

جامعة قاصدي مرباح ورقلة
كلية الرياضيات وعلوم المادة
قسم الفيزياء



مذكرة تخرج لنيل شهادة الماستر أكاديمي -

تخصص : فيزياء نظرية

من إعداد الطالبتين : بالحبيب مسعودة
بن زازه العطرة

تحت عنوان

تأثير معامل الازاحة المعمم على معامل النفاذية و الانعكاس للحواجز والآبار الكمومية

نوقشت بتاريخ: 2024/06/11

أمام اللجنة المكونة من :

بن الزاير هجيرة	أستاذت.ع.	رئيسا	جامعة ورقلة
زنخري جمال الدين	أستاذ مساعد . ب .	مناقشنا	جامعة ورقلة
بن كران عبد الحكيم	أستاذ مساعد. ب.	مشرفا	جامعة ورقلة

-----{ السنة الجامعية 2023-2024 }-----

ملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة تطبيقين فيزيائيين تحت تأثير معامل الإزاحة المعمم. الأول هو الحاجز والبئر الكموني، والثاني هو البئر اللانهائي. في الفصل الأول تمت مناقشة معاملات النفاذية والانعكاس للحاجز والبئر الكموني، وكذلك الدوال الموجة وطاقة البئر اللانهائي. أما في الفصل الثاني تمت مناقشة حلول معادلة شرودنجر للهزاز التوافقي والبئر اللانهائي في وجود معامل الإزاحة المعمم. وقد تم تحقيق ذلك بالإشارة إلى بحثين سابقين عالجا النظامين. وفي الفصل الثالث توصلنا إلى نتائج جديدة من خلال تطبيق معامل الإزاحة المعمم مع صيغة كمية الحركة المعممة التالية: $\hat{P}_\alpha = -i\hbar(1 + \alpha x^2)d/dx$ ، وذلك على الحواجز والابار الكمونية والبئر اللانهائي. وكانت النتيجة الرئيسية هي أن الإزاحة المعممة تغير طول الحاجز و

$$L = \arctan(\sqrt{\alpha}L)/\sqrt{\alpha}$$

البئر الكموني والبئر اللانهائي. وجدنا أن معامل النفاذية يزداد تحت تأثير معامل الإزاحة المعمم، والعكس صحيح بالنسبة لمعامل الانعكاس. أما بالنسبة للتطبيق الثاني (البئر اللانهائي)، فقد استنتجنا أن قيم الطاقة وارتياح قياس الموضع تتناقص في وجود الإزاحة المعمم، بالمقارنة بالنظام المعتاد. وقد تم توضيح كل هذه النتائج بشكل واضح من خلال الرسوم البيانية.

كلمات مفتاحية: معامل النفاذية، معامل الانعكاس، الابار والحواجز الكمونية، البئر اللانهائي، معامل الإزاحة المعمم

Abstract

In this work, we studied two physical applications, under the effect of the generalized displacement operator; The first is the potential barriers and well, and the second is an infinite potential well. In the first chapter, we discussed the usual reflection and transmission coefficients for potential barrier and well and the normalized wave functions and energies for infinite potential well. In the second chapter, the solutions of the Schrödinger equation for the harmonic oscillator and infinite potential well in the presence of the generalized displacement coefficient have been discussed. This is done by referring to two previous papers that dealt with the two systems. In the third chapter, we found new results, by applying the generalized displacement operator with the following generalized form of momentum operator $\hat{P}_\alpha = -i\hbar(1 + \alpha x^2)d/dx$, for potential barrier and well, and infinite potential well, where the main result is that the generalized displacement changes the length of the potential barrier and well, and infinite potential well from L to $\arctan(\sqrt{\alpha}L)/\sqrt{\alpha}$: For the first application, we found that the transmission coefficient is increasing under the impact of generalized displacement operator, and vice versa for reflection coefficient. For the second application (infinite potential well), we concluded that the eigenvalues of energy and position uncertainty decrease within the generalized displacement context, compared to the usual system. All these results are shown clearly by plots.

Keywords: *Transmission coefficient, Reflection coefficient, Potential wells and barriers, Infinite potential well, Generalized displacement operator.*

شكر و عرفان

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات والصلاة والسلام على
أشرف المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين في البداية
نود أن نتوجه بجزيل الشكر إلى أستاذنا الفاضل بن كران عبد
الحكيم على قبوله إشرافنا وعلى توجيهاته السديدة ونصائحه القيمة
التي كانت لها بالغ الأثر في إتمام هذا المذكرة .
كما نتوجه بالتحية احترام وتقدير إلى أعضاء لجنة المناقشة الكرام
على وقتهم وجهدهم في قراءة هذا المذكرة وتقييم هذا العمل
المتواضع.

المحتويات

1	مقدمة عامة
2	1 الحواجز والابار الكمونية
2	1.1 مقدمة
2	1.2 الحاجز والبئر الكموني
3	1.2.1 في حالة $E > V_0$
7	1.2.2 في حالة $E < V_0$ (النفق الكمومي)
8	1.3 بئر لانهائي
9	1.3.1 حالة جسم داخل صندوق : $0 < x < L$
10	1.4 الخاتمة
11	2 حل معادلة شرودينغر في وجود معامل الازاحة المعمم
11	2.1 مقدمة
13	2.2 معادلة شرودينغر في وجود معامل الازاحة المعمم
13	2.2.1 بئر لانهائي
14	2.2.2 هزاز توافقي
15	2.3 الخاتمة
16	3 تأثير معامل الازاحة المعمم على الحاجز والبئر الكمومي
16	3.1 مقدمة
17	3.2 الحاجز والبئر الكموني
21	3.3 البئر اللانهائي
21	3.3.1 : حالة جسم داخل صندوق $0 < \eta < \frac{\arctg(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}$
23	3.4 الخاتمة
24	الخاتمة العامة

قائمة الأشكال

المصادر

مقدمة عامة

في الفيزياء الحديثة، تعد الحواجز و الابار الكمونية من المفاهيم الأساسية التي تلعب دوراً حاسماً في فهم الظواهر الكمية والأنظمة النانوية في فيزياء المواد (انصاف الموصلات) [1].

تمثل الحواجز الكمونية عقبات تواجه الجسيمات الكمية ، مما يتيح دراسة ظواهر مثل النفق الكمومي، حيث يمكن للجسيمات العبور من خلال الحواجز التي تبدو غير قابلة للاختراق في الفيزياء الكلاسيكية. اما الابار فتعريفها هي المنطقة التي يكون فيها الكمون المطبق على نظام اصغرياً، مع التنبيه الى انه يوجد نوعان رئيسيان من الابار، وهي الابار المنتهية والابار اللانهائية؛ وعلى عكس النوع الاول؛ فالبئر الكمون اللانهائي هو المنطقة التي ينحصر فيها الجسيم، غير قادر على الخروج منها، مما يؤدي الى تشكل مستويات طاقة منفصلة وهذا يُعطي ظاهرة "الحبس" والتي تُستخدم كثيراً لدواعي تكنولوجية .

من جهة اخرى ، يُعتبر معامل الازاحة المعمم T اداة مهمة لدراسة بعض الأنظمة الكمومية المعقدة ؛ فعلى سبيل المثال يمكننا من دراسة الأنظمة ذات الكتلة المتغير مع الموضع ، و الفضاء المنحني.

هناك عدة بحوث سابقة تناولت تطبيقات معامل الازاحة المعمم [2][3][4][5][6] وفي كل هذه الدراسات تم إعطاء نتائج جديدة لوصف مختلف الأنظمة. رياضياً، يُمكن تعريف معامل الازاحة المعمم من خلال اعادة تعريف مؤثر كمية الحركة، كما سنُبين لاحقاً بالتفصيل.

إن كون ادخال معامل الازاحة المعمم يُعطي فيزياء جديدة (نتائج جديدة)، هو الذي اعطانا الدافع لتطبيقه في اطار الابار والحواجز الكمونية، لايجاد معاملات النفاذية، الانعكاس، الدول الموجية والطاقات.

خطتنا في هذه المذكرة هي كالتالي : في الفصل الأول سوف نتطرق لإيجاد معامل النفاذية و الانعكاس في الحواجز و الابار الكمونية و البئر اللانهائي ، وفي الفصل الثاني سندرس حل معادلة شرودينغر في وجود معامل الازاحة المعمم لبئر لانهائي و الهزاز التوافقي و في الفصل الثالث سنُبين تأثير معامل الازاحة المعمم على الحاجز و البئر الكموني .

الفصل 1

الحواجز والابار الكمونية

1.1 مقدمة

تُعتبر الحواجز والابار الكمونية من اهم الظواهر في اطار ميكانيك الكم، [7] كون معظم المسائل فيها تُحل بشكل مضبوط، بالذات الحواجز والابار الكمونية ذات الكمون الثابت في مدى معين، بالاضافة الى ذلك، فهي تُوفر فهماً عميقاً لظواهر لا يُمكن تفسيرها في اطار الميكانيك الكلاسيكي ومن بينها ظاهرة "النفق الكمومي"، فعلى سبيل المثال؛ انبعاث الجسيمات α عند انحلال النوى الثقيلة مثل اليورانيوم، لأن الجسيم α خلال هذه العملية سينفصل عن نواة الثوريوم وسيعترضه جهد اعلى بكثير من طاقته الحركية ورغم ذلك فهو يفلت منها وهذا ماوضحه "جامو" في 1928 [8]، وفي الفيزياء الذرية عمل أوبنهايمر على مسألة الانبعاث الميداني للإلكترونات [9][10] وأسهم هذا العمل في تطوير مبدأ النفق الكمومي [11] وفي عام 1962 بين جوزيفسون كيف يمكن ان تخترق الالكترونات حاجز كموني عن طريق نفق كمي . كان جوزيفسون هو أول من توقع أزواج كوبرل فائق التوصيل في أشباه الموصلات [12][13] [11]. وفي معظم هذه الحالات، كان من الضروري حساب معامل النفاذية و الانعكاس لنموذج احادي الأبعاد.

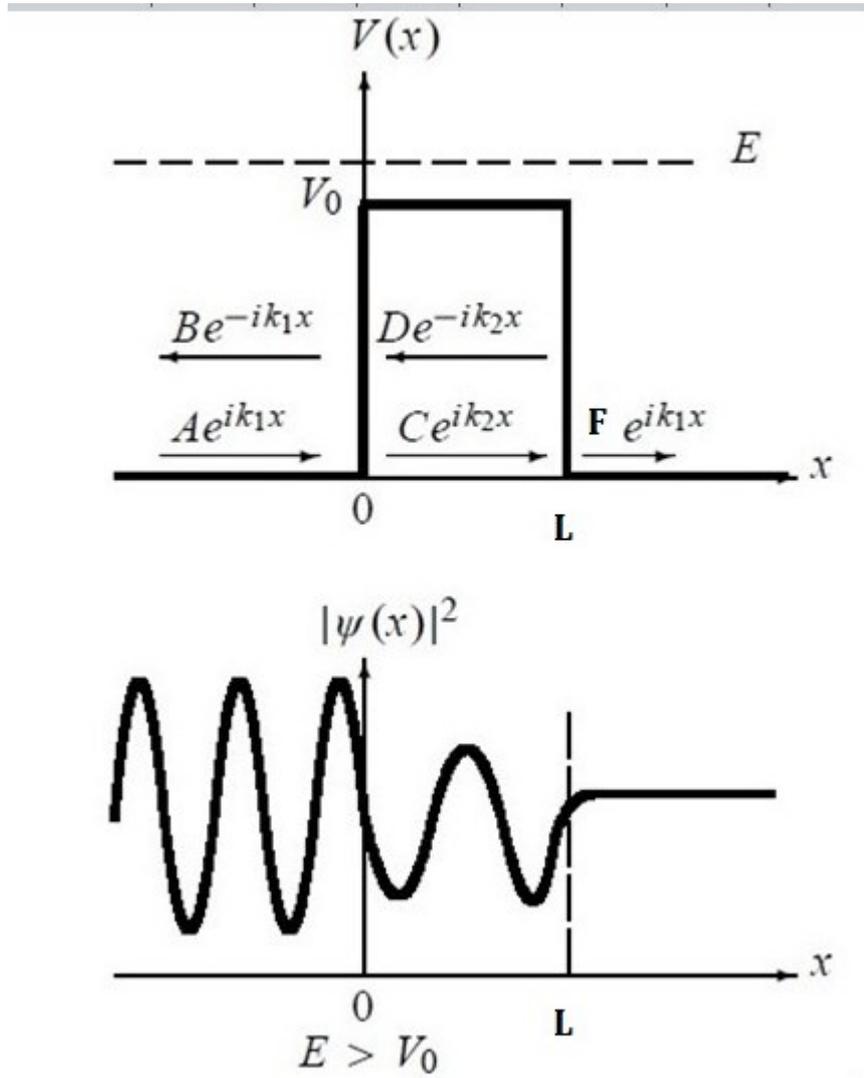
سنتناول في هذا الفصل دراسة تطبيقين فيزيائيين ؛ الحاجز والبئر الكموني المنتهي، والبئر الكموني اللانهائي، من اجل طاقة كامنة ثابتة في مدى معين .

1.2 الحاجز و البئر الكموني

نرسل حزمة من الجسيمات ذات كتلة m من اليسار على الحاجز الكموني من الشكل [14]

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases} \quad (1.1)$$

1.2.1 في حالة $E > V_0$



شكل 1.1: يمثل الحاجز الكموني واتجاهات الانتشار للهوجات الواردة ، النافذة و المنعكسة و كثافة الاحتمال في حالة

$$E > V_0 \text{ [14]}$$

يمكننا برهنة ان معادلة شرودينغر للمناطق الثلاث تُكتب كالتالي

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_1(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_1(x) = 0. \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_2(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \Psi_2(x) = 0. \quad (1.3)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_3(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_3(x) = 0. \quad (1.4)$$

المعادلات (1.2) ، (1.3) ، (1.4) هي معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية حلها من الشكل التالي :

$$\Psi_1 = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}. \quad (1.5)$$

$$\Psi_2 = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}. \quad (1.6)$$

$$\Psi_3 = Fe^{ik_1x} \quad (1.7)$$

حيث $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ و $k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$ ، تمثل الموجة الواردة ، Ae^{ik_1x} ، Be^{-ik_1x} تمثل الموجة المنعكسة و Fe^{ik_1x} تمثل الموجة النافذة .

حسب مسلمات ميكانيك الكم، يجب ان تتحقق الشروط الحدية التالية

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad (1.8)$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0), \quad (1.9)$$

$$\psi_2(L) = \psi_3(L), \quad (1.10)$$

$$\psi_2'(L) = \psi_3'(L), \quad (1.11)$$

حيث $\psi'(x)$ هو مشتق الدالة الموجية $\psi(x)$ بالنسبة للموضع x ، وعليه نتحصل على العلاقات التالية بين الثوابت A, B, C, D

تقودنا المعادلات (1.8) ، (1.9) ، (1.10) و (1.11)

$$A + B = C + D \quad (1.12)$$

$$k_1(A - B) = k_2(C - D) \quad (1.13)$$

$$Ce^{ik_2L} + De^{-ik_2L} = Fe^{ik_1L}. \quad (1.14)$$

$$k_2(Ce^{ik_2L} - De^{-ik_2L}) = k_1Fe^{ik_1L}. \quad (1.15)$$

بقسمة المعادلة (1.12) ، (1.13) ، (1.14) و (1.15) على A نتحصل على المعادلات (1.16) ، (1.17) ، (1.18) و (1.19) على التوالي :

$$\frac{A+B}{A} = \frac{C+D}{A}. \quad (1.16)$$

$$k_1 \left(\frac{A-B}{A} \right) = k_2 \left(\frac{C-D}{A} \right). \quad (1.17)$$

$$\frac{C}{A}e^{ik_2L} + \frac{D}{A}e^{-ik_2L} = \frac{F}{A}e^{ik_1L}. \quad (1.18)$$

$$k_2 \left(\frac{C}{A}e^{ik_2L} - \frac{D}{A}e^{-ik_2L} \right) = \frac{F}{A}k_1e^{ik_1L}. \quad (1.19)$$

و بوضع $f = \frac{F}{A}, r = \frac{D}{A}, g = \frac{C}{A}, t = \frac{B}{A}$ تتوصل للمعادلات التالية

$$1 + t = g + r. \quad (1.20)$$

$$k_1 (1 - t) = k_2 (g - r). \quad (1.21)$$

$$ge^{ik_2L} + re^{-ik_2L} = fe^{ik_2L}. \quad (1.22)$$

$$k_2 (ge^{ik_2L} - re^{-ik_2L}) = fk_1e^{ik_1L}. \quad (1.23)$$

بضرب المعادلة (1.22) في k_2 وبالجمع مع المعادلة (1.23) نجد:

$$2k_2ge^{ik_2L} = fe^{ik_1L} (k_1 + k_2). \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow g = \frac{f}{2k_2} e^{i(k_1-k_2)L} (k_1 + k_2). \quad (1.25)$$

بضرب المعادلة (1.22) في k_2 وبطرح من المعادلة (1.23) نجد:

$$2k_2re^{-ik_2L} = fe^{ik_1L} (k_2 - k_1). \quad (1.26)$$

$$\Rightarrow r = \frac{f}{2k_2} e^{i(k_1+k_2)L} (k_2 - k_1) \quad (1.27)$$

بضرب المعادلة (1.20) في k_1 وبالجمع مع المعادلة (1.21) نتحصل على المعادلة التالية :

$$2k_1 = g (k_1 + k_2) + r (k_1 - k_2). \quad (1.28)$$

نعوض المعادلة (1.25) و (1.27) في المعادلة (1.28) نجد:

$$2k_1 = \frac{f}{2k_2} e^{i(k_1-k_2)L} (k_1 + k_2) (k_1 + k_2) + \frac{f}{2k_2} e^{i(k_1+k_2)L} (k_2 - k_1) (k_1 - k_2). \quad (1.29)$$

ليكون لدينا

$$4k_1k_2 = f [e^{i(k_1-k_2)L} (k_1 + k_2)^2 - e^{i(k_1+k_2)L} (k_2 - k_1)^2]. \quad (1.30)$$

وباسترجاع المعاملات القديمة نتحصل على :

$$4k_1k_2 = \frac{F}{A} e^{ik_1L} [e^{-ik_2L} (k_1 + k_2)^2 - e^{ik_2L} (k_2 - k_1)^2]. \quad (1.31)$$

تكون قيمة F كالتالي :

$$F = 4k_1k_2Ae^{-ik_1L} [e^{-ik_2L} (k_1 + k_2)^2 - e^{ik_2L} (k_2 - k_1)^2]^{-1}. \quad (1.32)$$

$$F = 4k_1k_2Ae^{-ik_1L} [(e^{-k_2iL} - e^{k_2iL})(k_1^2 + k_2^2) + 2k_1k_2(e^{-k_2iL} + e^{k_2iL})]^{-1}. \quad (1.33)$$

بتبسيط نجد

$$F = \left[\frac{2i}{2i} (e^{-ik_2L} - e^{ik_2L})(k_1^2 + k_2^2) + 2k_1k_2 \frac{2}{2} (e^{-ik_2L} + e^{ik_2L}) \right]^{-1} \\ \times 4k_1k_2Ae^{-ik_1L}. \quad (1.34)$$

$$F = 4k_1k_2Ae^{-ik_1L} [4k_1k_2\cos(k_2L) - 2i(k_1^2 + k_2^2)\sin(k_2L)]^{-1}. \quad (1.35)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{مع العلم ان}$$

نُعبّر على معامل النفاذية بالعلاقة التالية : $T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$

$$T = \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1k_2} \right) \sin(k_2L) \right]^{-1} \quad (1.36)$$

بتعويض كل من k_1 و k_2 نجد عبارة معامل النفاذية للحاجز و البئر الكموني عل التوالي :

$$T_B = \left[1 + \frac{\sin^2(\lambda\sqrt{\epsilon-1})}{4\epsilon(\epsilon-1)} \right]^{-1}. \quad (1.37)$$

نستطيع الاستنتاج من عبارة T_B عبارة T_W وذلك عبر التحويل $(-V_0) \leftarrow (V_0)$.

$$T_W = \left[1 + \frac{\sin^2(\lambda\sqrt{\epsilon+1})}{4\epsilon(\epsilon+1)} \right]^{-1}. \quad (1.38)$$

$$\lambda = L\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \quad \text{و} \quad \epsilon = \frac{E}{V_0} \quad \text{حيث}$$

نستطيع إيجاد معامل الانعكاس باستخدام العلاقة التالية $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$

$$R_B = \frac{\sin^2(\lambda\sqrt{\epsilon-1})}{4\epsilon(\epsilon-1) + \sin^2(\lambda\sqrt{\epsilon-1})}. \quad (1.39)$$

انطلاقا من عبارة R_B يمكننا استنتاج عبارة R_W وذلك بالتحويل $(-V_0) \leftarrow (V_0)$.

$$R_W = \frac{\sin^2(\lambda\sqrt{\epsilon+1})}{4\epsilon(\epsilon+1) + \sin^2(\lambda\sqrt{\epsilon+1})}. \quad (1.40)$$

• عندما تكون $\epsilon \gg 1$ و $E \gg V_0$ فإن $R \simeq 0$ و $T \simeq 1$ عند إذن لن نشعر بالجسيمات بتأثير الحاجز ، فيكون نفاذية الجسيمات كليا .

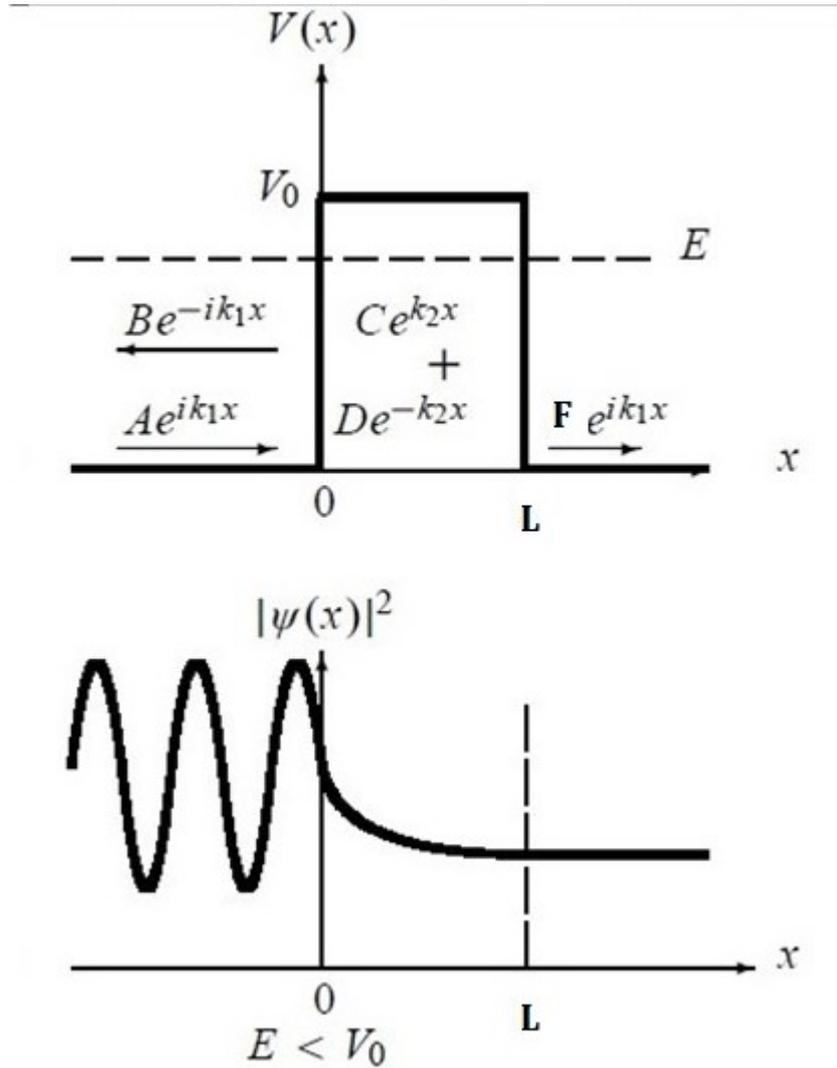
• عند الانتقال الكلي تكون $\sin(\lambda\sqrt{\epsilon-1}) = 0$ أو $\lambda\sqrt{\epsilon-1} = n\pi$

• عندما $\epsilon \rightarrow 1$ فإن $\sin(\lambda\sqrt{\epsilon-1}) \simeq (\lambda\sqrt{\epsilon-1})$ تصبح عبارة معامل النفاذية و الانعكاس كالتالي:

$$T = \left[1 + \frac{mL^2V_0}{2\hbar^2}\right]^{-1} \quad (1.41)$$

$$R = \left[1 + \frac{2\hbar^2}{mL^2V_0}\right]^{-1} \quad (1.42)$$

1.2.2 في حالة $E < V_0$ (النفق الكومي)



شكل 1.2: يمثل الحاجز الكومي واتجاهات الانتشار للهوجات الواردة ، النافذة و المنعكسة و كثافة الاحتمال في حالة

$$[14]. E < V_0$$

كلاسيكيا : نتوقع انعكاس كلي للجسيمات أي لا يستطيع أي جسيم أن يخترق الحاجز . كومييا :إحتمال وجود الجسيم خارج الحاجز ليس معدوماً. نستطيع استنتاج عبارة معامل النفاذية و الانعكاس في هذه الحالة إنطلاقاً من التغير التالي

$(k_2) \leftarrow (ik_2)$: ومنه عبارة معامل النفاذية و الإنعكاس للحاجز و البئر الكموني هي على التوالي :

$$T_B = \left[1 + \frac{\sinh^2(\lambda\sqrt{1-\epsilon})}{4\epsilon(1-\epsilon)} \right]^{-1}. \quad (1.43)$$

• نستطيع الاستنتاج من عبارة T_B عبارة T_W وذلك عبر التحويل $(V_0) \leftarrow (-V_0)$.

$$T_W = \left[1 + \frac{\sinh^2(\lambda\sqrt{1+\epsilon})}{4\epsilon(1+\epsilon)} \right]^{-1}. \quad (1.44)$$

الجسيم يعبر الحاجز دون داع لتوفر طاقة اعلى من كمون الحاجز عكس ما تتنبأ به الميكانيك الكلاسيكي .

$$R_B = \frac{T}{4\epsilon(\epsilon-1)} \sinh^2(\lambda\sqrt{\epsilon-1}). \quad (1.45)$$

• نستنتج من عبارة R_B عبارة R_W وذلك عبر التحويل $(V_0) \leftarrow (-V_0)$.

$$R_W = \frac{T}{4\epsilon(1+\epsilon)} \sinh^2(\lambda\sqrt{\epsilon+1}). \quad (1.46)$$

• إذا كان $E \ll V_0$ فان $\epsilon \ll 1$ او $\lambda\sqrt{1-\epsilon} \gg 1$ يمكننا تقريب

$$\sinh(\lambda\sqrt{1-\epsilon}) \simeq \frac{1}{2}e^{\lambda\sqrt{1-\epsilon}}$$

$$T \simeq \left[\frac{1}{4\epsilon(1-\epsilon)} \left[\frac{1}{2}e^{\lambda\sqrt{1-\epsilon}} \right]^2 \right]^{-1} = 16\epsilon(1-\epsilon)e^{-2\lambda\sqrt{1-\epsilon}}$$

حالة الكلاسيكي و هذا يعني انه يوجد نفق خلف الحاجز .

• عندما يكون $E \simeq V_0$ فإن $\epsilon \simeq 1$ ومنه تصبح عبارة T و R كالتالي $T = (1 + \frac{mL^2V_0}{2\hbar^2})^{-1}$ و $R = (1 + \frac{2\hbar^2}{mL^2V_0})^{-1}$

• عندما $\hbar \rightarrow 0$ فإن $R \rightarrow 1$ و $T \rightarrow 0$ تمثل هذه الحالة النهائية الكلاسيكية .

1.3 بئر لانهائي

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & x \geq L \end{cases} \quad (1.47)$$

1.3.1 حالة جسيم داخل صندوق : $0 < x < L$

تُكتب معادلة شرودينغر داخل البئر كمايلي :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = E\Psi(x). \quad (1.48)$$

الحل العام لهاته المعادلة يُكتب من الشكل

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx). \quad (1.49)$$

$$\text{حيث } k^2 = \frac{2Em}{\hbar^2}$$

باستخدام الشرط الحدي عند $x = 0$ ، نجد

$$\psi(x = 0) = A \sin(0) + B \cos(0) = 0. \quad (1.50)$$

وعليه

$$\psi(x = 0) = B = 0. \quad (1.51)$$

بتعويض قيمة B ، نجد

$$\psi(x) = A \sin(kx). \quad (1.52)$$

بتطبيق الشرط الحدي عند $x = L$

$$\psi(x = L) = A \sin(kL) = 0. \quad (1.53)$$

وعليه الشرط $kL = n\pi$ ، ضروري التحقيق حيث $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. كنتيجة، تُصبح مستويات الطاقة لهذا النظام بالعبارة التالية

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}. \quad (1.54)$$

نلاحظ أن قيمة الطاقة مكتمة لايجاد قيمة A نُطبق شرط التنظيم

$$\int_0^L \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx = 1. \quad (1.55)$$

$$\int_0^L |A|^2 \left| \sin \frac{n\pi x}{L} \right|^2 dx = 1. \quad (1.56)$$

بفرض A عدد حقيقي وموجب، نستخلص عبارة A

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad (1.57)$$

اذن، يُمكننا كتابة الدالة الموجية المنظمة لهذا النظام كالتالي

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.58)$$

قنا اذن ببرهنة عبارة الطاقة المُكممة والدالة الموجية المنظمة لهذا النظام. فيزيائياً، ان ظاهرة البئر تحاكي ظاهرة الحبس، بسبب اعتماد الطاقة على n^2 هذه الظاهرة تعتبر مهمة جدا في اطار فيزياء المواد.

1.4 الخاتمة

في هذا الفصل تطرقنا لدراسة ظاهرتين مهمتين في الفيزياء الكهومية وهما البئر و الحاجز الكهوني حيث قدمنا طرقا لحساب معامل النفاذية و الانعكاس في حل معادلة شرودنغر، أولا في اطار الحاجز والبئر الكهوني المنتهي، بينما انه يمكن للجسيمات النفاذ عبر حاجز جهد اكبر من طاقتها في ميكانيك الكم عكس ما بينته الميكانيك الكلاسيكية ويعود ذلك لظاهرة النفق الكهومي. ثانيا تمت دراسة بئر الكهون اللانهائي، وهو ما يُعطينا ظاهرة مهمة جداً في اطار فيزياء المواد وهي ظاهرة الحبس الثقيل. مستويات الطاقة لأجل هذا النظام . سوف نتطرق في الفصل الثاني لحل معادلة شرودينغر في وجود معامل الازاحة المعمم .

الفصل 2

حل معادلة شرودينغر في وجود معامل الازاحة المعمم

2.1 مقدمة

يعتبر معامل الازاحة المعمم مهما جدا في اطار التطبيقات الفيزيائية ، كونه يوفر و الذي q إطارا رياضيا لفهم التشوه يستخدم لفهم الاحصائية غير التمددية و كذا الانظمة ذات الكتل المتغيرة [3] ، مع الوضع [3] [15] [16]. يُعتبر كوستا والمؤلفون الذين معه اول من استخدم المفهوم الرياضي لدراسة الانظمة ذات الكتل المتغيرة مع الوضع وتوضيح انها تكافئ دراسة أنظمة ذات كتلة ثابتة ولكن في فضاء منحني [3]. بصفة عامة، نُعرّف معامل الازاحة T كالتالي :

$$T(a)|x \rangle = |x + a \rangle . \quad (2.1)$$

بحيث ان الوضع x يُزاح بمقدار a . بينما، لتعريف معامل الازاحة المعمم نُضيف وسيطاً α ، يجعل معامل الازاحة غير تجسيمي، بحيث تُصبح عبارته كالتالي:

$$T_\alpha(a)|x \rangle = |x + a + \alpha ax \rangle . \quad (2.2)$$

إن كون مؤثر كمية الحركة هو مولّد للازاحات، يجعلنا نعرف معامل الازاحة المعمم للازاحات الصغيرة dx بدلالة كمية الحركة المعممة والتشوه q كالآتي:

$$T_\alpha(dx) = \exp\left(-i\hat{p}_\alpha \frac{dx}{\hbar}\right) . \quad (2.3)$$

إن كون مؤثر كمية الحركة هو مولّد للازاحات، يجعلنا نعرف معامل الازاحة المعمم للازاحات الصغيرة dx بدلالة كمية الحركة المعممة والتشوه q كالآتي:

$$T_\alpha(dx) = 1 - i\hat{p}_\alpha \frac{dx}{\hbar} . \quad (2.4)$$

نُعرّف عبارة كمية الحركة المعممة، سنقوم بحساب المبدل $[\hat{x}, T_\alpha(dx)]$ ونُقارنه مع المبدل $[\hat{x}, \hat{p}_\alpha]$.

$$\hat{x}T_\alpha(dx)|x \rangle = \hat{x}|x + dx + \alpha x dx \rangle = (x + dx + \alpha x dx)|x + dx + \alpha x dx \rangle . \quad (2.5)$$

من جهة اخرى

$$\mathcal{T}_\alpha(dx)\hat{x}|x\rangle = \mathcal{T}_\alpha(dx)x|x\rangle = x|x + dx + \alpha x dx\rangle. \quad (2.6)$$

إذن كنتيجة

$$[\hat{x}, \mathcal{T}_\alpha(dx)]|x\rangle = dx(1 + \alpha x)|x + dx + \alpha x dx\rangle. \quad (2.7)$$

وبإهمال الدرجة الثانية من dx ، نجد أن

$$[\hat{x}, \mathcal{T}_\alpha(dx)]|x\rangle = dx(1 + \alpha x)|x\rangle. \quad (2.8)$$

ومنه، وباستعمال العلاقة بين معامل الازاحة المعمم وكمية الحركة المعممة، المعادلة (2.4)، نجد:

$$[\hat{x}, \hat{p}_\alpha] = i\hbar(1 + \alpha x). \quad (2.9)$$

هذا المبدل، يمكن الحصول عليه عن طريق تعريف مؤثر كمية الحركة المعمم كالتالي :

$$\hat{p}_\alpha = -i\hbar(1 + \alpha x)\frac{d}{dx}. \quad (2.10)$$

ان كمية الحركة المعممة المتحصّل عليها غير هيرميتية وبالتالي هاميلتوني النظام هو الاخر ليس هيرميتياً في فضاء هيلبرت العادي، لذلك سنعيد تعريف فضاء هيلبرت، اي اعادة تعريف العمليات في ميكانيك الكم لتُصبح كالتالي :

شرط التنظيم المعدّل يُكتب كالتالي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^*(x, t)\psi(x, t)}{1 + \alpha x} dx = 1, \quad (2.11)$$

القيمة المتوسطة لكمية الحركة المعممة، اذن ستُصبح كالتالي:

$$\hat{p}_\alpha \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + \alpha x)\psi^*(x, t)\frac{d\psi(x, t)}{dx}}{1 + \alpha x} = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t)\frac{d\psi(x, t)}{dx}. \quad (2.12)$$

في الحقيقة، يمكن تعميم هذه الدراسة لعبارة معامل الازاحة المعمم، لتُصبح العبارة كالتالي:

$$\hat{T}_\alpha(dx) = |x + f_\alpha(x)dx\rangle. \quad (2.13)$$

في هذه الحالة، تُصبح كمية الحركة المعممة كالتالي:

$$\hat{p}_\alpha = -i\hbar f_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.14)$$

نتيجة شرط التنظيم المعدل يُصبح كالتالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^*(x, t)\psi(x, t)}{f_\alpha(x)} dx = 1, \quad (2.15)$$

التعريف الاعم لمعامل الازاحة المعمم (2.13)، يُمكن ان يُستخدم لدراسة مختلف الأنظمة ذات الكتل المتغيرة مع الموضع، وكذا لدراسة مختلف الانواع من الفضاءات المنحنية، فمثلاً $f_\alpha(x) = 1 + \alpha x^2$ ، من الممكن استخدامه لدراسة الانظمة الكمومية في فضاء انتي دي سيتر (AdS).

سنقوم في هذا الفصل بالتطرق لبعض التطبيقات التي تم دراستها (البئر اللانهائي و الهزاز التوافقي)

2.2 معادلة شرودينغر في وجود معامل الازاحة المعمم

لدينا معادلة شرودينغر تكتب على الشكل التالي :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x). \quad (2.16)$$

لايجاد معادلة شرودينغر المعممة يمكننا كتابة كمية الحركة المعممة من العلاقة (2.10) كالتالي $\hat{p}_\alpha = -i\hbar D_\alpha$ حيث D_α

$$D_\alpha = (1 + \alpha x) \frac{d}{dx} \quad (2.17)$$

كونها مشتقة مشوهة في الفضاء. في تمثيل تكون x معادلة شرودينغر المقابلة المعتمدة على الزمن

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x|\alpha, t_s \rangle = \langle x|H|\alpha, t_s \rangle \quad (2.18)$$

إذا اعتبرنا أن العامل الهاملتوني هو $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ نصل إلى المعادلة التفاضلية التالية:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) D_\alpha^2 \Psi(x, t) + V(x)\Psi(x, t) \quad (2.19)$$

2.2.1 بئر لانهائي

في شروط الحدود $\phi(0) = 0$ و $\phi(L) = 0$ تؤدي إلى الدالة الموجة التالية: [3]

$$\phi_n(x) = \begin{cases} A_n \sin \left[\frac{k_n}{\alpha} \ln(1 + \alpha x) \right] & 0 < x < L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.20)$$

بتكريم متجه الموجة تصبح عبارة k_n كالتالي :

$$k_n = \frac{n\pi\alpha}{\ln(1 + \alpha L)} \quad (2.21)$$

حيث $n = 1, 2, 3, \dots$

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2 \alpha^2}{2m \ln^2(1 + \alpha L)} \quad (2.22)$$

حيث $\frac{\ln(1 + \alpha L)}{\alpha}$ هو طول البئر تحت معامل الازاحة المعمم

2.2.2 هزاز توافقي

نستطيع تمثيل اي نظام كومي تحت تأثير معامل الازاحة المعمم بالمعادلة التالية

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f_\alpha(x) \frac{d}{dx} \left(f_\alpha(x) \frac{d}{dx} \Psi(x) \right) + V(x) \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (2.23)$$

حيث f_α دالة تمثل معامل الازاحة المعمم

نلاحظ ان الطاقة الحركية غير مالوفة وعليه سنقوم بالتغيير التالي

$$f_\alpha(x) \frac{d}{dx} = \frac{d}{d\eta} \quad (2.24)$$

والذي سوف يحول معادلة شرودينغر الى الشكل التالي :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} \Psi(x) + V(x) \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (2.25)$$

يجب ان تكون المعادلة بنفس المتغير

$$\psi(x) = \tilde{\psi}(\eta) \quad (2.26)$$

ومنه تصبح المعادلة (2.26) كالي :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} \tilde{\Psi}(\eta) + V(\eta) \tilde{\Psi}(\eta) = E \tilde{\Psi}(\eta). \quad (2.27)$$

نعوض $V = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ في المعادلة (2.27) نجد

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} \tilde{\Psi}(\eta) + \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{t g^2 (\sqrt{\alpha} \eta)}{\alpha} \tilde{\psi}(\eta) = E \tilde{\Psi}(\eta). \quad (2.28)$$

تم دراسة نظام الهزاز التوافقي في اطار معامل الازاحة المعمم باستعمال طريقة تكامل المسارات [16] وتحصلوا على الدوال الموجية والطاقات التالية :

$$\psi_n(x) = \Gamma(\sigma) \left[\frac{2^{2\sigma-1} n! (n + \sigma) \sqrt{\alpha}}{\pi \Gamma(n + 2\sigma)} \right]^{\frac{1}{2}} (\cos(\arctan(\sqrt{\alpha x})))^\sigma \times C_n^\sigma(\sin(\arctan(\sqrt{\alpha x}))). \quad (2.29)$$

و

$$E_n = \hbar\omega \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 \hbar^2}{4m^2}} + \frac{\alpha \hbar}{2m} \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.30)$$

حيث σ

$$\sigma = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1 + \frac{4m^2\omega^2}{\hbar^2\alpha^2}}{2}} \quad (2.31)$$

نلاحظ من عبارة الطاقة أن معامل الازاحة المعمم يساهم في ظهور الحد n^2 ظاهرة الحبس الثقيل لنظام الهزاز التوافقي.

2.3 الخاتمة

قنا بتعريف معامل الازاحة المعمم و التطرق لأهميته في التطبيقات الفيزيائية ، موضحين أنها تحاكي الأنظمة ذات الكتل المتغيرة مع الموضع أو الأنظمة ذات الفضاء المنحني . بعد ذلك قنا بتوضيح أكثر عبر حالتين خاصتين $F_\alpha(x)$ و الطاقة الكامنة $V(x)$.

الفصل 3

تأثير معامل الازاحة المعمم على الحاجز و البئر الكمومي

3.1 مقدمة

في هذا الفصل سنقوم بدراسة تأثير معامل الازاحة المعمم على الحاجز و البئر الكمومي سيتم توضيح هذه التأثيرات عبر رسم معاملات الانعكاس ، النفاذية و القيم الذاتية .

لدينا معادلة شرودينغر تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x). \quad (3.1)$$

في حالة معامل الازاحة المعمم تصبح معادلة شرودينغر كالتالي :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} f_\alpha(x) \frac{d}{dx} \left(f_\alpha(x) \frac{d}{dx} \Psi(x) \right) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x). \quad (3.2)$$

سوف نقوم بتغيير المتغير حيث نضع :

$$f_\alpha(x) \frac{d}{dx} = \frac{d}{d\eta} \quad (3.3)$$

تصبح المعادلة (3.2) كالتالي :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} \Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (3.4)$$

نعرف $V(x) = \tilde{V}(\eta)$ و $\psi(x) = \tilde{\psi}(\eta)$ و عليه تصبح معادلة شرودينغر بالشكل التالي :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\eta^2} \tilde{\Psi}(\eta) + \tilde{V}(\eta)\tilde{\Psi}(\eta) = E\tilde{\Psi}(\eta). \quad (3.5)$$

المعادلة (3.5) هي معادلة شرودينغر بمتغير جديد η ، شكل الكهون للمتغير الجديد η قد يختلف على الشكل الاصلي ل $V(x)$.

سوف نعالج المعادلة (3.5) مع الحاجز و البئر الكهومي و البئر اللانهائي .

3.2 الحاجز و البئر الكهومي

ابتداءً من الكهون التالي سوف نقوم بتغير المتغير لتتوصل لكهون بدلالة η :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases} \quad (3.6)$$

لايجاد x بدلالة η

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dx}{d\eta} \frac{d}{dx} \quad (3.7)$$

$$\frac{dx}{d\eta} = f_\alpha(x) \quad (3.8)$$

$$d\eta = \frac{dx}{f_\alpha(x)} \quad (3.9)$$

$$\eta = \int \frac{dx}{f_\alpha(x)} \quad (3.10)$$

حيث

$$f_\alpha(x) = 1 + \alpha x^2 \quad (3.11)$$

$$\eta = \int \frac{dx}{1 + \alpha x^2} \quad (3.12)$$

$$\eta = \frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \quad (3.13)$$

ومنه الكهون بدلالة η كالتالي:

$$\tilde{V}(\eta) = \begin{cases} 0 & \eta < 0 \\ V_0 & 0 \leq \eta \leq \frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \\ 0 & \eta > \frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \end{cases} \quad (3.14)$$

حيث $\frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}$ هو طول البئر تحت تأثير معامل الإزاحة المعمم .
وعليه نستطيع إستخلاص معامل النفاذية و الانعكاس للحاجز و البئر من أجل $E > V_0$ و $E < V_0$ عبر التغيير
• $L \rightarrow \frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}$

$$T_{B\alpha} = \left[1 + \frac{1}{4\epsilon(\epsilon - 1)} \sin^2 (\lambda_\alpha \sqrt{\epsilon - 1}) \right]^{-1} . \quad (3.15)$$

نستطيع الاستنتاج من عبارة $T_{B\alpha}$ عبارة $T_{W\alpha}$ وذلك عبر التحويل $V_0 \leftarrow (-V_0)$.

$$T_{W\alpha} = \left[1 + \frac{1}{4\epsilon(\epsilon + 1)} \sin^2 (\lambda_\alpha \sqrt{\epsilon + 1}) \right]^{-1} . \quad (3.16)$$

حيث $\epsilon = \frac{E}{V_0}$ ، $\lambda_\alpha = \frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$ ،

$$R_{B\alpha} = \left[1 + \frac{4\epsilon(\epsilon - 1)}{\sin^2 (\lambda_\alpha \sqrt{\epsilon - 1})} \right]^{-1} . \quad (3.17)$$

نستطيع الاستنتاج من عبارة $R_{B\alpha}$ عبارة $R_{W\alpha}$ وذلك عبر التحويل $V_0 \leftarrow (-V_0)$.

$$R_{W\alpha} = \left[1 + \frac{4\epsilon(\epsilon + 1)}{\sin^2 (\lambda_\alpha \sqrt{\epsilon + 1})} \right]^{-1} . \quad (3.18)$$

• عندما تكون $\epsilon \gg 1$ و $E \gg V_0$ فإن $R \simeq 0$ و $T \simeq 1$ عند إذن لن نشعر بالجسيمات بتأثير الحاجز،
الجسيمات تنفذ بشكل كلي .

• عند الانتقال الكلي تكون $\sin(\lambda_\alpha \sqrt{\epsilon - 1}) = 0$ أو $\lambda_\alpha \sqrt{\epsilon - 1} = n\pi$

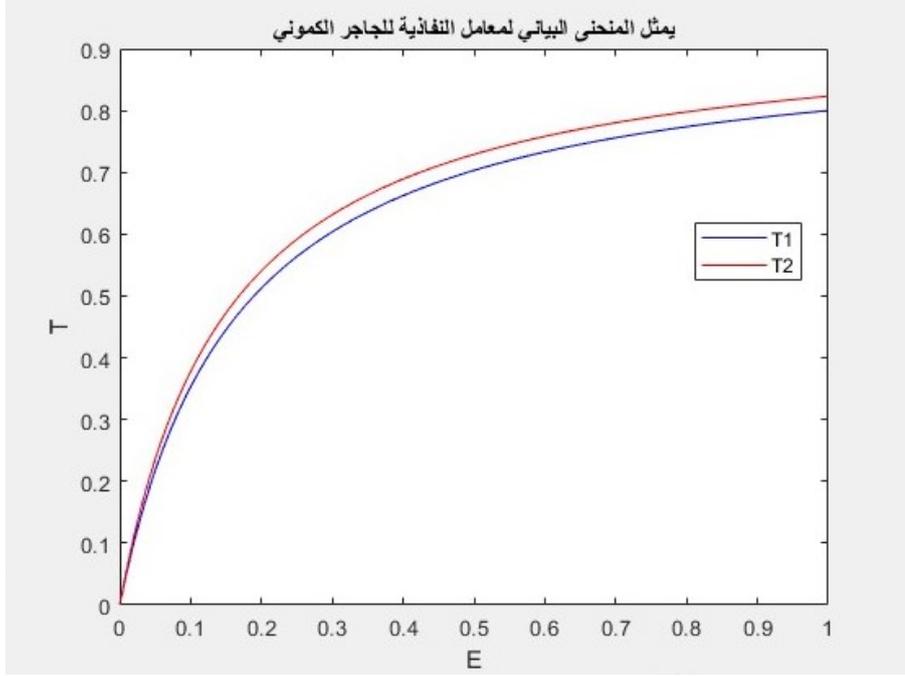
• عندما $\epsilon \rightarrow 1$ ، $\sin(\lambda_\alpha \sqrt{\epsilon - 1}) \simeq (\lambda_\alpha \sqrt{\epsilon - 1})$ ، تصبح عبارة معامل النفاذية و الانعكاس على التوالي:

$$T_\alpha = \left[1 + \frac{m \left(\frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 V_0}{2\hbar^2} \right]^{-1} . \quad (3.19)$$

$$R_\alpha = \left[1 + \frac{2\hbar^2}{m \left(\frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 V_0} \right]^{-1} . \quad (3.20)$$

في حالة $\alpha = 0$ (غياب معامل الازاحة المعمم)، نتحصل على العبارات الاعتيادية لمعامل النفاذية و الانعكاس للبئر و الحاجز
الكموني.

سنقوم بدراسة تأثير مؤثر الازاحة المعمم على معاملي النفاذية و الانعكاس لحالة $E < V_0$ و ذلك عبر تمثيلها بدلالة الطاقة
من اجل $\alpha = 0$ و $\alpha \neq 0$



شكل 3.1: المنحنى البياني لمعامل النفاذية في حالة E اصغر من V_0 .

• T_1 يمثل معامل النفاذية عند $\alpha = 0$

• T_2 يمثل معامل النفاذية في عند $\alpha = 0.25$

• باخذ $m = \hbar = \omega = L = 1$

نلاحظ أن الفرق في معامل النفاذية يزداد كلما زاد قيمة E وأن معامل النفاذية يزداد في وجود معامل الازاحة المعمم.

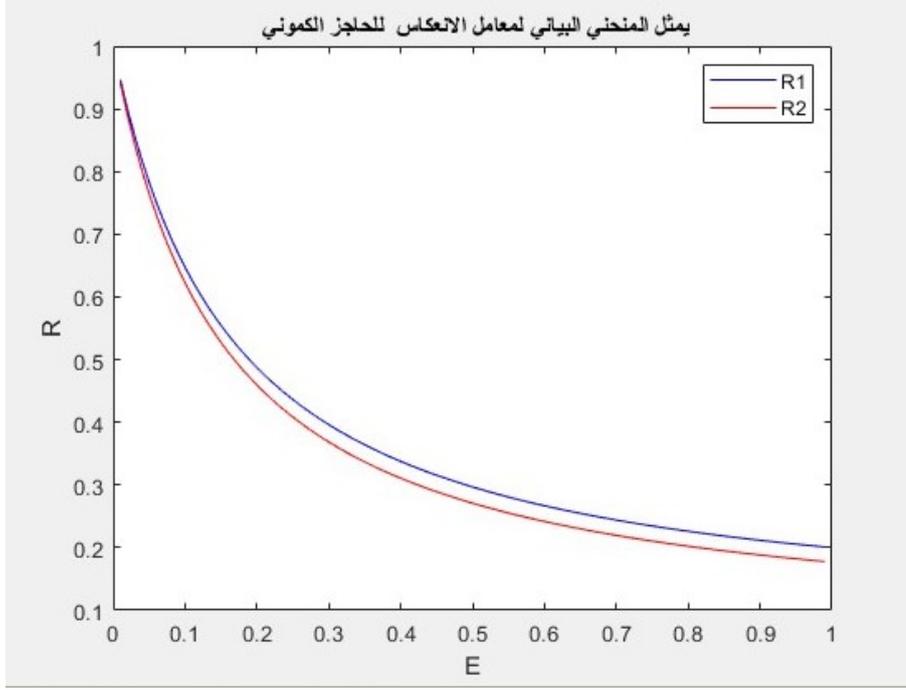
الجسيم يعبر الحاجز دون داع لتوفر طاقة اعلى من كحون الحاجز عكس ما تتنبأ به الميكانيك الكلاسيكي .

$$R_{B\alpha} = \frac{1}{4\epsilon(\epsilon-1)} \sinh^2(\lambda_\alpha \sqrt{\epsilon-1}). \quad (3.21)$$

نستطيع الاستنتاج من عبارة $R_{B\alpha}$ عبارة $R_{W\alpha}$ وذلك عبر التحويل $V_0 \leftarrow (-V_0)$.

$$R_W = \frac{1}{4\epsilon(1+\epsilon)} \sinh^2(\lambda_\alpha \sqrt{\epsilon+1}). \quad (3.22)$$

سنقوم مباشرة بتمثيل معامل الانعكاس بدلالة E تحت تأثير معامل الازاحة المعمم



شكل 3.2: المنحني البياني لمعامل الانعكاس في حالة E اصغر من V_0 .

• R_1 يمثل معامل الانعكاس عند $\alpha = 0$

• R_2 يمثل معامل الانعكاس في عند $\alpha = 0.25$

• باخذ $m = \hbar = \omega = L = 1$

أن الفرق في معامل الانعكاس يزداد كلما زاد قيمة E ، وان معامل الانعكاس يتناقص في وجود معامل الازاحة المعمم.

• إذا كان $E \ll V_0$ فإن $\epsilon \ll 1$ او $\lambda_\alpha \sqrt{1-\epsilon}$ يمكننا تقريب $\sinh(\lambda_\alpha \sqrt{1-\epsilon}) = \frac{1}{2}e^{\lambda_\alpha \sqrt{1-\epsilon}}$ وبالتالي

نكتب $T_\alpha \simeq \left[\frac{1}{4\epsilon(1-\epsilon)} \left[\frac{1}{2}e^{\lambda_\alpha \sqrt{1-\epsilon}} \right]^2 \right]^{-1} = 16\epsilon(1-\epsilon)e^{-2\lambda_\alpha \sqrt{1-\epsilon}}$ ومنه معامل النفاذية لا يساوي الصفر كما هو في حالة الكلاسيكي وهذا يعني انه يوجد نفق خلف الحاجز.

• عندما يكون $E \simeq V_0$ فإن $\epsilon \simeq 1$ ومنه تصبح عبارة T_α و R_α كالتالي

$$T_\alpha = \left[1 + \frac{mV_0 \frac{\text{arctg}^2(L\sqrt{\alpha})}{2\hbar^2}}{2\hbar^2} \right]^{-1}$$

$$R_\alpha = \left[1 + \frac{2\hbar^2}{mV_0 \frac{\text{arctg}^2(L\sqrt{\alpha})}{\alpha}} \right]^{-1}$$

• عندما $\hbar \rightarrow 0$ فإن $R \rightarrow 1$ و $T \rightarrow 0$ تمثل هذه الحالة النهائية الكلاسيكية

3.3 البئر اللانهائي

$$\tilde{V}(\eta) = \begin{cases} \infty & \eta < 0 \\ 0 & 0 \leq \eta \leq \frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \\ \infty & \eta > \frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}} \end{cases} \quad (3.23)$$

حيث $\frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}$ هو طول البئر تحت تأثير معامل الإزاحة المعمم . وعليه نستطيع إستخلاص الطاقة و الدالة الموجية في حالة : $0 < \eta < \frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}$

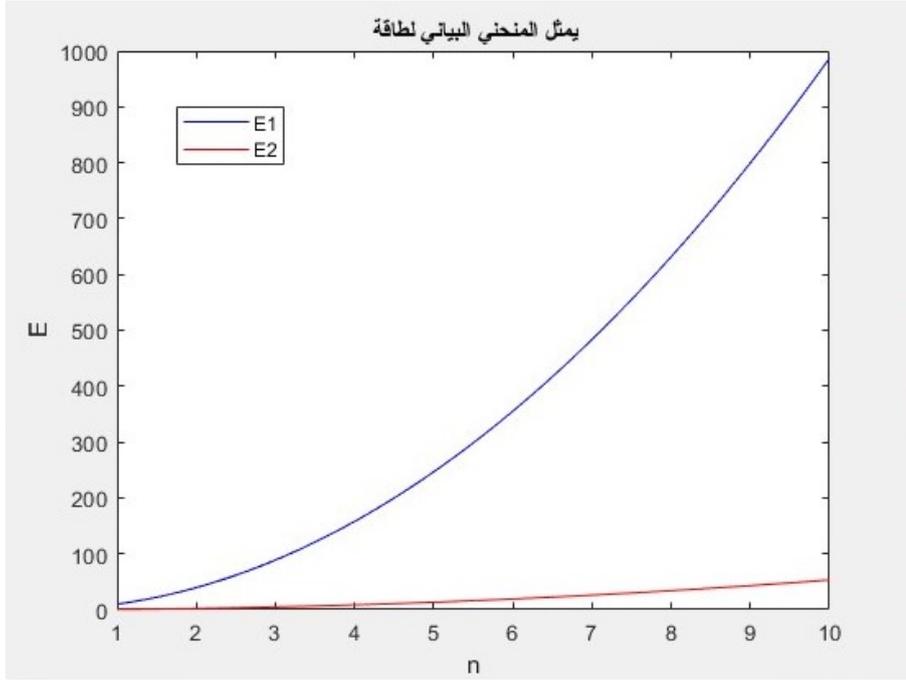
3.3.1 : حالة جسيم داخل صندوق $0 < \eta < \frac{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}}$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m \frac{\text{arctg}^2(L\sqrt{\alpha})}{\alpha}} \quad (3.24)$$

$$\tilde{\psi}_n = \sqrt{\frac{2\sqrt{\alpha}}{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}} \sin\left(\frac{n\pi\eta\sqrt{\alpha}}{\text{arctg}(L\sqrt{\alpha})}\right). \quad (3.25)$$

نلاحظ أن قيمة الطاقة مكممة

سنقوم مباشرة بتمثيل الطاقة بدلالة تحت n تأثير معامل الازاحة المعمم



شكل 3.3: المنحني البياني لطاقة .

• E_1 يمثل الطاقة عند $\alpha = 0$

• E_2 يمثل الطاقة في عند $\alpha = 0.25$

• باخذنا $m = \hbar = \omega = L = 1$

• نلاحظ أن الفرق في الطاقة يزداد كلما زاد قيمة n ، وان الطاقة تتناقص في وجود معامل الازاحة المعمم .

الان، دعونا نرى كيف يؤثر معامل الازاحة المعمم على الارتياب في قياس الموضع لأجل البئر اللانهائي؛ بحيث يُعطى بالشكل التالي

$$\Delta X = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}, \quad (3.26)$$

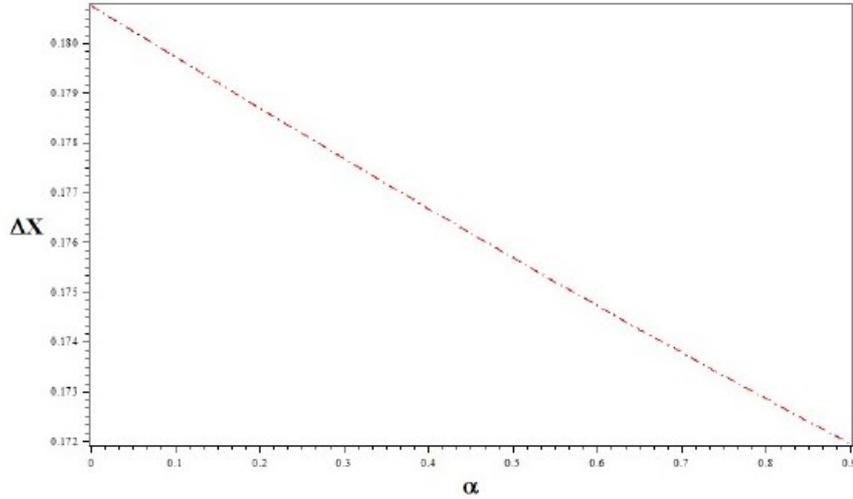
حيث ان \hat{x} و \hat{x}^2

يمثلان القيمة المتوسطة للموضع ومربعه على الترتيب؛ بحيث أنه في اطار الازاحة المعممة يُصاغان بالشكل التالي

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \int_0^{\arctan(L\sqrt{\alpha})/\sqrt{\alpha}} \frac{\tan(\sqrt{\alpha}\eta)}{\sqrt{\alpha}} \tilde{\psi}_n^2(\eta) d\eta \\ &= \int_0^{\arctan(L\sqrt{\alpha})/\sqrt{\alpha}} \frac{2 \tan(\sqrt{\alpha}\eta)}{\arctan(L\sqrt{\alpha})} \sin^2 \left(\frac{n\pi\eta\sqrt{\alpha}}{\arctan(L\sqrt{\alpha})} \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \int_0^{\arctan(L\sqrt{\alpha})/\sqrt{\alpha}} \frac{\tan^2(\sqrt{\alpha}\eta)}{\alpha} \tilde{\psi}_n^2(\eta) d\eta \\ &= \int_0^{\arctan(L\sqrt{\alpha})/\sqrt{\alpha}} \frac{2\sqrt{\alpha} \tan^2(\sqrt{\alpha}\eta)}{\arctan(L\sqrt{\alpha})} \sin^2 \left(\frac{n\pi\eta\sqrt{\alpha}}{\arctan(L\sqrt{\alpha})} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

سنقوم مباشرة بتمثيل الارتفاع في قياس الموضع كدالة بالنسبة ل α ؛ بحيث نضع $L = 1$ و $n = 1$ (الحالة الارضية).



شكل 3.4: الارتفاع في قياس الموضع كدالة للوسيط α . نأخذ $L = 1, n = 1$.

نلاحظ أن معامل الازاحة المعمم يُنقص في الارتفاع في قياس الموضع، اي ان الدقة في قياس الموضع تزداد وعليه يُصبح المجال الذي يُمكن ان يتواجد فيه الجسم داخل البئر اضيق تحت تأثير معامل الازاحة.

3.4 الخاتمة

قنا في هذا الفصل بدراسة تأثير معامل الازاحة المعمم على الحاجز و البئر الكومي موضحن هذه التأثيرات عبر رسم معاملات الانعكاس ، النفاذية ، و القيم الذاتية حيث تبين انه كلما زادت قيمة n و E يزداد الفرق بين المعاملات في وجود وغياب معامل الازاحة المعمم و الطاقة .

الخلاصة العامة

في الختام توصلنا أن مؤثر معامل الازاحة المعمم يؤثر على التطبيقات التي عالجها (الحاجز و البئر الكهومي و البئر اللانهائي) مُعطية نتائج جديدة في معامل النفاذية و الانعكاس و الطاقة و الدوال الموجية . أعطت هذه النتائج مجال بحث واسعاً ، يعزز من فهمنا للظواهر الكمية مما سمحت في توسعة تطبيقات معامل الازاحة المعمم . يمكن تطبيقها مع الكتل المتغيرة مع الموضع و ذات الفضاء المنحني . كانت دراستنا في بعد واحد مثيرة للاهتمام في البحث العلمي فإننا نتطلع لدراسة هذه التطبيقات (الحاجز و البئر الكهومي و البئر اللانهائي) في بعدين أو ثلاثة ابعاد.

قائمة الأشكال

- 1.1 يمثل الحاجز الكموني واتجاهات الانتشار للموجات الواردة ، النافذة و المنعكسة و كثافة الاحتمال في حالة $E > V_0$ [14]. 3
- 1.2 يمثل الحاجز الكموني واتجاهات الانتشار للموجات الواردة ، النافذة و المنعكسة و كثافة الاحتمال في حالة $E < V_0$ [14]. 7
- 3.1 المنحنى البياني لمعامل النفاذية في حالة E اصغر من V_0 . T_1 يمثل معامل النفاذية عند $\alpha = 0$. T_2 يمثل معامل النفاذية في عند $\alpha = 0.25$. باخذ $m = \hbar = \omega = L = 1$. نلاحظ أن الفرق في معامل النفاذية يزداد كلما زاد قيمة E وأن معامل النفاذية يزداد في وجود معامل الازاحة المعمم 19
- 3.2 المنحنى البياني لمعامل الانعكاس في حالة E اصغر من V_0 . R_1 يمثل معامل الانعكاس عند $\alpha = 0$. R_2 يمثل معامل الانعكاس في عند $\alpha = 0.25$. باخذ $m = \hbar = \omega = L = 1$. أن الفرق في معامل الانعكاس يزداد كلما زاد قيمة E ، وان معامل الانعكاس يتناقص في وجود معامل الازاحة المعمم. 20
- 3.3 المنحنى البياني لطاقة E_1 يمثل الطاقة عند $\alpha = 0$. E_2 يمثل الطاقة في عند $\alpha = 0.25$. باخذ $m = \hbar = \omega = L = 1$. نلاحظ أن الفرق في الطاقة يزداد كلما زاد قيمة n ، وان الطاقة تتناقص في وجود معامل الازاحة المعمم 22
- 3.4 الارتياب في قياس الموضع كدالة للوسيط α . نأخذ $n = 1, L = 1$ 23

المصادر

- [1] AB Denison, Louisa J Hope-Weeks, Robert W Meulenberg, and LJ Terminello. Quantum dots. *Introduction to Nanoscale Science and Technology*, pages ,198--183 .2004
- [2] Veit Schwämmle and Constantino Tsallis. Two-parameter generalization of the logarithm and exponential functions and boltzmann-gibbs-shannon entropy. *Journal of mathematical physics*, ,(11)48 .2007
- [3] R. Costa Filho, Murilo Almeida, G. Farias, and J. Jr. Displacement operator for quantum systems with position-dependent mass. *Physical Review A*, 10 .2011
- [4] Ernesto P Borges. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, ,101--95:(3-1)340 .2004
- [5] Bruno G da Costa, Ignacio S Gomez, and Mariela Portesi. κ -deformed quantum and classical mechanics for a system with position-dependent effective mass. *Journal of Mathematical Physics*, ,(8)61 .2020
- [6] H Benzair, M Merad, and T Boudjedaa. Path integral for quantum dynamics with position-dependent mass within the displacement operator approach. *Modern Physics Letters A*, ,2050246:(30)35 .2020
- [7] Hiroki Nakamura. What are the basic mechanisms of electronic transitions in molecular dynamic processes? *International Reviews in Physical Chemistry*, ,188--123:(2)10 .1991
- [8] Roger H Stuewer. Gamow, alpha decay, and the liquid-drop model of the nucleus. In *George Gamow Symposium*, volume ,129 page ,29 .1997

- [9] Sergey V Filippov, Anatoly G Kolosko, Eugeni O Popov, and Richard G Forbes. Field emission: calculations supporting a new methodology of comparing theory with experiment. *Royal Society Open Science*, 220748:(11)9 .2022
- [10] JR Oppenheimer. On the quantum theory of the autoelectric field currents. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 365--363:(5)14 .1928
- [11] RM Kolbas and N Holonyak Jr. Man-made quantum wells: A new perspective on the finite square-well problem. *American Journal of Physics*, 437--431:(5)52 .1984
- [12] BD JOSEPHSON. The discovery of tunnelling supercurrents. .1974
- [13] M Altarelli. Electronic structure of two-dimensional semiconductor systems. *Journal of Luminescence*, 487--472:(4-1)30 .1985
- [14] Nouredine Zettili. Quantum mechanics: concepts and applications. .2009
- [15] Abdelhakim Benkrane and Benzair Hadjira. Path integral analysis from the d-dimensional generalized displacement operator, and some of their applications. *International Journal of Modern Physics A*, 36 12 .2021
- [16] Abdelhakim Benkrane, Benzair Hadjira, and T. Boudjedaa. Path integral methods from the generalized displacement operator, and some of their applications. *Few-Body Systems*, 63 03 .2022