nommé "dérivée fractionnaire conformable", puis de résoudre des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles où la dérivée et au sens conformable.

Ce mémoire se compose d'une introduction et quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions générales, nous rappelons les définitions des fonctions Gamma, Bêta et la fonction Mittag-Leffler, et les notions des intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.

Dans le deuxième chapitre on va présenter définition de la dérivée fractionnaire conformable et quelques propriétés et l'intégrale fractionnaire conformable.

Le troisième chapitre on va présenter brièvement définition et condition d'existence de la transformation de Laplace, transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire conformable avec quelques propriétés et la méthode de décomposition d'Adomian.

Le quatrième chapitre est consacré aux présentations des exemples d'équations différentielles ordinaires et d'autres exemples d'équations aux dérivées partielles avec la dérivée fractionnaire conformable, et à présenter leurs solutions et à les comparer avec d'autres travaux.

Chapitre 1

Notions préliminaire sur le calcul fractionnaire

1.1 Fonctions spéciales

Dans cette section nous présenterons les fonctions nécessaires dans le calcul fractionnaire comme la fonction Gamma, la foction Bêta et Mittage-Liffler et leurs propriétés, car elles jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1. *[1] La fonction Gamma d'Euler* $\Gamma(.)$ *est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \ \ (z \in \mathbb{C};\ \Re(z) > 0). \tag{1.1}$$

En particulier :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0. \tag{1.2}$$

Quelques propriétés :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^{z+1-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{z} e^{-t} dt, \end{aligned}$$

on intégrant par partie :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt &= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt\\ &= z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt\\ &= z\Gamma(z),\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.3}$$

2. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n+1) = n!.$

D'aprés la relation (1.3) pour tout $z \in \mathbb{N}^*$ on obtient

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1\Gamma(1) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2.1\Gamma(1) = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)....2.1 = n!.$$

3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

On a par définition :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt,$$

on pose $t = u^2$ *et* $dt = 2udu$, alors :

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u}e^{-u^2}2u\,du\\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u2}du.\end{aligned}$$

L'intégrale de Gauss est donnée par

$$\int_0^{+\infty} e^{-u2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

d'où $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

4. D'aprés la définition (1.2), on obtient $\Gamma(1) = 1$.

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2. *[1] La fonction Bêta est définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \;\; (p,q \in \mathbb{C};\; \Re(p) > 0,\; \Re(q) > 0). \tag{1.4}$$

Les fonctions Bêta et Gamma sont liées par :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.5}$$

D'aprés la relation (1.5) on obtient :

$$B(p,q) = B(q,p).$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.3. *[1] La fonction Mittag-Leffler $E_\alpha(.)$ est définie par*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (z \in \mathbb{C}; \Re(\alpha) > 0) \tag{1.6}$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad (z, \beta \in \mathbb{C}; \Re(\alpha) > 0).$$

Cas particulier :

1. Pour $\alpha = \beta = 1$, on obtient

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

2. Pour $\alpha = 1, \beta = 2$, on obtient

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1).$$

1.2 Intégrale et dérivées fractionnaires

1.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4. *[1] Soient $\Omega = [a, b], (-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur $\mathbb{R}$, et f une fonction intégrable sur Ω. L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville $I_{a+}^{\alpha} f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, (\Re(\alpha) > 0)$ est défnie par :*

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \tag{1.7}$$

En particulier, si $a = 0$

$$(I_0^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \tag{1.8}$$

Propriétés 1.1. *On va présenter quelque propriétés de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville*
1. Si f de classe C^1 sur $[a, b]$, alors

$$(I_0^{\alpha} f)(x) = f(x).$$

2. I_{a+}^{α} est un opérateur linéaire,on a

$$(I_{a+}^{\alpha}(\lambda f + \mu g))(x) = \lambda(I_{a+}^{\alpha} f)(x) + \mu(I_{a+}^{\alpha} g)(x).$$

3. Pour $\Re(\alpha) > 0$ *et* $\Re(\beta) > 0$, *on a*

$$I_{a+}^{\alpha} \circ I_{a+}^{\beta} = I_{a+}^{\beta} \circ I_{a+}^{\alpha} = I_{a+}^{\alpha+\beta}.$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.5. *[1] Soit* $\Re(\alpha) > 0$ *et* $n = [\Re(\alpha)] + 1$. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville* ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}$ *d'ordre* α *de* f *est défnie par :*

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.9}$$

En particulier :

1. Pour $\alpha = 0$, on obtient :

$$({}^{RL}D_{a+}^{0} f)(x) = f(x).$$

2. Pour $\alpha = n$, où n entier on obtient :

$$({}^{RL}D_{a+}^{n} f)(x) = f^{(n)}(x),$$

c'est la dérivée usuelle de $f(x)$ d'ordre n.

3. Pour $0 < \Re(\alpha) \leq 1$:

$$a = 0, \qquad ({}^{RL}D_{0}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt.$$

Lemme 1.1. *[17] Soit* $\Re(\alpha) > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha} = (n-\alpha)(n-\alpha-1)....(1-\alpha)(x-\alpha)^{-\alpha}. \tag{1.10}$$

Proposition 1.1. *Pour* $\Re(\alpha) \geq 0$ *et* $\Re(\beta) > 0$, *on a :*

$$1.\ \left({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1}\right) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

$$2.\ ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}, \quad (C constant).$$

Preuve :

1. On pose $f(x)=(x-a)^{\beta-1}$, d'après la définition de ${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}$ on a :

$$({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt$$

$$\left(I^{n-\alpha}_{a+}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)\,dt$$
$$\left(I^{n-\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta-1}\right)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta-1}\,dt.$$

Par le changement de variable $t=a+s(x-a)$ et $dt=(x-a)ds$ alors :

$$\begin{aligned}\left(I^{n-\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta-1}\right)&=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}((1-s)(x-a))^{n-\alpha-1}(x-a)^{\beta}s^{\beta-1}\,ds\\&=\frac{(x-a)^{n-\alpha+\beta-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{1}s^{\beta-1}(1-s)^{n-\alpha-1}ds\\&=\frac{B(\beta,n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha+\beta-1}\\&=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha+\beta)}(x-a)^{n-\alpha+\beta-1}\\&=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(x-a)^{n-\alpha+\beta-1}.\end{aligned}$$

$\left({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta-1}\right)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}(x-a)^{n-\alpha+\beta-1}.$

D'aprés (1.10), on trouve :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}(x-a)^{n-\alpha+\beta-1}&=(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(n-\alpha+\beta-1-(n-1))(x-a)^{-\alpha+\beta-1}\\&=(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha-1},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma(n-\alpha+\beta)&=(n-\alpha+\beta-1)\Gamma(n-\alpha+\beta-1),\qquad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\\&=(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\Gamma(n-\alpha+\beta-2)\\&=(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\dots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha),\end{aligned}\tag{1.11}$$

donc

$$\begin{aligned}\left({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta-1}\right) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)(x-\alpha)^{\beta-\alpha-1}\\ &= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}.\end{aligned}$$

2. Pour tout $C \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}C) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{a+}C\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}C\,dt\\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{-(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right]_a^x\\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right]\\ &= \frac{C}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha}\\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha}.\end{aligned}$$

D 'aprés les relations (1.10) et (1.11) on trouve : $({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.

1.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La modalisation mathématique des problèmes de sciences physiques et de l'ingénierie utilisent les définitions des dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales qui sont interprétables physiquement, comme par exemple $f(a)$,$f'(a)$,..., et ce malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement. La solution de ses problèmes a été proposée par M. Caputo (dans les années soixante) dans sa définition, qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de la viscoélasticité. Il a introduit une dérivée fractionnaire qui est plus adaptée que celle de Riemann-Liouville [4].

Définition 1.6. *[1] La dérivée fractionnaire au sens de Caputo* ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}$ *d'ordre* $\alpha \in$

$\mathbb{C}$ $(\Re(\alpha) \geqq 0)$, *d'une fonction* f *est définie par*

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right], \tag{1.12}$$

où

$$n = [\Re(\alpha)] + 1 \quad pour \quad \alpha \notin \mathbb{N},\ n = \alpha \quad pour \quad \alpha \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

En particulier *:*

1. Pour $\alpha = 0$, *on obtient*

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = f(x).$$

2. Pour $0 < \Re(\alpha) \leq 1$, *on obtient*

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = D_{a+}^{\alpha}\left[f(x) - f(a)\right].$$

Si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ et f est une fonction pour lequelle la dérivée fractionnaire Caputo $\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\Re(\alpha) \geqq 0)$ existe avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville $\left({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)$, elles sont liées par la relation suivante :

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \left({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}, (n = [\alpha]+1). \tag{1.14}$$

En particulier, pour $0 < \Re(\alpha) \leq 1$ alors

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \left({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

Théorème 1.1. *[1] Soient* $\Re(\alpha) \geq 0$ *et* n *donnée par (1.13).Si* $f \in AC^{n}[a,b]$ *la dérivée fractionnaire au sens de Caputo existe presque partout sur* $[a,b]$ *et on a, si* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *alors* $\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)$ *est donné par*

$$\left({}^{C}D_{a_+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a+}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt = \left(I_{a}^{n-\alpha}D^{n}f\right)(x), \tag{1.15}$$

avec

$D = \frac{d}{dx}$, $n = [\Re(\alpha)] + 1$, $AC^{n}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *et* $\left(D^{n-1}f\right)(x) \in AC[a,b]\}$.

En particulier, pour $0 < \Re(\alpha) \leq 1$ *et* $f \in AC^n[a,b]$ *alors*

$$\left({}^C D^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt = \left(I^{1-\alpha}_{a+} f'\right)(x),$$

pour $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ *alors*

$$\left({}^C D^{n}_{a+} f\right)(x) = f^{(n)}(x).$$

Indication : AC espace des fonctions absolument continues.

Quelques propriétés :

Nous présentons quelques propriétés de La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

1. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est un opérateur linéaire :

$${}^C D^{\alpha}_{a+}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \left({}^C D^{\alpha}_{a+} f\right)(x) + \mu \left({}^C D^{\alpha}_{a+} g\right)(x).$$

2. Soient $\Re(\alpha) > 0$ et n donnée par (1.13) , si $f \in AC^n[a,b]$ ou $f \in C^n[a,b]$ alors

$$\left(I^{\alpha}_{a+}\, {}^C D^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

en particulier , $0 < \Re(\alpha) \leq 1$ et $f \in AC[a,b]$ ou $f \in C[a,b]$, on trouve

$$\left(I^{\alpha}_{a+}\, {}^C D^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = f(x) - f(a).$$

3. Soient $\Re(\alpha) > 0$ et n donnée par (1.13). Si $f \in C[a,b]$ alors

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f)(x) = f(x).$$

Proposition 1.2. *Soit* $\Re(\alpha) > 0$ *et* $\Re(\beta) > 0$ *:*

$$1.\ \left({}^C D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

$$2.\ \left({}^C D^{\alpha}_{a+} k\right)(x) = 0, \quad (k \quad \textit{constante}).$$

Preuve : On va preuver les deux propositions précédentes par suit :

1. On a par la défénition :

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta}\right)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}((t-a)^{\beta})^{(n)}dt,$$

et on a

$$((x-a)^{\beta})^{(n)}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n},$$

d'où

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta}\right)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta-n}dt,$$

utilisant le chengement de variable $t=a+s(x-a)$ et $dt=(x-a)ds$,on obtient :

$$\begin{aligned}\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta}\right)&=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1(1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds\\&=\frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\\&=\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\\&=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

Donc, on obtient la formule importante de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta}\right)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

2. En utilisant (1.15) pour $f(x)=k$, on trouve :

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}k\right)(x)=0.$$

Remarque 1.1. *Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle.*

Chapitre 2

Dérivée et intégrale fractionnaire conformable

Dans ce partie nous présentons la définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire conformable qui ont développé les définitions de base de ce nouveau calcul fractionnaire simple et intéressant.

2.1 Dérivée fractionnaire conformable

Définition 2.1. *[16] Soit la fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et $0 < \alpha \leq 1$. Alors la dérivée fractionnaire conformable à gauche de f d'ordre α est définie par :*

$$\left(T_\alpha^a f\right)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\epsilon}.$$

Si $\left(T_\alpha^a f\right)(x)$ existe sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\left(T_\alpha^a f\right)(a) = \lim_{x \to a+} T_\alpha^a f(x).$$

Et à droite que $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$, se terminant en b :

$$\left({}^b T_\alpha f\right)(x) = -\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon(b-x)^{1-\alpha}) - f(x)}{\epsilon}.$$

Si ${}^b T_\alpha f(x)$ existe sur $[a, b]$, alors

$$\left({}^b T_\alpha f\right)(b) = \lim_{x \to b-} {}^b T_\alpha f(b).$$

Nous disons f est α-différentiable si T_α existe, on donne la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Alors la dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α pour tout $x > 0$ est définie par :

$$(T_\alpha f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\epsilon}. \tag{2.1}$$

2.1.1 Quelques propriétés

Pour $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues et $x > 0$, les propriétés suivantes donnée pour $0 < \alpha \leq 1$:

1. Linéarité :

$$T_\alpha(af + bg)(x) = aT_\alpha f(x) + bT_\alpha g(x) \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

2. Si f est différentiable et $x > 0$, alors :

$$(T_\alpha f)(x) = x^{1-\alpha} f'(x). \tag{2.3}$$

3. Dérivée de la fonction $x \longmapsto x^k$ est donné par :

$$T_\alpha(x^k) = kx^{k-\alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

4. La dérivée fractionnaire conformable de produit de deux fonctions

$$T_\alpha(fg)(x) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f). \tag{2.5}$$

5. La dérivée fractionnaire conformable de quotient de deux fonctions

$$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}. \tag{2.6}$$

6. La dérivée fractionnaire conformable de la fonction constante est nulle

$$T_\alpha(\lambda) = 0, \quad (\lambda \ constant). \tag{2.7}$$

Preuve : Nous preuvons les propirétés précédentes comme suit :

1.

$$\begin{aligned}
T_\alpha(af+bg)(x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{af(x+\epsilon(x-a)^{1-\alpha})+bg(x+\epsilon(x-a)^{1-\alpha})-af(x)-bg(x)}{\epsilon}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left(a\frac{f(x+\epsilon(x-a)^{1-\alpha})-f(x)}{\epsilon}+b\frac{g(x-\epsilon(x-a)^{1-\alpha})-g(x)}{\epsilon}\right)\\
&= a\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon(x-a)^{1-\alpha})-f(x)}{\epsilon}+b\lim_{\epsilon\to 0}\frac{g(x+\epsilon(x-a)^{1-\alpha})-g(x)}{\epsilon}\\
&= aT_\alpha f(x)+bT_\alpha g(x).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(T_\alpha f\right)(x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon x^{1-\alpha})-f(x)}{\epsilon}\\
&= x^{1-\alpha}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon x^{1-\alpha})-f(x)}{\epsilon x^{1-\alpha}},
\end{aligned}$$

telle que : $\epsilon x^{1-\alpha}=h$

$$\begin{aligned}
x^{1-\alpha}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon x^{1-\alpha})-f(x)}{\epsilon x^{1-\alpha}} &= x^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= x^{1-\alpha}f'(x).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
T_\alpha(x^k) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{(x+\epsilon x^{1-\alpha})^k-x^k}{\epsilon}\\
&= x^{1-\alpha}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{(x+\epsilon x^{1-\alpha})^k-x^k}{\epsilon x^{1-\alpha}},
\end{aligned}$$

telle que : $\epsilon x^{1-\alpha}=h$

$$\begin{aligned}
x^{1-\alpha}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{(x+\epsilon x^{1-\alpha})^k-x^k}{\epsilon x^{1-\alpha}} &= x^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x^k}{h}\\
&= x^{1-\alpha}kx^{k-1}\\
&= kx^{k-\alpha},\quad (k\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

4.

$$T_\alpha(fg)(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon x^{1-\alpha})g(x-\epsilon x^{1-\alpha})-f(x)g(x)}{\epsilon},$$

posons : $\epsilon x^{1-\alpha} = h$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
T_\alpha(fg)(x) &= x^{1-\alpha} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= x^{1-\alpha} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= x^{1-\alpha} \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + x^{1-\alpha} \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= x^{1-\alpha}\left[f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\right] \\
&= f(x)T^\alpha g(x) + g(x)T^\alpha f(x).
\end{aligned}
$$

5.

$$
T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\frac{f(x+\epsilon x^{1-\alpha})}{g(x+\epsilon x^{1-\alpha})} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\epsilon}\right],
$$

telle que : $\epsilon x^{1-\alpha} = h$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\frac{f(x+\epsilon x^{1-\alpha})}{g(x+\epsilon x^{1-\alpha})} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\epsilon}\right] &= x^{1-\alpha} \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}.\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right] \\
&= x^{1-\alpha} \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}.\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x)}{g(x+h)g(x)}\right] \\
&= \frac{1}{g(x)^2}x^{1-\alpha} \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} - \frac{f(x)[g(x+h) + g(x)]}{h}\right] \\
&= \frac{1}{g(x)^2}x^{1-\alpha}[g(x)f'(x) - f(x)g'(x)] \\
&= \frac{g(x)T_\alpha f(x) - f(x)T_\alpha g(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}
$$

6. En utilisant (2.1) pour $f(x) = \lambda$, on trouve :

$$
T_\alpha(\lambda) = 0.
$$

Théorème 2.1. *[3] Soit $n < \alpha \leq n+1$, on a :*

$$
T_\alpha(x^\beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{\beta-\alpha}, & \beta\in\mathbb{N} \quad et \quad \beta>\alpha. \\ 0, \quad \beta\in\mathbb{N} \quad et \quad \beta\leq\alpha. \end{cases}
$$

Proposition 2.1. *[16] Soit $f : [a, \infty) \longrightarrow \infty$ continue et $0 < \alpha, \beta \leq 1$, tel que $1 < \alpha+\beta \leq 2$. Alors :*

$$T_\alpha^a T_\beta^a f(x) = T_{\alpha+\beta}^a f(x) + (1-\beta)(x-a)^{-\beta} T_\alpha^a f(x). \tag{2.8}$$

preuve : Par la règle du produit fractionnaire et que f est deux fois différentiable nous avons

$$\begin{aligned} T_\alpha^a T_\beta^a f(x) &= x^{1-\alpha} \frac{d}{dt}[x^{1-\beta}(x-a)^{-\beta} f'(x)] \\ &= x^{1-\alpha}[x^{1-\beta} f''(x) + (1-\beta)(x-a)^{-\beta} f'(x)] \\ &= T_{\alpha+\beta}^a f(x) + (1-\beta)(x-a)^{-\beta} T_\alpha^a. \end{aligned}$$

Théorème 2.2. *[16] (Règle de Chaîne). Soit $f, g : (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions α-différentiables (à gauche), où $0 < \alpha \leq 1$. Soit $h(x) = f(g(x))$. Alors $h(x)$ est (à gauche) α-différentiable et pour tout $x \neq a$ et $g(x) \neq 0$, on a :*

$$\left(T_\alpha^a h\right)(x) = \left(T_\alpha^a f\right)(g(x)). \left(T_\alpha^a g\right)(x).g(x)^{\alpha-1}.$$

Si $x = a$, on obtient :

$$\left(T_\alpha^a h\right)(x) = \lim_{x \to a^+} \left(T_\alpha^a f\right)(g(x)). \left(T_\alpha^a g\right)(x).g(x)^{\alpha-1}.$$

Preuve :

En définie $u = x + \epsilon(x-a)^{1-\alpha}$ dans la définition et en utilisant la continuité de g nous avons que

$$\begin{aligned} T_\alpha^a h(x) &= \lim_{u \to x} \frac{f(g(u)) - f(g(x))}{(u-x)} x^{1-\alpha} \\ &= \lim_{u \to x} \frac{f(g(u)) - f(g(x))}{(g(u) - g(x)}. \lim_{u \to x} \frac{g(u) - g(x)}{u-x} x^{1-\alpha} \\ &= \lim_{g(u) \to g(x)} \frac{f(g(u)) - f(g(x))}{(g(u) - g(x)}.g(x)^{1-\alpha}.T_\alpha^a g(x).g(x)^{\alpha-1} \\ &= (T_\alpha^a)(g(x)).(T_\alpha^a)(x).g(x)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Dérivée fractionnaire conformable de certaines fonctions

Nous donnons dans ce qui suit la dérivée fractionnaire conformable de certaines fonctions [14] :

1)$T_\alpha(x^p) = px^{p-\alpha}$, pour tout $p \in \mathbb{R}$.

2) $T_\alpha(1) = 0$.
3) $T_\alpha(e^{\lambda x}) = \lambda x^{1-\alpha} e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4) $T_\alpha(\sin bx) = bx^{1-\alpha} \cos bx$, $b \in \mathbb{R}$.
5) $T_\alpha(\cos bx) = -bx^{1-\alpha} \sin bx$, $b \in \mathbb{R}$.
6) $T_\alpha(\frac{1}{\alpha} x^\alpha) = 1$.

2.2 Intégrale fractionnaire conformable

Définition 2.2. *[16] Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et $0 < \alpha \leq 1$. Alors l'intégrale fractionnaire conformable à gauche de f d'ordre α est définie par :*

$$\left(\mathcal{I}_\alpha^a f\right)(x) = \int_a^x f(t) d_\alpha(t, a) = \int_a^x f(t)(t-a)^{\alpha-1} dt,$$

et à droite si $f :]-\infty, b[\to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$, l'intégrale de x à b est :

$$\left({}^b\mathcal{I}_\alpha f\right)(x) = \int_x^b f(t) d_\alpha(b, t) = \int_x^b f(t)(b-t)^{\alpha-1} dt.$$

On écrit $d_\alpha(t) = t^{\alpha-1}$ et nous disons si f est différentiable alors $\mathcal{I}_\alpha$ existe on donne la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$.Alors l'intégrale fractionnaire conformable de f d'ordre α pour tout $x > 0$ est définie par :

$$\left(\mathcal{I}_\alpha f\right)(x) = \int_0^x f(t) t^{\alpha-1} dt. \tag{2.9}$$

Lemme 2.1. *[14] Soit la fonction $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ continue et $0 < \alpha \leq 1$. Alors pour tout $x > 0$ on a :*

$$T_\alpha^a[\mathcal{I}_\alpha^a f(x)] = f(x).$$

Preuve : f est continue, alors $\mathcal{I}_\alpha^a(f)(x)$ est clairement différentiable

$$\begin{aligned}
T_\alpha(\mathcal{I}_\alpha f)(x) &= (x-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dx} I_\alpha(f)(x) \\
&= (x-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \\
&= x^{1-\alpha} \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Proposition 2.2. *[16] Soit $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $0 < \alpha,\ \mu \leq 1$ telle que $0 < \alpha+\mu \leq 2$. Alors*

$$\left(\mathcal{I}_\alpha \mathcal{I}_\mu f\right)(x) = \frac{x^\mu}{\mu}(\mathcal{I}_\alpha f)(x) + \frac{1}{\mu}(\mathcal{I}_{\alpha+\mu} f)(x) - \frac{x}{\mu}\int_0^x t^{\alpha+\mu-2} f(t)dt. \tag{2.10}$$

Preuve :

$$\left(\mathcal{I}_{\alpha+\mu} f\right)(x) = \left(\boldsymbol{I}_2 s^{\alpha+\mu-2} f(t)\right)(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha+\mu-2} dt,$$

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_\alpha \mathcal{I}_\mu f\right)(x) &= \int_0^x \left(\int_0^{x_1} f(t) t^{\alpha-1} dt\right) x_1^{\mu-1} dx_1 \\
&= \int_0^x f(t) t^{\alpha-1} \left(\int_t^x x_1^{\mu-1} dx_1\right) dt \\
&= \int_0^x f(t) t^{\alpha-1} \left[\frac{x^\mu}{\mu} - \frac{t^\mu}{\mu}\right] dt \\
&= \frac{x^\mu}{\mu}(I_\alpha f)(x) + \frac{1}{\mu}\left[(I_{\alpha+\mu} f)(x) - x\int_0^x s^{\alpha+\mu-2} f(t) dt\right].
\end{aligned}$$

Lemme 2.2. *[16] Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $0 < \alpha \leq 1$. Alors pour tout $x > a$ On a :*

$$\mathcal{I}_\alpha^a T_\alpha^a(f)(x) = f(x) - f(a).$$

Preuve : f est différentiable, alors $\left(D_\alpha^a f\right)(x) = (x-a)^{1-a} f'(x)$, donc nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\alpha^a T_\alpha^a(f)(x) &= \int_a^x T_\alpha^a(f)(x)(x-a)^{a-1} dx \\
&= \int_a^x (x-a)^{1-\alpha} f'(x)(x-a)^{\alpha-1} dx \\
&= \int_a^x f'(x) dx \\
&= f(x) - f(a).
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Transformation de Laplace - La méthode ADM

3.1 Transformation de Laplace

En mathématiques, la transformation de Laplace est une transformation intégrale, elle porte le nom de son auteur, le mathématicien fançais Simon Laplace (1749-1827), qui a travaillé également beaucoup sur les équations aux différences et sur les équations différentielles.

Définition et condition d'existence

Définition 3.1. *La transformation de Laplace d'une fonction continue f de la variable réelle $x \in \mathbb{R}_+$ est définie par :*

$$F(t) = \mathcal{L}(f(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx, \qquad t \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

On appelle $\mathcal{L}(f(x))$ la transformation de Laplace de $f(x)$.
La transformation de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale (3.1) est converge, c'est-à-dire s'il existe $M > 0$ et $a > 0$ tel que :

$$|f(x)| \leq Me^{ax} \text{ pour } x > T.$$

Dans ce cas, la transformation de Laplace existe pour $Re(s) > a$.

Définition 3.2. *On appelle $\mathcal{L}^{-1}(F(t))$ la transformation de Laplace inverse :*

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(t)) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(F(t))) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(t)e^{tx}dt, \quad c = Re(t) > c_0.$$

Propriétés 3.1.

1. *Linéarité :*
   Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformations de Laplace $F(t)$ et $G(t)$, et soit α et β deux réels, alors :

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha\mathcal{L}f(x) + \beta\mathcal{L}g(x).$$

2. *Transformation du produit de convolution*
   Si $\mathcal{L}(f(x)) = F(t)$ et $\mathcal{L}(g(x)) = G(t)$, alors :

$$\mathcal{L}(f * g)(x) = F(t)G(t).$$

3. *Linéarité de la transformation inverse de Laplace*
   Soient $F(t) = \mathcal{L}(f)(t)$ et $G(t) = \mathcal{L}(g)(t)$.
   Alors :

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F + \beta G)(x) = \alpha\mathcal{L}^{-1}(F)(x) + \beta\mathcal{L}^{-1}(G)(x).$$

4. *Transformation de Laplace des dérivées*
   La transformation de Laplace de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction f est donnée par :

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(x) = x^n\mathcal{L}(f)(x) - \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}f^{(n-k)}(0). \tag{3.2}$$

3.2 Transformation de Laplace de la dérivée conformable

Dans cette section nous présentons la définition du transformation de Laplace de la dérivée conformable et quelques propriétés nécessaires concernant cette transformation.

Transformation de Laplace de la dérivée Conformable

Définition 3.3. *[16] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle et $0 < \alpha \leq 1$. Alors la transformation de Laplace da la dérivée conformable de f d'ordre α est définie par :*

$$\mathcal{L}_\alpha(f(x))(s) = F_\alpha(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{x^\alpha}{\alpha}} f(x) x^{\alpha-1} dx. \tag{3.3}$$

Théorème 3.1. *[16] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle différentiable. Alors la transformation de Laplace de la dérivée conformable est donnée par :*

$$\mathcal{L}_\alpha(T_\alpha f(x))(s) = sF_\alpha(s) - f(0). \tag{3.4}$$

Preuve : D'après la définition (3.3) et l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\alpha(T_\alpha f(x))(s) &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-s\frac{x^\alpha}{\alpha}} T_\alpha(f)(x) x^{\alpha-1}\, dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-s\frac{x^\alpha}{\alpha}} \frac{df}{dx} x^{1-\alpha} x^{\alpha-1} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-s\frac{x^\alpha}{\alpha}} \frac{df}{dx},
\end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par parties, supposons que :

$$u = e^{-s\frac{x^\alpha}{\alpha}}, \quad du = -sx^{\alpha-1} e^{-s\frac{x^\alpha}{\alpha}} dx,$$

$$dv = \frac{df}{dx}, \quad v = f(x).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\alpha(T_\alpha f(x))(s) &= \lim_{t\to\infty} \left[e^{-s\frac{x^\alpha}{\alpha}} f(x) \right]_0^t - \lim_{t\to\infty} \int_0^t -sx^{\alpha-1} e^{-s\frac{x^\alpha}{\alpha}} f(x) dx \\
&= [0 - f(0)] + s \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-s\frac{x^\alpha}{\alpha}} x^{\alpha-1} f(x)\, dx \\
&= sF_\alpha(s) - f(0), \quad s > 0.
\end{aligned}$$

Lemme 3.1. *[16] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}_\alpha(f(x))(s) = F_\alpha(s)$ existe. Alors :*

$$F_\alpha(s) = \mathcal{L}(f((\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}))(s).$$

En effet d'aprés la définition (2.3), on pose $u = \frac{x^\alpha}{\alpha}$

$$
\begin{aligned}
F_\alpha(s) &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-s\frac{x^\alpha}{\alpha}} f(x) x^{\alpha-1}\, dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-su} f((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}})(s)\, du \\
&= \mathcal{L}(f((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}))(s).
\end{aligned}
$$

Quelques propriétés

Dans cette partie on va présenter quelques propriétés de la transformation de Laplace de la dérivée conformable

1. La transformation de Laplace de la dérivée conformable est un opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}(\mu f(x) + \lambda g(x))(s) = \mu F_\alpha(s) + \lambda G_\alpha(s),$$

avec μ et λ sont des constantes.

2. Déplacement ([16]) :

$$\mathcal{L}_\alpha\left(e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(x)\right) = \mathcal{L}\left(f((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})\right)|_{s=s+k}, \quad s > -k.$$

3. Les dérivées de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire conformable

$$F_\alpha^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}_\alpha\left(\frac{x^{n\alpha}}{\alpha^n} f(x)\right).$$

4. La transformation de Laplace de l'intégrale conformable

$$\mathcal{L}_\alpha(\mathcal{I}_\alpha f(x)) = s^{-1} F_\alpha(s).$$

5. Soit f et g deux fonctions contenues quelconques. Alors la transformation de Laplace de la dérivée conformable de la convolution de $f(x)$ et $g(x)$ est

$$\mathcal{L}_\alpha(f * g)(x) = F_\alpha(s).G_\alpha(s),\ 0 < \alpha \leq 1.$$

Tableau de la Transformation de Laplace de la dérivée conformable pour des fonctions d'ordre entier et d'ordre fractionnaires

$f(x)$	$F_\alpha(s) = \mathcal{L}_\alpha f(x)$
c	$\frac{c}{s}, s > 0$
x^p	$\alpha^{\frac{p}{\alpha}} \frac{\Gamma(1+\frac{p}{\alpha})}{s^{1+\frac{p}{\alpha}}}, s > 0$
$e^{a\frac{x^\alpha}{\alpha}}$	$\frac{1}{s-a}, s > 1$
$\sin\left(b\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)$	$\frac{b}{s^2+b^2}, s > 0$
$\cos\left(b\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)$	$\frac{s}{s^2+b^2}, s > 0$
$\sinh\left(b\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)$	$\frac{b}{s^2-b^2}, s > \lvert b\rvert$
$\cosh\left(b\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)$	$\frac{s}{s^2-b^2}, s > \lvert b\rvert$
$E_\alpha(-ax)$	$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+a)}$
$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ax^\alpha)$	$\frac{1}{s^\alpha-a}$
$1 - E_\alpha(-ax^\alpha)$	$\frac{a}{s(s^\alpha-a)}$
$x^\alpha E_{1,\alpha+1}(ax)$	$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$
$x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(ax^\alpha)$	$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha-a}$
$E_\alpha(\mp\lambda x^\alpha), Re(s) > \lvert\lambda\rvert^{\frac{1}{\alpha}}$	$\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha\mp\lambda}$

3.3 Méthode de décomposition d'Adomian (ADM)

La méthode de décomposition d'Adomian, est une méthode mathématique permettant de résoudre des équations de physique mathématique linéaires et non linéaires, elle a été proposée par George Adomian ([6], [8]). Cette méthode consiste à recherché la solution d'une équation algébrique ou différentielle sous la forme d'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et à décomposer le terme non linéaire Ny sous la forme d'une série $Ny = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$, les termes A_n sont appelés polynômes d'Adomian.

3.3.1 Principe de la méthode ADM

Considérons l'équation fonctionnelle :

$$Au = f, \tag{3.5}$$

où A est un opérateur différentiel contenant des termes linéaires et des termes non linéaires et f est une fonction connue. L'opérateur A est décomposé en $L + R + N$ où $L + R$ et L est inversible et R est le reste de (3.5) et N le terme non linéaire de A, alors (3.5) s'écrit comme :

$$Lu + Ru + Nu = f. \tag{3.6}$$

L étant inversible, si L^{-1}est son inverse on a :

$$u = \Phi + L^{-1}f - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \tag{3.7}$$

où Φ est la constante de l'intégration.

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \tag{3.8}$$

et à décomposer le terme non linéaire Nu sous forme d'une série

$$Nu = f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n. \tag{3.9}$$

Les termes A_n sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenus grâce à la relation suivante :

$$A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n u_n\right)\right]_{\lambda=0}, \tag{3.10}$$

où λ est un paramètre réel.

En remplaçant les relations (3.8) et (3.9) dans (3.7), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \Phi + L^{-1}f - L^{-1}R\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty} A_n. \tag{3.11}$$

Ce qui entraîne par identification :

$$\begin{cases} u_0 = \Phi + L^{-1}f, \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n. \end{cases} \tag{3.12}$$

Tous les termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne peuvent être calculés, on utilise l'approximation : $\varphi_n = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i, n \leq 1$, avec $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n = u$.

3.3.2 Polynômes d'Adomian

Définition 3.4. *[9] Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule suivante :*

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}. \end{cases} \tag{3.13}$$

La formule proposée par G. Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian. $(A_n)_{n\geq 0}$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
A_0(u_0) &= N(u_0)\\
A_1(u_0,u_1) &= u_1\frac{\partial}{\partial u}N(u_0)\\
A_2(u_0,u_1,u_2) &= u_2\frac{\partial}{\partial u}N(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}N(u_0)\\
A_3(u_0,u_1,u_2,u_3) &= u_3\frac{\partial}{\partial u}N(u_0)+u_1u_2\frac{\partial^2}{\partial u^2}N(u_0)+\frac{1}{3!}u_1^3\frac{\partial^3}{\partial u^3}N(u_0).\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n=\sum_{v=0}^{n}c(v,n)N^{(v)}(u_0), n\geq 1, \tag{3.14}$$

où : $c(v,n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égale à n, m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

Exemple 3.1. *Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante :*

$$\begin{cases} u'+u^2=0, \quad x\geq 0\\ u(0)=1. \end{cases} \tag{3.15}$$

On a :

$$Lu=u' \qquad et \qquad Nu=u,$$

avec $L=\frac{d}{dt}(.)$.

On trouve :

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n=u(0)-L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}A_n.$$

Les polynômes d'Adomiar sont :

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^2 \\
A_1 &= 2u_0u_1, \\
A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, \\
A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1, \\
u_1 &= -L^{-1}(A_0) = -x, \\
u_2 &= -L^{-1}(A_1) = x^2, \\
u_3 &= -L^{-1}(A_2) = -x^3, \\
u_4 &= -L^{-1}(A_3) = x^4,
\end{aligned}$$

donc la soution donnée par :

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1.
\end{aligned}$$

Convergence de la méthode ADM

Théorème 3.2. *[18]*

$$Si \quad \sum_{n\geq 0} A_n < +\infty \quad alors \quad \sum_{n\geq 0} u_n < +\infty, \tag{3.16}$$

et réciproquement. Notons d'abord que la méthode décompositionnelle appliquée à (3.5) se ramène à la recherche d'une suite : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$*, avec* $S_0 = 0$ *et vérifiant la relation récurrente suivante :*

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), \quad S_0 = 0, \quad u_0 = f, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.17}$$

On en déduit le résultat de convergence suivant :

Théorème 3.3. *[18] Si l'opérateur N est une contraction (c'est-à-dire vérifier$\|N\| < \delta < 1$) alors la suite $(S_n)_n$ satisfaisant la relation de récurrence $S_{n+1} = N(u_0 + S_n)$.*

Avec $S_0 = 0, n \geq 0$ converge vers S solution de $S = N(u_0 + S)$.
Si N est une contraction alors les séries des u_n et des A_n sont covergentes.

De plus, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est solution de l'équation $Au = f$.

Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre on va appliquer les deux méthodes mentionner dans le chapitre trois pour résoudre quelques équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles fractionnaire, où la dérivée fractionnaire et au sens conformable et l'ordre de la dérivée et α, où α appartient a l'intèrvalle $]0, 1]$.

4.1 L'application de la transformation de Laplace

4.1.1 Équation différentielle ordinaire linéaire homogène d'ordre $\alpha, (0 < \alpha \leq 1)$

Exemple 1 : On considère l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre fractionnaire et $x > 0$ sous la forme suivante :

$$T_\alpha u - u = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.1}$$

avec la condition initiale :

$$u(0) = 1. \tag{4.2}$$

On applique la transformation de Laplace sur les deux membres de l'équation (4.1)

$$\mathcal{L}_\alpha \left(T_\alpha u - u\right) = 0, \tag{4.3}$$

ou encoure

$$\mathcal{L}_\alpha\left(T_\alpha u\right)-\mathcal{L}_\alpha\left(u\right)=0, \tag{4.4}$$

Sachant que $\mathcal{L}_\alpha\left(T_\alpha u\right)=su_\alpha(s)-u(0)$, alors

$$su_\alpha(s)-1-u_\alpha(s)=0, \tag{4.5}$$

ce qui implique que

$$(s-1)u_\alpha(s)=1,$$

ainsi

$$u_\alpha(s)=\frac{1}{s-1}. \tag{4.6}$$

On applique $\mathcal{L}_\alpha^{-1}$ sur les deux côtés de (4.6), on obtient :

$$u(x)=\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right).$$

D'après le tableau précédent on trouve la solution exacte de l'équation (4.1), sous la forme suivante

$$u(x)=e^{\frac{x^\alpha}{\alpha}}.$$

Dans le cas $\alpha=1$, on obtient

$$u(x)=e^x. \tag{4.7}$$

4.1.2 Équation différentielle ordinaire linéaire non-homogène d'ordre $\alpha,(0<\alpha\leq 1)$

Exemple 2 : On considère l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre fractionnaire et $x>0$ sous la forme suivante :

$$T_\alpha u+u=\frac{2}{\Gamma(4-\alpha)}x^{3-\alpha}-\frac{1}{\Gamma(3-\alpha)}x^{2-\alpha}, \quad 0<\alpha\leq 1, \tag{4.8}$$

avec la condition initiale :

$$u(0)=0. \tag{4.9}$$

Prenons la transformation de Laplace sur les deux membres de l'équation (4.8), on obtient :

$$\mathcal{L}_\alpha\left(T_\alpha u+u\right)=\mathcal{L}_\alpha\left(\frac{2}{\Gamma(4-\alpha)}x^{3-\alpha}-\frac{1}{\Gamma(3-\alpha)}x^{2-\alpha}\right), \tag{4.10}$$

car la transformation de Laplace est linéaire, on obtient :

$$\mathcal{L}_\alpha\left(T_\alpha u\right)+\mathcal{L}_\alpha\left(u\right)=2\mathcal{L}_\alpha\left(\frac{x^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}\right)-\mathcal{L}_\alpha\left(\frac{x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right). \tag{4.11}$$

Sachant que $\mathcal{L}_\alpha\left(T_\alpha u\right)=su_\alpha(s)-u(0)$, alors

$$su_\alpha(s)-u(0)+u_\alpha(s)=\frac{2}{\Gamma(4-\alpha)}\alpha^{\frac{3-\alpha}{\alpha}}\frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha})}{s^{\frac{3}{\alpha}}}+\frac{1}{\Gamma(3-\alpha)}\alpha^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\frac{\Gamma(\frac{2}{\alpha})}{s^{\frac{2}{\alpha}}} \tag{4.12}$$

Puis, on obtient

$$u(x)=2.x^3E_{\alpha,4}(-x^\alpha)+x^2E_{\alpha,3}(-x^\alpha). \tag{4.13}$$

Dans le cas $\alpha=1$, on obtient

$$\begin{aligned}u(x)&=2.x^3E_{1,4}(-x)+x^2E_{1,3}(-x)\\&=-e^{-x}+x^2-x+1,\end{aligned} \tag{4.14}$$

qui est la solution exacte de l'équation différentielle ordinaire (4.8).

4.2 L'application de la méthode ADM

4.2.1 Équation différentielle non linéaire d'ordre $\alpha,(0<\alpha\leq 1)$

Exemple 1 : On considère l'équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre α sous la forme suivante :

$$T_\alpha u-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^2=-x\sin(\frac{t^\alpha}{\alpha})+x^2\cos^2(\frac{t^\alpha}{\alpha}),\quad 0<\alpha\leq 1, \tag{4.15}$$

où $x>0,t>0$ et la condition initiale :

$$u(x,0)=x. \tag{4.16}$$

D'après les étapes de la méthode ADM, on obtient :

$$L_\alpha = T_\alpha u, \quad Nu = u^2, \quad Ru = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad f(t) = -x\sin(\frac{t^\alpha}{\alpha}) + x^2\cos^2(\frac{t^\alpha}{\alpha}).$$

D'aprés (2.3) l'équation (4.15) peut s'écrire comme :

$$t^{1-\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 = -x\sin(\frac{t^\alpha}{\alpha}) + x^2\cos^2(\frac{t^\alpha}{\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{4.17}$$

Si $L_\alpha^{-1} = \int_0^t \frac{1}{s^{1-\alpha}}ds$, qui est l'inverse de L_α, on applique L_α^{-1} sur les deux côtés de (4.17), on obtient :

$$u(x,t) = u(x,0) + L_\alpha^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - L_\alpha^{-1}\left(u^2\right) + L_\alpha^{-1}\left(-x\sin(\frac{t^\alpha}{\alpha}) + x^2\cos^2(\frac{t^\alpha}{\alpha})\right), \tag{4.18}$$

la solution sous forme d'une série donné par :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \tag{4.19}$$

et le terme non linéaire Nu sous forme d'une série :

$$Nu = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n. \tag{4.20}$$

Les termes A_n sont les polynômes d'Adomian.

De (4.19) et (4.20) l'équation (4.18) devient que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u(x,0) - L_\alpha^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + x\sin(\frac{t^\alpha}{\alpha}) - x^2\cos^2(\frac{t^\alpha}{\alpha})\right). \tag{4.21}$$

D'aprés (3.12) et la condition initiale (4.16)

$$\begin{cases} u_0 = x + L_\alpha^{-1}\left(-x\sin(\frac{t^\alpha}{\alpha}) + x^2\cos^2(\frac{t^\alpha}{\alpha})\right), \\ u_1 = -L_\alpha^{-1}(u_0) - L_\alpha^{-1}(A_0), \\ u_2 = -L_\alpha^{-1}(u_1) - L_\alpha^{-1}(A_1), \\ u_3 = -L_\alpha^{-1}(u_2) - L_\alpha^{-1}(A_2), \\ \vdots \end{cases} \tag{4.22}$$

Les premiers termes des polynômes d'Adomian sont données par (voir exemple 2.1) :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2, \\ A_1 &= 2u_1u_0, \\ A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, \end{aligned} \tag{4.23}$$

par conséquent on a :

$$\begin{cases} u_0 = x, \\ u_1 = -x\,\frac{t^{2\beta}}{\beta 2!}, \\ u_2 = x\,\frac{t^{4\beta}}{\beta^4 4!}, \\ u_3 = -x\,\frac{t^{6\beta}}{\beta^6 6!}. \end{cases} \tag{4.24}$$

Alors la solution de (4.15) donne par la série suivant :

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \sum_{k=0}^{n} u_k(x,t) \\ &= x\left(1 - \frac{t^{2\beta}}{\beta 2!} + \frac{t^{4\beta}}{\beta^4 4!} - \frac{t^{6\beta}}{\beta^6 6!} + \dots\right) = x.\cos(\frac{t^{\beta}}{\beta}) \end{aligned} \tag{4.25}$$

La solution (4.25) est le même qua celle obtenu dans [13].

Exemple 2 : On considère le système aux dérivées partielles non linéaire d'ordre α sous la forme suivante :

$$\begin{cases} T_\alpha u + v\frac{\partial u}{\partial x} + u = 1, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ T_\alpha u - u\frac{\partial v}{\partial x} - v = 1 \end{cases} \tag{4.26}$$

où $x > 0, t > 0$ et la condition initiale :

$$u(x,0) = e^x, \quad v(x,0) = e^{-x}. \tag{4.27}$$

D'après les étapes de la méthode ADM, on a :

$$\begin{cases} L_\alpha = T_\alpha u, \quad Nu = v\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Ru = u, \quad f(t) = 1. \\ L_\alpha = T_\alpha v, \quad Nu = -u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Ru = -v, \quad f(t) = 1. \end{cases}$$

D'aprés (2.3) le système (4.26) peut s'écrire comme :

$$\begin{cases} t^{1-\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x} - u + 1. \\ t^{1-\alpha}\frac{\partial v}{\partial t} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v + 1. \end{cases} \tag{4.28}$$

Si l'opérateur $L_\alpha^{-1} = \int_0^t \frac{1}{s^{1-\alpha}} ds$, qui est l'inverse de L_α, on applique L_α^{-1} sur les deux côtés de (4.28) et on obtient :

$$\begin{cases} u(x,t) = u(x,0) - L_\alpha^{-1}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - L_\alpha^{-1}(u) + L_\alpha^{-1}(1). \\ v(x,t) = v(x,0) + L_\alpha^{-1}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + L_\alpha^{-1}(v) + L_\alpha^{-1}(1). \end{cases} \tag{4.29}$$

la solution sous forme d'une série donné par :

$$\begin{cases} u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \\ v = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n, \end{cases} \tag{4.30}$$

et le terme non linéaire Nu sous forme d'une série :

$$\begin{cases} Nu = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n, \\ Nu = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n. \end{cases} \tag{4.31}$$

Les termes A_n et B_n sont les polynômes d'Adomian.

De (4.30) et (4.31) le système (4.29) devient que :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u(x,0) - L_\alpha^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - 1\right). \\ \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = v(x,0) + L_\alpha^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\frac{\partial v}{\partial x} + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n + 1\right) \end{cases} \tag{4.32}$$

D'aprés (3.12) et la condition initiale (4.27)

$$\begin{cases} u_0 = u(x,0) + L_\alpha^{-1}(f), \\ u_1 = -L_\alpha^{-1}(u_0) - L_\alpha^{-1}(A_0), \\ u_2 = -L_\alpha^{-1}(u_1) - L_\alpha^{-1}(A_1), \\ u_3 = -L_\alpha^{-1}(u_2) - L_\alpha^{-1}(A_2), \\ \vdots \end{cases} \tag{4.33}$$

et

$$\begin{cases} v_0 = v(x,0) + L_\alpha^{-1}(f), \\ v_1 = -L_\alpha^{-1}(v_0) - L_\alpha^{-1}(B_0), \\ v_2 = -L_\alpha^{-1}(v_1) - L_\alpha^{-1}(B_1), \\ v_3 = -L_\alpha^{-1}(v_2) - L_\alpha^{-1}(B_2), \\ \vdots \end{cases} \tag{4.34}$$

Les premiers termes des polynômes d'Adomian sont données par

$$\begin{gathered} A_0 = v_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\ A_1 = v_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\ A_2 = v_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \end{gathered} \tag{4.35}$$

et

$$\begin{gathered} B_0 = u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x}, \\ B_1 = u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x}, \\ B_2 = u_2 \frac{\partial v_0}{\partial x} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_0 \frac{\partial v_2}{\partial x}, \end{gathered} \tag{4.36}$$

par conséquent on a :

$$\begin{cases} u_0 = e^x, \\ u_1 = -e^x \frac{t^\alpha}{\alpha}, \\ u_2 = e^x \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}, \\ u_3 = -e^x \frac{t^3\alpha}{\alpha^3 3!} \end{cases} \tag{4.37}$$

et

$$\begin{cases} v_0 = e^{-x}, \\ v_1 = e^{-x} \frac{t^\alpha}{\alpha}, \\ v_2 = e^{-x} \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}, \\ v_3 = e^{-x} \frac{t^3\alpha}{\alpha^3 3!} \end{cases} \tag{4.38}$$

Alors la solution de (4.26) donne par comme suit :

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e^{x - \frac{t^\alpha}{\alpha}} \\ v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = e^{-x + \frac{t^\alpha}{\alpha}} \end{cases} \tag{4.39}$$

La solution (4.39) est le même qua celle obtenu dans [13].

Conclusion

Le travail principal que nous avons fait dans ce mémoire, est d'introduire une nouveulle dérivée qui est la dérivée fractionnaire conformable avec quelques propriétés principals de cette dérivée. Après cela, nous avons présenté deux méthodes célèbres, à savoir la transformation de Laplace et la méthode ADM, puis nous les avons appliquées pour résoudre des EDO et EDP linéaires et non linéaires avec la dérivée fractionnaire conformable.

Bibliographie

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo ; *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam 2006.

[2] A.A. Kilbas, O.I. Marichev, S.G. Samko ; *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

[3] Bounouiga Mohamed ; Etude de quelques équations différentielles liés au calcul fractionnaire conformable, (Mémoire de Master,Université de M'sila), 2023.

[4] D. Ziane ; *Méthode combinée des perturbations HPM et VIM pour la résolution des équations différentielles ordinaires et EDP d'ordre fractionnaire*, Doctorat en mathématiques, Option EDP-Analyse Numérique, Université D'Oran 1, Ahmed Ben Bella, 2016.

[5] I. Podlubny ; *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.

[6] G. Adomian ; *Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics*. Kluwer Academic Publishers Netherlands, 1989.

[7] G. Adomian ; Rach R. *Equality of partial solutions in the decomposition method for linear or nonlinear partial differential equations*. Comput Math Appl.10 :9-12, 1990.

[8] G. Adomian ; *Solving Frontier Problems of Physics The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers Boston, 1994.

[9] G. Adomian ; *Solving frontier problems of physics : the decomposition method*.volume 60. Springer Science Business Media, 2013.

[10] K.B. Oldham, J. Spanier ; *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.

[11] K. Diethelm ; *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[12] K. S. Miller, B. Ross ; *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional DiFFerential Equations*, Wiley and Sons, New York, 1993.

[13] M. Eslami, S. A. Taleghani ; *Differential transform method for conformable fractional partial differential equations*, Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization Vol. 9, No. 2, p 17-29,2019

[14] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh ; A new definition of fractional derivative, J. Comput. Appl. Math. 264 65–70, 2014.

[15] S. Abdelkebir ; Étude de quelques problèmes d'évolution pour des équations aux dérivées fractionnaires(Doctoral dissertation, Université de M'sila), 2022.

[16] T. Abdeljawad ; On conformable fractional calculus.*Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 2012, article 62(10 pages), 2015.

[17] Tilloulini Aicha ; Sur La dérivée fractionnaire du caputo et Application Sur les Équations différentielles Fractionnaires (Mémoire de Master, université D'Adrar), 2021.

[18] Y. Cherruault ; *Convergence of adomian's method*. Kybernetes, 1989