



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة قاصدي مرباح ورقلة



كلية الرياضيات و علوم المادة
قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات وإعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجة و تحليل عددي

من اعداد الطالبة

نارة نصيرة

بعنوان

تقنية عددية فعالة لحل المعادلات التكاملية ذات متغيرين
الغير خطية باستخدام كثير حدود بوبكر

An Efficient Numerical Technique for Solving nonlinear two-dimensional
integral equations via Boubaker polynomials

نوقشت يوم : 20 / 06 / 2024 م

من طرف لجنة المناقشة

الرئيس	د. قويدري محمد	MCA	جامعة ورقلة
ممتحنا	د. حشيفة عبد الرزاق	MCB	جامعة ورقلة
مشرفا	د. بن الشيخ عبد الكريم	MCA	جامعة ورقلة

إهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك.. ولا يطيب النهار إلا بطاعتك..
ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك.. ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك..
إلى من كلله الله بالهبة والوقار.. إلى من علمني العطاء بدون انتظار..

والذي العزيز
إلى ملاكي في الحياة.. إلى معنى الحب والحنان.. إلى بسمه الحياة وسر الوجود
أمي الحبيبة

إلى منارة العلم والعلماء.....

إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة..

إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة..

أساتذتنا

كما أتوجه بالشكر إلى من شرفني بالإشراف على مذكرة بحثي الأستاذ الدكتور "بن الشيخ عبد الكريم" لك مني كل معاني التقدير
والعرفان

وأخيرا إلى كل من ساندني، وكان له دور من قريب أو بعيد في إتمام هذه الرسالة،
سائلة المولى عز وجل أن يجزي الجميع خير الجزاء في الدنيا والآخرة.

مقدمة

من المعلوم أن موضوع التحليل العددي و نظرية التقريب يهتمان بتقديم الطرق التقريبية لحلول المسائل المصاغة رياضياتيا مثل المعادلات التكاملية حيث أنه هناك العديد من الظواهر الطبيعية التي يمكن وصفها باستخدام هذه المعادلات . إن الاشكالية المطروحة لبعض المسائل المطروحة هي صعوبة إيجاد حلول تحليلية صريحة لهذه المسألة بالطرائق المعروفة بالرغم من علمنا مسبقا بمبرهنات الوجود و الوحدانية . لذا نلجأ الى طرق عددية و أشهرها التقريب بكثيرات الحدود لأن كثيرات الحدود من ابسط الدوال من ناحية التركيب و العمليات عليها تعطي قدره على البرمجة و التطبيق على الحاسوب حيث اصبحت مادة اساسية للعديد من للبحوث منذ ظهور نظرية وايرستراس . من جهة بناء مصفوفات العمليات لكثيرات الحدود ادلى الى تطوير تقنيات جديدة لحل المسائل من خلال خوارزميات مناسبة للحواسيب و إزالة تعقيدات عبارات المسائل من تكاملات و تفاضلات و المحافظة على أساس التقريب المستخدم. لذا كان الهدف الأساسي لهذه البحث تقديم و تطوير خوارزميات جديدة وفعالة و ذلك لإيجاد حلول أكثر دقة لتلك المعادلات و هو ما تم من خلال تقديم تقنيات فعالة في معالجة المعادلات التكاملية ذات متغيرين الغير الخطية باستعمال التقريب بكثيرات حدود بوبكر بمتغيرين و عن طريق انشاء مصفوفات العمليات التي كان دورها فعال في تبسيط العبارات . في هذه المذكرة قنا باعطاء تقنية فعالة لتقريب الحل لأربعة نماذج من المعادلات التكاملية الغير خطية وهي :
النموذج الأول :معادلات فريدهولم التكاملية ذو البعد 2

$$u(\zeta, \theta) = g(\zeta, \theta) + y \int_0^1 \int_0^1 \delta(\zeta, \theta, \tau, \xi) \psi(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) d\tau d\xi; (\zeta, \theta) \in \Omega, \quad (1)$$

النموذج الثاني:معادلات فولتيرا التكاملية ذو البعد 2

$$\begin{aligned} u(\zeta, \theta) = & g(\zeta, \theta) + y_1 \int_0^\zeta \int_0^\theta \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) \psi_1(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) d\tau d\xi \\ & + y_2 \int_0^\zeta \delta_2(\zeta, \theta, \tau) \psi_2(\tau, \xi, u(\tau, \theta)) d\tau \\ & + y_3 \int_0^\theta \delta_3(\zeta, \theta, \xi) \psi_3(\tau, \xi, u(\zeta, \xi)) d\xi; (\zeta, \theta) \in \Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

النموذج الثالث:معادلات فولتيرا-فريدهولم من النوع المختلط ذو البعد 2

$$u(\zeta, \theta) = g(\zeta, \theta) + y \int_0^1 \int_0^1 \delta(\zeta, \theta, \tau, \xi) \psi(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) d\tau d\xi; (\zeta, \theta) \in \Omega, \quad (3)$$

النموذج الرابع: النظام ذو البعد 2 لمعادلات فولتيرا التكاملية

$$\begin{cases} u(\zeta, \theta) = g(\zeta, \theta) + y \int_0^\theta \int_0^1 \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) \psi_1(\tau, \xi, u_1(\tau, \xi), u_2(\tau, \xi)) d\tau d\xi, \\ u(\zeta, \theta) = g(\zeta, \theta) + y \int_0^\theta \int_0^1 \delta_2(\zeta, \theta, \tau, \xi) \psi_2(\tau, \xi, u_1(\tau, \xi), u_2(\tau, \xi)) d\tau d\xi; \\ (\zeta, \theta) \in \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

قسمت هذه المذكرة إلى ثلاث فصول تناولت مايلي :

الفصل الأول

فصل تمهيدي بعنوان مفاهيم أساسية ودراسة مرجعية ، قدمنا فيه لمحة عن كثير حدود بوبكر، كما قمنا بتعريف كثير حدود بوبكر خصائصه، وذكر أنواع المعادلات التكاملية الغير خطية والمعادلات التكاملية ذات متغيرين الخطية والغير خطية .

الفصل الثاني

قمنا في هذا الفصل بعرض مصفوفات العمليات لكثير حدود بوبكر وهي مصفوفة العمليات المزدوجة ، مصفوفة العمليات للتكامل ، مصفوفة العمليات للجداء .

الفصل الأخير

وهذا ما يشمل الجزء التطبيقي ، حيث قمنا باستخدام أساس كثير حدود بوبكر للوصول إلى الحل التقريبي مع عرض لأمثلة عديدة لتوضيح العمل أكثر .

الفصل الأول

مفاهيم أساسية ودراسة مرجعية

قائمة المحتويات

4	1.1	كثير حدود بوبكر وبعض خصائصه في الفضاء ذو البعد 1
6	2.1	التعريف بكثيرات الحدود بوبكر وبعض خصائصه في الفضاء ذو البعد 2
10	3.1	المعادلات التكاملية
10	1.3.1	انواع المعادلات التكاملية
11	2.3.1	بعض المعادلات التكاملية الغير خطية
13	3.3.1	المعادلات التكاملية ذات متغيرين

1.1 كثير حدود بوبكر وبعض خصائصه في الفضاء ذو البعد 1

تعريف [1, 61]

يعرف كثير حدود بوبكر في الفضاء ذو البعد 1 من الدرجة n على المجال I بالعلاقة التالية:

$$\begin{cases} B_0(x) = 1, \\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} \frac{n-4k}{n-k} x^{n-2k}; n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (1.1)$$

حيث $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ تمثل الجزء الصحيح للعدد $\frac{n}{2}$.

مبرهنة 1.1.1

[1]. نفرض أن $B(x) = [B_0(x); B_1(x) \dots B_N(x)]^T$ هو الأساس لكثير حدود بوبكر، فإن كثيرات حدود بوبكر تعرف على الشكل

$$B(x) = A.T(x)$$

، حيث A هي مصفوفة مثلثية بحيث $i = j = 1, 2, \dots, N + 1$ ، العنصر $A(i, j)$ يحسب كما يلي:

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 1; r = 0, \\ -(i-5); r > 0 \ \varepsilon r = 2, \\ (-1)^{\frac{r}{2}} \frac{i-1-2r}{\frac{r}{2}} \prod_{k=\frac{r}{2}+1}^{r-1} (i-1-K); r > 0 \ \& \ mod(r, 2) = 0, \\ 0; r < 0, \end{cases}$$

حيث $r = i - j$ و $T(x)$ هو أساس لكثير حدود تايلور ذو البعد 1

$$T(x) = [T_0(x), T_1(x), \dots, T_N(x)]^T; \quad T_n(x) = x^n, n = 0, 1, \dots, N, x \in I. \quad (2.1)$$

كما نلاحظ أن $|A| = 1$ ، وبالتالي A قابل للقلب و A^{-1} هو موجود.

مبرهنة 2.2.1 نفرض أن $B(x) = [B_0(x), B_1(x), \dots, B_N(x)]^T$ باستعمال $B(x) = A.T(x)$ والمعادلة (2.1)، تكامل الشعاع $B(x)$ على المجال I يمكن كتابته على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \int_0^1 B(x')d(x') &= A \int_0^1 T(x')d(x') = A \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{N+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} B(x) \\ &= A \Lambda \Xi B(x) = GB(x), \end{aligned}$$

حيث $(N + 1) \times (N + 1)$ مصفوفات Λ و Ξ معطاة كمايلي :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix}$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

2.1 التعريف بكثيرات الحدود بوبكر وبعض خصائصه في الفضاء ذو البعد 2

1.0.2.1 التعريف وتقريب الدالة

تعريف 1.2.1 تعرف كثيرات حدود بوبكر ذو البعد 2 من الدرجة mn على المجال Ω كمايلي

$$B_{m,n}(\zeta, \theta) = B_m(\xi)B_n(\theta); m, n = 0, 1, \dots, N.$$

نظرية 2.1.1 [1]. نفرض أن $X = L^2(\Omega)$ هو فضاء هيلبار مع المنتج مرفق بالجداء السلمي

$$\langle f(\zeta, \theta), g(\zeta, \theta) \rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(\zeta, \theta), g(\zeta, \theta) d\xi d\theta,$$

والنظيم

$$\|f(\xi, \theta)\|_2 = \langle f(\xi, \theta), g(\xi, \theta) \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(\xi, \theta)|^2 d\xi d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ليكن

$$X_{N,N} = \text{span} \{B_{0,0}(\zeta, \theta), B_{0,1}(\zeta, \theta), \dots, B_{0,N}(\zeta, \theta)|\dots \\ |B_{N,0}(\zeta, \theta), B_{N,1}(\zeta, \theta), \dots, B_{N,N}(\zeta, \theta)\},$$

و $f(\zeta, \theta)$ هي دالة وصفية في X . بمأن $X_{N,N}$ عبارة عن فضاء شعاعي جزئي مغلق من X ذو بعد منتهي. فإن مجموعة كثيرات حدود بوبكر ذو البعد 2 تشكل أساس تام على المجال Ω . إذن $f(\zeta, \theta)$ تملك أحسن تقريب وحيد خارج $X_{N,N}$ مثل $f_{N,N} \in X_{N,N}$ حيث

$$\forall g \in X_{N,N} \|f - f_{N,N}\|_2 \leq \|f - g\|_2,$$

وتوجد معاملات وحيدة $f_{0,0}^b, f_{0,1}^b, \dots, f_{N,N}^b$ حيث

$$f(\zeta, \theta) \simeq f_{N,N}(\zeta, \theta) = \sum_{m_1=0}^N \sum_{n_1=0}^N b_{m_1, n_1} B_{m_1, n_1}(\zeta, \theta) = B^T(\zeta, \theta) F^b, \quad (3.1)$$

ببحث F^b و $B(\zeta, \theta)$ يمثل شعاع $(N+1)^2 \times 1$ وتعطى بالعلاقة التالية

$$F^b = [\bar{f}_{0,0}^b, \bar{f}_{0,1}^b, \dots, \bar{f}_{0,N}^b \mid \bar{f}_{1,0}^b, \bar{f}_{1,1}^b, \dots, \bar{f}_{1,N}^b \mid \dots \mid \bar{f}_{N,0}^b, \bar{f}_{N,1}^b, \dots, \bar{f}_{N,N}^b]^T,$$

$$B(\zeta, \theta) = [B_{0,0}(\zeta, \theta), B_{0,1}(\zeta, \theta), \dots, B_{0,N}(\zeta, \theta) \mid B_{1,0}(\zeta, \theta), B_{1,1}(\zeta, \theta), \dots, B_{1,N}(\zeta, \theta) \mid \dots \mid B_{N,0}(\zeta, \theta), B_{N,1}(\zeta, \theta), \dots, B_{N,N}(\zeta, \theta)]^T; (\zeta, \theta) \in \Omega \quad (4.1)$$

للتبسيط، يمكن كتابة $B(\zeta, \theta) = B(\zeta) \otimes B(\theta)$ ، حيث \otimes يرمز إلى كرونكير حيث $B(\zeta) = [B_0(\zeta), B_1(\zeta), \dots, B_N(\zeta)]^T$ و $B(\theta) = [B_0(\theta), B_1(\theta), \dots, B_N(\theta)]^T$. و $\delta(\zeta, \theta, \tau, \xi)$ على $\Omega \times \Omega$ بالنسبة لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2 كما يلي:

$$\delta(\zeta, \theta, \tau, \xi) \simeq \sum_{m_1=0}^N \sum_{n_1=0}^N \sum_{m_2=0}^N \sum_{n_2=0}^N \Delta_{m_1 n_1 m_2 n_2}^b B_{m_1}(\zeta) B_{n_1}(\theta) B_{m_2}(\tau) B_{n_2}(\xi) \quad (5.1)$$

$$= B^T(\zeta, \theta) \Delta^b B(\tau, \xi),$$

حيث $B(\tau, \xi) = B(\tau) \otimes B(\xi)$ هو كثير حدود بوبكر ذو البعد 2 ل $(N+1)^2 \times 1$ ذو أبعاد و Δ^b هي $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ معامل مصفوفة. لإيجاد F^b و Δ^b نأخذ المبرهنة التالية.

مبرهنة 1.1.1 الأساس $B(\zeta, \theta)$ المعرفة في المعادلة (4.1)، نضع $B(\zeta, \theta) = MT(\zeta, \theta)$ حيث M عبارة عن مصفوفة ذات $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ و $T(\zeta, \theta)$ يمثل كثير حدود تايلور ذو البعد 2 ذو $(N+1)^2 \times 1$ والذي يعرف كما يلي:

$$T(\zeta, \theta) = [T_{0,0}(\zeta, \theta), T_{0,1}(\zeta, \theta), \dots, T_{0,N}(\zeta, \theta) \mid T_{1,0}(\zeta, \theta), T_{1,1}(\zeta, \theta), \dots, T_{1,N}(\zeta, \theta) \mid \dots \mid T_{N,0}(\zeta, \theta), T_{N,1}(\zeta, \theta), \dots, T_{N,N}(\zeta, \theta)]^T; (\zeta, \theta) \in \Omega \quad (6.1)$$

حيث

$$T_{m,n}(\zeta, \theta) = T_m(\zeta) T_n(\theta); m, n, \dots, N$$

ببحث $T_m(\zeta)$ و $T_n(\theta)$ يمثلان كثير حدود تايلور ذو البعد 1 من الدرجة m و n على الترتيب والمعرفان في المعادلة (2.1).

البرهان 2.1.1 إذا كان أجل $m = n = 0, 1, \dots, N$ ل $1 \times (N+1)^2$ شعاع $M_{m+1, n+1}$ تعرف بالعلاقة $M_{m+1, n+1} = M_{m+1, n+1} T(\zeta, \theta)$. فإن A_{m+1} هو السطر ذو الرتبة $(m+1)$ من A ، حيث $A_{m+1} \otimes A_{n+1}$ إذن، بالتعريف

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} \\ M_{1,2} \\ \vdots \\ M_{1,N+1} \\ \vdots \\ M_{N+1,1} \\ M_{N+1,2} \\ \vdots \\ M_{N+1,N+1} \end{bmatrix},$$

يتم تحقيق النتيجة المرغوبة. من الجدير أن نلاحظ أن M هي مصفوفة مثلثية سفلية و $|M| = 1$ ، وبالتالي هي قابلة للقاب و M^{-1} موجود. من [1] تم التذكير بأن الدالتين (ζ, θ) و $\delta(\zeta, \theta, \tau, \xi)$ يمكن تقريهما في أساس كثير حدود تايلور ذو البعد 2 كما يلي

$$f(\zeta, \theta) \simeq \sum_{m_2=0}^N \sum_{n_2=0}^N f_{m_2, n_2}^t T_{m_2}(\zeta) T_{n_2}(\theta) = \sum_{m_2=0}^N \sum_{n_2=0}^N f_{m_2, n_2}^t \zeta^{m_2} \theta^{n_2} = T^T(\zeta, \theta) F^t, \quad (7.1)$$

و

$$\begin{aligned} \delta(\zeta, \theta, \tau, \xi) &\simeq \sum_{m_1=0}^N \sum_{n_1=0}^N \sum_{m_2=0}^N \sum_{n_2=0}^N \Delta_{m_1 n_1 m_2 n_2}^t T_{m_1}(\zeta) T_{n_1}(\theta) T_{m_2}(\tau) T_{n_2}(\xi) \\ &= \sum_{m_1=0}^N \sum_{n_1=0}^N \sum_{m_2=0}^N \sum_{n_2=0}^N \Delta_{m_1 n_1 m_2 n_2}^t \zeta^{m_1} \theta^{n_1} \tau^{m_2} \xi^{n_2} \\ &= T^T(\zeta, \theta) \Delta^t T(\tau, \xi), \end{aligned} \quad (8.1)$$

حيث $T(\tau, \xi)$ يعرف كما في المعادلة (6.1) ، F^t هو شعاع ذو البعد $(N+1)^2$ مركبة و Δ^t هو معامل مصفوفة كثير حدود تايلور ذو البعد 2 ذو الرتبة $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ وتبرهن كما يلي

$$F^t = [f_{0,0}^t, f_{0,1}^t, \dots, f_{0,N}^t | f_{1,0}^t, f_{1,1}^t, \dots, f_{1,N}^t | \dots | f_{N,0}^t, f_{N,1}^t, \dots, f_{N,N}^t]^T,$$

$$\Delta^t = \begin{bmatrix} \Delta_{00}^t & \Delta_{01}^t & \dots & \Delta_{0N}^t \\ \Delta_{10}^t & \Delta_{11}^t & \dots & \Delta_{1N}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{N0}^t & \Delta_{N1}^t & \dots & \Delta_{NN}^t \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}_{m_2, n_2}^t, m_2, n_2 = \text{لإيجاد المعاملات } \Delta_{mn}^t = \begin{bmatrix} \Delta_{m0n0}^t & \Delta_{m0n1}^t & \dots & \Delta_{m0nN}^t \\ \Delta_{m1n0}^t & \Delta_{m1n1}^t & \dots & \Delta_{m1nN}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{mNn0}^t & \Delta_{mNn1}^t & \dots & \Delta_{mNnN}^t \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} ; m, n = 0, 1, \dots, N,$$

، $0, 1, \dots, N$ من الضروري أخذ المشتقات الجزئية m_2 و n_2 مرات متتالية بالنسبة إلى ζ و θ ، على الترتيب، من المعادلة (7.1) ، وبوضع $\zeta = \theta = 0$ ، بالتالي، بمأن $\frac{\partial^{m_2+n_2} \zeta^{m_2} \theta^{n_2}}{\partial \theta^{n_2} \partial \zeta^{m_2}} = m_2! n_2!$ فإن معامل المركبة \bar{f}_{m_2, n_2}^t يصبح $m_2! n_2!$ ومعامل مركبة أخرى هو الصفر. كنتيجة، \bar{f}_{m_2, n_2}^t من F^t يمكن حسابها باستعمال العبارة التالية

$$\bar{f}_{m_2, n_2}^t = \frac{\partial^{m_2+n_2} f(0,0)}{\partial \theta^{n_2} \partial \zeta^{m_2}} \cdot m_2! n_2!.$$

بنفس الطريقة، لإيجاد المعامل $\Delta_{m_1 n_1 m_2 n_2}^t$ نحتاج أخذ المشتقات الجزئية للمعادلة (8.1) ، m_1, n_1, m_2, n_2 مرات متتالية بالنسبة إلى ζ, θ, τ, ξ و على الترتيب، وبوضع $\zeta = \theta = \tau = \xi = 0$ ، بالتالي، بمأن $\frac{\partial^{m_1+n_1+m_2+n_2} \zeta^{m_1} \theta^{n_1} \tau^{m_2} \xi^{n_2}}{\partial \xi^{n_2} \partial \tau^{m_2} \partial \theta^{n_1} \partial \zeta^{m_1}} = m_1! n_1! m_2! n_2!$ ،

معامل $\Delta_{m_1 n_1 m_2 n_2}^t$ يصبح $m_1! n_1! m_2! n_2!$ ،

ومعامل مركبة أخرى هو الصفر. كنتيجة، العنصر $\Delta_{m_1 n_1 m_2 n_2}^t$ من Δ^t يمكن حسابها باستعمال العبارة التالية

$$\Delta_{m_1 n_1 m_2 n_2}^t = \frac{\partial^{m_1+n_1+m_2+n_2} \delta(0,0,0,0)}{\partial \xi^{n_2} \partial \tau^{m_2} \partial \theta^{n_1} \partial \zeta^{m_1}} \cdot m_1! n_1! m_2! n_2!.$$

من المعادلات (3.1)، (5.1)، (7.1)، (8.1) والمبرهنة 2.2.1، المعادلة التالية تستعمل لحساب F^b و Δ^b .

$$F^b = (M^T)^{-1}F^t,$$

$$\Delta^b = (M^T)^{-1}\Delta^t M^{-1}.$$

3.1 المعادلات التكاملية

1.3.1 انواع المعادلات التكاملية

تعريف 1.3.1 المعادلات التكاملية هي المعادلة التي يكون فيها المجهول تحت علامة التكامل وقد يضاف المجهول أيضا خارج التكامل في أحد طرفي المعادلة
مثال 1 لدينا: $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

نسمي معادلات تكاملية التابع $u(x)$ هو تابع مجهول يطلب تحديده، والتابع $K(x, y), f(x)$

2.3.1 بعض المعادلات التكاملية الغير خطية

المعادلات التكاملية غير الخطية كثيرة نذكر أشهرها:
معادلة هامريشتين التكاملية

تعريف 2.3.1 نسمي معادلة تكاملية غير خطية هامريشتين كل معادلة تكتب من الشكل:

$$\mu u(x) = f(x) + \lambda \int_D K(x, t)F(t, u(t))dt, D \in R^b, n \in N^*$$

معادلة تكاملية لها هامريشتين نوعها يعتمد على قيم μ تأخذ المعادلة الشكل:

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)F(t, u(t))dt$$

في حالة $\mu = 0$ فتسمى هامريشتين- فولتيرا تكاملية غير خطية من النوع الأول، أما في حالة $\mu = 1$ المعادلة تأخذ الشكل:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)F(t, u(t))dt$$

فإنها تسمى هامريشتين- فولتيرا تكاملية غير الخطية من النوع الثاني.

معادلة فريدهولم- فولتيرا التكاملية

تعريف 3.3.1 نسمي معادلة فريدهولم- فولتيرا التكاملية غير الخطية كل معادلة معرفة على الشكل التالي

$$\mu u(\bar{x}, t) + \lambda \int_{\Omega} K(\bar{x} - \bar{\xi}, \bar{y} - \bar{s}) F(t, u(\bar{\xi}, \bar{s})) d\bar{\xi} d\bar{s} + \lambda \int_0^t G(t, T) u(\bar{x}, \bar{y}, T) dT = f(x, y, t)$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

معادلة يورشون-فولتيرا التكاملية

تعريف 4.3.1

$$\mu u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t)) dt, 0 \leq x \leq T < \infty$$

تسمى معادلة يورشون-فولتيرا التكاملية غير الخطية، ونوعها يعتمد على قيم $\mu = 0$ فإن:

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t)) dt, 0 \leq x \leq T < \infty$$

معادلة يورشون-فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الأول، وإذا كان $\mu = 1$ فإن:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t)) dt, 0 \leq x \leq T < \infty$$

هي معادلة يورشون-فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الثاني وتكون من النوع الثالث عندما

$$\mu = \mu(x)$$

$$\mu(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t)) dt$$

معادلة اريك ايفار فريدهولم التكاملية غير الخطية

تعريف 5.3.1

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) F(t, u(t)) dt$$

هي معادلة تكاملية غير خطية فريدهولم من النمط الثاني أما إذا كانت $f = 0$ فإن المعادلة التكاملية لفريدهولم غير الخطية تكون متجانسة، و

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t, u(t)) dt$$

هي معادلة تكاملية غير خطية لفريدهولم من النمط الأول.

3.3.1 المعادلات التكاملية ذات متغيرين

تكتب المعادلات التكاملية ذات متغيرين بالشكل التالي

$$\lambda u(x, y) = f(x, y) + \int_a^b \int_c^d k(x, y, s, t) F(u(s, t)) dt \quad (9.1)$$

$u(x, y)$ هي الدالة المجهولة المطلوب تعيينها
 $f(x, y)$ و $k(x, y, s, t)$ دوال معلومة قد تكون مركبة أو حقيقية
 b و d ثوابت نسمي هذه المعادلة بمعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني،
 أما إذا كانت $\lambda = 0$ فنسمي هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا تكاملية من النوع الأول.
 إذا كان احدهما ثابت والاخر متغير فإننا نسمي هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا- فريدهولم أو فريدهولم فولتيرا
 تنقسم المعادلة التكاملية ذات متغيرين إلى قسمين خطية وغير خطية

ملاحظة:

إذا كانت f خطية فإننا نقول عن المعادلة التكاملية ذات متغيرين خطية والعكس صحيح

1.3.3.1 المعادلات التكاملية ذات متغيرين الخطية

نقول عن المعادلة (9.1) أنها خطية إذا كان المؤثر F خطي ونكتب:

$$u(x, y) = f(x, y) + \int_a^b \int_c^d k(x, y, s, t) F(u(s, t)) ds dt$$

2.3.3.1 المعادلات التكاملية ذات متغيرين الغير الخطية

نسمي المعادلة التكاملية (9.1). بغير الخطية إذا كان $u(s, t)$ مركب من دالة خطية.
 مثال 2

$$u(x, y) = \int_a^b \int_c^d k(x, y, s, t) F(u(s, t)) ds dt$$

المعادلة التكاملية:

$$u(x, y) = \int_a^x \int_c^d k(x, y, s, t) F(u(s, t)) ds dt$$

نسمي معادلة فولتيرا- فريدهولم غير الخطية ذات متغيرين.
 والمعادلة التكاملية

$$u(x, y) = \int_a^x \int_c^y k(x, y, s, t) F(u(s, t)) ds dt$$

هي معادلة فولتيرا- فريدهولم غير الخطية ذات متغيرين

الفصل الثاني

مصفوفة العمليات لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2

قائمة المحتويات

16	مصفوفة العمليات المزدوجة	1.2
16	مصفوفات العمليات للتكامل	2.2
16	مصفوفة العمليات للتكامل للمتغيرات المختلطة	1.2.2
17	مصفوفة العمليات للتكامل للمتغير ζ	2.2.2
18	مصفوفة العمليات للتكامل للمتغير θ	3.2.2
18	مصفوفة العمليات للتكامل في المجال $[0, \theta] \times [0, 1]$	4.2.2
19	مصفوفة عمليات الجداء	3.2
19	مصفوفة عمليات الجداء لكثير حدود تايلور ذو البعد 2	1.3.2
20	مصفوفة عمليات الجداء لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2	2.3.2

1.2 مصفوفة العمليات المزدوجة

باعتبار خاصية قابلية الفصل لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2، تكامل الجداء الشعاعي لشعاعين من كثير حدود بوبكر ذو البعد 2 $B(\zeta, \theta)$ و $B^T(\zeta, \theta)$ نحصل عليه كالآتي:

(1.2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 B(\zeta', \theta') B^T(\zeta', \theta') d\theta' d\zeta' &= \int_0^1 \int_0^1 [B_{m_1, n_1}(\zeta', \theta') B_{m_2, n_2}(\zeta', \theta')] d\theta' d\zeta' \\ &= \left[\int_0^1 \int_0^1 B_{m_1, n_1}(\zeta', \theta') B_{m_2, n_2}(\zeta', \theta') d\theta' d\zeta' \right] \\ &= \left(\left[\int_0^1 B_{m_1}(\zeta') B_{m_2}(\zeta') d\zeta' \right] \right) \otimes \left(\left[\int_0^1 B_{n_1}(\theta') B_{n_2}(\theta') d\theta' \right] \right) \\ &= \left(\int_0^1 B(\zeta') B^T(\zeta') d\zeta' \right) \otimes \left(\int_0^1 B(\theta') B^T(\theta') d\theta' \right) \\ &= Q_{1D}^b \otimes Q_{1D}^b = Q_{2D}^b, \end{aligned}$$

بحيث Q_{2D}^b هي مصفوفة العمليات المزدوجة لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2 ذات البعد $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ و Q_{1D}^b مصفوفة ذات البعد $(N+1) \times (N+1)$ معرفة في [1]. كما يلي $Q_{1D}^b = A \rho_{1D}^t A^T$ هي مصفوفة هيلبرتية معرفة جيداً. مركبات المصفوفة المذكورة أعلاه تحدد كما يلي $[Q_{1D}^t]_{m,n} = \frac{1}{m+n+1}$, $m, n = 0, 1, \dots, N$.

2.2 مصفوفات العمليات للتكامل

1.2.2 مصفوفة العمليات للتكامل للمتغيرات المختلطة

نعتبر خاصية قابلية الفصل لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2، تكامل الشعاع $B(\zeta, \theta)$ المعروف في المعادلة (4.1)، يمكن التعبير عنه كما يلي:

$$\begin{aligned} \int_0^\zeta \int_0^\theta B(\zeta', \theta') d\theta' d\zeta' &= \int_0^\zeta \int_0^\theta (B(\zeta') \otimes B(\theta')) d\theta' d\zeta' \\ &= \left(\int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \right) \otimes \left(\int_0^\theta B(\theta') d\theta' \right) \\ &\simeq (P_{1D}^b B(\zeta)) \otimes (P_{1D}^b B(\theta)) \\ &= (P_{1D}^b \otimes P_{1D}^b B(\zeta, \theta)) = P_{2D}^b B(\zeta, \theta), \end{aligned} \quad (2.2)$$

بحيث $(\zeta, \theta) \in \Omega$ و P_{2D}^b هي مصفوفة العمليات للتكامل لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2 ذات البعد $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ و P_{2D}^b مصفوفة العمليات لكثير حدود بوبكر ذو البعد 1 ذات البعد $(N+1) \times (N+1)$ المعروف في [1]. كما يلي

هي مصفوفة العمليات للتكامل لكثير حدود بوبكر ذو البعد 1 على المجال I ويعطى في [1]. كمايلي

$$P_{1D}^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

2.2.2 مصفوفة العمليات للتكامل للمتغير ζ :

بنفس الطريقة المذكورة أعلاه يمكننا الحصول عليها

$$\begin{aligned} \int_0^\zeta B(\zeta', \theta) d\zeta' &= \int_0^\zeta (B(\zeta') \otimes B(\theta)) d\zeta' \\ &= \left(\int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \right) \otimes B(\theta) \\ &\simeq (P_{1D}^b B(\zeta)) \otimes (I_{N+1} B(\theta)) \\ &= (P_{1D}^b \otimes I_{N+1}) B(\zeta, \theta) = {}^\zeta P B(\zeta, \theta), \end{aligned} \quad (4.2)$$

حيث I_{N+1} هي مصفوفة الوحدة ذات البعد $(N+1) \times (N+1)$.

3.2.2 مصفوفة العمليات للتكامل للمتغير θ :

العلاقة التالية يمكن استنتاجها من أجل $\int_0^\theta B(\zeta, \theta') d\theta'$

$$\int_0^\theta B(\zeta, \theta') d\theta' \simeq P^\theta B(\zeta, \theta), \quad (5.2)$$

حيث ${}^\theta P = I_{N+1} \otimes P_{1D}^b$ أو

$${}^\theta P = \begin{bmatrix} P_{1D}^b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{1D}^b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{1D}^b \end{bmatrix}$$

و 0 هو مصفوفة صفرية ذات البعد $(N+1) \times (N+1)$.

4.2.2 مصفوفة العمليات للتكامل في المجال $[0, \theta] \times [0, 1]$:

أخيراً، باستعمال المعادلة (2.2.1). نجد

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \int_0^1 B(\zeta', \theta') d\zeta' d\theta' &= \int_0^\theta \int_0^1 (B(\zeta') \otimes B(\theta')) d\zeta' d\theta' \\ &= \left(\int_0^1 B(\zeta') d\zeta' \right) \otimes \left(\int_0^\theta B(\theta') d\theta' \right) \\ &\simeq (GB(\zeta)) \otimes (P_{1D}^b B(\theta)) \\ &= (G \otimes P_{1D}^b) B(\zeta, \theta) =^{mix} PB(\zeta, \theta). \end{aligned} \quad (6.2)$$

3.2 مصفوفة عمليات الجداء

في هذا الفصل، نعرف الطريقة العامة لحساب مصفوفة العمليات للجداء لكثير حدود تايلور ذو البعد 2: ثم، باستعمال المبرهنة 2.2.1، نتحصل على مصفوفة عمليات الجداء لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2

1.3.2 مصفوفة عمليات الجداء لكثير حدود تايلور ذو البعد 2 :

من الواضح أن الجداء لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2 من الدرجات n_1, m_1 و n_2, m_2 هو عبارة عن كثير حدود تايلور ذو البعد 1 من الدرجة $n_1 + n_2, m_1 + m_2$. بمعنى آخر

$$T_{m_1, m_1}(\zeta, \theta) T_{m_2, m_2}(\zeta, \theta) = T_{m_1 + m_2, n_1 + n_2}(\zeta, \theta); m_1, n_1, m_2, n_2 = 0, 1, \dots, N.$$

إذن، سنجد

$$T(\zeta, \theta) T^T(\zeta, \theta) = \begin{bmatrix} T_{0,0} & T_{0,1} & \cdots & T_{0,N} & \cdots & T_{N,0} & T_{N,1} & \cdots & T_{N,N} \\ T_{0,1} & T_{0,2} & \cdots & T_{0,N+1} & \cdots & T_{N,1} & T_{N,2} & \cdots & T_{N,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ T_{0,N} & T_{0,N+1} & \cdots & T_{0,2N} & \cdots & T_{N,N} & T_{N,N+1} & \cdots & T_{N,2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ T_{N,0} & T_{N,1} & \cdots & T_{N,N} & \cdots & T_{2N,0} & T_{2N,1} & \cdots & T_{2N,N} \\ T_{N,1} & T_{N,2} & \cdots & T_{N,N+1} & \cdots & T_{2N,1} & T_{2N,2} & \cdots & T_{2N,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ T_{N,N} & T_{N,N+1} & \cdots & T_{N,2N} & \cdots & T_{2N,N} & T_{2N,N+1} & \cdots & T_{2N,2N} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

إذا حفظنا فقط بعناصر $T(\zeta, \theta)$ في المعادلة (7.2)، إذن نتحصل على العلاقة التالية

$$T(\zeta, \theta) T^T(\zeta, \theta) e = \tilde{E}_t T(\zeta, \theta), \quad (8.2)$$

حيث الشعاع e يعرف كما يلي

$$e = [e_{0,0}, e_{0,1}, \dots, e_{0,N} | e_{1,0}, e_{1,1}, \dots, e_{1,N} | \dots | e_{N,0}, e_{N,1}, \dots, e_{N,N}]^T,$$

و E_t هو مصفوفة مثلثية علوية ذات البعد $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ وتسمى مصفوفة عمليات الجداء لكثير حدود تايلور ذو البعد 2 . هذه المصفوفة تعرف كالآتي

$$\tilde{E}_t = \begin{bmatrix} \tilde{E}_t^0 & \tilde{E}_t^1 & \tilde{E}_t^2 & \cdots & \tilde{E}_t^N \\ 0 & \tilde{E}_t^0 & \tilde{E}_t^1 & \cdots & \tilde{E}_t^{N-1} \\ 0 & 0 & \tilde{E}_t^0 & \cdots & \tilde{E}_t^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{E}_0^t \end{bmatrix}$$

حيث $\tilde{E}_t^m = 0, 1, \dots, N$ هي مصفوفة مثلثية علوية ذات البعد $(N+1) \times (N+1)$ والتي تعطى كالتالي

$$\tilde{E}_t^m = \begin{bmatrix} e_{m,0} & e_{m,1} & e_{m,2} & \cdots & e_{m,N} \\ 0 & e_{m,0} & e_{m,1} & \cdots & e_{m,N-1} \\ 0 & 0 & e_{m,0} & \cdots & e_{m,N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_{m,0} \end{bmatrix}$$

2.3.2 مصفوفة عمليات الجداء لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2 :

ليكن C شعاع كيني ذو البعد $(N+1)^2$ نستطيع تعريف جداء $B(\zeta, \theta)$ في $B^T(\zeta, \theta)$ كما يلي :

$$B(\zeta, \theta)B^T(\zeta, \theta)C \simeq \tilde{C}_b B(\zeta, \theta), \quad (9.2)$$

حيث \tilde{C}_b تسمى مصفوفة الجداء لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2 ذات البعد $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ لإيجاد عبارة صريحة لحساب \tilde{C}_b نستعمل $B(\zeta, \theta) = MT(\zeta, \theta)$ نجد:

$$\begin{aligned} B(\zeta, \theta)B^T(\zeta, \theta)C &= MT(\zeta, \theta)T^T(\zeta, \theta)M^T C = MT(\zeta, \theta)T(\zeta, \theta)C \\ &\simeq M\tilde{E}_t T(\zeta, \theta) = M\tilde{E}_t M^{-1} B(\zeta, \theta) = \tilde{C}_b B(\zeta, \theta). \end{aligned}$$

إذن، يتم تعريف \tilde{E}_t و $\tilde{C}_b = M\tilde{E}_t M^{-1}$ معرفة في المعادلة (8.2).

الفصل الثالث

حل المعادلات التكاملية ذات متغيرين الغير خطية باستعمال كثير حدود بوبكر بمتغيرين

قائمة المحتويات

22	1.3 طريقة الحل
25	1.1.3 الحد الأعلى لدالة شعاع الخطأ لمصفوفة العمليات P_{2D}^b
30	2.3 مناقشة تحليل التقارب وتقدير الخطأ
33	3.3 تطبيقات عددية

1.3 طريقة الحل

في هذا الفصل، نقترح مخطط عددي لحل نموذج الثاني يعتمد على المصفوفات المعرفة في الفصل 3. الطريقة العامة لحل النماذج الأول والثالث مشابهة للطريقة المقدمة، لكنها تختلف مع الحدود المقابلة لجزء التكامل للمعادلة في هذه النماذج والذي هو

$$B^T(\zeta, \theta) \Delta^b Q_{2D}^b Z^b,$$

و

$$B^T(\zeta, \theta) \Delta^b \tilde{Z}^{bmix} P B(\zeta, \theta),$$

على الترتيب. بالإضافة، النماذج الأول والثالث تحوي جزء تكاملي 1 فقط. الطريقة المقدمة في هذا الفصل يمكن استعمالها لحل النموذج الرابع مع القليل من التعديلات. لحل هذا النموذج، الجزء التكاملي للنظام يقرب بطريقة مشابهة للمعادلة (5.3). زيادة على ذلك، باستعمال المعادلة (4). نجد جزء تكاملي واحد فقط في هذا النموذج.

نعتبر المعادلات التكاملية لفولتيرا الغير خطية ذو البعد 2 المعطاة في المعادلة (2)، أولاً، نضع:

$$\begin{aligned} Z_1(\zeta, \theta) &= \psi_1(\zeta, \theta, u(\zeta, \theta)), \\ Z_2(\zeta, \theta) &= \psi_2(\zeta, \theta, u(\zeta, \theta)), \\ Z_3(\zeta, \theta) &= \psi_3(\zeta, \theta, u(\zeta, \theta)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

بتعويض المعادلة (1.3) في المعادلة (2)، لدينا

$$\begin{aligned} u(\zeta, \theta) &= g(\zeta, \theta) + y_1 \int_0^\zeta \int_0^\theta \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) Z_1(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ &+ y_2 \int_0^\zeta \delta_2(\zeta, \theta, \tau) Z_2(\tau, \theta) d\tau \\ &+ y_3 \int_0^\theta \delta_3(\zeta, \theta, \xi) Z_3(\zeta, \xi) d\xi; (\zeta, \theta) \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

الآن، بتعويض المعادلة (2.3) في المعادلة (1.3)، نحصل على المعادلات التالية

$$\begin{aligned} Z_1(\zeta, \theta) &= \psi_1(\zeta, \theta, g(\zeta, \theta) + y_1 \int_0^\zeta \int_0^\theta \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) Z_1(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ &+ y_2 \int_0^\zeta \delta_2(\zeta, \theta, \tau) Z_2(\tau, \theta) d\tau + y_3 \int_0^\theta \delta_3(\zeta, \theta, \xi) Z_3(\zeta, \xi) d\xi), \\ Z_2(\zeta, \theta) &= \psi_2(\zeta, \theta, g(\zeta, \theta) + y_1 \int_0^\zeta \int_0^\theta \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) Z_1(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ &+ y_2 \int_0^\zeta \delta_2(\zeta, \theta, \tau) Z_2(\tau, \theta) d\tau + y_3 \int_0^\theta \delta_3(\zeta, \theta, \xi) Z_3(\zeta, \xi) d\xi), \\ Z_3(\zeta, \theta) &= \psi_3(\zeta, \theta, g(\zeta, \theta) + y_1 \int_0^\zeta \int_0^\theta \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) Z_1(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ &+ y_2 \int_0^\zeta \delta_2(\zeta, \theta, \tau) Z_2(\tau, \theta) d\tau + y_3 \int_0^\theta \delta_3(\zeta, \theta, \xi) Z_3(\zeta, \xi) d\xi); (\zeta, \theta) \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

في هذا المستوى، الدوال $z_1(\tau, \xi)$, $z_2(\tau, \theta)$, $z_3(\zeta, \xi)$ و $\delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi)$, $\delta_2(\zeta, \theta, \tau)$, $\delta_3(\zeta, \theta, \xi)$ يمكن تقريبا بالنسبة لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2 كما يلي:

$$\begin{aligned} Z_1(\tau, \xi) &\simeq B^T(\tau, \xi)Z_1^b, \\ Z_2(\tau, \theta) &\simeq B^T(\tau, \theta)Z_2^b, \\ Z_3(\zeta, \xi) &\simeq B^T(\zeta, \xi)Z_3^b, \\ \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_1^b B(\tau, \xi), \\ \delta_2(\zeta, \theta, \tau) &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_2^b B(\tau, \theta), \\ \delta_3(\zeta, \theta, \xi) &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_3^b B(\zeta, \xi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

حيث المصفوفات Δ_1^b , Δ_2^b و Δ_3^b معرفة في المعادلة (5.1). و Z_1^b, Z_2^b, Z_3^b أعمدة أشعة مجهولة ذات البعد $(N+1)^2 \times 1$ بتعويض العلاقات (4.3)، (9.2)، (2.2)، (4.2) و (3.2.2) في العلاقة (2.3)، نحصل عليها بالترتيب كما يلي

$$\begin{aligned} \int_0^\zeta \int_0^\theta \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) z_1(\tau, \xi) d\tau d\xi &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_1^b \left(\int_0^\zeta \int_0^\theta B(\tau, \xi)B^T(\tau, \xi)Z_1^b d\tau d\xi \right) \\ &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_1^b \tilde{Z}_1^b \left(\int_0^\zeta \int_0^\theta B(\tau, \xi) d\tau d\xi \right) \\ &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_1^b \tilde{Z}_1^b P_2 D^b B(\zeta, \theta), \end{aligned} \quad (5.3)$$

و

$$\begin{aligned} \int_0^\zeta \delta_2(\zeta, \theta, \tau) z_2(\tau, \theta) d\tau &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_2^b \left(\int_0^\zeta B(\tau, \theta)B^T(\tau, \theta)Z_2^b d\tau \right) \\ &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_2^b \tilde{Z}_2^b \left(\int_0^\zeta B(\tau, \theta) d\tau \right) \\ &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_2^b \tilde{Z}_2^b P B(\zeta, \theta), \end{aligned} \quad (6.3)$$

و

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \delta_3(\zeta, \theta, \xi) z_3(\zeta, \xi) d\xi &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_3^b \left(\int_0^\theta B(\zeta, \xi)B^T(\zeta, \xi)Z_3^b d\xi \right) \\ &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_3^b \tilde{Z}_3^b \left(\int_0^\theta B(\zeta, \xi) d\xi \right) \\ &\simeq B^T(\zeta, \theta)\Delta_3^b \tilde{Z}_3^{b\theta} P B(\zeta, \theta), \end{aligned} \quad (7.3)$$

بتعويض المعادلات التقريبية (5.3) - (7.3) في المعادلة (3.3) وبتعويض \simeq ب = نحصل على:

(8.3)

$$\begin{aligned} B^T(\zeta, \theta)Z_1^b &= \psi_1(\zeta, \theta, g(\zeta, \theta)) + B^T(\zeta, \theta)(y_1\Delta_1^b \tilde{Z}_1^b P_2 D^b + Y_2\Delta_2^b \tilde{Z}_2^{b\zeta} p + Y_3\Delta_3^b \tilde{Z}_3^{b\theta} p)B(\zeta, \theta), \\ B^T(\zeta, \theta)Z_2^b &= \psi_2(\zeta, \theta, g(\zeta, \theta)) + B^T(\zeta, \theta)(y_1\Delta_1^b \tilde{Z}_1^b P_2 D^b + Y_2\Delta_2^b \tilde{Z}_2^{b\zeta} p + Y_3\Delta_3^b \tilde{Z}_3^{b\theta} p)B(\zeta, \theta), \\ B^T(\zeta, \theta)Z_3^b &= \psi_3(\zeta, \theta, g(\zeta, \theta)) + B^T(\zeta, \theta)(y_1\Delta_1^b \tilde{Z}_1^b P_2 D^b + Y_2\Delta_2^b \tilde{Z}_2^{b\zeta} p + Y_3\Delta_3^b \tilde{Z}_3^{b\theta} p)B(\zeta, \theta). \end{aligned}$$

ندمج المعادلة (8.3) في $(N+1)^2$ نقاط نيوتن كوت [?] $(\zeta_\alpha, \theta_\beta) = \left(\frac{2\alpha-1}{2(N+1)}, \frac{2\beta-1}{2(N+1)} \right)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N+1$. كما يلي:

$$\begin{aligned}
 B^T(\zeta_\alpha, \theta_\beta)Z_1^b &= \psi_1(\zeta_\alpha, \theta_\beta, g(\zeta_\alpha, \theta_\beta)) \\
 &+ B^T(\zeta_\alpha, \theta_\beta)(y_1\Delta_1^b\tilde{Z}_1^bP_{2D}^b + Y_2\Delta_2^b\tilde{Z}_2^b{}^\zeta p + Y_3\Delta_3^b\tilde{Z}_3^b{}^\theta p)B(\zeta_\alpha, \theta_\beta), \\
 B^T(\zeta_\alpha, \theta_\beta)Z_2^b &= \psi_2(\zeta_\alpha, \theta_\beta, g(\zeta_\alpha, \theta_\beta)) \\
 &+ B^T(\zeta_\alpha, \theta_\beta)(y_1\Delta_1^b\tilde{Z}_1^bP_{2D}^b + Y_2\Delta_2^b\tilde{Z}_2^b{}^\zeta p + Y_3\Delta_3^b\tilde{Z}_3^b{}^\theta p)B(\zeta_\alpha, \theta_\beta), \quad (9.3) \\
 B^T(\zeta_\alpha, \theta_\beta)Z_3^b &= \psi_3(\zeta_\alpha, \theta_\beta, g(\zeta_\alpha, \theta_\beta)) \\
 &+ B^T(\zeta_\alpha, \theta_\beta)(y_1\Delta_1^b\tilde{Z}_1^bP_{2D}^b + Y_2\Delta_2^b\tilde{Z}_2^b{}^\zeta p + Y_3\Delta_3^b\tilde{Z}_3^b{}^\theta p)B(\zeta_\alpha, \theta_\beta); \\
 \alpha, \beta &= 1, 2, \dots, N + 1
 \end{aligned}$$

النظام أعلاه غير خطي له نفس العدد من المجاهيل التي يمكن حلها بطريقة وحيدة باستخدام التقريبات المتكررة للمجاهيل Z_1^b, Z_2^b, Z_3^b . عندما تكون Z_1^b, Z_2^b, Z_3^b . معروفة، نعوض المعادلات (5.3) - (7.3) في المعادلة (2.3)، الحل الحسابي للمعادلة (2)، يعطى بالعلاقة التالية:

$$u(\zeta, \theta) \simeq g(\zeta, \theta) + B^T(\zeta, \theta)(Y_1\Delta_1^b\tilde{Z}_1^bP_{2D}^b + Y_2\Delta_2^b\tilde{Z}_2^b{}^\zeta P + Y_3\Delta_3^b\tilde{Z}_3^b{}^\theta P)B(\zeta, \theta).$$

1.1.3 الحد الأعلى لدالة شعاع الخطأ لمصفوفة العمليات P_{2D}^b .

مصفوفات العمليات للتكامل تقرب بدقة شعاع الأساس. لتوضيح هذا، نقدم المناقشة والنظرية التالية:

تعريف 1.1.3 . نفرض أن $V(x) = [v_{ij}(x)]$ مصفوفة كيفية الرتبة $p \times q$. هذه المصفوفة تعرف بهذه الطريقة $v_{ij}(x) \in L^2(I)$ ، إذن، تعرف

$$\|V(X)\|_\infty = \max_T \|v_{ij}(X)\|_2, \quad \Gamma = \{(i, j) | 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\},$$

$$\|v_{ij}(X)\|_2 = \left(\int_0^1 (v_{ij}(X))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{حيث}$$

ملاحظة:

. نفرض أن $e_{1D}^b(x) = P_{1D}^b B(x) - \int_0^X B(t)dt$ و $e_{1D}^t(x) = P_{1D}^t T(x) - \int_0^X T(t)dt$ تعرف دالة شعاع الخطأ الموافقة لمصفوفات العمليات P_{1D}^t و P_{1D}^b على الترتيب. في هذه الحالة، تعرف العلاقات التالية.

$$\begin{aligned}
 &e_{1D}^b(x) = Ae_{1D}^t(x) \quad (i) \\
 &\|e_n^t(x)\|_2 = \text{إذن، } e_{1D}^t(x) = [e_0^t(x), e_1^t(x), \dots, e_N^t(x)]^t \text{ كما يلي } e_{1D}^t \quad (N + 1) \times 1 \text{ شعاع } \\
 &0; n = 0, 1, \dots, N - 1 \\
 &\|e_N^t(x)\|_2 = \frac{1}{(n + 1)\sqrt{2N + 3}}.
 \end{aligned}$$

البرهان 1.1.3 . (i) بمأن $B(x) = AT(x)$ و $P_{1D}^b = AP_{1D}^t A^{-1}$ ، إذن، لدينا

$$\begin{aligned}
 e_{1D}^b(X) &= AP_{1D}^t A^{-1} AT(x) - A \int_0^x T(x)dt \\
 &= A(P_{1D}^t T(X) - \int_0^x T(X)dt) \quad (10.3) \\
 &= Ae_{1D}^t(X).
 \end{aligned}$$

(ii) وفقاً للتعريف $e_{1D}^t(X)$ وباستعمال المعادلة (2.1)، (3.2)، و التعريف 1.1.3 من أجل كل مركبة $e_n^t(X)$ ل $e_{1D}^t(X)$ لدينا ،

$$\begin{aligned} \|e_n^t(X)\|_2 &= \left\| \int_0^X T_n(t)dt - \sum_{m=0}^N [P_{1D}^t]_{n,m} T_m(X) \right\|_2 \\ &= \left\| \int_0^X t^n dt - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right\|_2 = 0; \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (11.3)$$

و

$$\begin{aligned} \|e_N^t(X)\|_2 &= \left\| \int_0^X T_N(t)dt - \sum_{m=0}^N [P_{1D}^t]_{N,m} T_m(X) \right\|_2 \\ &= \left\| \int_0^X t^N dt - 0 \right\|_2 \\ &= \left\| \frac{X^{N+1}}{N+1} \right\|_2 = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2N+3}}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

نظرية 1.1.3 نفرض أن $e_{2D}^b(\zeta, \theta) = P_{2D}^b B(\zeta, \theta) - \int_0^\zeta \int_0^\theta B(\zeta', \theta') d\theta' d\zeta'$ تمثل دالة شعاع الخطأ المرافقة لمصفوفة العمليات P_{2D}^b . إذن،

$$\|e_{2D}^b(\zeta, \theta)\|_\infty \leq c_1 + c_2 + c_3,$$

بحيث

$$\begin{aligned} c_1 &= \max_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{(N+1)^2(2N+3)} |[A]_{n+1, N+1}| |[A]_{n'+1, N+1}| \right\}, \\ c_2 &= \max_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{(N+1)\sqrt{2N+3}} |[A]_{n+1, N+1}| \left\| \int_0^\theta B'_n(\theta') d\theta' \right\|_2 \right\}, \end{aligned} \quad (13.3)$$

و

$$c_3 = \max_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{(N+1)\sqrt{2N+3}} |[A]_{n+1, N+1}| \left\| \int_0^\zeta B'_n(\zeta') d\zeta' \right\|_2 \right\},$$

حيث $\Gamma = \{(n, n') | 0 \leq n \leq N, 0 \leq n' \leq N\}$.

البرهان 1.2.3 نعتبر $P_{2D}^b = P_{1D}^b \otimes P_{1D}^b$ و $B(\zeta, \theta) = B(\zeta) \otimes B(\theta)$ ومميز جداء كورنيك، لدينا

$$\begin{aligned}
 e_{2D}^b(\zeta, \theta) &= (P_{1D}^b \otimes P_{1D}^b)(B(\zeta) \otimes B(\theta)) - \left(\int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \otimes \int_0^\theta B(\theta') d\theta' \right) \\
 &= (P_{1D}^b B(\zeta) \otimes P_{1D}^b B(\theta)) - \left(\int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \otimes \int_0^\theta B(\theta') d\theta' \right) \\
 &= \left(\left(P_{1D}^b B(\zeta) - \int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \right) \otimes \left(P_{1D}^b B(\theta) - \int_0^\theta B(\theta') d\theta' \right) \right) \\
 &+ \left(\left(P_{1D}^b B(\zeta) - \int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \right) \otimes \left(\int_0^\theta B(\theta') d\theta' \right) \right) \\
 &+ \left(\left(\int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \right) \otimes \left(P_{1D}^b B(\theta) - \int_0^\theta B(\theta') d\theta' \right) \right) \\
 &= (e_{1D}^b(\zeta) \otimes e_{1D}^b(\theta)) \\
 &+ \left(e_{1D}^b(\zeta) \otimes \left(\int_0^\theta B(\theta') d\theta' \right) \right) \\
 &+ \left(\left(\int_0^\zeta d\zeta' \right) \otimes e_{1D}^b(\theta) \right).
 \end{aligned}$$

إذن،

$$\begin{aligned}
 \|e_{2D}^b(X)\|_\infty &\leq \|e_{1D}^b(\zeta) \otimes e_{1D}^b(\theta)\|_\infty \\
 &+ \left\| e_{1D}^b(\zeta) \otimes \left(\int_0^\theta B(\theta') d\theta' \right) \right\|_\infty \\
 &+ \left\| \left(\int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \right) \otimes e_{1D}^b(\theta) \right\|_\infty.
 \end{aligned} \tag{14.3}$$

من المعادلة (10.3)، عناصر $e_{1D}^b(\zeta) \otimes e_{1D}^b(\theta)$ يمكن تعريفها كما يلي

$$\left(\sum_{m=0}^N [A]_{n+1, m+1} e_m^t(\zeta) \right) \left(\sum_{m=0}^N [A]_{n'+1, m+1} e_m^t(\theta) \right); n, n' = 0, \dots, N.$$

باستعمال المعادلات (11.3)، (4.2) وخصائص النظم، لدينا

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\sum_{m=0}^N [A]_{n+1,m+1} e_m^t(\zeta) \right) \times \right. \\ & \quad \left. to \right. \\ & \left(\sum_{m=0}^N [A]_{n'+1,m+1} e_m^t(\theta) \right)_2 \leq \left(\sum_{m=0}^N [A]_{n+1,m+1} e_m^t(\zeta) \right)_2 \left\| \left(\sum_{m=0}^N [A]_{n'+1,m+1} e_m^t(\theta) \right) \right\|_2 \\ & \leq \left(\sum_{m=0}^N \|[A]_{n+1,m+1}\| \|e_m^t(\zeta)\|_2 \right) \left(\sum_{m=0}^N \|[A]_{n'+1,m+1}\| \|e_m^t(\zeta)\|_2 \right) \\ & = \left(\|[A]_{n+1,N+1}\| \frac{1}{(N+1)\sqrt{2N+3}} \right) \left(\|[A]_{n'+1,N+1}\| \frac{1}{(N+1)\sqrt{2N+3}} \right) \\ & = \frac{1}{(N+1)^2(2N+3)} \|[A]_{n+1,N+1}\| \|[A]_{n'+1,N+1}\| \end{aligned}$$

كنتيجة، من التعريف 1.1.3، نتحصل على المعادلة التالية

$$\|e_{1D}^b(\zeta) \otimes e_{1D}^b(\theta)\|_\infty \leq \max_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{(N+1)^2(2N+3)} \|[A]_{n+1,N+1}\| \|[A]_{n'+1,N+1}\| \right\} = C_1. \quad (17.3)$$

بطريقة مشابهة، من أجل العناصر

$$\left(\sum_{m=0}^N [A]_{n+1,m+1} e_m^t(\zeta) \right) \left(\int_0^\theta B_{n'}(\theta') d\theta' \right),$$

$$\text{و } e_{1D}^b(\zeta) \otimes \left(\int_0^\theta B(\theta') d\theta' \right) \cup \left(\int_0^\zeta B_{n'}(\zeta') d\zeta' \right) \left(\sum_{m=0}^N [A]_{n+1,m+1} e_m^t(\theta) \right) \text{ و}$$

$$\left(\int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \right) \otimes E_{1D}^b(\theta),$$

نتحصل على النتائج التالية

(18.3)

$$\begin{aligned} & \left\| e_{1D}^b(\zeta) \otimes \left(\int_0^\theta B_n'(\theta') d\theta' \right) \right\|_\infty = \max_{\Gamma} \left\{ \left\| \left(\sum_{m=0}^N [A]_{n+1,m+1} e_m^t(\zeta) \right) \left(\int_0^\theta B_n'(\theta') d\theta' \right) \right\|_2 \right\} \\ & \leq \max_{\Gamma} \left\{ \left\| \left(\sum_{m=0}^N [A]_{n+1,m+1} e_m^t(\zeta) \right) \right\|_2 \left\| \int_0^\theta B_n'(\theta') d\theta' \right\|_2 \right\} \\ & \leq \max_{\Gamma} \left\{ \left(\sum_{m=0}^N \|[A]_{n+1,m+1}\| \|e_m^t(\zeta)\|_2 \right) \left(\left\| \int_0^\theta B_n'(\theta') d\theta' \right\|_2 \right) \right\} \\ & = \max_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{(N+1)2N+3} \|[A]_{n+1,N+1}\| \left\| \int_0^\theta B_n'(\theta') d\theta' \right\|_2 \right\} = C_2 \end{aligned}$$

و
(19.3)

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \right) \otimes e_{1D}^b(\theta) \right\|_\infty &= \max_{\Gamma} \left\| \left(\int_0^\zeta B_{n'}(\zeta') d\zeta' \right) \left(\sum_{m=0}^N [A]_{n+1,m+1} e_m^t(\theta) \right) \right\|_2 \\ &\leq \max_{\Gamma} \left\{ \left(\left\| \int_0^\zeta B_{n'}(\zeta') d\zeta' \right\|_2 \right) \left(\sum_{m=0}^N |[A]_{n+1,m+1}| \|e_m^t(\theta)\|_2 \right) \right\} \\ &= \max_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{(N+1)\sqrt{2N+3}} |[A]_{n+1,N+1}| \left\| \int_0^\zeta B(\zeta') d\zeta' \right\|_2 \right\} = C_3. \end{aligned}$$

في الأخير، بدمج المعادلات (17.3) - (19.3)، نتحصل على البرهان.

2.3 مناقشة تحليل التقارب وتقدير الخطأ

في هذا الفصل، أولاً نتحصل على حد أعلى لخطأ أي دالة تقرب باستعمال كثير حدود تايلور ذو البعد 2. ثم، نعطي التحليل التقاربي التقارب للنموذج الثاني.

نظرية 2.1.3 لنفرض أن $f(\zeta, \theta) : \Omega \rightarrow R$ هي دالة سلسلة كفاية والتي مشتقاتها الجزئية $\frac{\partial^{N+1} f(\zeta, \theta)}{\partial \zeta^\eta \partial \theta^{N-\eta+1}}$ مستمرة على Ω .

إذا كان $B^T(\zeta, \theta) F^b = \sum_{m_1=0}^N \sum_{n_1=0}^N \bar{f}_{m_1, n_1}^b B_{m_1, n_1}(\zeta, \theta)$ هو أفضل تقريب F خارج $X_{N,N}$ ، إذن تقدير الخطأ بما يلي :

$$\|f(\zeta, \theta) - B^T(\zeta, \theta) F^b\|_\infty \leq \sum_{\eta=0}^{N+1} \frac{1}{\eta!(N-\eta+1)!} \Lambda_{\eta, N-\eta+1}; \eta = 0, 1, \dots, N+1,$$

حيث $\Lambda_{\eta, N-\eta+1}; \eta = 0, 1, \dots, N+1$ هي ثابت موجبة بحيث:

$$\max_{(\zeta^*, \theta^*) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{N+1} f(\zeta^*, \theta^*)}{\partial \zeta^\eta \partial \theta^{N-\eta+1}} \right| \leq \Lambda_{\eta, N-\eta+1}; \eta = 0, \dots, N+1. \quad (20.3)$$

البرهان 2.1.3 ليكن $p2(\zeta, \theta)$ متغيرين مقطوعين لتمديد تايلور ل f حوال $(0, 0)$ من الدرجة N ، إذن لدينا

$$\begin{aligned} f(\zeta, \theta) - p2(\zeta, \theta) &= \frac{1}{(N+1)!} \left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^{N+1} f(\zeta^*, \theta^*) \\ &= \sum_{\eta=0}^{N+1} \frac{1}{\eta!(N-\eta+1)!} \frac{\partial^{N+1} f(\zeta^*, \theta^*)}{\partial \zeta^\eta \partial \theta^{N-\eta+1}} \zeta^\eta \theta^{N-\eta+1}, \end{aligned}$$

بحيث $\zeta^* \in (0, \zeta)$ و $\theta^* \in (0, \theta)$ وبالتالي

$$|f(\zeta, \theta) - p2(\zeta, \theta)| \leq \sum_{\eta=0}^{N+1} \frac{1}{\eta!(N-\eta+1)!} \left| \frac{\partial^{N+1} f(\zeta^*, \theta^*)}{\partial \zeta^\eta \partial \theta^{N-\eta+1}} \right| \zeta^\eta \theta^{N-\eta+1}. \quad (21.3)$$

بتعويض المعادلة (20.3) . في (21.3) . نتحصل

$$|f(\zeta, \theta) - p_2(\zeta, \theta)| \leq \sum_{\eta=0}^{N+1} \frac{1}{\eta!(N-\eta+1)!} \Lambda_{\eta, N-\eta+1} \zeta^{\eta} \theta^{N-\eta+1}; \eta = 0, 1, \dots, N+1.$$

بمأن $B^T(\zeta, \theta)F^b$ هو أحسن تقريب ل F خارج $X_{N,N}$ و $P_2 \in \Omega$ و $(\zeta, \theta) \in \Omega$, نجد

$$\begin{aligned} \|f(\zeta, \theta) - B^T(\zeta, \theta)F^b\|_{\infty} &\leq \|(\zeta, \theta) - p_2(\zeta, \theta)\|_{\infty} \\ &\leq \sum_{\eta=0}^{N+1} \frac{1}{\eta!(N-\eta+1)!} \Lambda_{\eta, N-\eta+1}; \eta = 0, 1, \dots, N+1, \end{aligned}$$

النظرية 2.1.3 نستنتج أن $\lim_{N \rightarrow +\infty} f_{N,N}(\zeta, \theta) = f(\zeta, \theta)$.

نظرية 2.2.3 نفرض أن $(C[\Omega], \|\cdot\|)$ هو فضاء باناخ لكل الدوال المستمرة على Ω ذات النظيم

$$\|u(\zeta, \theta)\|_{\infty} = \max_{(\zeta, \theta) \in \Omega} |u(\zeta, \theta)|$$

$u(\zeta, \theta)$ هو الحل الحقيقي و $\hat{u}(\zeta, \theta)$ هو الحل التقريبي للنموذج الثاني بالطريقة الواردة في الفصل 4. بالإضافة إلى ذلك ، نفرض أن $R_{N,N}(\zeta, \theta)$ هو باقي المتحصل عليه بمساعدة كثير حدود بوبكر ذو البعد 2 لتقريب هذه المعادلات نضع الفرضيات التالية.

$$(i) |\delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi)| \leq \tilde{\delta}_1, |\delta_2(\zeta, \theta, \tau)| \leq \tilde{\delta}_2, |\delta_3(\zeta, \theta, \xi)| \leq \tilde{\delta}_3.$$

(ii)

شرط لبتشيز المحقق من أجل حدود الغير خطية $\psi_i(\zeta, \theta, u(\zeta, \theta))$ في الحد الثالث للأشكال

$$|\psi_i(\zeta, \theta, U_1(\zeta, \theta)) - \psi_i(\zeta, \theta, u_2(\zeta, \theta))| \leq L_i |u_1(\zeta, \theta) - u_2(\zeta, \theta)|; i = 1, 2, 3,$$

بحيث L_i 's مستقلة عن $\zeta, \theta, u_i(\zeta, \theta)$.

إذن $\|R_{N,N}(\zeta, \theta)\|_{\infty}$ الحد الأعلى نتحصل على

$$\|R_{N,N}(\zeta, \theta)\|_{\infty} \leq \{1 + |Y_1| \tilde{\delta}_1 L_1 + |Y_2| \tilde{\delta}_2 L_2 + |Y_3| \tilde{\delta}_3 L_3\} \|u(\zeta, \theta) - \hat{u}(\zeta, \theta)\|_{\infty}.$$

البرهان 2.2.3 . نعلم أن $u(\zeta, \theta)$ هو الحل التقريبي للمعادلة (2) ، والذي يحقق المعادلة (2) .

$$\begin{aligned} \hat{u}(\zeta, \theta) &= g(\zeta, \theta) + Y_1 \int_0^{\zeta} \int_0^{\theta} \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) \psi_1(\tau, \xi, \hat{u}(\tau, \xi)) d\tau d\xi \\ &+ Y_2 \int_0^{\zeta} \delta_2(\zeta, \theta, \tau) \psi_2(\tau, \theta, \hat{u}(\tau, \theta)) d\tau \\ &+ Y_3 \int_0^{\theta} \delta_3(\zeta, \theta, \xi) \psi_3(\zeta, \xi, \hat{u}(\zeta, \xi)) d\xi + R_{N,N}(\zeta, \theta); \zeta, \theta \in \Omega, \end{aligned} \quad (22.3)$$

ب طرح المعادلة (2.2.3) . من المعادلة (2) ، ينتج:

$$\begin{aligned} -R_{N,N}(\zeta, \theta) &= (u(\zeta, \theta) - \hat{u}(\zeta, \theta)) \\ &- y_1 \int_0^\zeta \int_0^\theta \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) (\psi_1(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \psi_1(\tau, \xi, \hat{u}(\tau, \xi))) d\xi \\ &- y_2 \int_0^\zeta \delta_2(\zeta, \theta, \tau) (\psi_2(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \psi_2(\tau, \xi, \hat{u}(\tau, \xi))) d\tau \\ &- y_3 \int_0^\theta \delta_3(\zeta, \theta, \xi) (\psi_3(\zeta, \xi, u(\zeta, \xi)) - \psi_3(\zeta, \xi, \hat{u}(\zeta, \xi))) d\xi; (\zeta, \theta) \in \Omega, \end{aligned}$$

باستعمال المتباينة المثلثية والفرضيات (i) و(ii) ، نجد

$$\begin{aligned} \|R_{N,N}(\zeta, \theta)\|_\infty &= \max_{(\zeta, \theta) \in \Omega} |(u(\zeta, \theta) - \hat{u}(\zeta, \theta)) - y_1 \int_0^\zeta \int_0^\theta \delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi) (\psi_1(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \psi_1(\tau, \xi, \hat{u}(\tau, \xi))) d\xi \\ &- y_2 \int_0^\zeta \delta_2(\zeta, \theta, \tau) (\psi_2(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \psi_2(\tau, \xi, \hat{u}(\tau, \xi))) d\tau \\ &- y_3 \int_0^\theta \delta_3(\zeta, \theta, \xi) (\psi_3(\zeta, \xi, u(\zeta, \xi)) - \psi_3(\zeta, \xi, \hat{u}(\zeta, \xi))) d\xi| \leq \max_{(\zeta, \theta) \in \Omega} \{|u(\zeta, \theta) - \hat{u}(\zeta, \theta)| \\ &+ |y_1| \int_0^\zeta \int_0^\theta |\delta_1(\zeta, \theta, \tau, \xi)| |\psi_1(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \psi_1(\tau, \xi, \hat{u}(\tau, \xi))| d\tau d\xi \\ &+ |y_2| \int_0^\zeta |\delta_2(\zeta, \theta, \tau)| |\psi_2(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \psi_2(\tau, \xi, \hat{u}(\tau, \xi))| d\tau \\ &+ |y_3| \int_0^\theta |\delta_3(\zeta, \theta, \xi)| |\psi_3(\zeta, \xi, u(\zeta, \xi)) - \psi_3(\zeta, \xi, \hat{u}(\zeta, \xi))| d\xi\} \\ &\leq \max_{(\zeta, \theta) \in \Omega} \{|u(\zeta, \theta) - \hat{u}(\zeta, \theta)| + |\delta_1 L_1| |u(\zeta, \theta) - \hat{u}(\zeta, \theta)| \int_0^\zeta \int_0^\theta d\tau d\xi \\ &+ |\delta_2 L_2| |u(\zeta, \theta) - \hat{u}(\zeta, \theta)| \int_0^\zeta d\tau + |y_3| |\delta_3 L_3| |u(\zeta, \theta) - \hat{u}(\zeta, \theta)| \int_0^\theta d\xi \\ &\leq \{1 + |\delta_1 L_1| + |\delta_2 L_2| + |\delta_3 L_3| \max_{(\zeta, \theta) \in \Omega} |u(\zeta, \theta) - \hat{u}(\zeta, \theta)| \\ &= \{1 + |\delta_1 L_1| + |\delta_2 L_2| + |\delta_3 L_3| \|\zeta, \theta - \hat{u}(\zeta, \theta)\|_\infty, \end{aligned}$$

وهذه نهاية البرهان.

3.3 تطبيقات عددية

هنا، نطبق الطريقة المقترحة في ستة أمثلة. كل الحسابات أجريت باستعمال برنامج مكتوب بالماتلاب . وللتحقق من أن الطريقة المقترحة قابلة للتنفيذ وتعطي نتائج دقيقة، قمنا بمقارنتها بطرق أخرى. إضافة إلى ذلك، نعرف الترميز $\{u(\zeta, \theta) - \hat{u}(\zeta, \theta); (\zeta, \theta) \in \Omega\}$ $MAE = \max$ على أنه الخطأ الأعظمي المطلق حيث $u(\zeta, \theta)$ و $\hat{u}(\zeta, \theta)$ على الترتيب هما الحل التحليلي والحل التقريبي عند النقاط المحددة. (ζ, θ)

مثال 1.3.3 [?] . نعتبر المعادلات التكاملية لفريدهولم ذو البعد 2 الغير خطية

$$u(\zeta, \theta) = g(\zeta, \theta) + \int_0^1 \int_0^1 (\tau \sin(\xi) + 1) u^3(\tau, \xi) d\tau d\xi; (\zeta, \theta) \in \Omega,$$

حيث

$$g(\zeta, \theta) = \zeta \cos(\theta) + \frac{1}{20}(\cos^4(1) - 1) - \frac{1}{12} \sin(1)(\cos^2(1) + 2).$$

الحل التحليلي يعطى ب $u(\zeta, \theta) = \zeta \cos(\theta)$

نستعمل الطريقة المعرفة في الفصل الرابع لحل هذا المثال، ويتم حساب الأخطاء المطلقة من أجل $N = 7$. وتم مقارنة هذه القيم في الجدول 1 مع القيم الموجودة في [35] . الجدول 2 يقارن $MAEs$ التي تم الحصول عليها طريقتنا مع طريقة $Haar$ [35] . من أجل قيم مختلفة ل N .

جدول 1
الأخطاء المطلقة للمثال 1.

التقريب الحالي	الطريقة في [35]	العقد	l
مع $N = 7$	مع $\alpha = 4, m = 32$	$(\xi, \theta) =$ $(\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^l})$	
06 - 2.76354605566187E	03 - 7.9E	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1
06 - 2.76354605566187E	02 - 1.2E	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	2
06 - 2.76354605566187E	02 - 1.3E	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	3
06 - 2.76354605566881E	02 - 1.4E	$(\frac{1}{16}, \frac{1}{16})$	4
06 - 2.76354605566534E	02 - 1.4E	$(\frac{1}{32}, \frac{1}{32})$	5
06 - 2.76354605566534E	03 - 1.9E	$(\frac{1}{64}, \frac{1}{64})$	6

جدول 2
مقارنة MAEs للتقريب الحالي مع طريقة Haar [35] للمثال 1.

الطريقة في [35]						مع
N	$,1 = 0, M = J$	$,2 = 1, M = J$	$,4 = 2, M = J$	$,8 = 3, M = J$	$,16 = 3, M = J$	$,32 = 4, M = J$
	$2 = 2M$	$4 = 2M$	$8 = 2M$	$16 = 2M$	$32 = 2M$	$64 = 2M$
MAE	02 - 9.6E	02 - 4.3E	02 - 1.7E	03 - 5.4E	03 - 1.5E	04 - 3.8E
التقريب الحالي						مع
N	2	3	4	5	6	7
MAE	02 - 1.48E	03 - 1.34E	04 - 8.92E	05 - 2.39E	06 - 9.92E	06 - 2.76E

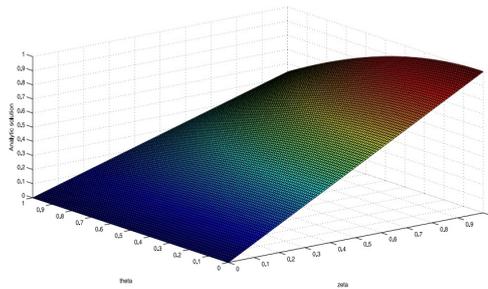


Fig. 1. Plot of analytic solution for Example 1.

ومن هذه الجداول يمكن ملاحظة أن الطريقة المقدمة أفضل بكثير من الطريقة الموجودة في [35]. الصورة 1 و2 توضح منحنيات الحل الحقيقي والتقريبي على الترتيب، لهذا المثال في البعد 3. تقارب ودقة الطريقة من خلال مقارنة منحنى الحل الحقيقي مع الحل التقريبي واضح.

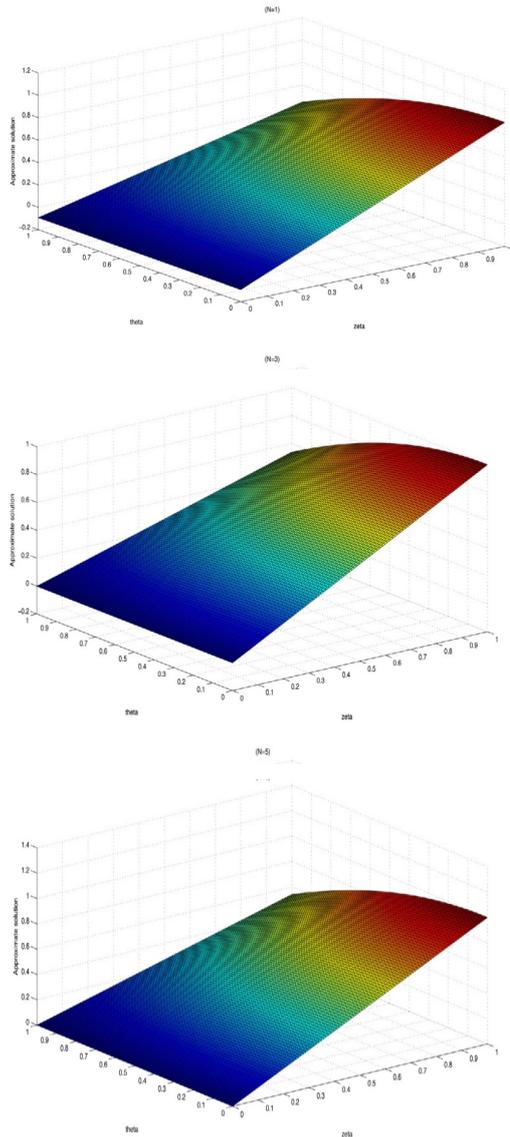
مثال 2.3.3 [35]. نعتبر المعادلات التكاملية لفولتيرا ذو البعد 2 الغير خطية

$$u(\zeta, \theta) = g(\zeta, \theta) + \int_0^\zeta \int_0^\theta 2\tau \sin(u(\tau, \xi)) d\xi d\tau; (\zeta, \theta) \in \Omega,$$

بجيث

$$g(\zeta, \theta) = \zeta^2 + \theta + \cos(\zeta^2 + \theta) - \cos(\zeta^2) - \cos(\theta) + (\sin(\zeta^2 + \theta) - \sin(\theta))\theta,$$

والحل التحليلي هو $u(\zeta, \theta) = \zeta^2 + \theta$. نستعمل الطريقة الموضحة في الفصل الرابع لحل هذا المشكل من أجل $N = 2, 4, 6$. النتائج العددية موضحة في الجدول 3. من هذا الجدول، يمكن ملاحظة أنه بزيادة قيمة N ، ينخفض الخطأ. في الجدول 4، تم مقارنة الأخطاء المطلقة مع النتائج التي تم الحصول عليها من [35]. من الواضح أن طريقتنا على الرغم من القيم الصغيرة لـ N تعطي نتائج أكثر دقة من دوال القبة [?]. توضح الصورة 3 دالة الخطأ المطلق من أجل $N = 6$.



مثال 3.3.3 [35]. نعتبر المعادلات التكاملية لفولتيرا ذو البعد 2 الغير خطية

$$u(\zeta, \theta) = g(\zeta, \theta) + \int_0^\zeta \int_0^\theta (\zeta + \theta) e^{u(\tau, \xi)} d\xi d\tau; (\zeta, \theta) \in \Omega,$$

حيث

$$g(\zeta, \theta) = (\zeta + \theta)(e^\zeta + e^\theta - e^{\zeta+\theta}),$$

والحل التحليلي $u(\zeta, \theta) = \zeta + \theta$. في هذا المثال، يتم إجراء مقارنة بين الأخطاء المطلقة من أجل $N = 1, 3, 5$ في الجدول 3.5 من هذا الجدول، يمكن ملاحظة أنه بزيادة قيم N ، ينخفض الخطأ الموافق لها من أجل مقارنة الطريقة المقترحة فهي أكثر دقة من دوال القبة [35] وطريقة الإستقراء [35]،

جدول 3 الأخطاء المطلقة للمثال 2.

		التقريب الحالي	العقد	l
		مع	$(\zeta, \theta) =$	
$N = 6$	$N = 4$	$N = 2$	$(\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^l})$	
05 - 8.32E	04 - 1.20E	02 - 1.45E	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1
07 - 1.78E	06 - 3.77E	04 - 4.32E	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	2
10 - 6.11E	08 - 9.20E	05 - 1.41E	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	3
10 - 2.58E	08 - 1.13E	07 - 5.22E	$(\frac{1}{16}, \frac{1}{16})$	4
11 - 3.17E	09 - 1.08E	08 - 2.20E	$(\frac{1}{32}, \frac{1}{32})$	5
12 - 2.64E	11 - 8.28E	09 - 1.05E	$(\frac{1}{64}, \frac{1}{64})$	6

جدول 4

مقارنة الأخطاء المطلقة للتقريب الحالي مع الطريقة في [35] للمثال 2.

التقريب الحالي مع $N = 6$	الطريقة في [35] مع $m = 16$	العقد (ζ, θ)
0	0	(0.0 ,0.0)
10 - 5.71E	06 - 2.29E	(0.1 ,0.1)
08 - 2.11E	05 - 1.58E	(0.2 ,0.2)
07 - 9.34E	05 - 5.44E	(0.3 ,0.3)
05 - 1.20E	04 - 1.79E	(0.4 ,0.4)
05 - 8.32E	04 - 1.27E	(0.5 ,0.5)
04 - 3.85E	04 - 6.10E	(0.6 ,0.6)
03 - 1.31E	04 - 7.37E	(0.7 ,0.7)
03 - 3.45E	03 - 1.01E	(0.8 ,0.8)
03 - 6.78E	03 - 1.54E	(0.9 ,0.9)
03 - 7.54E	—	(1.0 ,1.0)

جدول 5
الأخطاء المطلقة للمثال 3.

		التقريب الحالي	العقد	l
		مع	$(\zeta, \theta) =$	
$N = 5$	$N = 3$	$N = 1$	$(\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^l})$	
06 - 6.68E	03 - 4.18E	01 - 2.72E	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1
08 - 5.27E	05 - 6.38E	02 - 2.17E	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	2
09 - 2.34E	06 - 4.14E	03 - 2.11E	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	3
09 - 3.14E	07 - 9.51E	04 - 2.29E	$(\frac{1}{16}, \frac{1}{16})$	4
10 - 8.51E	07 - 1.73E	05 - 2.66E	$(\frac{1}{32}, \frac{1}{32})$	5
10 - 1.50E	08 - 2.59E	06 - 3.21E	$(\frac{1}{64}, \frac{1}{64})$	6

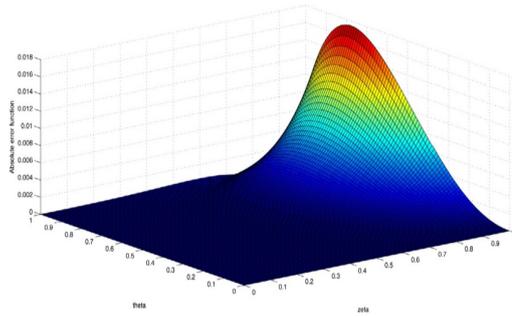


Fig. 3. Plot of absolute error function for Example 2 with $N = 6$.

جدول 6

مقارنة الأخطاء المطلقة للتقريب الحالي مع الطرق في [35] و [35] للمثال 3.

العقد (ζ, θ)	الطريقة في [35] مع $m = 16$	الطريقة في [35] مع $m = n = 2^4$	التقريب الحالي مع $5 = N$
(0.0 ,0.0)	0	—	0
(0.1 ,0.1)	07 - 7.63E	06 - 2.7E	09 - 3.95E
(0.2 ,0.2)	06 - 5.46E	05 - 2.7E	09 - 2.13E
(0.3 ,0.3)	05 - 1.53E	04 - 1.1E	07 - 2.63E
(0.4 ,0.4)	05 - 2.01E	04 - 3.3E	06 - 2.20E
(0.5 ,0.5)	05 - 1.16E	04 - 8.3E	06 - 6.68E
(0.6 ,0.6)	05 - 9.85E	03 - 1.8E	05 - 1.21E
(0.7 ,0.7)	04 - 2.03E	03 - 3.6E	04 - 2.27E
(0.8 ,0.8)	04 - 3.03E	03 - 6.8E	03 - 1.33E
(0.9 ,0.9)	04 - 3.75E	02 - 1.2E	03 - 5.43E
(1.0 ,1.0)	—	—	02 - 1.79E

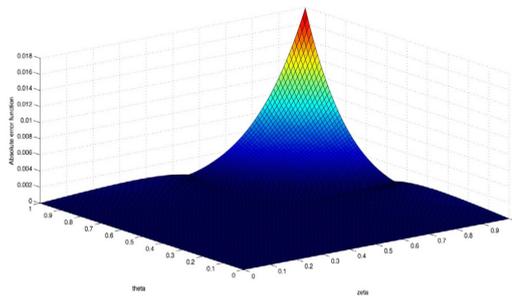


Fig. 4. Plot of absolute error function for Example 3 with $N = 5$.

الأخطاء المطلقة للطرق الثلاثة في الجدول 6. من الواضح أن طريقتنا على الرغم من القيم الصغيرة لـ N تعطي نتائج أكثر دقة من الطرق الموجودة في [35] الصورة 4 تمثل دالة الخطأ المطلق من أجل $N = 5$.

مثال 4.3.3 ([35]). نعتبر المعادلات التكاملية فولتيرا ذو البعد 2 الغير خطية

$$u(\zeta, \theta) = g(\zeta, \theta) + \int_0^\zeta \int_0^\theta (\zeta^2 + \theta) u^2(\tau, \xi) d\xi d\tau + \int_0^\zeta u(\tau, \theta) d\tau + \int_0^\theta u^3(\zeta, \xi) d\xi; (\zeta, \theta) \in \Omega,$$

حيث

$$g(\zeta, \theta) = -\frac{4}{3}\zeta^3(2 + \cos(\theta))\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \zeta \sin(\theta) - \frac{1}{2}\zeta^2 \sin(\theta) + \frac{1}{20}\zeta^5(-2\theta + \sin(2\theta)) + \frac{1}{72}\zeta^3(-4\theta^3 + 6\theta \cos(2\theta) + (-3 + 6\theta^2)\sin(2\theta)),$$
 الحل التحليلي $u(\zeta, \theta) = \zeta \sin(\theta)$ في هذا المثال، يتم إجراء مقارنة بين الأخطاء المطلقة من أجل $N = 1, 3, 5$ في الجدول 7. يوضح هذا الجدول أن كثير حدود بوبكر تكون ذات دقة عالية بالنسبة للقيم الصغيرة N . بالإضافة إلى ذلك، مع زيادة قيم N

الأخطاء الموافقة لها تتناقص. أيضاً، من أجل تساوي دوال الأساس، قننا بمقارنة الأخطاء المطلقة لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2 مع قيم كثيرات حدود ليجاندر الموافقة لها [35] في الجدول 8. الصورة 5 توضح دالة الخطأ المطاق من أجل $N = 5$.

مثال 5.3.3 ([35]). نعتبر المعادلات التكاملية لفولتيرا فريدهولم ذو البعد 2 الغير خطية

$$u(\zeta, \theta) = g(\zeta, \theta) + \int_0^\zeta \int_0^\theta \frac{\zeta(1-\zeta^2)}{(1+\theta)(1+\xi^2)} (1 - e^{u(\tau, \xi)}) d\tau d\xi; (\zeta, \theta) \in \Omega,$$

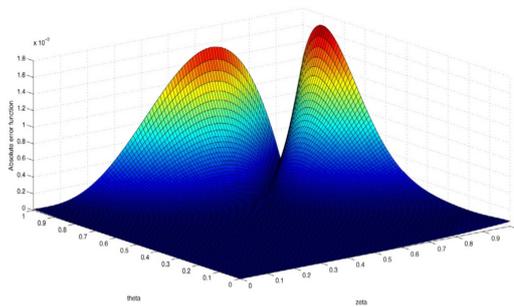


Fig. 5. Plot of absolute error function for Example 4 with $N = 5$.

جدول 7 الاخطاء المطلقة للمثال 4.

		التقريب الحالي	العقد	l
$N = 5$	$N = 3$	مع $N = 1$	$(\zeta, \theta) =$ $(\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^l})$	
06 - 1.97E	05 - 8.04E	02 - 3.91E	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1
07 - 2.96E	05 - 1.68E	03 - 2.10E	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	2
08 - 5.72E	06 - 1.44E	04 - 3.69E	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	3
09 - 8.91E	06 - 3.53E	04 - 1.79E	$(\frac{1}{16}, \frac{1}{16})$	4
12 - 1.28E	06 - 3.66E	05 - 4.27E	$(\frac{1}{32}, \frac{1}{32})$	5
10 - 9.41E	06 - 2.48E	06 - 3.93E	$(\frac{1}{64}, \frac{1}{64})$	6

جدول 8 مقارنة الاخطاء المطلقة لتقريب الحالي مع طريقة [?] في للمثال 4 .

التقريب الحالي	الطريقة في [35]	التقريب الحالي	الطريقة في [35]	العقد (ζ, θ)
$N = 4$	مع $M = 4$	مع $N = 2$	مع $M = 2$	
08 - 8.23E	06 - 1.1E	04 - 1.34E	05 - 3.8E	(0.1 ,0.1)
07 - 5.97E	07 - 6.6E	05 - 2.57E	04 - 5.2E	(0.2 ,0.2)
06 - 1.03E	06 - 2.7E	04 - 1.08E	04 - 9.5E	(0.3 ,0.3)
05 - 1.54E	06 - 3.0E	04 - 9.69E	04 - 7.1E	(0.4 ,0.4)
05 - 5.88E	06 - 2.5E	03 - 3.26E	04 - 2.8E	(0.5 ,0.5)

حيث

$$g(\zeta, \theta) = -\log\left(1 + \frac{\zeta\theta}{1 + \theta^2}\right) + \frac{\zeta\theta^2}{8(1 + \theta)(1 + \theta^2)},$$

يحتوي الحل التحليلي $u(\zeta, \theta) = -\log\left(1 + \frac{\zeta\theta}{1 + \theta^2}\right)$ في هذا المثال، يتم إجراء مقارنة بين الأخطاء المطلقة من أجل $N = 1, 3, 5$ في الجدول 9. ومن هذا الجدول، يمكن ملاحظة أنه بزيادة قيم N ينخفض الخطأ الموافق لها، وكما هو موضح في الجدول، فإن الطريقة المقترحة فعالة وتعطي نتيجة موثوقة. الصورة 6 توضح دالة الخطأ المطلق من أجل $N = 5$.

مثال 6.3.3 تتعبّر المعادلات التكاملية لفولتيرا ذو البعد 2 الغير خطية

$$u_1(\zeta, \theta) = g_1(\zeta, \theta) + \int_0^\zeta \int_0^\theta (u_1^2(\tau, \xi), u_2^3(\tau, \xi)) d\xi d\tau,$$

$$u_2(\zeta, \theta) = g_2(\zeta, \theta) + \int_0^\zeta \int_0^\theta (u_1^3(\tau, \xi), u_2^2(\tau, \xi)) d\xi d\tau; (\zeta, \theta) \in \Omega,$$

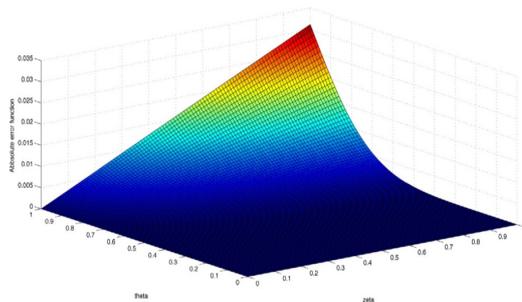


Fig. 6. Plot of absolute error function for Example 5 with $N = 5$.

جدول 9 الاخطاء المطلقة للمثال 5

		التقريب الحالي	العقد	l
		مع	$(\zeta, \theta) =$	
$N = 5$	$N = 3$	$N = 1$	$(\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^l})$	
04 - 4.34E	04 - 5.31E	05 - 2.98E	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1
06 - 3.84E	05 - 2.85E	03 - 1.64E	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	2
09 - 4.01E	05 - 1.12E	04 - 6.95E	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	3
08 - 1.03E	06 - 5.54E	04 - 2.15E	$(\frac{1}{16}, \frac{1}{16})$	4
09 - 6.81E	06 - 1.82E	05 - 5.91E	$(\frac{1}{32}, \frac{1}{32})$	5
09 - 2.73E	07 - 5.16E	05 - 1.55E	$(\frac{1}{64}, \frac{1}{64})$	6

جدول 10
الايخطاء المطلقة للمثال 6

				العقد	l
				$(\zeta, \theta) = (\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^l})$	
N = 5		N = 2			
$u_2(\zeta, \theta)$	$u_1(\zeta, \theta)$	$u_2(\zeta, \theta)$	$u_1(\zeta, \theta)$		
05 - 7.61E	05 - 3.50E	04 - 3.74E	03 - 1.66E	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1
07 - 1.84E	08 - 1.72E	07 - 5.28E	07 - 3.75E	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	2
08 - 5.13E	08 - 6.16E	05 - 1.09E	05 - 2.60E	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	3
08 - 5.13E	08 - 6.95E	06 - 5.49E	05 - 1.51E	$(\frac{1}{16}, \frac{1}{16})$	4
08 - 2.62E	08 - 3.58E	06 - 1.81E	06 - 5.18E	$(\frac{1}{32}, \frac{1}{32})$	5
09 - 9.27E	08 - 1.27E	07 - 5.11E	06 - 1.49E	$(\frac{1}{64}, \frac{1}{64})$	6

حيث

$$g_1(\zeta, \theta) = \zeta^2\theta - \frac{1}{15}\zeta^5\theta^3 - \frac{1}{70}\zeta^{10}\theta^7,$$

$$g_2(\zeta, \theta) = \zeta^3\theta^2 - \frac{1}{35}\zeta^7\theta^5 - \frac{1}{28}\zeta^7\theta^4,$$

والحل التحليلي هو $u_1(\zeta, \theta) = \zeta^2\theta$. $u_2(\zeta, \theta) = \zeta^3\theta^2$. للحصول على النتائج العددية، انظر الجدول 10 والصورة 7.

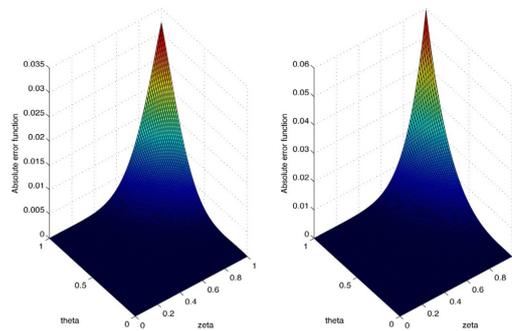


Fig. 7. Plot of absolute error function for Example 6 with N = 5; left: $u_1(\zeta, \theta)$, right: $u_2(\zeta, \theta)$.

خاتمة

في هذه الدراسة، تم إقتراح تقنية مصفوفة العمليات الفعالة لحل أربع فئات من معادلات فريدهولم وفولتيرا، وفولتيرا- فريدهولم غير الخطية ثنائية الأبعاد ونظام معادلات فولتيرا التكاملية باستخدام كثير حدود بوبكر ذو البعد 2 . ولهذا الهدف، تم إنشاء كثير حدود بوبكر ذو البعد 2 كدوال الأساس. وبمأن الفكرة الرئيسية لهذه التقنية تعتمد على استخدام مصفوفة العمليات، فإن أحد إبتكارات هذا العمل هو إعداد صيغ واضحة لمصفوفة العمليات المزدوجة، ومصفوفة العمليات للجداء، وأيضا أربع صيغ لمصفوفة العمليات لتكامل كثير حدود بوبكر ذو البعد 2 في أربعة أوضاع مختلفة في المجالات $[0, \theta][0, \zeta]$ ، $[0, \theta], [0, \zeta] \times [0, \theta]$ ، $[0, \zeta] \times [0, \theta]$ ، كما هو مبين في الفصل 1، يتم استعمال مصفوفة العمليات للجداء بواسطة كثير حدود تايلور ذو البعد 2 وحساب \tilde{C}_b .

لذلك، فإن إبتكار آخر لهذا العمل هو عرض مصفوفة العمليات للجداء لكثير حدود تايلور ذو البعد 2. ومصفوفات العمليات لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2 وعقد نيوتن- كوت لتقليل المشكلة قيد الدراسة إلى نظام من المعادلات الجبرية غير الخطية، والتي يمكن حلها بطريقة تكرارية. تحليل الخطأ لمصفوفة العمليات للتكامل P_{2D}^b ، يتم عرض أي دالة سلسلة بما فيه الكفاية بالإضافة لكثير حدود بوبكر ذو البعد 2 والتي يتم توسيعها وفقا لأساس تحليل التقارب للطريقة المقترحة في ثلاث نظريات متتالية. بعض مزايا هذه التقنية هي: 1- يمكن حساب المصفوفات بطريقة بسيطة وصريحة للغاية، 2- لا تتطلب العمليات عملية تكامل، 3- الطريقة حسابية بسيطة وجذابة للغاية. يتم توفير مشاكل الإختبار للتحقق من فعالية وصحة التقريب. توضيح النتائج العددية أنه للحصول على حل سلسلة بما فيه الكفاية، يمكن تحقيق دقة مقبولة من خلال عدد قليل من دوال الأساس. بالإضافة إلى ذلك، تم تحسين دقة الطريقة من خلال زيادة عدد دوال الأساس.

الملخص

يهدف هذا البحث الى تقديم معالجات عددية لبعض المعادلات التكاملية ذات متغيرين الغير خطية إعتدنا في تلك التقنيات العددية على تقريب الحلول باستعمال كثيرات حدود بوبكر وعرض مصفوفات العمليات . أدت إلى حل مجموعة المعادلات الجبرية غير الخطية بشكل وحيد ومن خلال التكرار ومن خلال تطبيقات عددية لتحليل التقارب أثبتت تلك الطرائق كفاءة عالية في إيجاد حلول تقريبية ودقيقة مع عرض و تحليل لطرق عالجت الموضوع سابقا. الكلمات المفتاحية: معادلة تكاملية , حدود بوبكر, مصفوفات العمليات.

Abstract

The objective of this work is present numerical treatments for certain nonlinear integral equations with two variables. We relied on numerical techniques that approximate solutions using Boubaker polynomials and matrix operations. This led to a unique solution of the set of nonlinear algebraic equations through iteration. Numerical applications for convergence analysis demonstrated that these methods are highly efficient in finding approximate and accurate solutions, alongside a review and analysis of previously addressed methods on the topic.

Key words: *Integral equation, Boubaker polynomials, operational matrices.*

Résumé

L'objectif de ce travail est de présenter des traitements numériques pour certaines équations intégrales non linéaires à deux variables. Nous nous sommes appuyés sur des techniques numériques qui approximent les solutions en utilisant des polynômes de Boubaker et des opérations matricielles. Cela a conduit à une solution unique de l'ensemble des équations algébriques non linéaires par itération. Les applications numériques pour l'analyse de convergence ont démontré que ces méthodes sont très efficaces pour trouver des solutions approximatives et précises, accompagnées d'une revue et d'une analyse des méthodes précédemment abordées sur le sujet.

Mots clés: *Équation intégrale, polynômes de Boubaker, matrices opérationnelles.*

المراجع العلمية

- [1] Sara.Davaeifar, Jalil.Rashidinia □ Operational matrix approach based on two-dimensional Boubaker polynomials for solving nonlinear two-dimensional integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 421 (2023) 114831 .
- [2] D. O'Regan, Existence results for nonlinear integral equations, *J. Math. Anal. Appl.* 192 (1995) 705–726.
- [3] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Science, Amsterdam, The Netherlands, 2006.
- [4] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, A. Mohebbi, Analysis of a meshless method for the time fractional diffusion-wave equation, *Numer. Algorithms* 73 (2016) 445–476.
- [5] P. Mokhtary, F. Ghoreishi, H.M. Srivastava, The Muntz-Legendre Tau method for fractional differential equations, *Appl. Math. Model.* 40 (2016) 671–684.
- [6] R.M. Ganji, H. Jafari, M. Kgarose, A. Mohammadi, Numerical solutions of time-fractional Klein–Gordon equations by clique polynomials, *Alex. Eng. J.* 60 (2021) 4563–4571.
- [7] J. Rashidinia, T. Eftekhari, Kh. Maleknejad, Numerical solutions of two dimensional nonlinear fractional Volterra and Fredholm integral equations using shifted Jacobi operational matrices via collocation method, *J. King Saud Univ. - Sci.* (2021) 101244, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jksus.2020.101244>.
- [8] Y. Wang, J. Huang, X. Wen, Two-dimensional Euler polynomials solutions of two-dimensional Volterra integral equations of fractional order, *Appl. Numer. Math.* 163 (2021) 77–95.
- [9] E. Tohidi, M.M. Ezzakhah, S. Shateyi, Numerical solution of nonlinear fractional Volterra integro-differential equations via Bernoulli polynomials, *Abstr. Appl. Anal.* (2014) 162896, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/162896>.
- [10] F. Mirzaee, S. Bimesl, E. Tohidi, Solving nonlinear fractional integro-differential equations of Volterra type using novel mathematical matrices, *J. Comput. Nonlinear Dyn.* (2015) 061016, <http://dx.doi.org/10.1115/1.4029281>.
- [11] H. Liu, J. Huang, X. He, Bivariate barycentric rational interpolation method for two dimensional fractional Volterra integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* (2021) 113339, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2020.113339>.
- [12] H. Jafari, N.A. Tuan, R.M. Ganji, A new numerical scheme for solving pantograph type nonlinear fractional integro-differential equations, *J. King Saud Univ. - Sci.* (2021) 101185, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jksus.2020.08.029>.

- [13] H. Jafari, R.M. Ganji, N.S. Nkomo, Y.P. Lv, *A numerical study of fractional order population dynamics model*, *Results Phys.* (2021) <http://dx.doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104456>.
- [14] H. Jafari, R.M. Ganji, Kh. Sayevand, D. Baleanu, *A numerical approach for solving fractional optimal control problems with mittag-leffler kernel*, *J. Vib. Control.* (2021) 1–11.
- [15] G. Rzdkowski, E. Tohidi, *A fourth order product integration rule by using the generalized Euler-Maclaurin summation formula*, *J. Comput. Appl. Math.* 335 (2017) 334–348. 2
- [16] K.E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, 1997.
- [17] A.J. Jerri, *Introduction to Integral Equations with Applications*, John Wiley and Sons, 1999.
- [18] M.V.K. Chari, S.J. Salon, *Numerical Methods in Electromagnetism*, Academic Press, 2000.
- [19] Z. Cheng, *Quantum effects of thermal radiation in a Kerr nonlinear blackbody*, *J. Opt. Soc. Am. B.* 19 (2002) 1692–1705.
- [20] W.C. Chew, M.S. Tong, B. Hu, *Integral Equation Methods for Electromagnetic and Elastic Waves*, Morgan and Claypool, 2008.
- [21] Y. Liu, T. Ichiye, *Integral equation theories for predicting water structure around molecules*, *Biophys. Chem.* 78 (1999) 97–111.
- [22] Q. Tang, D. Waxman, *An integral equation describing an asexual population in a changing environment*, *Nonlinear Anal.* 53 (2003) 683–699
- [23] K.F. Warnick, *Numerical Analysis for Electromagnetic Integral Equations*, Artech House, 2008.
- [24] I. Aziz, S.U. Islam, *New algorithms for the numerical solution of nonlinear fredholm and Volterra integral equations using haar wavelets*, *Comput. Appl. Math.* 239 (2013) 333–345.
- [25] A.H. Bhrawy, M.A. Abdelkawy, *A fully spectral collocation approximation for multi-dimensional fractional Schrodinger equations*, *J. Compu Phys.* 294 (2015) 462–483.
- [26] A.H. Bhrawy, M.A. Zaky, *Numerical algorithm for the variable-order Caputo fractional functional differential equation*, *Nonlinear Dynam.* 8 (2016) 1815–1823.
- [27] H. Khalil, M. Al-Smadi, K. Moaddy, R.A. Khan, I. Hashim, *Toward the approximate solution for fractional order nonlinear mixed derivative an nonlocal boundary value problems*, *Discrete Dyn. Nat. Soc.* 2016 (2016) 1–12.
- [28] R. Salehi, *A meshless point collocation method for 2-D multi term time fractional diffusion-wave equation*, *Numer. Algorithms* 74 (201) 1145–1168.
- [29] J. Saberi Nadjafi, O.R. Navid Samadi, E. Tohidi, *Numerical solution of two-dimensional Volterra integral equations by spectral Galerkin metho* *J. Appl. Math. Bioinf.* 1 (2011) 159–174.
- [30] N.H. Tuan, R.M. Ganji, H. Jafari, *A numerical study of fractional rheological models and fractional Newell-Whitehead-Segel equation wi non-local and non-singular kernel*, *Chin. J. Phys.* 68 (2020) 308–320.
- [31] Y. Yang, E. Tohidi, Xi. Ma, S. Kang, *Rigorous convergence analysis of Jacobi spectral Galerkin methods for Volterra integral equations wi noncompact kernels*, *J. Comput. Appl. Math.* (2020) 112403, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2019.112403>.

- [32] G. Deng, Y. Yang, E. Tohidi, High accurate pseudo-spectral Galerkin scheme for pantograph type Volterra integro-differential equations with singular kernels, *Appl. Math. Comput.* (2021) 125866, <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2020.125866>.
- [33] Y. Yang, G. Deng, E. Tohidi, High accurate convergent spectral Galerkin methods for nonlinear weakly singular Volterra integro-differential equations, *Comput. Appl. Math.* 40 (2021) 1–32.
- [34] B.L. Panigrahi, Mixed Fourier Legendre spectral Galerkin methods for two-dimensional Fredholm integral equations of the second kind, *App Numer. Math.* 168 (2021) 235–250.
- [35] Z. Asgari, F. Toutounian, E. Babolian, E. Tohidi, LSMR iterative method for solving one- and two-dimensional linear Fredholm integral equation *J. Comput. Appl. Math.* 38 (2019) 1–16.
- [36] X.C. Zhong, A new Nyström-type method for Fredholm integral equations of the second kind, *Appl. Math. Comput.* 219 (2013) 8842–8847.
- [37] S. Micula, A spline collocation method for Fredholm-Hammerstein integral equations of the second kind in two variables, *Appl. Math. Comput.* 265 (2015) 352–357.
- [38] S. Bazm, E. Babolian, Numerical solution of nonlinear two dimensional Fredholm integral equations of the second kind using Gauss product quadrature rules, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 17 (2012) 1215–1223.
- [39] F. Mirzaee, A.A. Hoseini, A computational method based on hybrid of block-pulse functions and Taylor series for solving two-dimensional nonlinear integral equations, *Alex. Eng. J.* 53 (2014) 185–190.
- [40] I. Aziz, S. Islam, F. Khan, A new method based on Haar wavelet for the numerical solution of two-dimensional nonlinear integral equations, *Comput. Appl. Math.* 272 (2014) 70–80.
- [41] A. Tari, M.Y. Rahimi, S. Shahmorad, F. Talati, Solving a class of two-dimensional linear and nonlinear Volterra integral equations by the differential transform method, *J. Comput. Appl. Math.* 228 (2009) 70–76.
- [42] E. Babolian, S. Bazm, P. Lima, Numerical solution of nonlinear two-dimensional integral equations using rationalized Haar functions, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 16 (2011) 1164–1175.
- [43] S. Nemati, P.M. Lima, Y. Ordokhani, Numerical solution of a class of two-dimensional nonlinear Volterra integral equations using Legendre polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* 242 (2013) 53–69.
- [44] F. Mirzaee, E. Hadadiyan, Application of two-dimensional hat functions for solving space-time integral equations, *J. Appl. Math. Comput.* 5 (2016) 453–486.
- [45] Y. Pan, J. Huang, Extrapolation method for solving two-dimensional Volterra integral equations of the second kind, *Appl. Math. Comput.* (2021) 124784, <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2019.124784>.
- [46] E. Banifatemi, M. Razzaghi, S. Yousefi, Two-dimensional Legendre wavelets method for the mixed Volterra-Fredholm integral equations, *J. Vi Control.* 13 (2007) 1667–1675.
- [47] Ch. Dong, Zh. Chen, W. Jiang, A modified homotopy perturbation method for solving the nonlinear mixed Volterra-Fredholm integral equation *J. Comput. Appl. Math.* 239 (2013) 359–366.
- [48] H. Almasieh, J. Nazari Meleh, Numerical solution of a class of mixed two-dimensional nonlinear Volterra-Fredholm integral equations using multi quadratic radial basis functions, *J. Comput. Appl. Math.* 260 (2014) 173–179.

- [49] M.Sh. Dahaghin, Sh. Eskandari, Solving two-dimensional Volterra-Fredholm integral equations of the second kind by using Bernstein polynomials *Appl. Math. J. Chin. Univ.* 32 (2017) 68–78.
- [50] L. Hacia, On Volterra inequalities and their applications, *Int. J. Math. Math. Sci.* 2004 (2004) 117–134.
- [51] H. Brunner, J.P. Kauthen, The numerical solution of two-dimensional Volterra integral equations by collocation and iterated collocation, *IMA Numer. Anal.* 9 (1989) 47–59.
- [52] M.A. Abdou, A.A. Badr, M.B. Soliman, On a method for solving a two-dimensional nonlinear integral equation of the second kind, *J. Compu Appl. Math.* 235 (2011) 3589–3598.
- [53] S.A. Hosseini, S. Shahmorad, A. Tari, Existence of an l_p -solution for two dimensional integral equations of the Hammerstein type, *Bull. Irania Math. Soc.* 40 (2014) 851–862.
- [54] S. Mckee, T. Tang, T. Diogo, An Euler-type method for two-dimensional Volterra integral equations of the first kind, *IMA J. Numer. Anal.* 2 (2000) 423–440.
- [55] J.P. Kauthen, Continuous time collocation method for Volterra-Fredholm integral equations, *Numer. Math.* 56 (1989) 409–424.
- [56] H. Guoqiang, Z. Liqing, Asymptotic error expansion for the trapezoidal Nystrom method of linear Volterra-Fredholm integral equations, *Comput. Appl. Math.* 51 (1994) 339–348.
- [57] L. Hacia, On approximate solution for integral equations of mixed type, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 76 (1996) 415–416.
- [58] L. Hacia, Projection methods for integral equations in epidemic, *Math. Model. Anal.* 7 (2002) 229–240.
- [59] R. Farengo, Y. Lee, P. Guzdar, An electromagnetic integral equation: application to microtearing modes, *Phys. Fluids.* 26 (1993) 3515–3523.
- [60] I.G. Graham, Collocation method for two-dimensional weakly singular integral equations, *J. Aust. Math. Soc.* 22 (1981) 456–473.
- [61] S. Davaeifar, J. Rashidinia, Solution of a system of delay differential equations of multi pantograph type, *J. Taibah Univ. Sci.* 11 (2017) 1141–1157

