الجمهـوريـــة الجزائـريـــة الديـمقـراطيـــة الشـعـبيـــة

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientfiic Research

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

University of Kasdi Merbah, Ourgla

قسـم الرياضيـات

Department of Mathematics

مذكرة تخرج لنيل شهادة الماستر

تحت عنوان :

دراسة النقطة الثابتة في الفضاء المتري الجزئي و الفضاء الشبه المتري الجزئي

من إعداد الطالبة :

★ بيرش هجيرة

تحت إشراف الأستاذ :

★ عمـارة قرفـي

نوقشت يوم 2024/06/09

من طرف لجنة المناقشة :

♦ قويدري محمد .... أستاذ بجامعة قاصدي مرباح .... رئيسا.

♦ قرفي عمارة .... أستاذ بجامعة قاصدي مرباح .... مشرفا.

♦ باديجة سليم .... أستاذ بجامعة قاصدي مرباح .... مناقشا.

السنة الجامعية : 2024/2023

دفعة جوان 2024

شكر وتقدير

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم "من لم يشكر الناس لم يشكر الله" رواه أبو سعيد الخدري.

الحمد لله على إحسانه والشكر لله على توفيقه وإمتنانه ونشهد أن لاإله إلا الله وحده لاشريك له تعظيما لشأنه ونشهد أن سيدنا ونبينا محمد عبده ورسوله بعد شكر الله سبحانه وتعالى على توفيقه لنا لإتمام هذا البحث المتواضع أتقدم بجزيل الشكر إلى الوالدين العزيزين وزوجي محمد الأمين منصوري الذين أعانوني وشجعوني على الإستمرار وإلى كل الأصدقاء الذين ساعدوني في مسيرة العلم والنجاح وإكمال الدراسة الجامعية والبحث كما أتوجه بالشكر الجزيل إلى من شرفني بإشرافه على بحثي الدكتور عمارة قرفي الذي لن تكفي حروف هذا البحث بإيفائه حقه بصبره الكبير علي، والشكر موصول للجنة المناقشة لتقييم هذا البحث والشكر موصول لجامعة قاصدي مرباح ولكل أساتذة قسم الرياضيات كما نتوجه بخالص الشكر والتقدير إلى كل من ساعدني من قريب وبعيد على إنجاز وإتمام هذا العمل.

الإهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولايطيب النهار إلا بطاعتك ولاتطيب اللحظات إلا بذكرك ولاتطيب الآخرة إلا بعفوك ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك "الله جل جلاله" إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة إلى نبي الرحمة ونور العالمين "سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم" إلى من كلله الله بالهيبة والوقار إلى من علمني العطاء بدون إنتظار إلى "والدي العزيز" إلى ملاكي في الحياة إلى معنى الحب إلى معنى الحنان "أمي الحبيبة" أهدي هذا البحث المتواضع تعبيرا عن شكري له لوقوفه إلى جانبي كي أحقق طموحي العلمي "زوجي الغالي" إلى رفيقتي في الحياة جدتي الغالية أطال الله في عمرك.

المحتويات

مقدمة

يعود تعريف الفضاء المتري إلى العالم الرياضي الفرنسي فريشه 1906 نظرا لأهمية الفضاءات المترية فقد وضع العديد من العلماء والباحثين العديد من الفضاءات المترية "الجديدة" مثل الفضاءات المترية الجزئية التي قد قدمه ماثيون عام 1990 ووسع مبدأ الانكماش باناخ من الفضاءات المترية إلى الفضاءات المترية الجزئية (Partial Metric Space) وكذلك الفضاء شبه المتري (Quasi-Metric Space) وكذلك (Quasi Partial Metric) ،ثم تقديم نظرية النقطة الثابتة التي ظهرت في آخر القرن التاسع عشر وهي تستخدم للعثور على الحلول المتقاربة ووجود حل وحيد خاصة في المعادلات التفاضلية.
بدأ تاريخه من خلال أعمال (Banach) في عام 1922 ، تمكن Banach من تحقيق وجود وحدانية النقطة الثابتة للإنكماش في فضاء متري كاملة، وهناك نوع آخر من النقاط الثابتة التي تعرف تعميمات الفضاء شبه المتري وهو مايسمى نقطة ثابتة مشتركة ثنائية من التطبيقات بشكل عام من أجل إنشاء نقطة ثابتة مترية مشتركة على علاقة تبادلية بين التطبيقات المدروسة والاستمرارية.
هدفنا في هذه الرسالة هو دراسة الفضاءات الجديدة المعممة من الفضاءات المترية وندرس أيضا النقطة الثابتة في الفضاءات الجديدة وتعميم نظرية النقطة الثابتة لبناخ.
وتنقسم هذه المذكرة إلى ثلاثة فصول:

- الفصل الأول، مخصص للتعريفات والمفاهيم والنتائج التي تساعدنا في هذا العمل بالإضافة إلى الفضاءات المترية وبعض نظريات النقطة الثابتة.
- الفصل الثاني، مخصص للتعرف على بعض الفضاءات المترية الجديدة مثل الفضاء المتري الجزئي والفضاء الشبه المتري والفضاء المتري الشبه الجزئي.
- الفصل الثالث، قمنا ببناء نظرية النقطة الثابتة في الفضاء المتري الجزئي والفضاء الشبه المتري الجزئي.

الفصل الأول

معارف قبلية

يخصص هذا الفصل لدراسة بعض التعاريف والعناصر المهمة التي تساعدنا في انجاز عملنا.

1.1 الفضاء المتري

تعريف 1.1.1

لتكن X مجموعة غير خالية، ونسمي مسافة على X كل تطبيق من $d : X\times X \to R^{+}$ يحقق من جميع $x,y,z\in X$ الشروط [1]

1. $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$
2. $d(x,y)=d(y,x)$ (متناظرة)
3. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (علاقة مثلثية)

تعريف 1.1.2

لتكن X مجموعة غير خالية، يسمى فراغ متريا كل زوج (X,d) حيث d مسافة في X[1]

مثال 1.1.1

ليكن $x,y\in\mathbb{R}$ و $d(x,y)=|x-y|$

1. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow d(x,y)=|x-y|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$
2. $d(x,y)=|x-y|=|-(y-x)|=|-1||y-x|=|y-x|=d(y,x)$
3. $d(x,y)=|x-y|=|x-z+z-y|\leq |x-z|+|z-y|\leq d(x,y)+d(y,z)$

مثال 1.1.2

ليكن
$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y,\\ 1 & x\neq y.\end{cases}$$

1. $x=y \iff d(x,y)=0$ (محققة)
2. $$\begin{cases}x\neq y \Rightarrow d(x,y)=1=d(y,x) & \text{(محققة)}\\ x=y \Rightarrow d(x,y)=0=d(y,x) & \text{(محققة)}\end{cases}$$
3. (أ) $x=y=z$
$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y) \quad \text{(محققة)}$$
$$0\leq 0+0$$
(ب) $x=y\neq z$
$$0\leq 1+1 \Rightarrow 0\leq 2 \quad \text{(محققة)}$$
(ج) $x\neq y=z$
$$1\leq 1+0 \Rightarrow 1\leq 1 \quad \text{(محققة)}$$
(د) $x\neq y\neq z$
$$1\leq 1+1 \Rightarrow 1\leq 2 \quad \text{(محققة)}$$

مثال 1.1.3

لتكن $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$ $d(x,y)=|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|$ لدينا:

1. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow |\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{y} \Leftrightarrow x=y$
2. $d(x,y)=|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|=|(-1)(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})|=|-1||\frac{1}{y}-\frac{1}{x}|=|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}|=d(y,x)$
3. $d(x,y)=|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|=|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}-\frac{1}{y}|\leq|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}|+|\frac{1}{z}-\frac{1}{y}|=d(x,z)+d(z,y)$

مثال 1.1.4

لتكن $\sigma(x,y)=\ln(1+d(x,y))$ معرفة من X الى $\mathbb{R}$ إذا كانت d مسافة على X إذن:

1. $\sigma(x,y)=0 \Leftrightarrow \ln(1+d(x,y))=0 \Leftrightarrow 1+d(x,y)=1 \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

2. $\sigma(x,y)=\ln(1+d(x,y))=\ln(1+d(x,y))=\sigma(x,y)$

3. بما أن d هي مسافة إذا:

$$\begin{aligned}
&d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)\\
&\Leftrightarrow 1+d(x,z)\leq 1+d(x,y)+d(x,z)\\
&\Leftrightarrow 1+d(x,z)\leq 1+d(x,y)+d(x,z)+d(x,y)d(x,z)\\
&\Leftrightarrow 1+d(x,z)\leq (1+d(x,y))+(1+d(y,z))\\
&\Leftrightarrow \ln(1+d(x,z))\leq \ln(1+d(x,y))+\ln(1+d(y,z))\\
&\Leftrightarrow \sigma(x,z)\leq \sigma(x,y)+\sigma(y,z)
\end{aligned}$$

ومنه σ مسافة.

2.1 تكافؤ المسافات

تعريف 2.1.1

لتكن d_1 و d_2 مسافتين معرفتين على نفس المجموعة X ، يقال أن المسافة d_1 و d_2 متكافئتان، إذا وجد عددان α و β من $\mathbb{R}_+^*$ يحققان من أجل كل عنصرين $x,y\in X$ المتراجحة[1]:

$$\alpha d_1(x,y)\leq d_2(x,y)\leq \beta d_1(x,y) \qquad (1)$$

مثال 1.2.1

نعرف على المجموعة $X=]0,1[$ المسافتين d_1وd_2 كالتالي:

- $d_1(x,y)=|x-y| \quad x,y\in X$
- $d_2(x,y)=|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}| \quad x,y\in X$

نضع $X_1(x,d_1)$ و $X_1(x,d_2)$ من تعريف المسافتين يكون:

$$d_1(x,y)=|x-y|\leq \frac{|x-y|}{xy}=|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|=d_2(x,y)$$

تعريف 2.1.2: التقارب

ليكن (x,d) فراغا متريا، يقال إن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ من عناصر X متقاربة نحو x من X إذا كانت $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$ [1]

$$\forall\epsilon>0,\exists n_\epsilon\geq 1/\forall n\geq n_\epsilon \to d(x_n,x)<\epsilon$$

ونكتب: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$

ملاحظة 1.2.1

كل متتالية تتقارب فهي محدودة.

1.2.1 الإستمرار

تعريف 2.1.3

ليكن (X,d_x)، (Y,d_Y) فراغين متريين و f تطبيق من X في Y يقال أن التطبيق f مستمر في النقطة x_0 من X إذا تحققت الصيغة: [1]

$$\forall\epsilon>0\ \exists\sigma>0/(\forall x\in X/d_X(x,x_0)<\sigma)\Rightarrow d_Y(f(x),f(x_0))<\epsilon \qquad (2)$$

خواص

- كل متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو a فإن $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $f(a)$

2.2.1 الاستمرار بإنتظام

ليكن (X,d_X) و (Y,d_Y) فراغين متريين و f تطبيق من X في Y يقال ان التطبيق f مستمر بإنتظام على X إذا تحققت الصيغة:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \sigma > 0/(\forall x', x'' \in X/d_x(x',x'') < \sigma) \Rightarrow d_Y(f(x'),f(x'')) < \epsilon \qquad (3)$$

مثال 1.2.2

لتكن الدالة $f(x) = x^2$. هي مستمرة في $\mathbb{R}$ ولكنها غير مستمرة بإنتظام.

تعريف 2.1.4: متتالية كوشي

ليكن (X,d) فضاء متري، يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من عناصر X لكوشي إذا كان:[1]

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \geq 1/\forall n \geq n_\epsilon, \forall m \geq n_\epsilon \rightarrow d(x_n,x_m) < \epsilon \qquad (4)$$

مثال 1.2.3

الفضاء (X,d) حيث $X =]0,1[$ و d_x إقتصار المسافة d_ϵ على $]0,1[$ نعرف المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ كالتالي: $x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$

$$d(x_n,x_m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|_{n,m\rightarrow\infty} \rightarrow 0$$

أي أن المتتالية (x_n) لكوشي في الفراغ الجزئي (X,d) لكن ليست متقاربة في فيه لأن:

$$\lim_{n\rightarrow\infty} x_n = 0 \notin]0,1[$$

ملاحظة 1.2.2

كل متتالية تتقارب في فضاء متري فهي لكوشي

3.2.1 الفضاء النظيمي

تعريف 2.1.5

يسمى فراغا شعاعيا نظيميا كل زوج $(X,\|\,.\,\|)$ حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ و $\|\,.\,\|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}^+$ يحقق من أجل كل x,y من X مايلي:[1]

1. $\forall x\in X, \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x\in X, \forall\lambda\in \mathbf{K}\, \|(\lambda x)\| = |\lambda|\, \| x \|$ (متجانسة)
3. $\forall (x,y)\in X\, \|(x+y)\| \leq \| x \| + \| y \|$ (علاقة مثلثية)

مثال 1.2.4

فضاء المعرف كما يلي: $C([0,1],\mathbb{R})$

$$\begin{cases} \| f \|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f| \\ \| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \\ \| f \|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)dt} \end{cases}$$

مثال التطبيق $\|\,.\,\|$ من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ مايلي:

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

4.2.1 التحدب

نقول أن المجموعة $U\subset\mathbb{R}$ أنها محدبة لما $\forall x,y\in U$ و $[x,y]\subset U$ أو:

$$\forall x,y\in U, \forall t\in[0,1] \rightarrow tx+(1-t)y\in U \tag{5}$$

مثال 1.2.5

$$C = x_1, x_2, t = \frac{1}{2}, z = \frac{x_1 + x_2}{2} \in C$$

تعريف 2.1.6: الدالة المحدبة (convexe)

لتكن $U \in \mathbb{R}$ مجموعة. تكون $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة محدبة إذا تحقق الشرط التالي: [1]

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in U, t \in [0,1] \tag{6}$$

مثال 1.2.6

$$\begin{cases} f(x) = e^x \\ f(x) = x \quad \text{دالة الوحدة} \end{cases}$$

3.1 فضاء تام

تعريف 3.1.1

ليكن (X, d) فراغا متريا، يقال أن الفراغ (X, d) تام إذا كانت كل متالية كوشي منه متقاربة فيه. [1]

مثال 1.3.1

1. الفراغ العادي $(\mathbb{R}, d)$ تام
2. الفراغ $(\mathbb{R}^n, d)$ حيث $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ فراغ تام

4.1 فضاء بناخ

تعريف 4.1.1

ليكن $(X, \|.\|)$ فضاء شعاعية، يقال إن X فراغ بناخ، إذا كانت كل متتالية أساسية لكوشي متقاربة فيه

نتيجة 1

كل فراغ بناخ هو فراغ متري تام

مثال 1.4.1

1. $(\mathbb{R}, \|.\|)$ فضاء بناخ
2. الفراغ $(C[a,b], \|.\|)$ أي الفراغ $L_p[a,b]$ ليس فراغ بناخ.
مثلا في الفراغ $L_p[a,b]$ المتتالية المعرفة كالتالي

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, \frac{-1}{n}] \\ n^n & x \in [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

لكوشي لكنها ليست متقاربة في الفراغ $L_p[a,b]$

5.1 مبدأ التطبيق المقلص

1.5.1 تطبيق لبشيزي

تعريف 5.1.1

ليكن (X, d_X) و (Y, d_Y) فراغين متريين. نقول أن التطبيق f من X في Y ليبشيزي من أجل

$(K \in \mathbb{R}_+^*)$ إذا تحقق الشرط:[1]

$$\forall x, \forall y \in X \to d_y(f(x), f(y)) \leq K d_x(x,y) \qquad (7)$$

مثال 1.5.1

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}| \\
&= |\frac{x(1+x) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}| \\
&= |\frac{x + xy - y + yx}{(1+x)(1+y)}| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leq |x-y|
\end{aligned}$$

إذن f ليبشيزي على $\mathbb{R}$

2.5.1 تطبيق مقلص

تعريف 5.1.2

نقول أن التطبيق f مقلص[1] إذا كان f لبشيزي اذا كان $0 < \mathbf{k} < 1$

مثال 1.5.2

ليكن $E = \mathbb{R}$ يوجد $f(x) = 3x + 1$

$$\forall x, y \in E \ |f(x) - f(y)| = |3x + 1 - 3y - 1| = |3x - 3y| = 3|x - y|$$

إذن f ليس مقلص لأن نسبته $K = 3$

نتيجة 2

f مقلص $\Leftarrow$ f لبشيزي

3.5.1 النقطة الثابتة

تعريف 3.1.5: (مبسط)

نقول أن النقطة x نقطة ثابتة لـ f و $f: X \to X, f$ إذا تحقق مايلي:[1] $f(x_0) = x_0$

مثال 3.5.1

ليكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $x \to f(x) = 2x$ و $x = 0$ نقطة ثابتة لـ f فإن $0 = 0 \times 2 = f(0)$ و 0 نقطة ثابتة

ملاحظة 1.5.1

كل تطبيق مقلص هو مستمر

6.1 نظريات النقطة الثابتة

نظرية 1: Banach

ليكن (X, d) فضاء متري تام و T تطبيق من X حيث $T: X \to X$ يحقق $\forall x_1, x_2 \in X$ مايلي:

$$d(Tx_1, Tx_2) \leq kd(x_1, x_2) \forall x_1, x_2 \in X \tag{8}$$

و

$$0 \leq k < 1$$

إذن f تقبل نقطة ثابتة ووحيدة.

برهان. $(x_n)_{n\geq 1},\quad x_{n+1}=Tx_n n\geq 0$

متتالية كوشي $(x_n)_{n\geq 0}$

- $d(x_1,x_2)=d(Tx_0,Tx_1)\leq kd(x_0,x_1)$
- $d(x_1,x_2)\leq kd(x_3,x_1)$
- $d(x_2,x_3)\leq kd(x_0,x_1)$
- $d(x_1,x_{n+1})\leq k^n d(x_0,x_1)$
-

$$\begin{aligned}d(x_1,x_{n+p}) &\leq d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+p+1},x_{n+p})\\ &\leq (k^n+k^{n+1}+\cdots k^{p+1})d(x_0,x_1)\\ &\leq k^n(1+k+k^2+\cdots k^{p+1})d(x_0,x_1)\\ &\leq k^n(\frac{1-k^p}{1-k})d(x_0,x_1)x_{n+1}=Tx_n\end{aligned} \tag{9}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}&\lim x_{n+1}=\lim Tx_n\\ &T(\lim x_1)=Tx^0x_n^*=Tx_n^*\\ &x_2^*=Tx_2^*/d(x_1^*,x_2^*)=d(Tx_1^*,Tx_2^*)\\ &\leq kd(x_1^*,x_2^*)\Rightarrow(1-k)d(x_1^*,x_2^*)\leq 0\Rightarrow x_1^*=x_2^*\end{aligned}$$

■

نظرية 2: Brower

M مجموعة متراصة ومحدبة لدينا f تطبيق من $f:M\to M$ مستمر إذن f تقبل عل الأقل نقطة ثابتة.

نظرية 3: (Mai-keeler)

نقول أن (X,d) فضاء متري تام $T:X\to X$ تطبيق مستمر فإن:

$$\forall \epsilon>0\ \ \exists\sigma>0:\ \epsilon\leq d(x,y)<\epsilon+\sigma\Rightarrow d\left(T(x),T(y)\right)<\epsilon \tag{10}$$

إذن T نقطة ثابتة ووحيدة.

الفصل الثاني

الفضاءات المترية الجديدة

يهدف هذا الفصل لتعريف على بعض الفضاءات المترية وخصائصها.

1.2 الفضاء الشبه المتري

تعريف 1.2.1

لتكن $X \neq \phi$. نقول أن (X,d) فضاء شبه متري حيث d هي دالة $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ حيث تشير إلى مجموعة الأعداد الحقيقية غير سالبة) اذا d تحقق الشروط التالية:[13]

1. $d(x,x) = 0$
2. $x,y,z \in X \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

مثال 2.1.1

لتكن $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad \exists\, d(x,y) = |x^2 - y^2|$ حيث (R,d) الشبه المتري

1. $d(x,x) = |x^2 - x^2| = 0$
2.
$$\begin{aligned} d(x,y) = |x^2 - z^2 + z^2 - y^2| &\leq |x^2 - z^2| + |z^2 - y^2| \\ &\leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

- $d(x,y)$ يساوي الصفر إذا كان $x \neq y$ ليس فضاء متري لكن فضاء شبه متري

$$d(x,y) = |X^2 - y^2| = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2$$

$$\begin{cases} x = \pm y \quad \text{نأخذ} \quad x = -1 \\ x \neq y \quad \text{إذن} \quad y = 1 \end{cases}$$

ملاحظة 2.1.1

من الواضح أن أي فضاء متري هو فضاء شبه متري ولكن العكس ليس صحيحا (لأنه يتحقق كل الشروط ماعدا الشرط الـ 1 $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x\neq y$)

مثال 2.1.2

لتكن $X=N\cup O$ معرفة على الدالة d في X إذن:

- $n\in\mathbb{N}$ $d(0,n)=\frac{1}{n}$
- $n\neq x$ و $n\in\mathbb{N}$ و $d(n,x)=n$
- $x\in X$ و $d(n,n)=0$

إذن (x,d) ليس فضاء متري لأن $d(0,2)\neq d(2,0)$ ولكنها فضاء شبه متري من الواضح أن الشرط الأول قد تحقق لذلك سوف نتحقق من المتراجحة
$d(x,y)\geq d(x,z)+d(z,y)$ فإن المتراجحة نفرض أن $x\neq y$ و $z=y$ و $x=z$ و $y\neq z$
إذا كان $x=0$ و $y\neq 0$ إذا

مثال 2.1.3

لتكن X مجموعة والدالة f $f:X\to[0,1]$ تكون دالة عشوائية إذن الفضاء شبه متري و $x,y\in X$ $q(x,y)=max\{f(y)-f(x),0\}$

1.
$$(\Phi M1)\ d(x,x)=0\Leftrightarrow q(x,x) \begin{aligned}[t] &= max\{f(x)-f(x)\}=0 \\ &= max\{0,0\}=0\end{aligned}$$

2.

$$(\Phi M2)\ d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

$$\begin{aligned} q(x,y) &= \max\{f(y)-f(z)+f(z)-f(y),0\} \\ &\le \max\{f(y)-f(z),0\}+\max\{f(z)-f(y),0\} \\ &\le q(y,z)+q(z,x) \end{aligned}$$

لأن: $$\max(a+b) \le \max(a) + \max(b)$$

تعريف 1.2.2

لتكن (X,d) فضاء شبه متري. نقول أن x_n متتالية تتقارب نحو x و $x \in X$ اذا كان: [13]

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} (x,x_n) = 0 \tag{1}$$

تعريف 1.2.3

لتكن (X,d) فضاء شبه متري ونقول أن (x_n) متتالية كوشي في مجموعة X إذا كان $\epsilon > 0$ يوجد $N = N(\epsilon)$ بحيث $\forall n \ge m > N(\epsilon)$ فإن:[13]

$$\begin{cases} d(x_n,x_m) < \epsilon & \forall n \ge m > N \\ d(x_n,x_m) < \epsilon & \forall m > n > N \\ d(x_n,x_m) < \epsilon & \forall n > N \end{cases} \tag{2}$$

2.2 الفضاء المتري الجزئي

تعريف 2.2.1

لتكن $X \neq \phi$ نقول أنه (X,P) فضاء متري جزئي حيث $P: X \times X \to \mathbb{R}^+$ إذا كان مايلي:[11]

1. (متناظرة) $P(x,y)=p(y,x)$

2. إذا $0 \leq P(x,x)=P(x,y)=P(y,y)$
فإن $x=y$

3. $P(x,x) \leq P(x,y)$

4. (متراجحة مثلثية) $P(x,z)+P(y,y) \leq P(x,y)+P(y,z)$

مثال 2.2.1

الفضاء $([0,1],|.|)$ هو فضاء متري جزئي من الفضاء $(\mathbb{R},|.|)$

مثال 2.2.2

لتكن الثنائية $(\mathbb{R}^{+},P)$ و $P(x,y)=max\{x,y\}$ فضاء متري جزئي حيث
$d_P(x,y)=|x-y|$

1. $d_P(x,y)=|x-y|=|(-1)(y-x)|=|-1||y-x|=d_P(y,x)$
إذن $d_P(x,y)=d_P(y,x)$

2. $d_P(x,x)=|x-x|=0 \Rightarrow d_P(x,y)=|x-y|=0$
إذن $x=y$

3. $d_P(x,y)=|x-y| \geq 0 \rightarrow P(x,x)$
إذن $d_P(x,x)=d_P(x,y)$

4. $P(x,z)+P(y,y) \leq P(x,y)+P(y,z)$
$d_P(x,y)=|x-y|=|x-y+y-z| \leq |x-y|+|y-z|$
$d_P(x,z) \leq d_P(x,y)+d_P(y,z)$

ومنه فضاء متري جزئي.

تعريف 2.2.2

لتكن المتتالية (x_n) في فضاء متري جزئي (X,P)، نقول أن المتتالية x_n متقاربة نحو x و $x \in X$ إذا وفقط إذا [13]

$$P(x,x) = \lim_{n\to\infty} P(x,x_n) \quad (3)$$

تعريف 2.2.3

لتكن المتتالية (x_n) في فضاء متري (X,P)، نقول أن المتتالية لكوشي إذا كانت النهاية موجودة

$$\lim_{n,m\to\infty} P(x_n,x_m) \quad (4)$$

تعريف 2.2.4

نقول أن (X,P) فضاء متري جزئي تام إذا كانت كل متتالية كوشي x_n تتقارب نحو x

$$P(x,x) = \lim_{n,m\to\infty} P(x_n,x_m) \quad (5)$$

3.2 الفضاء الشبه المتري الجزئي

تعريف 3.2.1

هو عبارة عن مجموعة $X \neq \emptyset$ و q دالة حيث: $q : X\times X \to \mathbb{R}^+$ كالتالي:

1. $x = y$ فإن $0 \leq q(x,x) = q(x,y) = q(y,y)$ إذا (متناظرة)
2. $q(x,x) \leq q(y,x)$
3. $q(x,x) \leq q(x,y)$

4. $q(x,z)+q(y,y)\leq q(x,y)+q(y,z)$ و $x,y,z\in X$ (متراجحة مثلثية)

تعريف 3.2.2

ليكن (X,q) فضاء متري شبه جزئي (QPM) ونقول أن المتتالية x_n تتقارب نحو $x\in Xx$ إذا وفقط إذا

$$q(x,x)=\lim_{n\to\infty}q(x,x_n)=\lim_{n\to\infty}q(x_n,x) \tag{6}$$

و

تعريف 3.2.3

(X,q) فضاء شبه متري جزئي كامل اذا كل متتالية كوشي x_n تتقارب نحو x و $X\subset x_m$ و

$$q(x,x)=\lim_{n,m\to\infty}q(x_n,x_m)=\lim_{n,m\to\infty}q(x_m,x_n) \tag{7}$$

الفصل الثالث

النقطة الثابتة في الفضاءات المترية الجديدة

درسنا في الفصل السابق بعض الفضاءات الجديدة المعممة من تعريف الفضاء المتري، ولهذا نهتم إذا كان بالإمكان تعميم بعض النتائج الخاصة بالفضاء المتري نحو هذه الفضاءات الجديدة، وأحد أهم النتائج هي نظريات النقطة الثابتة. إذا سوف ندرس في هذا الفصل نظريات النقطة الثابتة في الفضاءات المعرفة سابقا.

1.3 الفضاء المتري الجزئي

نظرية 1: نظرية النقطة الثابتة لبناخ في الفضاء المتري الجزئي

ليكن الفضاء (X,p) فضاء جزئي تام، ولتكن f دالة مقلصة بالثابت $0 \leq k < 1$ في الفضاء X أي:

$$\forall x,y \in X: \quad p(f(x),f(y)) \leq k\, p(x,y) \tag{1}$$

فإنه يكون لدينا:

1. الدالة f تمتلك نقطة ثابتة وحيدة α $\quad f(\alpha)=\alpha$
2. $p(\alpha,\alpha)=0$

برهان. لأنه لدينا:

$$\forall x,y \in X: \quad p(x,y)=p(y,x) \tag{2}$$

نكتفي بدراسة حالة $n>m$ لإثبات أن المتتالية $(f^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية كوشي في الفضاء (X,p) بحيث

$$f^n(x)=\begin{cases} x & n=0 \\ f(f^{n-1}(x)) & n>0 \end{cases}$$

ليكن x عنصر من X ، وليكن $n > m$ عددين طبيعيين

$$\begin{aligned} p(f^n(x),f^m(x)) \leq\ & p(f^n(x),f^{n-1}(x))+ \\ & + p(f^{n-1}(x),f^m(x)) - p(f^{n-1}(x),f^{n-1}(x)) \end{aligned} \tag{3}$$

بإستعمال العلاقة المثلثية الخاصة بالفضاء المتري الجزئي نلاحظ أنه بصفة عامة يمكن أن نستنتج العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} p(f^j(x),f^j(x)) &\leq kp(f^{j-1}(x),f^{j-1}(x))\cdots \\ &\leq k^j p(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

إذن يكون لدينا:

$$p(f(x),f^{n-1}(x)) = p(f^{n-1}(f(x)),f^{n-1}(x)) \leq k^{n-1}p(f(x),x) \tag{5}$$

وبالتالي إنطلاقا من (1) نتحصل على:

$$\begin{aligned} p(f^{n-1}(x),f^m(x)) &\leq k^{n-1}p(f(x),x) \\ &+ p(f^{n-1}(x),f^m(x)) - p(f^{n-1}(x),f^{n-1}(x)) \\ &\leq k^{n-1}p(f(x),x) + p(f^{n-1}(x),f^m(x)) \end{aligned} \tag{6}$$

لأن

$$(p(f^{n-1}(x),f^{n-1}(x))) \geq 0$$

وبطريقة مماثلة نجد:

$$p(f^{n-1}(x),f^m(x)) \leq k^{n-2}p(f(x),x) + p(f^{n-2}(x),f^m(x))$$

أو بصفة عامة :

$$p(f^{n-j}(x),f^m(x)) \le k^{n-j-1}p(f(x),x)+p(f^{n-j-1}(x),f^m(x)) \qquad (7)$$

حيث $n-j>m$ وبالتالي انطلاقا من العلاقة 2 نتحصل على:

$$\begin{aligned}
p(f^n(x),f^m(x)) &\le k^{n-1}p(f(x),x)+k^{n-2}p(f(x),x)+\cdots \\
&\cdots+k^m p(f(x),x)+p(f^m(x),f^m(x)) \\
&\le (k^{n-1}+k^{n-2}+\cdots+k^m)p(f(x),x)+p(f^m(x),f^m(x)) \\
&\le k^m(k^{n-m-1}+k^{n-m-2}+\cdots+1)p(f(x),x)+k^m p(x,x) \\
&\le k^m(1+k+k^2+\cdots)p(f(x),x)+k^m p(x,x)
\end{aligned}$$

(بما أن $0\le k<1$ فإن $1+k+k^2+\cdots=\frac{1}{1-k}$ الذي يمثل مجموع السلسلة الهندسية)

$$\le k^n(\frac{1}{1-k})p(f(x),x)+p(x,x)) \qquad (8)$$

لما $n,m\to+\infty$ فإن $k^n\to 0$ ومنه:

$$\lim_{n,m\to 0}p(f^n(x),f^m(x))\le 0 \Rightarrow \lim_{n,m\to 0}p(f^n(x),f^m(x))=0 \qquad (9)$$

وبالتالي المتتالية $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية كوشي في الفضاء التام (X,p)

ومنه:

$$\exists\alpha\in X: \lim_{n\to\infty}f^n(x)=\alpha \qquad (10)$$

ويكون لدينا أيضا

$$\begin{aligned}
p(\alpha,\alpha) &= p(\lim_{n\to\infty}f^n(x),\lim_{m\to\infty}f^m(x)) \\
&= \lim_{n,m\to\infty}p(f^n(x),f^m(x))=0
\end{aligned} \qquad (11)$$

إذن الجزء ب من النظرية محقق
لنثبت أن $f(\alpha)=\alpha$

$$p(f(\alpha),f(\alpha))\leq kp(\alpha,\alpha)=0\Rightarrow p(f(\alpha),f(\alpha))=0$$

$$\begin{aligned}p(f(\alpha),\alpha)&\leq p(f(\alpha),f^n(\alpha))+p(f^n(\alpha),\alpha)-p(f^n(\alpha),f^m(\alpha))\\&\leq kp(\alpha,f^{n-1}(\alpha))+p(f^n(\alpha),\alpha)\end{aligned}$$

ومنه نستنتج

$$\begin{aligned}p(f(\alpha),\alpha)&\leq \lim_{n\to\infty} kp(\alpha,f^{n-1}(\alpha))+p(f^n(\alpha),\alpha)\\&=kp(\alpha,\alpha)+p(\alpha,\alpha)\\&=0\end{aligned}$$

أي: $p(f(\alpha),\alpha)=0$
إذن: $p(f(\alpha),\alpha)=p(\alpha,\alpha)=p(f(\alpha),f(\alpha))$
ومنه حسب الشرط الأول للفضاء الجزئي المتري: $f(\alpha)=\alpha$

■

2.3 الفضاء الشبه المتري الجزئي

نضع التعريف التالي:

تعريف 2.3.1: مدار نقطة بالنسبة لتطبيق

[13] لتكن X مجموعة كيفية والنقطة $x\in X$ وليكن التطبيق $T:X\to X$ نسمي مدار النقطة x بالنسبة للتطبيق T التي نرمز لها بـ $O(x)$ المجموعة التالية $O(x)=(T^nx)_{n\in\mathbb{N}}:n\in\mathbb{N}$ حيث:

$$T^n(x)=\begin{cases}x & n=0\\ T(T^{n-1}(x)) & n>0\end{cases}$$

لنبرهن النظرية التالية:

نظرية 2: الثابتة النقطة نظرية

ليكن (X,q) الفضاء الشبه المتري الجزئي والتطبيق $T : X \to X$ ،إذن يكون عندنا التكافؤات التالية:

1. يوجد تطبيق $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ بحيث
$q(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)\ ,\ \forall x \in X$ إذا وفقط إذا من أجل كل $x \in X$ تتقارب السلسلة التالية:
$$\sum_{n=0}^{\infty} q(T^n x, T^{n+1} x)$$
2. يوجد تطبيق $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ بحيث: $q(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)\ ,\ \forall x \in O(x)$
إذا وفقط من أجل كل $x \in O(x)$ تتقارب السلسلة التالية:
$$\sum_{n=0}^{\infty} q(T^n x, T^{n+1} x)$$

برهان. نبدأ بالتكافؤ (1)

- الإستلزام المباشر:
ليكن $x \in X$ ولنفرض أن $q(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$ نعرف المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كالآتي :

$$x_0 = x\ , x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x = T^{n+1}x_0 \tag{12}$$

نضع:

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} q(x_n, x_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} q(T^k x_0, T^{k-1} x_0) \tag{13}$$

إذن يكون لدينا

$$S_{n+1} - S_n = q(x_{n+1}, x_{n+2}) \geq 0 \tag{14}$$

ومنه $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة كما نجد أيضا

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{n=0}^{\infty} q(T^k x_0, T^{k-1} x_0) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(T^k x_0) - \varphi(T^{k+1} x_0) \\
&= [\varphi(x_0) - \varphi(Tx_0)] + [\varphi(Tx_0) - \varphi(T^2 x_0)] + \cdots + [\varphi(T^n x_0) - \varphi(T^{n+1} x_0)] \\
&= \varphi(x_0) - \varphi(T^{n+1} x_0) \\
&\leq \varphi(x_0)
\end{aligned}$$

ومنه (S_n) محدودة من الأعلى، أي أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، والذي يكافئ أن السلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(T^n x, T^{n+1} x) \quad \text{متقاربة} \tag{15}$$

- الإستلزام العكسي

ليكن $x \in X$ بحيث $\sum_{n=0}^{\infty} q(T^n x, T^{n+1} x)$ متقاربة.
نعرف

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} q(T^n x, T^{n+1} x), \quad S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(T^k x, T^{k+1} x) \\
(Tx) &= \sum_{n=0}^{\infty} q(T^{n+1} x, T^{n+2} x), \quad S_n(Tx) = \sum_{n=0}^{\infty} q(T^{k+1} x, T^{k+2} x)
\end{aligned}$$

بإستعمال التعريفات السابقة نجد:

$$\begin{aligned} S_n(x)-S_n(Tx) &= \sum_{n=0}^{\infty} q(T^k x, T^{k+1}x) - \sum_{n=0}^{\infty} q(T^{k+1}x, T^{k+2}x) \\ &= q(x,Tx) - q(T^{k+1}x, T^{k+2}x) \end{aligned} \tag{16}$$

وبما أن $\sum_{n=0}^{\infty} q(T^n x, T^{n+1}x)$ متقاربة نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} q(T^n x, T^{n+1}x) = 0 \text{ و } \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \varphi(x)$$

بحساب النهاية لما $\infty \to$ في العلاقة (16)

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) - S_n(Tx) = \lim_{n\to\infty} q(x,Tx) - q(T^{n+1}x, T^{n+2}x)$$

أي:

$$\varphi(x) - \varphi(Tx) = q(x,Tx) \tag{17}$$

أي أن الإستلزام العكسي محقق مما سبق أثبتنا أن التكافؤ (1) وبطريقة مماثلة يكون إثبات التكافؤ (2)

■

مثال 3.2.1

ليكن $X=[0,1]$ و $q(x,y)=|x-y|+|x|$ يمكن التأكد أن (X,q) يحقق شروط الفضاء الجزئي شبه المتري، غير أنه ليس فضاء جزئي متري: $q(0,1)=1\neq 2=q(1,0)$
كما أنه ليس فضاء شبه متري: $q(1,1)=1\neq 0$ نعرف التطبيق $T:X\to X$ كالآتي: $T(x)=\frac{1}{2}x$ إذن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} q(T^n x, T^{n+1}x)$ متقاربة. بالفعل نجد :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} q(T^n x, T^{n+1}x) &= \sum_{n=0}^{\infty} q(\frac{x}{2^n}, \frac{x}{2^{n+1}}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\frac{x}{2^n} - \frac{x}{2^{n+1}}| + |\frac{x}{2^n}| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{x}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3x}{2^{n+1}} \\ &= 3x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 3x \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ومنه شروط النظرية (2) محققة أي أنه يوجد $\varphi : X \to \mathbb{R}^*$ بحيث $q(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$ وعبارة φ هي $\varphi(x) = 3x$

نضع التعريف التالي:

تعريف 2.3.2

[13] ليكن التطبيق $G : X \to \mathbb{R}^+$ نقول أن G هو $T-$ مداري نصف مستمر سفلي عند النقطة x ، إذا كان من أجل كل $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من $O(x)$ تحقق:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = z \Rightarrow G(z) \leq \liminf_{n \to \infty} G(x_n) \tag{18}$$

حيث $O(x)$ يمثل مدار بالنسبة للتطبيق $T : X \to X$

في النظرية التالية نقدم شروط لوجود النقاط الثابتة للتطبيقات في الفضاءات الجزئية شبه المترية

نظرية 3

ليكن (X, q) و (T, q) فضاءات شبه جزئية مترية تامة ولتكن $T : X \to X$ و $R : X \to Y$ و

$\varphi : R(X) \to \mathbb{R}^+$ إذا وجد $x \in X$ و $c > 0$ بحيث

$$\max\{q(x,Tx), cq(Rx,RTx)\} \le \varphi(Rx) - \varphi(RTx) \qquad (19)$$

من أجل كل $x \in O(x)$ فإن النتائج التالية محققة:

1. $\exists z \in X : \lim_{n\to\infty} T^n x = z$
2. $Tz = z$ إذا وفقط إذا كان $G(x) = q(x,Tx)$ تطبيق $T-$ مداري نصف مستمر سفلي عند النقطة x
3. $q(x,T^n x) \le \varphi(Rx)$
4. إذا كانت الدالة $q(z,x)$ $x \to$ مستمرة من أجل $z \in O(x)$ ، إذن $q(x,z) \le \varphi(Rx)$ و $q(T^n x, z) \le \varphi(RT^n x)$

برهان. • برهان (1)

لتكن $x \in X$ نعرف المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كالتالي: $x_0 = x, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$ نبرهن أن $x \in X$ متتالية كوشي بإستعمال العلاقة المثلثية لـ q

$$\begin{aligned} q(x_n,x_{n+2}) &\le q(x_n,x_{n+1}) + q(x_{n+1},x_{n+2}) - q(x_{n+1},x_{n+2}) \\ &\le q(x_n,x_{n+1}) + q(x_{n+1},x_{n+2}) \end{aligned}$$

وبطريقة مماثلة

$$\begin{aligned} q(x_n,x_{n+3}) &\le q(x_n,x_{n+1}) + q(x_{n+2},x_{n+3}) - q(x_{n+2},x_{n+3}) \\ &\le q(x_n,x_{n+1}) + q(x_{n+2},x_{n+3}) \\ &\le q(x_n,x_{n+1}) + q(x_{n+1},x_{n+2}) + q(x_{n+2},x_{n+3}) \end{aligned}$$

وبالتعميم نتحصل على:
(20)

$$\begin{aligned} q(x_n,x_m) &\leq q(x_n,x_{n+1})+q(x_{n+2},x_{n+3})+\cdots+q(x_{m-1},x_m) \\ &= q(T^n x,T^{n+1}x)+q(T^{n+1}x,x_T n+2)+\cdots+q(T^{m-1}x,T^m x) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} q(T^k,T^{n+1}x) \end{aligned}$$

حيث $m>n$ نضع $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} q(T^k x,T^{k+1}x)$ من 19 نجد:

$$\begin{aligned} q(T^k x,T^{k+1}x) &\leq max\{q(T^k x,T^{k+1}x),cq(RT^k x,RT^{k+1}x)\} \\ &\leq \varphi(RT^k x)\varphi(RT^{k+1}x),\ \forall k\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{21}$$

وهذا يستلزم

$$\begin{aligned} S_n(x) &\leq \sum_{k=0}^{n} \varphi(RT^k x)\varphi(RT^{k+1}x) \\ &= [\varphi(Rx)-\varphi(RTx)]+[\varphi(TRx)-\varphi(RT^2x)]+\cdots+[\varphi(RT^n x)-\varphi(RT^{n+1}x)] \\ &= \varphi(Rx)-\varphi(RT^{n+1}x) \\ &\leq \varphi(Rx) \end{aligned}$$

إذن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى وهي أيضا متزايدة، بالفعل

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x)-S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} q(T^k,T^{k+1}x)-\sum_{k=0}^{n} q(T^k,T^{k+1}x) \\ &= q(T^{n+1},T^{n+2}x)\geq 0 \end{aligned}$$

ومنه $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة والذي بدوره يعني $\sum_0^\infty q(T^n,T^{n+1}x)$ متقاربة بأخذ النهاية لما

$n, m \to \infty$ في العلاقة (20)

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\to\infty} q(x_n,x_m) &\le \lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=n}^{m-1} q(T^k x, T^{k+1}x)\\ &= \lim_{n,m\to\infty} S_{m-1}(x) - S_n(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

وبطريقة مماثلة نجد: $\lim_{n,m\to\infty} q(x_m,x_n) = 0$ مما يعني أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية كوشي في الفضاء (X,q) وبما أن (X,q) تم فالفضاء (X,d_q)

أيضا فضاء تام مما يعطينا

$$\exists z \in X \lim_{n\to\infty} d_q(T^n x, z) = 0 \Leftrightarrow \exists z \in X \lim_{n\to\infty} T^n x = z \tag{22}$$

وهذا يكمل البرهان (1)

بالإضافة إلى ذلك نجد $q(T^n x, T^{n+1}x) = 0$

مما يعني:

$$\lim_{n\to\infty} q(T^n x, T^{n+1}x) = q(z,z) = 0$$

- برهان (2) الإستلزام المباشر

  نفرض أن $z = Tz$ و $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset O(x)$ بحيث $x_n \to z$

  نجد:

$$d_p(z,x_n) = 0 \Leftrightarrow q(z,z) = \lim_{n\to\infty} q(z,x_n) = \lim_{n,m\to\infty} q(x_n,x_n) \tag{23}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}G(z) = q(z,Tz) = q(z,z) &\le \liminf_{n\to\infty} q(x_n, Tx_n)\\ &= \liminf_{n\to\infty} G(x_n)\end{aligned} \tag{24}$$

وهذا يعني أن G هو $T-$ مداري نصف مستمر سفلي عند x الإستلزام العكسي:
نفرض أن G تطبيق $T-$ مداري نصف مستمر سفلي عند x و $x_n = Tx_n \to z$، إذن

$$\begin{aligned} 0 \le q(z,Tz) = G(z) &\le \liminf_{n\to\infty} G(x_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} q(T^n x, T^{n+1}x) \\ &= \liminf_{n\to\infty} q(x_n, x_{n+1}) \\ &= q(z,z) = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي $z = Tz$ وهذا يكمل برهان (2).

- برهان (3)

بإستعمال العلاقة 20 نجد

$$\begin{aligned} q(x,T^n x) &\le q(x,Tx) + q(Tx,T^2x) + \cdots + q(T^{n-1}x, T^n x) \\ &\le [\varphi(Rx) - \varphi(RTx)] + [\varphi(TRx) - \varphi(RT^2x)] + \cdots [\varphi(T^{n-1}Rx) - \varphi(RT^n x)] \\ &= \varphi(Rx) - \varphi(RT^n x) \\ &\le \varphi(Rx) \end{aligned} \tag{25}$$

- برهان (4)

بحساب النهاية لما $n \to \infty$ في العلاقة (25) نجد: $q(x,z) = \lim_{n\to\infty} q(x,T^n x) \le$ $\lim_{n\to\infty} \varphi(Rx) = \varphi(Rx)$ ومن العلاقة (20) في حالة $m > n$

$$\begin{aligned} q(x_n, x_n) &\le \sum_{k=n}^{n-1} q(T^k x, T^{k+1} x) \\ &\le \sum_{k=n}^{n-1} \varphi(RT^k x) - \varphi(RT^{k+1} x) \\ &= \varphi(RT^n x) - \varphi(RT^m x) \\ &\le \varphi(RT^n x) \end{aligned} \tag{26}$$

نحسب النهاية عندما $m \to \infty$

$$\begin{aligned} q(x_n, z) &= \lim_{m\to\infty} q(x_n, x_m) \\ &\leq \varphi(RT^n x) \end{aligned}$$

■

النتائج التالية هي حالات خاصة من النظرية (3)

نتيجة 1

ليكن (X, q) فضاء شبه جزئي متري تام ولكن $T : X \to X$ و $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ نفرض أن $\exists x \in X$ بحيث

$$\forall x \in O(x), q(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \tag{27}$$

فإن التالي محقق

1. $\exists z \in X : \lim_{n\to\infty} T^n x = z$
2. $Tz = z$ إذا وفقط إذا $G(x) = q(x, Tx)$ تطبيق $T-$ مداري نصف مستمر سفلي
3. $(qx, T^n x) \leq \varphi(x)$
4. إذا الدالة $q(z, y) \to y$ مستمرة من أجل $z \in O(x)$ فإن $q(x, z) \leq \varphi(x)$ و $q(T^n x, z) \leq \varphi(T^n x)$

برهان. نأخذ $y = x$ و $R = Id$ و $c = 1$ في النظرية (3) ■

نتيجة 2

ليكن (X, q) فضاء شبه جزئي متري تام وليكن $0 < k < 1$ نفرض أن التطبيق $T : X \to X$

والنقطة $x \in X$ يحققان

$$\forall x \in O(x) : q(Tx, T^2x) \le Kq(x, Tx) \tag{28}$$

إذن التالي محقق

1. $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$
2. $Tz = z$ إذا وفقط إذا $G(x) = q(x, Tx)$ تطبيق $T-$ مداري نصف مستمر سفلي
3. $q(x, T^n x) \le \frac{1}{1-K} q(x, Tx)$

برهان. نضع $\varphi(x) = \frac{1}{1-K} q(x, Tx)$ من أجل $x \in O(x)$ ■

خـــاتمة

تم بعون الله إتمام بحث المتمثل في النقطة الثابتة في الفضاء الشبه المتري الجزئي والفضاء المتري الجزئي، إذ يعتبر هذا الموضوع من المواضيع الهامة.

لقد حاولنا إستعراض بعض التعاريف التي تشمل الفضاء المتري وخصائصه ومجمل المفاهيم المتعلقة بالفضاءات المترية الجديدة مثل الفضاء المتري الجزئي والفضاء الشبه المتري الجزئي وركزنا في الأخير على النقطة الثابتة في هذه الفضاءات، لخصنا أهم النظريات على النقطةة الثابتة في هذه الفضاءات.

وقد ساعدنا هذا البحث على توسيع معلوماتنا وأعطانا أجوبة لكثير من تساؤلاتنا، نتمنى أننا لخصنا أهم الفضاءات على النقطة الثابتة لهذه الفضاءات ووضعناها في وثيقة يمكن "الإستفادة" منها مستقبلا.

إن من طبيعة الأعمال لاسيما العلمية منها لدى البشر لاترقى إلى الكمال مهما اشتد الحرص على إتقانها واجتمعت كل الأسباب دونها وحازت على النصيب الأوفر من عزائم أصحابها، إنها تظل ناقصة تستدعي جوانب منها على الدوام تدقيقا وتنويرا لذا نوجه دعوتنا إلى كل الأساتذة والزملاء الكرام الإهتمام بهذا البحث المتواضع قدر الإمكان وأبداء الملاحظات حولها شاكرين لهم وخير الختام الحمدلله حمدا كثيرا.

المصادر

[1] عسيلة مصطفى ، الفضاءات المترية، الفضاءات النظيمية.

[2] F. Abbas, Étude de Quelques Théorèmes du point fixe et leurs applications, Mémoire de Master Académique en Mathématiques, Univ. Saïda, .2015

[3] M. Abbas, B. E. Rhoades, Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in generalized metric spaces, Appl. Math. Comput. 215 (2009) .269-262

[4] I. Altun, A. Erduran, Fixed point theorems for monotone mappings on partial metric spaces, Fixed Point Theory and Applications (2011) .10 http://dx.doi.org/10.1155/2011/508730. Article ID .508730

[5] I. Altun, F. Sola, H. Simsek, Generalized contractions on partial metric spaces, Topology and Its Applications 157 (18) (2010) .2785–2778

[6] Lj. B. Ciric, Generalized contractions and fixed-point theorem, Publ. Inst. Math., 12 (26) ,(1971) .26-19

[7] J. Caristi, Fixed point theorems for mapping satisfying inwardness conditions, Transactions of the American Mathematical Society 215 (1976) .251–241

[8] T.L. Hicks, Fixed point theorems for quasi-metric spaces, Mathematica Japonica 33 (2) (1988) .236–231

[9] M. Jleli, and B. Samet, Remarks on G-metric spaces and fixed point theorems. Fixed Point Theory Appl. ,2012 Article ID 210 .(2012)

[10] G. Jungck and B. E. Rhoades, Fixed point for set valued functions without continuity, Indian J. Pure Appl. Math., 29 (3) (1998) .238-227

[11] G. Jungck, Commuting Mappings and Fixed Point, American Mathematical Monthly, Vol. ,83 pp. ,363-261 .1976

[12] R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc., 60 ,(1968) .76-71

[13] S.G. Matthews, Partial metric topology. In: Proceedings of the 8th Summer Conference on General Topology and Applications. Annals of the New York Academy of Sciences, vol. ,728 pp. 197-183 .(1994)

[14] S.G. Matthews, Partial metric topology, Research Report ,212 Department of Computer Science, University of Warwick, .1992

[15] H.P. Künzi, H. Pajoohesh, M.P. Schellekens, Partial quasi-metrics, Theoretical Computer Science—Spatial Representation: Discrete vs. Continuous Computational Models 365 (3) (2006) .246–237

[16] E. Karapınar, Weak [illegible]-contraction on partial contraction, Journal of Computational Analysis and Applications 14 (2) (2012) .210–206

[17] E. Karapınar, Generalizations of Caristi Kirk's theorem on partial metric spaces, Fixed Point Theory and Applications 2011 (4) (2011) http://dx.doi.org/10.2011-1812-1186/1687.

[18] D. R. Smart, "Fixed Point Theorems", Cambridge Univ. Press, .1973

[19] S. Oltra, S. Romaguera, E.A. Sanchez-Perez, The canonical partial metric and unfiorm convexity on normed spaces, Applied General Topology 6 (2) (2005) .194–185

[20] S. Oltra, O. Valero, Banach's fixed point theorem for partial metric spaces, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste 36 (2–1) (2004) .26–17

[21] O. Valero, On Banach fixed point theorems for partial metric spaces, Applied General Topology 6 (2) (2005) .240–229

الملخص:

الهدف من هذا العمل هو إيجاد نقاط ثابتة مشتركة التي تحقق شروطا معينة في الفضاء الشبه المتري الجزئي والفضاء المتري الجزئي، تم عرض بعض نتائج نظرية النقطة الثابتة لبناخ، وانتهينا من التعميمات حول وجود نقطة "ثابتة" في الفضاءات الجديدة

الكلمات المفتاحية: النقطة ثابتة ، الفضاء الشبه المتري، الفضاء الشبه المتري الجزئي ، الفضاء المتري الجزئي، نظرية بناخ

Abstract:

The goal of this work is to find common fixed points that satisfy certain conditions in the quasi-metric space and the partial metric space. Some results of Banach's fixed point theorem were presented, and we finished with generalizations about the existence of a fixed point in the new spaces.

Keywords: Fixed point, quasi-metric space, partial metric space, partial quasi-metric space, Banach theorem.

Résumé :

Le but de ce travail est de trouver des points fixes communs qui satisfont certaines conditions dans l'espace quasi-métrique et l'espace métrique partiel. Quelques résultats du théorème du point fixe de Banach ont été présentés, et nous avons terminé par des généralisations sur l'existence d'un point « fixe » dans les nouveaux espaces.

Mot clés : Point fixe, espace quasi-métrique, espace métrique partiel, espace quasi-métrique partiel, théorème de Banach.