République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET SCIENCES DE LA MATIERE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE PRESENT EN VUE DE L OTENTION DU DIPLOME

MASTER en Mathématiques

Option **:** Probabilités Et Statistique

Par

Lebssisse Ibtihal

Titre

Principe du maximum de contrôle stochastique pour le système d'équations différentielles stochastique EDSs-EDSRs

Devant le jury composé de :

AMARA.Abdelkader	MCA. UKM- Ouargla	Président
SAOULI Mostapha Abdelouahab	MCB. UKM - Ouargla	Examinateur
MANSOUL Brahim	MAA. UKM - Ouargla	Encadreur

Juin 2024

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Lebssisse Ibtihal

Titre

Principe du maximum de contrôle stochastique pour le système d'équations différentielles stochastique EDSs-EDSRs

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	AMARA.Abdelkader	MCA UKM OUARGLA	Président
Dr.	Saouli Mostafa abdelouahab	MCA UKM OUARGLA	Examinateur
Dr.	Mansoul Brahim	MAA UKM OUARGLA	Encadreur

Juin 2024

Dédicace

*J*e dédie ce modeste travail :

à ma **chére mére** et je lui dis que je suis ici grâce àDieu tout –puissant et grâce à vos priéres..Âmon **cher pére**,que Dieu ait son âme et l'accueille dans son vaste paradis.

a mes frères : **Bilal** et **Mohsine,Ahmed,Loqman Abd–Elwadoud** .

a mes sœurs : **Ibtissam,Afaf.**

a mon petit prince **: Amir**

à mon soutien et à la personne la plus chére et proche de mon coeur : **Adel Guissi**

REMERCIEMENTS

𝒥e tiens remercier tout dabord «**Allah**»

qui nous a permis d’atteindre ce moment et d’achever ce travail

qui nous a permis d’atteindre ce moment et d’achever ce travail

J e tiens à remercier mon encadreur **Mr.Mansoul Brahim**.

Pour son précieux conseil et son aide.durant toute la période du travail.

J e remercie également aux membres du Jury **Dr :Saouli Mostapha**

abdelouahab.Dr :**Benbrahim Radhia**

qui ont acceptés dévaluer et de juger mon travaill

..

Table des matières

Introduction

Les équation différentielles stochastiques sont un développement d'équation différentielles ordinaires en ajoutant des élément aléatoires au côté droit de l'équation . Les recherche dans ce domaine ont commencé avec les travaux du mathématicien francais Paul Lévy en 1940 sur l'analyse des processus aléatoires et leurs applications . En 1954, le mathématicien russe Andrei Kolmogorov a fourni la premiére définition mathématique des équations différentielles stochastique la méme année, Stratonovich introduit une nouvelle théorie de l'intégration stochastique, qui devient largement utilisée dans l'étude des équations différentielles stochastiques.

En 1966, Kiyoshi Itô [6] présente la théorie de l'ntégration stochastique en utilisant le concept d'intégration simultanée, concept fondamental dans le calcul des équation différentielles stochastiques . Cette contribution a contribué à développer la théorie des équations différentielles stochastiques et à la rendre plus utilisable dans des applications pratiques, et David Crispin qui a dévaloppé la théorie des équation différentielles stochastiques et ses applications dans des domaines tels que la biologie et le génie chimique ,et a contribué de maniére significative au développement de ce domaine. La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) ont été introduites en 1973 dans un article de J.M. Bismut, portant sur le contrôle stochastique optimal et la version probabiliste du principe du maximum de Pontryagin. Cependant, le premier résultat général concernant les EDSR n'a été établi qu'en 1990, grâce à E. Pardoux et S. Peng

Systéme d'équations différentielles stochastiques EDS–EDSR .Antonelli [1] a été le premiere a étudier ces équations et a donner l'existence et l'unicité , et l'étude a été réalisée par de nombreux auteurs dans d'autres cas . L'application du systéme d'équations EDSs–EDSRs est le principal maximum stochastique pour le probléme du contrôle optimal, et la premiére personne a l'avoir fait était Peng [9]. A.Chala, R.Khalout [3] .ont étudié les conditions d'optimalité nécessaires et suvisantes des contrôles lorsque le système est gouverné par une équation diférentielle stochastique EDS-EDSR.

L'objet de cette mémoire est l'étude des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour des systèmes gouvernés par des EDS–EDSR, On considère le système suivante :

$$\begin{cases} dx_t^v = & b\left(t, x_t^v, v_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) dB_t, \\ dy_t^v = & -f\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t\right) dt + z_t^v dB_t, \\ x_0^v = \xi & \qquad y_T^v = h\left(x_T^v\right) \end{cases}$$

telle que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré unidimensionnel satisfait les conditions habituelles. sur lequel on définit un mouvement Brownien $B = (B)_{t\geq 0}$,.Un contrôle admissible $v = (v_t; t \in [0; T])$tout processus $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeur dans Ude $\mathbb{R}$, et on note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des tous les contrôles admissibles.

ζ est une variable aléatoire de unidimensionnel , $\mathcal{F}_T$-mesurable et indépendante de mouvemement Brownien tel que : $\mathbb{E}\left|\xi\right|^2 < \infty$.

On définit la fonction de coût par l'espression suivante :

$$J(v) = \mathbb{E}\left[\Phi\left(x_T^v\right) + \Psi\left(y_0^v\right) + \int_0^T l\left(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t\right) dt\right].$$

Alors L'objectif du principe du maximum stochastique est de contrôler et d'extraire de maniére optimale les conditions nécessaires et suffisantes pour parvenir à l'optimisation du systéme EDS–EDSR.

Dans ce mémoire qui ce compose à trois chapitre :

Premièr chapitre :

On introduit les générales du calcul stochastique ou nous définissons les outils de base pour étudier **l'EDS**.(tribu et lafiltration ;et le mouvement Brownien,et le processus stochastique

...etc.)

Deuxième chapitre :

Nous étudions dans ce chapitre le résultat d'existence et d'unicité d'solution d'une EDS,et l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR dans le cas Lipchitz ,et nous etudions l'existence et l'unicité d'solution du système EDS-EDSR

Troisième chapitre :

Dans ce chapitre représente le probléme de ce mémoire, telle que le but de ce chapitre est de déterminer, les conditions nécessaires et suffisantes díoptimalité pour

de système EDS-EDSR

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

Dans ce chapitre on donne quelques définitions au calcul stochastique. Pour plus details voir[7] [4]

1.1 Espace de probabilité

Définition 1.1.1 *Une probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{F})$ est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ telle que :*

A) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

B) $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$ pour des A_n appartenant à $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints.

Remarque 1.1.1 ** Un événement $A \in \mathcal{F}$ est dit **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$.*

** Un événement $A \in \mathcal{F}$ est dit **presque sûr** (souvent abrégé p.s.) si $\mathbb{P}(A) = 1$, **i.e.** si A^c est négligeable.*

Définition 1.1.2 *Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où :*

– Ω est un ensemble d'expérence aléatoire.

– $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω.

– $\mathbb{P}$ est une (mesure de) probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

– $\mathbb{P}(\phi) = 0$

– $\forall A \in \mathcal{F}; 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$

– $\forall A \in \mathcal{F}; \mathbb{P}\left(A^C\right) = 1 - \mathbb{P}(A).$

– $\forall A, B \in \mathcal{F}; \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$

– Si $A \subset B \in \mathcal{F}; \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$

– Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}$ suite croissante $A_n \subset A_{n+1}$ et $\underset{n \geq 1}{\cup} A_n = A$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$

– Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}$ suite décroissante $A_n \subset A_{n-1}$ et $\underset{n \geq 1}{\cap} A_n = A$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$

1.2 Espérance conditionnelle

Définition 1.2.1 *Si X est une variable aléatoire intégrable dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on dit que Y est une espérance conditionnelle de X par rappore à $\mathcal{G}$ si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et si :*

$$\mathbb{E}[X 1_A] = \mathbb{E}[Y 1_A] \forall A \in \mathcal{G}.$$

On écrit alors :

$$Y = \mathbb{E}\left[X \,|\mathcal{G}\right]$$

Propriété 1.2.1 ** Linéarité :$\mathbb{E}\ (cX + Y \mid \mathcal{G}) = c\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) p.s.$*

** Positivité-monotonie : $X \geq Y$ p.s. $\Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ p.s.*

** $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.*

** Si X indépondant G alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ p.s.*

** Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$ p.s.*

** Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et bornée, alors $\mathbb{E}(XY \mid G) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})Y$ p.s.*

** Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \,| \mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,| \mathcal{G}) | \mathcal{H})$ p.s.*

1.3 Processus stochastiques

Définition 1.3.1 ***(Processus)****Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $(X_t; t \in [0, \infty)$ définies sur le même espace de probabilité .*

Définition 1.3.2 ***(Un processus mesurable)*** *Un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.3.3 ***(Processus progressivement mesurables)****. Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application*

$(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Définition 1.3.4 *Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adaptée (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t.*

Définition 1.3.5 ***(Un processus à trajectoires continues)*** *Un processus (X_t) est appelé un processus à trajectoires continues (ou simplement processus continu) si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : t \longmapsto X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1.$$

Remarque 1.3.1 *Les variables aléatroires. $X_t - X_s, t > s \geq 0$, sont appelées des accroissements du processus (X_t).*

Définition 1.3.6 ***(Processus prévisible)*** *On dit qu'un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est prévisible si X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et X_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable pour chaque $t > 0, \forall t > s \geq 0$*

Définition 1.3.7 ***(Processus à accroissements indépendance)*** *: $(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq s)$,*

Définition 1.3.8 ***(Processus à accroissements Stationnarité)*** *: $X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \forall t > s \geq 0$.*

1.4 Martingales

Définition 1.4.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré et* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t) -$ *adapté. On dit que* X *est une* $(\mathcal{F}_t) -$ *martingale si :*

1- $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$ *(autrement dit* $X_t \in L^1(\Omega)$*) pourtout* $t \geq 0$.

2- $\mathbb{E}[X_t \ |F_s] = X_s$ *pour tout* $s \leq t$.

Remarque 1.4.1 *1-* ***On dit que X est un sur-martingale si pour : tout*** s $\leq t$***,on a***

$$\mathbb{E}[X_t|F_s] \leq X_s.$$

2- ***on dit que X est un sous-martingale Si pour : tout*** s $\leq t$***,on a :***

$$\mathbb{E}[X_t|F_s] \geq X_s.$$

*3-**(Semi-martingale)** Une Semi-martingale* X_t *est un processus réel adapté et càdlàg qui se décompose en une somme d'une martingale locale* M_t *et d'une processus* Y_t *réel càdlàg et a variation finie ie.*

$$X_t = M_t + Y_t.$$

1.5 Mouvement Brownien

Définition 1.5.1 *Un mouvement brownien standard (abrégé MBS.) est un processus aléatoire à temps continu* $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ *tel que :*

1- $B_0 = 0$ *p.s.,*

2- (B_t) *est à accroissements indépendants et stationnaires,*

3- $B_t \sim \mathcal{N}(0, t), \forall t > 0$,

4- (B_t) *est à trajectoires continu.*

1.6 L'intégrale stochastique

Définition 1.6.1 *L'intégrale stochastique est une intégrale proposée avec des processus stochastiques sous la forme suivantes :*

$$\int_0^t X_s dB_s;$$

où $\{X_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.

Propriété 1.6.1 *1- Linéairité $\forall a \in \mathbb{R}$, Additivité : Pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$*

$$\int_s^t X(s)dB_s = \int_s^u X(s)dB_s + \int_u^t X(s)dB_s.$$

2- Si $\int_0^T \mathbb{E}\left[X^2(s)\right] ds < \infty$, alors pour tout $t \leq T$.

$$\int_0^t a(X_s + Y_s)dB_s = a\int_0^t X_s dB_s + a\int_0^t Y_s dB_s,$$

3- Si $\int_0^T \mathbb{E}\left[X^2(s)\right] dB_s < \infty$, alors pour tout $t \leq T$.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X(s)dB_s\right] = 0.$$

4- Isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(s)dB_s\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T (X(s))^2 ds.$$

5- Propriété du martingale $\forall 0 \leq u < t$,on a :$\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)dB_s \mid \mathcal{F}_u\right] = \int_0^u X(s)dB_s$

1.6.1 Variation quadratique

Définition 1.6.2 *Si X_t est un processus stochastique a valeurs réelles défini sur un espade probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et t le temp,telle que $t > 0$,défini par*

$$[X]_t = \lim_{||\varepsilon|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2$$

telle que $\varepsilon \in [0, t]$: (se comporter)

covariation de deux processus X et Y est (**se comporter**)

$$[X, Y] = \lim_{||\varepsilon|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) = \frac{1}{4}([X+Y]_t - [X-Y]_t)$$

1.6.2 Processus d'Itô

Définition 1.6.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0},)$un espace de probabilité filtré et (B_t)un MB .On définit un processus d'Itô $(X_t)_{t \in [0.1]}$ dans $\mathbb{R}$ sous la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)ds + \sigma(s)dB_s, \forall t \geq 0 :$$

Ou sous la forme

$$dX_t = b(t)dt + \sigma(t)dB_t$$

Avec

–X_0est $\mathcal{F}_0-$mesurable

–$(b_t)_{t \geq 0}$un processus adapté telle que :$\forall t \geq 0 \geq$: $\int_0^t |b(s)|ds < \infty$ p, s

–$(\sigma_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté telle que :$\forall t \geq 0$: $\int_0^t |\sigma(s)|^2 ds < \infty$ $p.s$

1.6.3 Formule d'Itô

Définition 1.6.4 *Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction C^2, X une semi-martingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ Alors, $F(X)$ est une semi-martingale et*

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X)_s \; dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X)_s \; d < X^i, X^j >_s .$$

Définition 1.6.5 ***(2^{éme} formule d'Itô) :****Soient f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s'(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_s'(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s.$$

Proposition 1.6.1 (3^{éme} formule d'Itô) :*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées,on a :*

$$\begin{aligned} f\left(X_t^1, X_t^2\right) &= f(x_1, x_2) + \int_0^t f_1'\left(X_s^1, X_s^2\right) dX_s^1 + \int_0^t (f_2'\left(X_s^1, X_s^2\right) dX_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \left(f_{1.1}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(\sigma_s^1\right)^2 + 2 f_{1.2}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\sigma_s^1\sigma_s^2 + f_{2.2}''\left(X_s^1, X_s^2\right)\left(\sigma_s^2\right)^2\right) \end{aligned}$$

.

Chapitre 2

Les équations différentielles stochastiques EDSs,rétrogrades EDSRs et le système EDSs-EDSRs

Dans ce chapitre , nous allons étudier la forme générale des équations diférentielles stochastiques (EDS), équations diférentielles stochastiques rétrogradé (EDSR) et le systeme (EDS–ESDR) , par ailleur que la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution qui est vérifée par un ensemble de conditions que nous examinerons

2.1 Équations Diférentielles Stochastiques (EDS).

vois [7] [?]

Définition 2.1.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ *un espace de probabilité filtré et* $(W_t)_{t\geq 0}$*un MB* $d-$*dimensionnelle,* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *un processus stochastique continue a valeur dans* $\mathbb{R}^n$,*et*

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to M_{n\times d}(\mathbb{R})$$

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme ;

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition 2.1.2 *On dit que léquation (**??**) admet unique solution forte si pour deux solution fortes $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ et $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ on a ;*

$$\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t - Y_t| > 0) = 0$$

Théorème 2.1.1 (d'existence et unicité) *Supposons que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \geq 0$,les fonctions σ et b satisfait les conditions suivants ;*

1.Les fonction σ et b sont continues

*2.**Condition Lipschitz :**Il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq K|x-y|^2 \tag{2.2}$$

*3.**Croissance linéaire :**Il existe une constante $J > 0$ telle que :$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,y)|^2 \leq J(1 + |x|^2)$.*

Si les coefficients b et σvérifient les conditions (2.2 Alor l'equation (**??** admet une solution forte unique $X = (X_t)_{t\in[0,T]}, (\mathcal{F}_t)-$adapté et continue avec condition initiale $X_0 = x$ de plus cette solution est :

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2] < N$$

ou N est une constante qui dépend de K, J et x

2.1.1 L'existence et L'unicité de la solution

Preuve. Unicité de la solution de(**??**) ■

Soient $(X_t)_{t\in T}$et $(Y_t)_{t\in T} \in L^2(\Omega)$ deux solution pour l'équation (**??** tel que $X_0 = Y_0 = x$,et un appliquant l'inégalité de Young $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$,et en utilisant les formules de $X_{t,}, Y_t$ on obtient :

$$\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &= |x + \int_0^t b(r,X_r)dr \int_0^t +\sigma(r,X_r)dW_r - (x + \int_0^t b(r,Y_r)dr + \int_0^t \sigma(r,Y_r)dW_r)|^2 \\
&= |\int_o^t (b(r,X_r) - b(r,Y_r))dr + \int_o^t (\sigma(r,X_r) - \sigma(r,Y_r))dW_r|^2 \\
&\leq 2|\int_0^t (b(r,X_r) - b(r,Y_r))dr|^2 + 2|\int_0^t (\sigma(r,X_r) - \sigma(r,Y_r))dW_r|^2
\end{aligned}$$

nous appliquons l'espérance mathématique, on obtient :

$$\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 \leq 2\mathbb{E}|\int_o^t b(r,X_r) - b(r,Y_r)dr|^2 + 2\mathbb{E}|\int_0^t (\sigma(r,X_r) - \sigma(r,Y_r))dW_r|^2$$

D'aprés l'isometré d'Itô (**??** et linégalité de Cauchz Schwarz proposition .on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 &\leq 2E\int_0^t (1^2 dr)\int_0^t |(b(r,X_r) - b(r,Y_r))|^2 dr + 2E|\int_0^t (\sigma(r,X_r) - \sigma(r,Y_r))|^2 dr \\
&\leq 2tE\int_o^t |b(r,X_r) - b(r,Y_r)|^2 dr + 2E\int_0^t |\sigma(r,X_r) - \sigma(r,Y_r)|^2 dr
\end{aligned}$$

D'après condition Lipschitienne (2.2 ,et la théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 &\leq 2T\int_0^t \mathbb{E}|(b(r,X_r) - b(r,Y_r))|^2 dr + 2\int_0^t E|(\sigma(r,X_r) - \sigma(r,Y_r))|^2 dr \\
&\leq 2TK\int_0^t \mathbb{E}||X_r - Y_r|^2 dr + 2K\int_0^t \mathbb{E}|X_r - Y_r|^2 dr \\
&\leq J\int_0^t \mathbb{E}|X_r - Y_r|^2 dr
\end{aligned}$$

telle que $J = max(2TK, 2K)$,alors

$$\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 \leq J\int_0^t \mathbb{E}|\mathbb{X}_r - Y_r|^2 dr$$

D'apres lemme de Gronwall on obtient|

$$0 \leq \mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 \leq 0 \exp(Jt) = 0$$

Donc $P.p.s$ $X = Y$

Existence d'une solution de ((??)

On utilise la méthode des aproximations successives de picard :

$$X_t^n = x + \int_0^t b(r, X_r^{n-1})dr + \int_0^t \sigma(r, X_r^{n-1})dW_r.$$

et on a :

$$|X_t^{n+1} - X_t^n|^2 = |\int_0^t (b(r, X_r^n) - b(r, X_r^{n-1}))dr + (\sigma(r, X_r^n) - \sigma(r, X_r^{n-1}))dW_r|^{2.}$$

Nous utilisons la méme méthode pouré l'unicité ,on obtient

$$\mathbb{E}|X_t^{n+1} - X_t^n|^2 \leq J \int_0^t \mathbb{E}|X_t^n - X_t^{n-1}|^2 dr.$$

Pour $n = 0$ on a

$$\mathbb{E}|X_t^1 - X_t^0|^2 \leq 2T\mathbb{E} \int_0^t |b(r, X_r^0)|^2 dr + 2\mathbb{E} \int_0^t |\sigma(r, X_r^0)|^2 dr.$$

D'aprés la croissance linéaire b et σ, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t^1 - X_t^0|^2 &\leq 2TJ\mathbb{E} \int_0^t (1 + |X_r|^2)dr + 2J\mathbb{E} \int_0^t (1 + |X_r|^2) \\
&\leq 2TJ \int_0^t (1 + \mathbb{E}|X_r|^2)dr + 2J \int_0^t (1 + \mathbb{E}|X_r|^2\}dr. \\
&\leq N \int_0^t (1 + \mathbb{E}|X_r|^2\}dr \\
&\leq JT
\end{aligned}$$

telle que$N = max(2TJ, 2J)$ et $JT = N\int_0^t (1 + E|X_t|^2)dr$,ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t^2 - X_t^1|^2 &\leq J\int_0^t \mathbb{E}|X_r^1 - X_r^0|^2 dr \\
&\leq J\int_0^t Jr dr \\
&\leq J^2\int_0^t r dr \\
&\leq J^2\frac{T^2}{2}
\end{aligned}$$

Alors pout tout $n \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t^{n+1} - X_t^n|^2 &\leq J\int_0^t \mathbb{E}|X_r^n - X_r^{n-1}|^2 dr \\
&\leq \frac{J^{n+1}}{n!}\int_0^t r^n dr \\
&\leq \frac{J^{n+1}}{n!}\frac{T^{n+1}}{n+1} \\
&\leq \frac{(JT)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Nous montrons que X_t^n est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$,et en appliquant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}|X_t^m - X_t^n|^2)^{\frac{1}{2}} &= ||X_t^m - X_t^n||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{K=n}^{m-1} ||X_t^{K+1} - X_t^K||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{K=n}^{m-1} [\frac{(J_N T)^{K+1}}{(K+1)!}]^{\frac{1}{2}} \to_{n\to\infty, m\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$,et $m \to \infty$.

$$\mathbb{E}(|X_t^m - X_t^n|^2)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Donc X_t^n est une suite de Cauchy dans$\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ qui est lui méme un espace complet , et par conséquence elle est convergente dans$\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, Notons X_t la limite de la suite $(X_t^n)_n$, avec $lim_{n\to\infty} X_t^n = X_t$ dans $(\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, telle que :

$$X_t = x + \int_0^t b(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dW_r.$$

On a déja montrer que $X_t^n \overset{L^2(\Omega)}{\rightarrow} X_t$ telle que

$$X_t^n = x + \int_0^t b(r, X_r^{n-1})dr + \int_0^t \sigma(r, X_r^{n-1})dW_r'$$

nous montrer que la solution s'écrit sous forme EDS, en utiliser l'isométrie d'Ito :

$$\mathbb{E}|(\int_0^t \sigma(r, X_r^{n-1}) - \sigma(r, X_r))dW_r|^2 \leq J\mathbb{E}|X_t^{n-1} - X_t|^2 \to 0.$$

puis que $X_t^n \overset{L^2(\Omega)}{\rightarrow} X_t$,donc $\sigma(r, X_r^{n-1}) \overset{L^2(\Omega)}{\rightarrow} \sigma(r, X_r)$.

Nous appliquons l'inégalité de Holder ou trouve

$$\mathbb{E}|\int_0^t (b(r, X_r^{n-1}) - b(r, X_r))dr|^2 \leq JT\mathbb{E}|X_t^{n-1} - X_t|^2 \to 0.$$

puis que $X_t^n \overset{L^2(\Omega)}{\rightarrow} X_t$,,et par la continuité de $b(\omega, t)$, Alors $b(r, X_r^{n'1}) \to_{n\to\infty} b(r, X_r)$ dans $L^2(\Omega)$.

En passant a la limite ,on obtient :

$$\begin{aligned} X_t^n &= x + \int_0^t b(r, X_r^{n-1})dr + \int_0^t \sigma(r, X_r^{n-1})dW_r \to^{L^2(\Omega)} X_t \\ &= x + \int_0^t b(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dW_r. \end{aligned}$$

Donc X_t est un solution de l'équation (**??**)

Nous montrons que $\mathbb{E}(\sup_t |X_t|^2) < N$, par l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 2(a^2+b^2+c^2)$.,et on passant a l'espérance alors

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq 3E|x|^2 + 3T\mathbb{E}[\int_0^t |b(r, X_r)|^2]dr + 3\mathbb{E}[\int_0^t |\sigma(r, X_r)|^2]dr.$$

D'aprés la croissante linéaire de b et σ,on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_t|^2) &\leq 3\mathbb{E}|x|^2 + 3TJ\mathbb{E}[\int_0^t (1+|X_r|^2)]dr + 3J\mathbb{E}[\int_0^t (1+|X_r|^2)]dr. \\
&\leq V\mathbb{E}|x|^2 + V\mathbb{E}[\int_0^t (1+|X_r|^2)]dr + V\mathbb{E}[\int_0^t (1+|X_r|^2)]dr \\
&\leq V\mathbb{E}|x|^2 + 2V\mathbb{E}[\int_0^t (1+|X_r|^2)]dr \\
&\leq J_V\mathbb{E}|x|^2 + J_V\mathbb{E}[\int_0^t (1+|X_r|^2)dr \\
&\leq J_V\mathbb{E}|x|^2 + J_vT + J_V\mathbb{E}[\int_o^t |X_r|^2]dr \\
&\leq J_V(\mathbb{E}|x|^2 + T) + J_V + \int_0^t \mathbb{E}|X_r|^2 dr
\end{aligned}$$

avec $V = \max(3, 3j, 3jT)$ et $J_V = \max(2V, V)$ et nous appliquons le lemme de Gronwall on obtient :

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq [\mathbb{E}|x|^2 + T]\exp(J_V t) \leq N.$$

puis que $[\mathbb{E}|x|^2 + T] < \infty$, telle que $N = (\mathbb{E}|x|^2 + T)\exp(J_V t)$, alors

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq \infty \forall t \in [0,T].$$

Ce qui implique d'après BDG :

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2) \leq J\mathbb{E}(|X_t|^2) < N$$

2.2 EDS rétrograde (EDSR)

[2]

Dans cette section on intéresse a l'équation différentielle stochastique rétrograde EDSR (englais BSDE$_s$) introduites par Bismut (1973) dans le cas linéaire et par Pardoux et Peng (1990) dans le cas général on étudie l'existence et l'unicité des solutions de EDSR

Soit $S^2([0,T], \mathbb{R})$l'ensemble des processus stochastiques φ unidimensionnels qui satisfont :

$(i) : \mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_t|^2\, dt\right] < \infty,$

$(ii) : \varphi_t$ est $\mathcal{F}_t$ $-$measurable, pour tout $t \in [0,T]$.

Soit $S^2([0,T], \mathbb{R})$ l'ensemble des processus stochastiques φ unidimensionnels qui satisfont :

$(i) : \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\varphi_t|^2\right] < \infty,$

$(ii) : \varphi_t$ est $\mathcal{F}_t$ $-$measurable,pour tout $t \in [0,T]$.

$\mathcal{C}^1$est l'ensemble des fonctions continûment différentiables

Définition 2.2.1 *Une équation différentielle stochastique rétrograde est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_{t,}\ 0 \leq t \leq T \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.3}$$

ou, de facon equivalente, sous forme integrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_{r,} \tag{2.4}$$

ou West un mouvement Brownien sur un espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et ξ une variable aleatoire W_T^0 mesurable $(W_t^0)_{t\leq T}$ est la filtration naturelle de W et $f : ([0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}) \to \mathbb{R}^k$ la fonction s'appelle le generateur qui est progressivement mesurable donnée.

Définition 2.2.2 *Une solution de L'EDSR est un couple de processus* (Y, Z) *a valeur dans* $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{k\times d}$ *telle que ,* Y *est continu et adapté ,*Z *est previsible et* $P - p.s$ $\ t \to Z_t$*appartien a* $L^2([0,T]), t \to f(t, Y_t, U_t)$*appartient a* $L^1([0,T])$

1.Y et Z sont progresevment mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^K$ et $\mathbb{R}^{K\times d}$

2.$\mathbb{P} - ps,\ \int_0^T \{|f(r, Y_r, Z_r)| + ||Z_r||^2\} dr < \infty$

3.$\mathbb{P} - p.s$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, 0 \leq t \leq T.$$

Y_t est une semi-martingale continue, car Y_t écrit sous la forme $Y_t = N_t + S_t$ telle que N_t est un mantingale locale et S_t est un processus stochastique a variation finie

2.2.1 L'existence et l'unicité des solutions

Le cas Lipschitz

Dans cette section , nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité . Ce résultat est dû à E. Pardoux et S. Peng [8] ; c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est nonlinéaire, soit $f : ([0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^K\times\mathbb{R}^{k\times d}) \to \mathbb{R}^k$,telle que, pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^K\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t_T}$soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T-$mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Hypothése (L2)

Il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\mathbb{P}-p.s$:

1. condition de Lipschitz en (y,z) pour tout $t, y, y\prime, z$ et $z\prime$ on a

$$|f(t,y,z)-f(t,y^{'},z^{'})|\leq\delta(|y-y^{'}|)+||z-z^{'}||).$$

2. condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}[|\xi|^2+\int_0^T|f(r,0,0)|^2dr]<\infty$$

Cas simple f ne dépend ni de y de ni z

Soit f ne dépend ni de y ni de z on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'**EDSR** suivante:

$$Y_t=\xi+\int_t^T F_r dr-\int_t^T Z_r dW_r.o\leq t\leq T. \tag{2.5}$$

Lemme 2.2.1 *Soient* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{o\leq t\leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$.***L'EDSR*** (2.5) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

1) **L'existence** :

(Y, Z) soit une solution verifiant $Z \in M^2$ si on prend lesperance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ on a nécessairement

$$Y_t = \mathbb{E}(Y_t/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r/\mathcal{F}_t).$$

On a $\int_0^T Z_r dW_r$ integrale d'Ito, donc $\mathbb{E}$ $(\int_t^T Z_r dW_r|\mathcal{F}_t) = 0$, alors on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}(\xi + \int_0^T F_r dr - \int_o^t F_r dr/\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\xi + \int_0^T F_r dr/\mathcal{F}_t) - \int_0^t F_r dr. \\ &= N_t - \int_0^t F_r dr, \end{aligned}$$

soient N_t une martingale $\mathcal{F}_t-$adapté. D'après le théorème de représentation des martingales :Donc il existe un processus prévisible Z de carré intégrable ($Z \in \mathcal{M}^2$) telle que :

$$\begin{aligned} Y_t &= N_t - \int_0^t F_r dr \\ &= N_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr \end{aligned}$$

On vérife facilement que $(Y; Z)$ ainsi construit est une solution de l'EDSR (2.5) étudiée et comme $Y_T = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= N_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - (N_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr) \\ &= (\int_0^T F_r dr - \int_0^t F_r dr) - (\int_0^T Z_r dW_r - \int_0^t Z_r dW_r) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r. \end{aligned}$$

donc

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r.$$

2)L'unicité :

Soit $(Y_t Z_t)$ et $(Y_t^{'}, Z_t^{'})$ deux solution de L'**EDSR** (2.5), et $Y_T = Y_T^{'}, F_r = F_r^{'}$on note :$y_t = Y_t - Y_t^{'}$et $z_t = Z_t - Z_t^{'}$ nous prouvons que $Y_t = Y_t^{'}$et $Z_t = Z_t^{'}$ $dP \times dt - ps.$

$$y_t = -\int_t^T z_r dW_r.$$

0n applique la formule d'Itô telle que $f(y_t) = |y_t|^2$on obtient :

$$\begin{aligned} d|y_t|^2 &= 2y_t dy_t + 2\frac{1}{2}\langle y_t \rangle \\ &= 2y_t dy_t + ||z_t||^2 dt \end{aligned}$$

On applique l'intégrale et comme $y_T = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \int_t^T d|y_r|^2 &= 2\int_t^T y_r dy_r + \int_t^T ||z_r||^2 dr \\ 0 - |y_t|^2 &= 2\int_t^T y_r dy_r + \int_t^T ||z_r||^2 dr, \end{aligned}$$

on a aussi :

$$y_r dy_r = -y_r z_r dW_r.$$

Donc

$$-|y_t|^2 = -2\int_t^T y_r z_r dW_r + \int_t^T ||z_r||^2 dr.$$

Alors

$$\int_t^T y_r z_r dW_r = (|y_t|^2 + \int_t^T ||z_r||^2) dr \times \frac{1}{2}.$$

comme $\int_t^T y_r z_r dW_r$ est un integrale d'Itô , donc$\mathbb{E}\left[\int_t^T y_r z_r dW_r\right] = 0$,alors :

$$\mathbb{E}[|y_t|^2 + \int_t^T ||z_r||^2 dr] = 0$$

$$\begin{cases} |y_t|^2 = 0 \text{ alors } y_t = 0, dP - ps \\ \int_t^T ||z_r||^2 dr = 0 \text{ alors } z_r = 0, dP \times dt - ps \end{cases}$$

Alors $dP \times dt - p\ s$

$$\begin{cases} Y_t = Y_t', \\ Z_t = Z_t', \end{cases}$$

Cas ou f depend de y et z

Théorème 2.2.1 *(**Pardoux-Peng 1990**) sous l'hypothèse* $(L2)$*,l'EDSR* (2.4) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. *Nous utilisons un argument de poit fixe(lemme 3.4.7) dans l'espace de Banach* B^2*en construisant une application* Ψ *de* B^2*dans lui méme de sorte que* $(Z, Y) \in B^2$*est solution de l'EDSR* (2.3)*ssi c'est un point fixe de* Ψ.

Pour $(U, V) \in B^2$*, on définit* $(Z, Y) = \Psi(U, V)$ *une solution de l'**EDSR** :*

$$Y_t = \xi + \int_0^T f(r, U_r, V_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r.0 \leq t \leq T. \tag{2.6}$$

*Nous remarquons que l'**EDSR*** (2.6) *posséde une unique solution qui est dans* B^2*.En effet ,posons* $F_r = f(r, U_r, V_r) \in M^2$*puisque,*$f$ *est* $\delta-$*Lipschitz on a*

$$|f(r, U_r, V_r) - f(r, U_r', V_r')| \leq \delta(|U_r - U_r'| + ||V_r - V_r'||)$$

Soint $U_r' = V_r' = 0$*,alors :*

$$|f(r, U_r, V_r)| - |f(r, o, o)| \leq |f(r, U_r, V_r) - f(r, 0, 0)| \leq \delta|U_r| + |V_r|.$$

Donc

$$|f(r, U_r, V_r)| \leq f(r, 0, 0) + \delta|U_r| + \delta|V_r|.$$

avec f *et* U_r*,et* V_r *sont des processus de carre intégrable ,alors par suit nous pouvons appliquer* *le lemme* **11** *pour obtenir un unique solution* (Y, Z) *tel que* $Z \in \mathcal{M}^2$*.L'intégrabilité de* Z *est obtenue par le théoréme de représention de martingale* 3.5.6 *et d'aprés la proposition* 8 *alors* $Y \in \mathcal{S}^2$*.soint* (Y, Z)*et* $(Y'', Z') \in B^2$*ou* $(Y, Z) = \Psi(U, V)$, $(Y', Z') = \Psi(U', V')$*.Notons* $y = Y - Y'$ *et* $z = Z - Z'$ *et* $y_r = 0$ *tell que :*

$$dy_t = f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t') - z_t dW_t.$$

On applique la formule d'Itô sur $\exp(at)|y_t|^2$*,soit* $g(t, x_t) = \exp(at)|x_t|^2$*,alors calculer les dérivées :*

$$\begin{aligned} d(\exp(at)|y_t|^2) &= a\exp(at)|y_t|^2 dt + 2\exp(at) y_t dy_t + \exp(at)\langle dy \rangle_t \\ &= a\exp(at)|y_t|^2 dt + 2\exp(at) y_t [f[(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')] \\ &- z_t dB_t] + \exp(at)||z_t||^2 dt. \end{aligned}$$

Nous appliquons a lintégrale,on obtient

$$\begin{aligned} \int_t^T d(\exp(ar)|y_r|^2) = \int_t^T &(a\exp(ar)|y_r|^2 dr \\ &+ 2\exp(ar) y_r [[f(r, U_r, V_r,) - f(r, U_r', V_r')] \\ &- z_r dW_r]) + \int_t^T \exp(ar)||z_r||^2 dr. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \exp(as)|y_r|^2 - \exp(at)|y_t|^2 = &\int_t^T a\exp(ar)|y_r|^2 dr + \int_t^T \exp(ar)||z_r||dr \\ &+ 2\int_t^T \exp(ar) y_r [f(r, H_r, U_r) - f(r, H_r', U_r') \\ &- \int_t^T \exp(ar) y_r z_r dW_r] \end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
-[\exp(at)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(ar)||z_r||^2 dr] = 2\int_t^T \exp(ar) y_r [f(r, U_r^{'}, V_r^{'}) - f(r, U_r, V_r) dr \\
+ \int_t^T \exp(ar) y_r z_r dW_r] - \int_t^T a\exp(ar)|y_r|^2 dr.
\end{aligned}
$$

comme f est $\delta -$ Lipchitzienne on a

$$
\begin{aligned}
\exp(at)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(ar)||z_r||^2 dr = &- \int_t^T -a\exp(ar)|y_r|^2 dr \\
&+ 2\int_t^T \exp(ar) y_r (\delta|U_r^{'} - U_r| + \delta||V_r^{'} - V_r||) \\
&+ 2\int_t^T \exp(ar) y_r z_r dW_r
\end{aligned}
$$

par la notation $u_r = U_r^{'} - U_r$ et $v_r = V_r^{'} - V_r$,on obtient :

$$
\begin{aligned}
\exp(at)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(ar)||z_r||^2 dr = &- \int_t^T -a\exp(ar)|y_r|^2 dr \\
&+ 2\int_t^T \exp(ar) y_r (\delta|u_r| + \delta||v_r||) dr \\
&+ 2\int_t^T \exp(ar) y_r z_z dW_r.
\end{aligned}
$$

■

pour tout $\varepsilon > 0$,en appliquant inégalité de Young $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$,on a

$$
\begin{aligned}
\exp(at)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(ar)||z_r||^2 dr \leq \int_t^T [-a + 2\frac{\delta^2}{\varepsilon}]|y_r|^2 dr + \\
\varepsilon\int_t^T \exp(ar)(|y_r|^2 + |z_r|^2) dr + 2\int_t^T \exp(ar) y_r z_r dW_r.
\end{aligned}
$$

Prenant $a = \frac{2\delta^2}{\varepsilon}$et $R_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T \exp(as)(|u|^2 + |v|^2)ds$,donc $\forall t \in [0,T]$

$$\exp(at)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(ar)|z_r|^2 dr \leq R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(ar) y_r z_r dW_r.$$

Alors

$$\exp(at)|y_t|^2 \leq R_\varepsilon + 2\int_T^T \exp(ar) y_r z_r dW_r. \tag{2.7}$$

$$\int_t^T \exp(ar)|z_r|^2 dr \leq R_\varepsilon + 2\int_t^T \exp(ar) y_r z_r dW_r. \tag{2.8}$$

D'aprés (2.8) et $\mathbb{E}[\int_t^T \exp(ar)|z_r|^2 dr] \leq \mathbb{E}(R_s) + 2\mathbb{E}[\int_t^T \exp(ar) y_r z_r dW_r]$.

la martingale locale $\int_t^T \exp(ar) y_r z_r dW_r$ est une mantingale nulle en 0 puisque $Y, Y' \in S^2$,et $Z,\, Z' \in N^2$,donc

$$\mathbb{E}[\int_t^T \exp(ar)|z_r|^2 dr] \leq E(R_\varepsilon).$$

D'autre part d'aprés (2.7), et on applique l'négalité de young et l'négalité de BDG,on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T}(\exp(at)|y_t|^2)] &\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + 2\mathbb{E}(\sup_{o\leq t\leq T}\int_t^T \exp(ar) y_r z_r dW_r) \\
&\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + J\mathbb{E}(\int \exp(ar)|y_r|^2 |z_r| dr) \\
&\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + J\mathbb{E}(\sup_{o\leq t\leq T} \exp(at)|y_t|^2 \int_t^T \exp(ar)|z_r|^2 dr) \\
&\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{1}{2} E[\sup_{o\leq t\leq T}(\exp(at)|y_t|^2)] + \frac{J^2}{2} E(\int_0^T \exp(ar)|z_r|^2 dr).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(at)|y_t|^2)] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(at)|y_t|^2)] \leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{J^2}{2}\mathbb{E}(R_\varepsilon)$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(at)|y_t|^2)] \leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{J^2}{2}\mathbb{E}(R_\varepsilon).$$

Alors

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(at)|y_t|^2)] \leq 2\mathbb{E}(R_\varepsilon) + J^2\mathbb{E}(R_\varepsilon).$$

De plus ,on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(at)|y_t|^2)]+\mathbb{E}[\int_t^T\exp(ar)||z_r||^2dr] &= \mathbb{E}(R_\varepsilon)+2\mathbb{E}(R_\varepsilon)+J^2\mathbb{E}(R_\varepsilon)\\ &= (3+J^2)\mathbb{E}(R_\varepsilon).\end{aligned}$$

Et par suite d'aprés la définition de R_ε on a :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(at)|y_t|^2)]+\mathbb{E}[\int_t^T\exp(ar)||z_r||^2dr]\\ &=(3+J^2)E(\varepsilon\int_0^T\exp(ar)(|h_r|^2+|u_r|^2)dr)\\ &=\varepsilon(3+J^2)E(\int_0^T\exp(ar)|h_r|^2dr+\int_0^T\exp(ar)|u_r|^2dr)\\ &=\varepsilon(3+J^2)E(\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(at)|h_t|^2\int_0^T dr+\int_0^T\exp(ar)||u_r||^2dr))\\ &=\varepsilon(3+J^2)E(\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(at)|h_t|^2T+\int_0^T\exp(ar)||u_r||^2dr))\\ &=\varepsilon(3+J^2)Q.\end{aligned}$$

telle que $Q=(1\vee T)$,on prenant telle que :$\varepsilon(3+J^2)Q=\frac{2}{5}$,de sort l'application Ψest alors une contraction strict de B^2 dans lui méme si le munit de la norme suivante

$$||Y,Z||_a=[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(at)|y_t|^2)+\int_0^T\exp(ar)||z_r||^2dr]^{\frac{1}{2}}.$$

le cas que $[a=0]$ alors Ψ possede donc un point fixe , cequi démontrer l'existence ,et l'unicité dun solution de l'EDSR (2.3).

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z\in\mathcal{M}^2$,implique qu'un telle solution appartient B^2 .

Remarque 2.2.1 *À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression « **la solution de l'EDSR** » signifiera la solution de l'**EDSR** vérifiant* $Z\in M^2$

Le rôle de Z

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_r dW_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul..

Proposition 2.2.1 *Soient $(Y;Z)$ la solution de l'EDSR (2.3) et un temps d'arrêt majoré par T On suppose, en outre l'hypothèse (**H2**) que est $\mathcal{F}_t$–mesurable et que $f(t;y;z)=0$ dès que $t \geq \tau$.Alors si $t \geq \tau$*

$$\begin{cases} Y_t = Y_{t\wedge r}, \\ Z_t = 0. \end{cases}$$

Preuve. .On a $\mathbb{P}$ $-p.s.$

$$Y_t = \xi + \int_\tau^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dW_r.$$

et donc si $t=\tau$ on a

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f(r,Y_r,Z_r)dr + \int_\tau^T Z_r dW_r = \xi - \int_\tau^T Z_r dW_r.$$

Il vient alors $Y_r = \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_r) = \xi$,car ξ est $\mathcal{F}_t$-mesurable,et par suit $\int_t^T Z_r dW_r = 0$ dou lon tire que

$$\mathbb{E}[(\int_t^T Z_r dW_r.)^2] = \mathbb{E}[\int_0^T ||Z_r||^2 dr] = 0.$$

et finalement que $\tau_r \mathbf{1}_{r\geq r} = 0$.Ils'en suit immédiatement que ,si $t \geq \tau, Y_t = Y_r$ puisque par hypothese,

$$Y_\tau = Y_t + \int_t^t f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^t Z_r dW_r = Y_t + 0 - 0 = Y_t.$$

Alors

$$Y_\tau = Y_{t\wedge\tau} \; et \; Z_t = 0$$

Ce qui termine la preuve. ■

Notons que dans le cas ou ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0).Y_T = \xi$$

2.3 Système équations Diférentielles Stochastiques EDS-EDSR

Dans cette section, nous étudierons un type de systèmes d'équations différentielles, à savoir les systeme EDS-EDSR. qui est couplé faiblement une équation différentielles stochastique EDS a une equation différentielle stochastique rétrograde EDSR sous la forme :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ dY_t = -f(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dB_t, \\ X(0) = x, Y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.9}$$

ou

$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\div} \to \mathbb{R}^n.$$

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\div} \to M^{n\times m}.\text{et } f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^m.$$

Définition 2.3.1 *La solution du système (2.9) est tout triplet $\mathcal{F}_t$ progressivement mesurable (X, Y, Z) a valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times m}$est :*

$$1.\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}(|X_t|^2 + |Y_t|^2) + \int_0^T |Z_t|^2 dt) < \infty.$$

$$2.P - p.s \textit{ verifée l'équation } .(2.9).$$

Remarque 2.3.1 *La solution de ce système se traduit par la résolution de chaque équation individuellement. Cela implique de résoudre d'abord la première équation, puis de substituer sa solution dans la deuxième équation et de la résoudre à son tour.*

Définition 2.3.2 *le system equation différentielle stochastique progressive rétrograde ED-SPR est dit fortementcouplés c'est un plus compliqué donner de la façon suivante :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + \sigma(t, X_t Y_t, Z_t)dS_t \\ dY_t = G(t, X_t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \\ X_0 = x, Y_T = \xi, \end{cases}$$

ou $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^m, b :\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times d} \to \mathbb{R}^n, \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{n\times m}, G : :\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times d} \to \mathbb{R}^n$

Remarque 2.3.2 *Pour consulter la preuve, elle est disponible dans la référence. [1] [10]*

Chapitre 3

Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le système EDS-EDSR

Dans ce chapitre nous présentons le problème et dirivéons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous la forme du principe du maximum stochastique de système EDS-EDSR. Ce mémoire est une sont indépondante de article R.Khallout et A.Chala [**?**]
vois [9] [**?**] [11]

3.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré unidimensionnel satisfait les conditions habituelles.sur lequel on définit un mouvement Brownien $B = (B)_{t\geq 0}$, et soit la filtration naturalle de mouvement Brownien $\mathcal{F}_{t\in[0,T]} = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$. T un réel strictement positive fixé. U un fermé convexe de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.1 *Un contrôle admissible* $v = (v_t; t \in [0;T])$*tout processus* $\mathcal{F}_t$ *-adapté à va-*

leur dans U tel que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|v_t|^2\right]<\infty.$$

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des tous les contrôles admissibles.

Pour tout $v\in\mathcal{U}$, on considère le système différentielle stochastique contrôlée suivante $(EDSPR)$:

$$\begin{cases} dx_t^v = & b\left(t,x_t^v,v_t\right)dt+\sigma\left(t,x_t^v,v_t\right)dB_t, \\ dy_t^v = & -f\left(t,x_t^v,y_t^v,z_t^v,v_t\right)dt+z_t^v dB_t, \\ x_0^v=\xi & \qquad y_T^v=h\left(x_T^v\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$b:[0,T]\times\mathbb{R}\times U\longrightarrow\mathbb{R},$$

$$\sigma:[0,T]\times\mathbb{R}\times U\longrightarrow\mathbb{R},$$

$$f:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},$$

et ζ est une variable aléatoire de unidimensionnel , $\mathcal{F}_T$-mesurable et indépendante de mouvement Brownien tel que : $\mathbb{E}\left|\xi\right|^2<\infty$.

On définit la fonction de coût par l'espression suivante :

$$J\left(v\right)=\mathbb{E}\left[\Phi\left(x_T^v\right)+\Psi\left(y_0^v\right)+\int_0^T l\left(t,x_t^v,y_t^v,z_t^v,v_t\right)dt\right], \tag{3.2}$$

avec

$$\Phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\Psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},$$

$$l:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U\longrightarrow\mathbb{R}.$$

et $(x_T^v;y_0^v)$ est la solution de l'équation (3.1) prise au temps terminale-initiale.

Un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est dit optimal s'il satisfait

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v). \tag{3.3}$$

Hypothèse (H) :

Les fonctions $b, \sigma, f,\ h$ et l sont dans C^1 en (y, z, v), et leur dérivées sont continues en (x, y, z, v) et uniformément bornées.

Le problème de contrôle optimal est de minimiser(maximiser) la fonctionnelle de coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles, on choisit un contrôle $u \in \mathcal{U}$ tel que

Sous les hypothèses précédentes, pour tout $v \in \mathcal{U}$ le système EDSPR (3.1) admet une solution fort unique $(x_t^v; y_t^v, z_t^v, v_t)$ et la fonction de coût est bien définit .

Théorème 3.1.1 *Si les hypothèses* $(\mathbf{H})$ *sont satisfaites, alors le problème de contrôle* $\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$ *a une solution optimale.*

3.2 Résultats préliminaires

■tant donné que $\mathcal{U}$ est convexe, nous pouvons utiliser la méthode de perturbation classique pour obtenir les conditions d'optimalité :

Soit u le contrôle optimal et $(x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu)$ est un solution de (3.1)controllée par u. .Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on définit un contrôle perturbé u^θ comme suit :

$$u^\theta = u + \theta v, \forall v \in \mathcal{U}. \tag{3.4}$$

Soit $\left(x^\theta, y^\theta\right)$ les trajectoires associes au contrôle $u^\theta \in \mathcal{U}$

D'aprés la formule (3.2) et la définition de contrôle perturbé, on a

$$J\left(u^\theta\right) - J(u) \geq 0. \tag{3.5}$$

3.2.1 Estimation des solutions

Lemme 3.2.1 *Sous les hypothèses* (**H**), *on a :*

$$\lim_{\theta\to 0} E\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|x_t^\theta - x_t^u\right|^2\right] = 0, \tag{3.6}$$

$$\lim_{\theta\to 0} E\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] = 0, \tag{3.7}$$

$$\lim_{\theta\to 0} E\left[\int_0^T \left|z_t^\theta - z_t^\mu\right|^2 dt\right] = 0. \tag{3.8}$$

Preuve. 1) D'accord, procédons maintenant à la démonstration de(3.6)

Soient x_t^u et x_t^θ sont les solutions associées à les contrôles u et u^θ alors elles sont données respectivement par :

$$x_t^u = \xi + \int_0^t b\left(s, x_t^u, u_t\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s^u, u_t\right) dB_s.$$
$$x_t^\theta = \xi + \int_0^t b\left(s, x_s^\theta, u_t^\theta\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s^\theta, u_t^\theta\right) dB_s.$$

Alors :

$$\begin{aligned} x_t^\theta - x_t^u = & \int_0^t \left[b\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - b\left(s, x_s^u, u_s\right)\right] ds \\ & + \int_0^t \left[\sigma\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - \sigma\left(s, x_s^u, u_s\right)\right] dB_s. \end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô sur $\left(x_t^\theta - x_t^u\right)^2$ on a

$$\begin{aligned} \mid x_t^\theta - x_t^u\mid^2 = & 2\int_0^t \left(x_s^\theta - x_s^u\right)\left(\left[b\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - b\left(s, x_s^u, u_s\right)\right] ds + \left[\sigma\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - \sigma\left(s, x_s^u, u_s\right)\right] dB_s\right) \\ & + \int_0^t \left[\sigma\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - \sigma\left(s, x_s^u, u_s\right)\right]^2 ds \end{aligned}$$

Par le passage al'espérance puis on utilise l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\ x_t^\theta - x_t^u\right|^2 \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \left|x_s^\theta - x_s^u\right|^2 ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left[b\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - b\left(s, x_s^u, u_s\right)\right] ds\right] \\ + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left[\sigma\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right) - \sigma\left(s, x_s^u, u_s\right)\right]^2 ds\right]\end{aligned}$$

D'aprés la lipschitzienne de b et σ en x et u on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\ x_t^\theta - x_t^u\right|^2 &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(x_s^\theta - x_s^u\right) ds\right] + C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|u_s^\theta - u_s\right|^2 ds\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(x_s^\theta - x_s^u\right) ds\right] + C\theta^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|v_s - u_s\right|^2 ds\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(x_s^\theta - x_s^u\right) ds\right] + C\theta^2\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwal , on trouve

$$\mathbb{E}\left|\ x_t^\theta - x_t^u\right|^2 \leq C\theta^2 e^{cT} \underset{\theta \mapsto 0}{\twoheadrightarrow} 0$$

Finalement , on utilise l'inégalité B.D.G on obtient le résultat demandé .

2)La preuve de $\{(3.7);(3.8)\}$ On a

$$y_t^\theta - y_t^u = \left(f\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right) - f\left(t, x_t^\theta, y_t^\theta, z_t^\theta, u_t^\theta\right)\right) dt - \left(z_t^\theta - z_t^u\right) dB_t.$$

On applique la formule d'Itô sur $\left(y^\theta - y\right)^2$ on trouve

$$\begin{aligned}\left(y_T^\theta - y_T\right)^2 - \left(y_t^\theta - y_t\right)^2 = -2\int_t^T \left(y_s^\theta - y_s^u\right)\left(f\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right) - f\left(s, x_t^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta\right)\right) ds \\ + 2\int_t^T \left(y_s^\theta - y_s^u\right)\left(z_t^\theta - z_t^u\right) dB_s + \int_t^T \left(z_t^\theta - z_t^u\right)^2 ds.\end{aligned}$$

Mais on sait que $\left(y_T^\theta - y_T\right)^2 = 0$, alors

$$\begin{aligned}\left(y_t^\theta - y_t\right)^2 &= 2\int_t^T \left(y_s^\theta - y_s^u\right)\left(f\left(s, x_t^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, u_s^\theta\right) - f\left(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right) ds \\ &\quad - 2\int_t^T \left(y_s^\theta - y_s^u\right)\left(z_t^\theta - z_t^u\right) dB_s - \int_t^T \left(z_t^\theta - z_t^u\right)^2 ds.\end{aligned}$$

Comme f est $k-$Lipschizienne en (x_t, y_t, z_t, u_t) , on a

$$\begin{aligned}\left(y_t^\theta - y_t\right)^2 + \int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right)^2 ds &\leq 2\int_t^T \left(k\left|y_s^\theta - y_s^u\right|\left|x_s^\theta - x_s^u\right| + k\left|y_s^\theta - y_s^u\right|^2\right) ds \\ &\quad + 2\int_t^T \left(k\left|y_s^\theta - y_s^u\right|\left|z_s^\theta - z_s^u\right| + k\left|y_s^\theta - y_s^u\right|\left|u_s^\theta - u_s\right|\right) ds \\ &\quad + 2\int_t^T \left(y_s^\theta - y_s^u\right)\left(z_t^\theta - z_t^u\right) dB_s.\end{aligned}$$

On sait que $u^\theta = u + \theta\left(\upsilon - u\right)$, on applique l'inégalité de Young, il vient alors

$$\begin{aligned}&\left(y_t^\theta - y_t\right)^2 + \int_0^T \left(z_s^\theta - z_s^u\right)^2 ds \leq 2k\int_t^T \left(\frac{1}{2}\left|x_s^\theta - x_s\right|^2 + \frac{1}{2}\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right) ds \\ &+ 2k\int_t^T \left(\left|y_s^\theta - y_s\right|^2 + \frac{1}{2}\left|y_s^\theta - y_s\right|^2 + \frac{1}{2}\left|z_s^\theta - z_s\right|^2 + \frac{1}{2}\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right) ds \\ &+ 2k\theta^2\int_t^T \frac{1}{2}\left|\upsilon_s - u_s\right|^2 ds + 2\int_t^T \left(y_s^\theta - y_s\right)\left(z_t^\theta - z_t\right) dB_s.\end{aligned}$$

En passant à l'ésperance, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] + (1-k)\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right)^2 ds\right] \\ &\leq C\int_t^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + k\int_t^T \mathbb{E}\left[\left|x_s^\theta - x_s\right|^2\right] ds \\ &+ k\theta^2\int_t^T \left|\upsilon_s - u_s\right|^2 ds \\ &\leq C\int_t^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + k\int_t^T \mathbb{E}\left[\left|x_s^\theta - x_s\right|^2\right] ds \\ &+ k\theta^2\int_0^T \left|\upsilon_s - u_s\right|^2 ds.\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] + (1-k)\,\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right)^2 ds\right] \leq C\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + \tau(\theta)$$

telle que $\tau(\theta) = k\int_t^T \mathbb{E}\left[\left|x_s^\theta - x_s\right|^2\right] ds + M\theta^2$. avec $\lim_{\theta\to 0}\tau(\theta) = 0$. En fin on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] + K'\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_s^\theta - z_s\right)^2 ds\right] \leq C\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + \tau(\theta),$$

Maintenant on peut distinguer deux inégalités

$$\mathbb{E}\left[\left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] \leq C\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + \tau(\theta), \tag{3.9}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right)^2 ds\right] \leq \frac{C}{K'}\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|y_s^\theta - y_s\right|^2\right] ds + \tau(\theta). \tag{3.10}$$

On applique l'inégalité de Gronwall sur l'inégalité (3.9), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left(y_t^\theta - y_t\right)^2\right] \leq \tau(\theta)\exp K. \tag{3.11}$$

D'autre part, on remplace (**??**) en (3.10) , on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(z_t^\theta - z_t\right)^2 ds\right] &\leq \frac{C}{K'}\int_0^T \tau(\theta)\exp K ds + \tau(\theta). \\
&\leq \frac{C}{K'}\tau(\theta)\exp KT + \tau(\theta) \\
&\leq \left(\frac{C}{K'}\exp KT + 1\right)\tau(\theta) \\
&\leq L\tau(\theta). \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de BDG, en (3.11) d'où le résultat$\{$(3.7) , (3.8)$\}$. ■

Lemme 3.2.2 *On Considère $\widetilde{x}_t$ et $\widetilde{y}_t$ comme les solutions des équations linéaires suivantes* *(appelées équations variationnelles) :*

$$\begin{cases} d\widetilde{x}_t = \left[b_x\left(t, x_t^\mu, u_t\right)\widetilde{x}_t + b_v\left(t, x_t^\mu, u_t\right)\left(v_t - u_t\right)\right] dt \\ \left[\sigma_x\left(t, x_t^\mu, u_t\right)\widetilde{x}_t + \sigma_v\left(t, x_t^\mu, u_t\right)\left(v_t - u_t\right)\right] dB_t \\ \widetilde{x}_0 = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} d\widetilde{y}_t = \left[\left(f_x\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)\widetilde{x}_t + f_y\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)\widetilde{y}_t\right)\right] dt \\ + \left[f_z\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)\widetilde{z}_t + f_v\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)\left(v_t - u_t\right)\right] dt + \widetilde{z}_t dB_t, \\ \widetilde{y}_0 = h_x\left(x_T^\mu\right)\widetilde{x}_T. \end{cases} \tag{3.14}$$

Alors sous les hypothèses (**H**) on a

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\sup_{t\in[0;T]} E\left|\frac{x_t^\theta - x_t^\mu}{\theta} - \widetilde{x}_t\right|^2\right] = 0, \tag{3.15}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\sup_{t\in[0;T]} E\left|\frac{y_t^\theta - y_t^\mu}{\theta} - \widetilde{y}_t\right|^2\right] = 0, \tag{3.16}$$

$$\lim_{\theta\to 0} E\left[\int_0^T \left|\frac{z_t^\theta - z_t^\mu}{\theta} - \widetilde{z}_t\right|^2 dt\right] = 0. \tag{3.17}$$

Preuve. Pour simplifier, nous avons placé

$$X_t^\theta = \frac{x_t^\theta - x_t^\mu}{\theta} - \widetilde{x}_t, Y_t^\theta = \frac{y_t^\theta - y_t^\mu}{\theta} - \widetilde{y}_t, Z_t^\theta = \frac{z_t^\theta - z_t^\mu}{\theta} - \widetilde{z}_t. \tag{3.18}$$

(i) Maintenant, démontrons (3.15).On a

$$\begin{aligned} dX_t^\theta &= \frac{1}{\theta}\left[b\left(t, x_t^\theta, u_t^\theta\right) - b\left(t, x_t^\mu, u_t\right)\right] dt \\ &+ \frac{1}{\theta}\left[\sigma\left(t, x_t^\theta, u_t^\theta\right) - \sigma\left(t, x_t^\mu, u_t\right)\right] dB_t \\ &- \left[b_x\left(t, x_t^\mu, u_t\right)\widetilde{x}_t + b_v\left(t, x_t^\mu, u_t\right)\left(v_t - u_t\right)\right] dt \\ &- \left[\sigma_x\left(t, x_t^\mu, u_t\right)\widetilde{x}_t + \sigma_v\left(t, x_t^\mu, u_t\right)\left(v_t - u_t\right)\right] dB_t \end{aligned}$$

Applique développement de Taylor avec reste intégrale au point (x,u) et d'ordre 1 des fonctions $b\left(s,x_s^\theta,u_s^\theta\right),\sigma\left(s,x_s^\theta,u_s^\theta\right)$, alors

$$\begin{aligned}
dX_t^\theta &= \frac{1}{\theta}\int_0^1 b_x\left(t,x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta-x_t\right),u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right)\left(x_t^\theta-x_t\right)d\lambda dt \\
&+\frac{1}{\theta}\int_0^1 b_v\left(t,x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta-x_t\right),u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right)\left(u_t^\theta-u_t\right)d\lambda dt \\
&+\frac{1}{\theta}\int_0^1 \sigma_x\left(t,x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta-x_t\right),u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right)\left(x_t^\theta-x_t\right)d\lambda dB_t \\
&+\frac{1}{\theta}\int_0^1 \sigma_v\left(t,x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta-x_t\right),u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right)\left(u_t^\theta-u_t\right)d\lambda dB_t \\
&-\left[\int_0^1\left(b_x\left(t,x_t^\mu,u_t\right)\widetilde{x}_t+b_v\left(t,x_t^\mu,u_t\right)\left(v_t-u_t\right)\right)d\lambda\right]dt \\
&-\left[\int_0^1\left(\sigma_x\left(t,x_t^\mu,u_t\right)\widetilde{x}_t+\sigma_v\left(t,x_t^\mu,u_t\right)\left(v_t-u_t\right)\right)d\lambda\right]dB_t
\end{aligned}$$

D'aprés $X_t^\theta=\frac{x_t^\theta-x_t^\mu}{\theta}-\widetilde{x}_t$et $u_t^\theta-u_t=\theta(v_t-u_t)$on trouve

$$\begin{aligned}
dX_t^\theta &= \int_0^1 b_x\left(t,x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta-x_t\right),u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right)\left(X_t^\theta+\widetilde{x}_t\right)d\lambda dt \\
&+\int_0^1 b_v\left(t,x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta-x_t\right),u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right)(v_t-u_t)d\lambda dt \\
&+\int_0^1 \sigma_x\left(t,x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta-x_t\right),u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right)\left(X_t^\theta+\widetilde{x}_t\right)d\lambda dB_t \\
&+\int_0^1 \sigma_v\left(t,x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta-x_t\right),u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right)(v_t-u_t)d\lambda dB_t \\
&-\left[\int_0^1\left(b_x\left(t,x_t^\mu,u_t\right)\widetilde{x}_t+b_v\left(t,x_t^\mu,u_t\right)\left(v_t-u_t\right)\right)d\lambda\right]dt \\
&-\left[\int_0^1\left(\sigma_x\left(t,x_t^\mu,u_t\right)\widetilde{x}_t+\sigma_v\left(t,x_t^\mu,u_t\right)\left(v_t-u_t\right)\right)d\lambda\right]dB_t
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
X_t^\theta &= \int_0^t \int_0^1 b_x\left(t, x_t + \lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t + \lambda\theta\left(u_t^\theta - u_t\right)\right) X_s^\theta d\lambda dt \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \sigma_x\left(t, x_t + \lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t + \lambda\theta\left(u_t^\theta - u_t\right)\right) X_s^\theta d\lambda dB_t \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \left(b_x\left(t, x_t + \lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t + \lambda\theta\left(u_t^\theta - u_t\right)\right) - b_x\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda \widetilde{x}_s dt \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \left(b_v\left(t, x_t + \lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t + \lambda\theta\left(u_t^\theta - u_t\right)\right) - b_v\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda (v_s - u_s) dt \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \left(\sigma_x\left(t, x_t + \lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t + \lambda\theta\left(u_t^\theta - u_t\right)\right) - \sigma_x\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda \widetilde{x}_s dt \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \left(\sigma_v\left(t, x_t + \lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t + \lambda\theta\left(u_t^\theta - u_t\right)\right) - \sigma_v\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda (v_s - u_s) dt
\end{aligned}$$

on utilise les l'inégalités Yong puis de Cauchy Schwarz et puisque les fonctions b_x et σ_x sont bornées on obtien

$$\begin{aligned}
\left|X_t^\theta\right|^2 &\leq c \int_0^t \left|X_s^\theta\right|^2 dt \\
&+ c_1 \int_0^t \widetilde{x}_s \int_0^1 \left(b_x\left(t, x_t + \lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t + \lambda\theta\left(u_t^\theta - u_t\right)\right) - b_x\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda dt \\
&+ c_2 \int_0^t (v_s - u_s) \int_0^1 \left(b_v\left(t, x_t + \lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t + \lambda\theta\left(u_t^\theta - u_t\right)\right) - b_v\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda dt \\
&+ c_3 \int_0^t \widetilde{x}_s \int_0^1 \left(\sigma_x\left(t, x_t + \lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t + \lambda\theta\left(u_t^\theta - u_t\right)\right) - \sigma_x\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda dt \\
&+ c_4 \int_0^t (v_s - u_s) \int_0^1 \left(\sigma_v\left(t, x_t + \lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t + \lambda\theta\left(u_t^\theta - u_t\right)\right) - \sigma_v\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda dt
\end{aligned}$$

On passe à l'espérance on trouve

$$\mathbb{E}\left|X_t^\theta\right|^2 \leq c\mathbb{E} \int_0^t \left|X_s^\theta\right|^2 dt + \alpha(\theta), \tag{3.19}$$

telle que

$$\begin{aligned}\alpha(\theta) &= c_1\mathbb{E}\int_0^t \widetilde{x}_s \int_0^1 \left(b_x\left(t, x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right) - b_x\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda dt \\ &+ c_2\mathbb{E}\int_0^t (v_s-u_s) \int_0^1 \left(b_v\left(t, x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right) - b_v\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda dt \\ &+ c_3\mathbb{E}\int_0^t \widetilde{x}_s \int_0^1 \left(\sigma_x\left(t, x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right) - \sigma_x\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda dt \\ &+ c_4\mathbb{E}\int_0^t (v_s-u_s) \int_0^1 \left(\sigma_v\left(t, x_t+\lambda\theta\left(x_t^\theta - x_t\right), u_t+\lambda\theta\left(u_t^\theta-u_t\right)\right) - \sigma_v\left(s, x_s^\mu, u_s\right)\right) d\lambda dt,\end{aligned}$$

comme les fonctions $b_x, b_v, \sigma_x, \sigma_v$sont continues alors $\lim_{\theta\mapsto 0}\alpha(\theta)=0$, on applique l'inégalité de Gronwall sur l'inégalité (3.19), on obtient

$$\mathbb{E}\left|X_t^\theta\right|^2 \leq \alpha(\theta)\exp cT. \tag{3.20}$$

On applique l'inégalité de BDG,sur(3.20) d'où le résultat(3.15)

(ii) Maintenant, démontrons $\{(3.16),(3.17)\}$.On a $Y_t^\theta = \frac{y_t^\theta - y_t^\mu}{\theta} - \widetilde{y}_t$, $Z_t^\theta = \frac{z_t^\theta - z_t^\mu}{\theta} - \widetilde{z}_t$.donc

$$\begin{aligned}dY_t^\theta &= \frac{1}{\theta}\left(f\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right) - f\left(t, x_t^\theta, y_t^\theta, z_t^\theta, u_t^\theta\right)\right) dt \\ &+ \frac{1}{\theta}\left(z_t^\theta - z_t^\mu\right) dB_t \\ &+ \left[\left(f_x\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)\widetilde{x}_t + f_y\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)\widetilde{y}_t\right)\right] dt \\ &+ [f_v\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)(v_t-u_t) + f_z\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)\widetilde{z}_t]dt - \widetilde{z}_t dB_t\end{aligned}$$

■

.On applique le développement de Taylor avec reste intégrale au point (x,u) et d'ordre 1 des fonctions $f\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right), g\left(s, x_s^\theta, u_s^\theta\right)$ et on note par

$$A_s^{\theta,\lambda} = \left(s, x_s+\lambda\theta\left(x_s^\theta - x_s\right), y_s+\lambda\theta\left(y_s^\theta-y_s\right), z_s+\lambda\theta\left(z_s^\theta-z_s\right) u_s+\lambda\theta\left(u_s^\theta-u_s\right)\right). \tag{3.21}$$

alors

$$\begin{aligned}
dY_t^\theta &= -\frac{1}{\theta}\int_0^1 f_x\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)\left(x_t^\theta - x_t\right)d\lambda dt - \frac{1}{\theta}\int_0^1 f_y\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)\left(y_t^\theta - y_t\right)d\lambda dt + -\frac{1}{\theta}\int_0^1 f_z\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)\left(z_t^\theta - z_t\right)d\lambda d\\
&- \frac{1}{\theta}\int_0^1 f_v\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)\left(u_t^\theta - u_t\right)d\lambda dt - \widetilde{z}_t dB_t\\
&+ \left[\int_0^1 \left(f_x\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)\widetilde{x}_t + f_y\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)\widetilde{y}_t\right)d\lambda\right]dt\\
&+ \left[\int_0^1 f_v\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)(v_t - u_t)d\lambda + f_z\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right)\widetilde{z}_t)d\lambda\right]dt
\end{aligned}$$

donc

$$dY_t^\theta = -\int_0^1 f_x\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)X_t^\theta d\lambda dt - \int_0^1 f_y\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)Y_t^\theta d\lambda dt$$
$$-\int_0^1 f_z\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)Z_t^\theta d\lambda dt + \beta_t^\theta dt + \gamma_t^\theta dB_t + Z_t^\theta dB_t,$$

telle que

$$\begin{aligned}
\beta_t^\theta &= \left(f_x\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right) - \int_0^1 f_x\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)X_t^\theta d\lambda dt\right)\widetilde{x}_t dt\\
&+ \left(f_y\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right) - \int_0^1 f_y\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)X_t^\theta d\lambda dt\right)\widetilde{y}_t dt\\
&+ \left(f_z\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right) - \int_0^1 f_z\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)X_t^\theta d\lambda dt\right)\widetilde{z}_t dt\\
&+ \left(f_v\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right) - \int_0^1 f_v\left(A_t^{\theta,\lambda}\right)X_t^\theta d\lambda dt\right)(v_t - u_t)dt
\end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô généralisée sur $\left|Y_t^\theta\right|^2$ et on utilise l'inégalité Yong et par le passage à l'espérance on trouve

$$\mathbb{E}\left|Y_t^\theta\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T \left|Z_s^\theta\right|^2 ds, \leq \mathbb{E}\int_t^T 2Y_s^\theta\left[\int_0^1 f_x\left(A_s^{\theta,\lambda}\right)X_t^\theta d\lambda + \int_0^1 f_y\left(A_s^{\theta,\lambda}\right)Y_s^\theta d\lambda\right]ds$$
$$+\mathbb{E}\int_t^T 2Y_s^\theta\left[\int_0^1 f_z\left(A_s^{\theta,\lambda}\right)Z_s^\theta d\lambda + \beta_s^\theta\right]ds$$

d'aprés Cauchy Schwarz et puisque les fonctions f_x ,f_y et sont bornées ,on obtien

$$\mathbb{E}\left|Y_t^\theta\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T\left|Z_s^\theta\right|^2 ds,\leq c_1\mathbb{E}\int_t^T\left|Y_s^\theta\right|^2 ds+c_2\mathbb{E}\int_t^T\left|X_s^\theta\right|^2 ds+c_3\mathbb{E}\int_t^T\left|Z_s^\theta\right|^2 ds$$
$$+k\mathbb{E}\int_t^T\left|\beta_s^\theta\right|^2 ds$$

donc

$$\mathbb{E}\left|Y_t^\theta\right|^2+C_1\mathbb{E}\int_t^T\left|Z_s^\theta\right|^2 ds,\leq c_1\mathbb{E}\int_t^T\left|Y_s^\theta\right|^2 ds+\delta_t^\theta \tag{3.22}$$

telle que

$$\delta_t^\theta=c_2\mathbb{E}\int_t^T\left|X_s^\theta\right|^2 ds++k\mathbb{E}\int_t^T\left|\beta_s^\theta\right|^2 ds$$

avec $\lim_{\theta\mapsto 0}\delta_t^\theta=0$ puisque les fonctions f_x ,f_y ,, f_v, et sont continues et $\lim_{\theta\mapsto 0}\left|X_t^\theta\right|^2=0$

à tavers l'inégalité (3.22)on deduire les deux inégalités suivantes

$$\mathbb{E}\left|Y_t^\theta\right|^2\leq c_1\mathbb{E}\int_t^T\left|Y_s^\theta\right|^2 ds+\delta_t^\theta \tag{3.23}$$

$$\mathbb{E}\int_t^T\left|Z_s^\theta\right|^2 ds,\leq \frac{c_1}{C_1}\mathbb{E}\int_t^T\left|Y_s^\theta\right|^2 ds+\frac{1}{C_1}\delta_t^\theta \tag{3.24}$$

$$\mathbb{E}\int_t^T\left|Z_s^\theta\right|^2 ds,\leq N\mathbb{E}\int_t^T\left|Y_s^\theta\right|^2 ds+M\delta_t^\theta$$

on applique lemme de Gronwal sur (3.23) puis BDG résutle (3.16) ,et à partir de $\{$(3.16) , (3.24)$\}$on

trouve (3.17)

Lemme 3.2.3 *soit u^θun controle optimal qui minimize la fonction de cout J sur $\mathcal{U}$ et (x^u,y^u,z^u)le trajectoire optimal associe donc pour tout $v\in\mathcal{U}$ on a :*

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & \mathbb{E}\left[\Phi_x(x_T^u)\widetilde{x}_t\right] + \mathbb{E}\left[\Psi_y(y_0^u)\widetilde{y}_0\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T l_x(t,x_t,y_t,z_t,u_t)\widetilde{x}_t dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T l_y(t,x_t,y_t,z_t,u_t)\widetilde{y}_t dt\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T l_z(t,x_t,y_t,u_t)\tilde{z}_t dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T l_v(t,x_t,y_t,z_t,u_t)(u_t - v_t)dt\right]
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Preuve. On a u est optimal donc :$J(v) - J(u) \geq 0$.et pour $v = u^\theta$ donc

$$
\begin{aligned}
0 &\leq J(u^\theta) - J(u) \\
&= \mathbb{E}[\Phi(x_T^\theta) + \Psi(y_0^\theta) + \int_0^T l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,u_t^\theta)dt] \\
&- \mathbb{E}[\Phi(x_T) + \Psi(y_0) + \int_0^T l(t,x_t,y_t,z_t,u_t)dt] \\
&= \mathbb{E}[\Phi(x_T^\theta) - \Phi(x_T)] + \mathbb{E}[\Psi(y_0^\theta) - \Psi(y_0)] \\
&+ \mathbb{E}[\int_0^T (l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,u_t^\theta) - l(t,x_t,y_t,z_t,u_t))dt],
\end{aligned}
$$

on applique le développement de Taylor avec reste integrable ou point (t,x_t,y_t,z_t,u_t) on trouve

$$
\begin{aligned}
[\Phi(x_T^\theta) - \Phi(x_T)] &= \int_0^1 \Phi_x(x_t + \lambda(x_T^\theta - x_T))(x_T^\theta - x_T)d\lambda \\
&= \int_0^1 \Phi_x(x_T + \lambda\theta(X_T + \widetilde{x}_T))\theta(X_T^\theta + \widetilde{x}_T)d\lambda \\
&= \int_0^1 \theta X_T^\theta \Phi_x(x_T + \lambda\theta(X_T^\theta + \widetilde{x}_T))d\lambda + \int_0^1 \theta\widetilde{x}_T\Phi_x(x_T + \lambda\theta(X_T^\theta + \widetilde{x}_T))d\lambda
\end{aligned}
$$

on passe a l'esperance on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Phi(x_T^\theta) - \Phi(x_T)] &= \theta\mathbb{E}\left[\int_0^1 \widetilde{x}_T\Phi_x(x_T + \lambda\theta(X_T^\theta + \widetilde{x}_T))d\lambda\right] \\
&+ \theta\mathbb{E}\left[\int_0^1 X_T^\theta\Phi_x(x_T + \lambda\theta(X_T^\theta + \widetilde{x}_T))d\lambda\right]
\end{aligned}
$$

De méme

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Psi(y_0^\theta)-\Psi(y_0)\right] &= \theta\mathbb{E}\left[\int_0^1 \theta\widetilde{y}_0\Psi(y_0+\lambda\theta(y_0^\theta+\widetilde{y}_0)d\lambda\right] \\
&+\theta\mathbb{E}\left[\int_0^1 \theta y_0^\theta\Psi_y(y_0+\lambda\theta(y_0^\theta+\widetilde{y}_0)d\lambda\right]
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,u_t^\theta)-l((t,x_t,y_t,z_t,u_t) &= \int_0^1 \Big(l_x(A_t^{\theta,\lambda}))(x_t^\theta-x_t)+l_y(A_t^{\theta,\lambda})(y_t^\theta-y_t) \\
&+l_z(A_t^{\theta,\lambda})(z_t^\theta-z_t)+l_v(A_t^{\theta,\lambda})(u_t^\theta-u)\Big)\,d\lambda \\
&= \int_0^1 \Big(l_x(A_t^{\theta,\lambda})\theta(X_t^\theta+\tilde{x}_t)+l_y(A_t^{\theta,\lambda})\theta(Y_t^\theta+\widetilde{y}_t) \\
&+l_z(A_t^{\theta,\lambda})\theta(Z_t^\theta+\tilde{z}_t)d\lambda+l_u(A_t^{\theta,\lambda})\theta(v_t-u_t)\Big)\,d\lambda
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \big(l(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,u_t^\theta)-l((t,x_t,y_t,z_t,u_t)\big)\,dt\right] &= \theta\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1 \Big(l_x(A_t^{\theta,\lambda})\tilde{x}_t+l_x(A_t^{\theta,\lambda})X_t^\theta\Big)\,d\lambda dt\right] \\
&+\theta\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1 \Big(l_y\Big(A_t^{\theta,\lambda}\Big)\widetilde{y}_t+l_x(A_t^{\theta,\lambda})Y_t^\theta\Big)\,d\lambda dt\right] \\
&+\theta\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1 \Big(l_z(A_t^{\theta,\lambda})\tilde{z}_t+l_x(A_t^{\theta,\lambda})Z_t^\theta\Big)\,d\lambda dt\right] \\
&+\theta\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1 l_v(A_t^{\theta,\lambda})(v_t-u_t)d\lambda dt\right]
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}(\Phi_x(x_T^u)\widetilde{x}_t)+\mathbb{E}[\Psi_y(y_0^u)\widetilde{y}_0 \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T l_x(t,x_t,y_t,z_t,u_t)\widetilde{x}_t dt\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T l_y(t,x_t,y_t,z_t,u_t)\widetilde{y}_t dt\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T l_z(t,x_t,y_t,u_t)\tilde{z}_t dt\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T l_v(t,x_t,y_t,z_t,u_t)(u_t-v_t)dt\right] \\
&+\varepsilon\left(\theta\right),
\end{aligned}
$$

■

telle que

$$\varepsilon^{\theta}(t) = \mathbb{E}\left[\int_0^1 X_T^{\theta}\Phi_x(x_T + \lambda\theta(X_T^{\theta} + \widetilde{x}_T))d\lambda\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^1 \theta y_0^{\theta}\Psi_y(y_0 + \lambda\theta(y_0^{\theta} + \widetilde{y}_0)d\lambda\right]$$
$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^1 \left(l_x(A_t^{\theta,\lambda})X_t^{\theta} + l_y(A_t^{\theta,\lambda})Y_t^{\theta} + l_z(A_t^{\theta,\lambda})Z_t^{\theta}\right) d\lambda dt\right]$$

quand $\theta \to 0$ on a $\lim_{\theta\mapsto 0}\varepsilon^{\theta}(t) = 0$ d'ou le résultat (3.25)

3.3 Conditions nécessaire d'optimalité

A partire de l'inégalité variationnelle (3.25),nous pouvons maintenant énoncer les condition nécessaires d'optimalité pour le probléme contrôle $\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$

Soit H l'hamiltonien ce qui est donné par la relation

$$H(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, v_t, p_t, P_t, Q_t) := I(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, v_t) + b(t, x_t^u, v_t).p_t + \sigma(t, x_t^u, v_t).P_t - f(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, v_t).Q_t, \tag{3.26}$$

On suppose que H est différentiable continue en x, y, z..

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses* (**H**), *soit* $(x^u, y^u, z^u_., u)$ *le contrôle optimal qui minimise la fonction de coût* J *sur* $\mathcal{U}$ *et et sa trajectoire correspondante de* (3.1),.*il existe unique triple processus adapté* (p^u, P^u, Q^u) *solution du systéme suivant (appelé équations adjointes),*

$$\begin{cases} dp_t^u = -l_x(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)dt - b_x(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)p_t^u dt \\ -\sigma_x(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)P_t^u dt + f_x^u(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)Q_t^u dt + P_t^u dB_t \\ p_T^u = \Phi_x(x_T^u), \end{cases} \tag{3.27}$$

et

$$\begin{cases} dQ_t^u = -l_y(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)dt - b_y(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)p_t^u dt \\ -\sigma_y(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)P_t^u dt + f_y^u(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)Q_t^u dt \\ -l_z(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)dB_t - b_z(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)p_t^u dB_t \\ -\sigma_z(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)P_t^u dB_t + f_z^u(t, x_t^u, y_t^u, z_t^u, u_t)Q_t^u dB_t \\ q_0^u = \Psi_y(y^u(0)). \end{cases} \tag{3.28}$$

$$et \quad (p^u, P^u) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; \mathbb{R}^n) \times L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; \mathbb{R}^{n\times d}), Q^u \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; \mathbb{R}^m)$$

alors le principe du maximum est valable tel que pour tout $u_t \in \mathcal{U}$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_v\,(v_t - u_t)\,dt\right] \geq . \tag{3.29}$$

pour tout $v \in \mathcal{U}, a.c, a.s.$

Preuve. On peut réecrire (3.27)et (3.28)sous la forme

$$\begin{cases} dp_t^u = -H_x dt + P_t dB_t \\ dQ_t^u = -H_y dt - H_z dB_t \\ p_T^u = \Phi_x(x_T^u), q_0^u = \Psi_y(y^u(0)). \end{cases} \tag{3.30}$$

On a $p_T = \Phi_x(x_T^u)$ et $Q_0^u = \Psi_y(y_0^u)$,alors (3.25) devient

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \mathbb{E}\left[p_T \widetilde{x}_T\right] + \mathbb{E}\left[Q_0^u \widetilde{y}_0\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T l_x(t, x_t, y_t, z_t, u_t)\widetilde{x}_t dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T l_y(t, x_t, y_t, z_t, u_t)\widetilde{y}_t dt\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T l_z(t, x_t, y_t, u_t)\tilde{z}_t dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T l_v(t, x_t, y_t, z_t, u_t)(u_t - v_t) dt\right] \end{aligned} \tag{3.31}$$

En appliquant la formule de Ito sur $(p_t^u \tilde{x}_t)$ et $(Q_t^u \tilde{y}_t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
d(p_t^u \tilde{x}_t) &= \tilde{x}_t dp_t + p_t d\tilde{x}_t + < dp_t, d\tilde{x}_t > \\
&= \tilde{x}_t \left(-H_x dt + P_t dB_t\right) \\
&+ p_t \Big(\Big[b_x \left(t, x_t^\mu, u_t\right) \widetilde{x}_t + b_v \left(t, x_t^\mu, u_t\right) \left(v_t - u_t\right) \Big] dt \\
&\Big[\sigma_x \left(t, x_t^\mu, u_t\right) \widetilde{x}_t + \sigma_v \left(t, x_t^\mu, u_t\right) \left(v_t - u_t\right) \Big] dB_t \Big) \\
&+ P_t \Big(\sigma_x \left(t, x_t^\mu, u_t\right) \widetilde{x}_t + \sigma_v \left(t, x_t^\mu, u_t\right) \left(v_t - u_t\right) \Big) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(Q_t^u \tilde{y}_t) &= \tilde{y}_t dQ_t + Q_t d\tilde{y}_t + < dQ_t, d\tilde{y}_t > \\
&= \tilde{y}_t \left(-H_y dt - H_z dB_t\right) \\
&Q_t \Big(\Big[\Big(f_x \left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right) \widetilde{x}_t + f_y \left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right) \widetilde{y}_t \Big) \Big] dt \\
&+ \Big[f_z \left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right) \widetilde{z}_t + f_v \left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, u_t\right) \left(v_t - u_t\right) \Big] dt + \widetilde{z}_t dB_t \Big) \\
&- H_z \widetilde{z}_t dt,
\end{aligned}$$

En intégrant de 0 à T et en passant à l'espérance et on remplace dans (3.31), on trouve

$$0 \leq \mathbb{E} \left[\int_0^T H_v \left(v_t - u_t\right) dt \right].$$

■

3.4 Conditions suffisante d'optimalité

Dans dette section ,nous étudions quand la condition d'optimalité nécessaire (3.29) devient suffisante .pour tout $u \in \mathcal{U}$,on note (x^u, y^u, z^u) la solution de l'équation (3.1) controlée par u.

Théorème 3.4.1 ***(conditions suffisantes d'optimalité*** *).Suppose que les fonction* $\Phi, \Psi, l, , H$ *sont convexes ,et pour tout* $u \in \mathcal{U}$, *.Alors* u *est une solution optimale du .probléme de controle*

$\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$ *s'il satisfait* (3.29)

Preuve. .Soit u un élément arbitraire de $\mathcal{U}$ (candidat a étre optimal), Pour tout $v \in \mathcal{U}$,,on a

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \mathbb{E}[\Phi(x_T^v) - \Phi(x_T^u)] + \mathbb{E}[\Psi(y_0^v) - \Psi(y_0^u)] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T [I(t, x_t, y_t, z_t, v_t) - I(t, x_t, y_t, z_t, u_t)]dt \end{aligned}$$

Puisque Φ et Ψ sont convexes, il s'ensuit que

$$\Phi(x_T^v) - \Phi(x_T^u \geq \Phi_x(x_T^u)(x_T^v - x_T^u)$$

et

$$\Psi(y_0^v) - \Psi(y_0^u) \geq \Psi_y(y_0^u)(y_0^v - y_0^u).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &\geq \mathbb{E}[\Phi_x(x_T^u)(x_T^v - x_T^u)] + \mathbb{E}[\Psi_y(y_0^u)(y_0^v - y_0^u)] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T [I(t, x_t, y_t, z_t, v_t) - I(t, x_t, y_t, z_t, u_t)]dt. \end{aligned}$$

D'aprés (3.30) on obtient

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &\geq \mathbb{E}[p_T^u(x_T^v - x_T^u)] + \mathbb{E}[Q_0^u(y_0^v - y_0^u)] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T [I(t, x_t, y_t, z_t, v_t) - I(t, x_t, y_t, z_t, u_t)]dt. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Ito respectivement a $p_t^u(x_t^q - x_t^u)$et $Q_t^u(y_t^q - y_t^u)$.on obtient

$$\begin{aligned}
J(v) - J(u) \geq \mathbb{E}\int_0^T & [H(t,x_t,y_t,z_t,v_t) - H(t,x_t,y_t,z_t,u_t))]dt \\
- \mathbb{E}\int_0^T & [H_x(t,x_t,y_t,z_t,u_t)(x_t^v - x_t^u)dt \\
- \mathbb{E}\int_0^T & [H_y(t,x_t,y_t,z_t,u_t))(y_t^v - y_t^u)dt \\
- \mathbb{E}\int_0^T & [H_z(t,x_t,y_t,z_t,u_t)(z_t^v - z_t^u)dt
\end{aligned}$$

Puisque H est convexe dans (x, y, z) et linéare dans u

$$\begin{aligned}
H(t,x_t,y_t,z_t,v_t) - H(t,x_t,y_t,z_t,u_t)) \geq & \ H_x(t,x_t,y_t,z_t,u_t)(x_t^v - x_t^u) \\
& + H_y(t,x_t,y_t,z_t,u_t))(y_t^v - y_t^u) \\
& + H_z(t,x_t,y_t,z_t,u_t)(z_t^v - z_t^u),
\end{aligned}$$

on obtient $J(v) - J(u) \geq 0$ .Le théoréme est prouvé

Donc u est un controle optimal. ■

Conclusion

Dans ce mémoire,nous sommes basés sur le problème de contrôle optimal de système EDS-EDSR ($FBSDE$) ,où lensemble des contrôle admissible est convexe et nous dérivons les condotions nécessaires et suffisantes d'optimalité de cette cas .

Bibliographie

[1] F. Antonelli, : Backward-forward stochastic differential equations. Ann. Appl. Probab. 3, 777-793 (1993).

[2] Briand.p.(2001).Equation Différentielle Stochastique Rétrogrades.Mars.

[3] A. Chala, R, Khalout, (2018). A risk-sensitive stochastic maximum principle for fullycoupled forward-backward stochastic dierential equations with applications.Asian JControl.

[4] Jean-François Le Gal,(2012).Mouvement brownien,martingales et calcul stochastique.

[5] Y, Hu., S, Peng. Solution of forward-backward stochastic differential equations, Probab. Theory Relat. Fields 103, 273 283 (1995).

[6] Itô, Kiyoshi. "Stochastic differential equations." Mem. Am. Math. Soc 4 (1951), 1-51. 2

[7] Monique Jeanblanc.Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY.Septembre 2006.

[8] Pardoux and S. Peng,(1990) Adapted solution of a backward stochastic differential equation,Systems Control Lett. 14 , no. 1, 55–61.

[9] S.Peng, Backward stochastic differential equations and application to optimal control problems, Appl. Math. Optim. 27, 125–144, (1993)

[10] S. Peng,Y.Shi (2000).Stochastic Processes and their Applications 85 75-92.

[11] W. Xu, Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 37, 172-185(1995).

Annexe

Lemme 3.4.1 ***Lemme de Gronwall*** *g une fonction positive mesurable bornée sur* $[0, T]$*. On suppose qu'il existe des constantes* $a > 0, b > 0$ *telles que pour tout* $t \in [0; T]$ *, on a :*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds$$

Alors $\forall t \in [0; T]$,

$$g(t) \leq a \exp(bt)$$

Lemme 3.4.2 ***Inégalité de Bulkhoder-Davis-Gundy(BDG)*** *pour tout temps d'arrêt* τ *on a ,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0;T]} \left|\int_0^t f(s) dB_s\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t |f(s)|^2 ds\right],$$

où C *est une constante positive.*

Lemme 3.4.3 ***L'inégalité de Hölder*** *L'inégalité de Hölder dit que si* $p, q > 1$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, alors :*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Lemme 3.4.4 ***l'inégalité de Cauchy-Schwartz*** *Soient* f *et* $g \in ([0, 1], \mathbb{R})$ *. Alors :*

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 3.4.5 ***Inégalité de Young*** *Soient a, b deux nombres réels Alors*

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

Lemme 3.4.6 ***Théorème de Fibuni****Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$, (F, B, η) deux espaces mesurés tels que les deux mesures soient $\sigma-$finies et soit $(E \times F, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \otimes \eta)$ l'espace mesurable produit muni de la mesure produit. Si*

$$f : E \times F \rightarrow [0, \infty],$$

et est un application $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-mesurable, alors les applications :

$$x \mapsto \int_E f(x,y)\, d\eta(y) \quad et \quad y \mapsto \int_F f(x,y)\, d\mu(x),$$

sont respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}-$mesurables et

$$\int_{E\times F} f(x,y)\, d(\mu \otimes \eta)(x \times y) = \int_F \left(\int_E f(x,y)\, d\eta(y) \right) d\mu(x) = \int_E \left(\int_F f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\eta(y).$$

Lemme 3.4.7 ***Théorème du point fixe*** *Soient (E, d) un éspace métrique complet et $\Psi : E \rightarrow E$ une application contractante, c'est à dire, Lipschitziènne de rapport $k < 1$. Alors : Ψ admet unique point fixe $a \in E$ tel que $\Psi(a) = a$.*

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié le problème du contrôle stochastique dans le cadre où le domaine des contrôles admissibles est convexe, défini par un système d'équations différentielles stochastiques - équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDS-EDSR). Nous avons identifié les conditions nécessaires et suffisantes pour atteindre le principe d'optimalité dans le contrôle stochastique.

Mots-clés : mouvement Brownien, intégrale d' Itô, Equations différentielles stochastiques, contrôle stochastiques, processus adjoint, conditions d'optimalité

Abstract

In this work, we studied the problem of stochastic control in the context where the set of admissible controls is convex, defined by a system of stochastic differential equations - backward stochastic differential equations (SDE-BSDE). We identified the necessary and sufficient conditions to achieve the optimality principle in stochastic control.

Key Words: Brownian motion, Ito integral, Stochastic differential equations, stochastic control, adjoint process,optimality conditions

الملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة مشكلة التحكم العشوائي في الإطار الذي يكون فيه مجال الضوابط المقبولة محدبًا، حيث يتم تعريف بواسطة جملة معادلة تفاضلية عشوائية - معادلة تفاضلية عشوائية تراجعية. (EDS-EDSR) ، و حددنا الشروط الضرورية والكافية لتحقيق مبدأ الأمثلية في التحكم العشوائي..

الكلمات المفتاحية : حركة براونية، تكامل إيتو،معدلات تفاضلية عشوائية، التحكم، سيرورة مساعدة ، شروط الأمثلية.