

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE LA MATIÈRE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire Présenté En Vue De L'obtention Du

**DIPLÔME DE MASTER**

EN MATHÉMATIQUES

**Option** : Probabilités et Statistique

Par

**Basaci Imane**

Titre

**Estimation des Paramètres de la Distribution de Lévy Stable**

Membres du Comité d'Examen

Amara Abdelkader	Maître de conférences A	UKMO	Président
Zibar Said	Maître assistant A	UKMO	Examineur
Saidan Hadda	Maître assistant A	UKMO	Rapporteur

**Année Universitaire : 2023/2024**

## *DEDICACE*

*Je dédie ce mémoire :*

*À mes très chers parents, mon père (Lhafed) et ma mère (Souhila), qui m'ont donné  
un magnifique modèle de labeur et de persévérance.*

*À mes chères sœurs et chers frères, pour leur complicité et leur présence depuis toujours.*

*À toutes mes amies, pour les instants inoubliables vécus ensemble.*

*À tous ceux qui me sont chers.*

## REMERCIEMENTS

*Tout d'abord, je remercie ALLAH Le Tout Puissant qui m'a accordée la volonté et le courage pour réaliser ce mémoire.*

*Je voudrais d'abord et avant tout remercier mon encadrante vertueuse Saidane Hadda pour tous ses efforts en vue d'établir ce mémoire. Elle a eu un rôle fondamental et essentiel et un grand mérite dans tout ce qui a été réalisé, comme elle l'a toujours fait, en étant près de moi et en me guidant et en corrigeant mes erreurs.*

*J'ai de la chance aussi parce que Monsieur le Dr. Amara Abdelkader ait accepté d'être président de ce travail ainsi que pour l'attention qu'il a portée à mon travail.*

*Je tiens également à remercier Monsieur le Dr. Zibar Said pour avoir accepté de faire partie de mon jury.*

*Enfin, mes sincères remerciements s'adressent à tous ceux qui nous ont soutenus de près ou de loin.*

*Merci à tous*

# Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
<b>1 Lois Stables Univariées et Valeurs Extrêmes</b>	<b>3</b>
1.1 Lois $\alpha$ -stables . . . . .	3
1.1.1 Quelques définitions . . . . .	4
1.1.2 Interprétation des paramètres de la loi $\alpha$ -stable . . . . .	5
1.1.3 Lois alpha-stables symétriques . . . . .	7
1.1.4 Propriétés des lois $\alpha$ -stables . . . . .	8
1.2 Eléments de la théorie des valeurs extrêmes . . . . .	10
1.2.1 Concepts et définitions . . . . .	10
1.2.2 Distributions à queues lourdes . . . . .	12
1.2.3 Distributions à variations régulières . . . . .	12
1.2.4 Statistiques d'ordre . . . . .	13
1.2.5 Théorème central limite généralisé . . . . .	13
1.2.6 Distribution limite du maximum . . . . .	14

1.2.7	Distribution de Pareto généralisée . . . . .	18
1.2.8	Estimation semi-paramétrique de l'indice de queue . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Estimation des paramètres de la distribution <math>\alpha</math>-stable</b>	<b>22</b>
2.1	Estimation paramétrique . . . . .	23
2.1.1	Méthode des Moments . . . . .	23
2.1.2	Méthode de Régression . . . . .	24
2.1.3	Méthode de McCulloch . . . . .	27
2.1.4	Méthode du Maximum Vraisemblance . . . . .	29
2.2	Estimation semi-paramétrique . . . . .	30
2.2.1	Estimation d'indice de stabilité $\alpha$ . . . . .	30
2.2.2	Estimation de paramètre de localisation $\mu$ . . . . .	32
2.2.3	Estimation du paramètre d'échelle $\sigma$ . . . . .	35
	<b>Conclusion</b>	<b>37</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>37</b>
	<b>Annexe A : Abréviations et Notations</b>	<b>41</b>
	<b>Annexe B : Logiciel R et Programmes de simulation</b>	<b>43</b>

# Table des figures

1.1	Courbe de densite de $\alpha$ -stables pour differente valeurs de $\alpha \in \{1.2, 1.5, 2\}$ , $\sigma = 1$ , $\beta = 0$ , $\mu = 0$ . . . . .	5
1.2	Courbe de densite de $\alpha$ -stables pour differente valeurs de $\sigma \in \{0.5, 1, 1.5\}$ , $\alpha =$ $1.5$ , $\beta = 0$ , $\mu = 0$ . . . . .	6
1.3	Courbe de densite de $\alpha$ -stables pour differente valeurs de $\beta \in \{-1, 0, 1\}$ , $\alpha = 1.5$ , $\sigma = 1$ , $\mu = 0$ . . . . .	6
1.4	Courbe de densite de $\alpha$ -stables pour differente valeurs de $\mu \in \{-2, 0, 2\}$ , $\alpha = 1.5$ , $\sigma = 1$ , $\beta = 0$ . . . . .	7
1.5	Maxima (Minima) par block . . . . .	14
1.6	Densites et distributions de lois des valeurs extrêmes. . . . .	15
1.7	Les données $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iN_u}$ et les $N_u$ exces correspondants $Y_1, \dots, Y_{N_u}$ au-dessus du seuil $u$ . . . . .	18
1.8	Densites et distributions de lois de Pareto generalisee avec differentes valeurs de $\gamma$ . . . . .	19
1.9	Estimateur de Hill avec l'intervalle de confiance au niveau 95% pour $\gamma$ basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi de Pareto standard ( $\gamma = -1$ ). . . . .	20
1.10	Estimateur de Hill avec l'intervalle de confiance au niveau 95% pour $\gamma$ basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi de Pareto standard ( $\gamma = 1$ ). . . . .	21

# Liste des tableaux

1.1	Moments d'une v.a. suivant une loi stable selon alpha. . . . .	10
2.1	Valeurs optimales de K pour différentes valeurs de alpha et n . . . . .	25
2.2	Résultats de simulation de l'estimateur d'indice de stabilité alpha basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique avec alpha=1.2,1.8 et sigma=0.1,1 . . . . .	32
2.3	Résultats de simulation de l'estimateur de paramètre de localisation mu basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique avec alpha=1.2,1.5 et sigma=0.1,1 . . . . .	34
2.4	Résultats de simulation de paramètre d'échelle sigma basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique avec alpha=1.2,1.5 et sigma=0.1,1 . . . . .	36

# Introduction

Plusieurs problèmes physiques et financiers ont des variations très importantes et les distributions alpha-stables sont fréquemment employées pour leurs modélisations. Ces lois introduites par Paul Lévy en 1924[16], forment une classe très riche de modèles de probabilité. Elles tiennent compte de l'asymétrie (c.à.d le mode n'est pas au centre de la distribution) et les queues lourdes (où une distribution est considérée comme étant à queues lourdes lorsque sa queue décroît plus lentement que la queue d'une distribution gaussienne). Les lois de Gauss, de Cauchy et de Lévy sont les seuls cas ayant une forme explicite pour la densité de probabilité et la fonction de répartition, tandis que les autres sont caractérisées par leurs fonctions caractéristiques. Le fait que la densité et la fonction de répartition ne soient pas clairement écrites a constitué un inconvénient pour l'utilisation des distributions stables par les praticiens.

Dans les années 60, Mandelbrot[21] étudie les fluctuations boursières et remarque que le modèle gaussien ne convient pas. Il sous tourne alors les lois de pareto et propose un nouveau modèle, les "lois stables", pour décrire la variation des prix. Mandelbort confirme que ce modèle décrit de manière réaliste les fluctuations des prix sur certaines bourses. Ces lois permettent, d'une part, de prendre en compte les queues lourdes et le comportement asymétrique des prix et d'autre part, en fonction de quatre paramètres, les lois stables sont plus souples que les lois normales pour adapter des données empiriques lors des processus d'estimation et de test de modèle. Les quatre paramètres de la loi stable sont : l'exposant caractéristique  $\alpha$  qui prend ses valeurs entre 0 et 2, le paramètre d'asymétrie  $\beta$  compris entre  $-1$  et  $1$ , le paramètre d'échelle  $\sigma \geq 0$  et le paramètre de position  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Il existe plusieurs méthodes d'estimer les paramètres de loi stables comme la méthodes des quantiles, les méthodes basée sur la fonction caractéristique (comme la méthode régression et



moment) et les méthodes basées sur la théorie des valeurs extrêmes.

Dans ce mémoire, qui s'articule autour de deux chapitres, on essaie d'étudier :

## **Chapitre 1 : Lois Stables Univariées et Valeurs Extrêmes**

Dans la première section de ce chapitre, on commence à l'étude des lois stables, donne dans un premier temps les définitions, l'interprétation des paramètres de la fonction caractéristique de loi stable et les propriétés de ces lois, puis dans la deuxième section, on donne quelques éléments théorique essentiels de la théorie des valeurs extrêmes (*TVE*) où on présente quelques rappels sur les concepts de base tels les fonctions de répartition, des quantiles, les distributions à queues lourdes et celles à variations régulières ainsi que les statistiques d'ordre, on donne le résultat fondamental de la TVE et la distribution  $\mathcal{GEV}$  ainsi que les caractéristiques des différents domaines d'attraction du maximum. Puis, on introduit la distribution  $\mathcal{GPD}$  et on donne les estimateurs de l'indice de queue tels l'estimateur de Hill et de Pickands.

## **Chapitre 2 : Estimation des paramètres de la distribution $\alpha$ -stable**

Ce chapitre concentre sur l'étude de différentes approches pour estimer paramètres de la distribution Lévy-stable, dans la première section, on commence on les méthodes classiques d'estimation des paramètres de loi stable comme la méthode des quantiles proposée par McCulloch[18], les méthodes basées sur la fonction caractéristique (comme la méthode régression de koutrouvelis[17] et moment de press[30]) et puis dans la deuxième section, on donne les méthodes semi-paramétriques basées sur la théorie des valeurs extrêmes (voir par exemple [9],[22] et [28]). Les performances des méthodes semi-paramétriques sont illustrées sur des données simulées.

On mentionne que tous les travaux, présentés dans ce mémoire, sont traités à l'aide du logiciel *R*, *R* version 4.3.3 (2024), (voir *Ihaka, R. et Gentleman, R.* [12]) qui est présenté dans l'annexe [B].

# Chapitre 1

## Lois Stables Univariées et Valeurs

### Extrêmes

Dans ce chapitre, on parle sur les lois stable introduites par Paul Lévy en 1924[16] dans son étude sur la somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Dans le cadre des distributions à variance infinie sont apparues les lois  $\alpha$ -stables, dont le moment d'ordre 2 est infini dès que l'indice de stabilité  $\alpha$  est strictement inférieur à 2. Plusieurs livres sont concacrés à ces lois stables : Zolotarev(1986)[35] qui a étudié les loi  $\alpha$ -stables dans le cas univarié, Samorodnitskyet Taqqu(1994)[32] qui ont étudié de manière approfondie beaucoup de propriétés de ces lois dans le cas univarié.

Ensuite, on rappelle quelques notions essentielles sur la théorie des valeurs extrême nous définissons les fonctions à variations régulières, statistique d'ordre, fonction de répartition et fonction de survie puis distribution des valeurs extrêmes *GEV* et distribution de pareto généralisée *GPD*, les domaines d'attraction et l'estimateur classique de l'indice de queue de Hill et Pikands.

#### 1.1 Lois $\alpha$ -stables

Les lois- Pareto-stables, appelées aussi lois Lévy-stable, ont été introduites par Paul Lévy en 1924 [16] dans son étude de la somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cette propriété de stabilité par addition a incité de nombreux chercheurs à utiliser les lois stables pour représenter la loi des rendements financiers.

### 1.1.1 Quelques définitions

**Définition 1.1.1** (*Variable aléatoire stable*)

Une v.a.  $X$  est dite stable ou a une distribution stable si est seulement si, pour tous nombres positifs  $a$  et  $b$  et des copies  $X_1$  et  $X_2$  indépendantes de  $X$ , il existe deux nombres réels  $c > 0$  et  $d$  tels que :

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{\mathcal{D}}{=} cX + d. \quad (1.1)$$

Lorsque  $d = 0$ , on parle de distribution strictement stable.

Par conséquent, si  $(X_n)$  une suite de v.a.'s réelles i.i.d. stable, alors par (1.1) il existe des constantes  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  tels que (pour  $n \geq 1$ ) :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} a_n X_1 + b_n,$$

ou de manière équivalente  $a_n^{-1}(S_n - b_n) \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_1$ .

En raison de l'importance de la classe des distributions stables, il est nécessaire de les décrire analytiquement. Leur principal inconvénient est qu'elles ne possèdent pas de formes explicites pour les densités et les fonctions de répartition, sauf dans trois cas qu'on verra par la suite. La manière la plus commune de les décrire se fait par leurs fonctions caractéristiques (pour une description complète voir [35] et [32]).

**Définition 1.1.2** (*Fonction caractéristique*)

La fonction caractéristique (FC) d'une v.a. stable est définie, pour  $t \in \mathbb{R}$ , par

$$\varphi_X(t) := \begin{cases} \exp \left\{ i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left( 1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right\}, & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp \left\{ i\mu t - \sigma |t| \left[ 1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t| \right] \right\}, & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

où

$$i^2 = -1, \quad \operatorname{sign}(t) := \begin{cases} 1 & \text{quand } t > 0, \\ 0 & \text{quand } t = 0, \\ -1 & \text{quand } t < 0, \end{cases}$$

et  $\alpha, \sigma, \beta, \mu$  : sont des paramètres réels tels que  $0 < \alpha \leq 2, \sigma \geq 0, -1 \leq \beta \leq 1, \mu \in \mathbb{R}$ .

### 1.1.2 Interprétation des paramètres de la loi $\alpha$ -stable

Une v.a. stable  $X$  est donc caractérisée par quatre paramètres :

1.  $\alpha$  est appelé *exposant caractéristique* ou *indice de stabilité*, décrit la forme de la distribution ou le degré d'épaisseur de ses queues. Plus  $\alpha$  est petit, plus les queues sont épaisses. Autrement dit, plus  $\alpha$  est petit, plus on constate l'existence de très grandes fluctuations. Une distribution gaussienne a la valeur maximum de  $\alpha$  soit  $\alpha = 2$  (voir la figure 1.1).

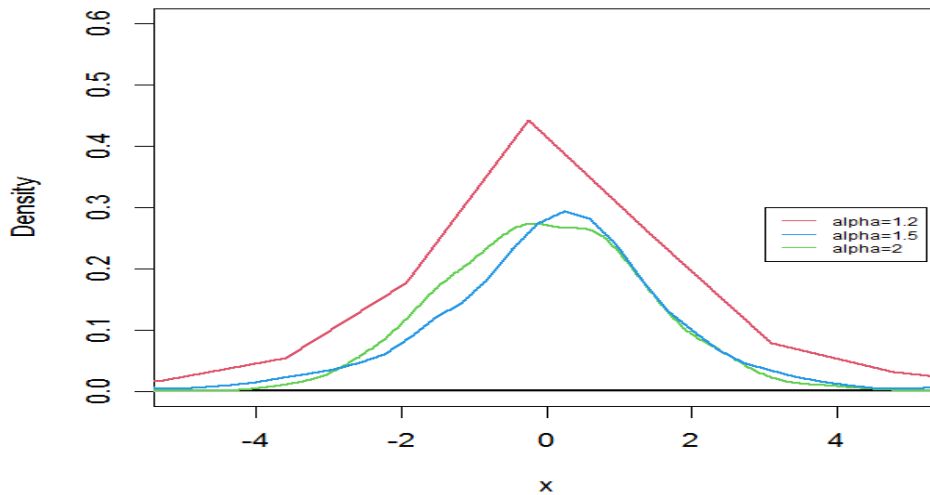


FIG. 1.1 – Courbe de densité de  $\alpha$ -stables pour différentes valeurs de  $\alpha \in \{1.2, 1.5, 2\}$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\mu = 0$

2.  $\sigma$  est appelé *paramètre d'échelle*. Plus  $\sigma$  est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre  $\sigma$  permet de centrer plus ou moins le corps de la distribution (voir la figure 1.2).

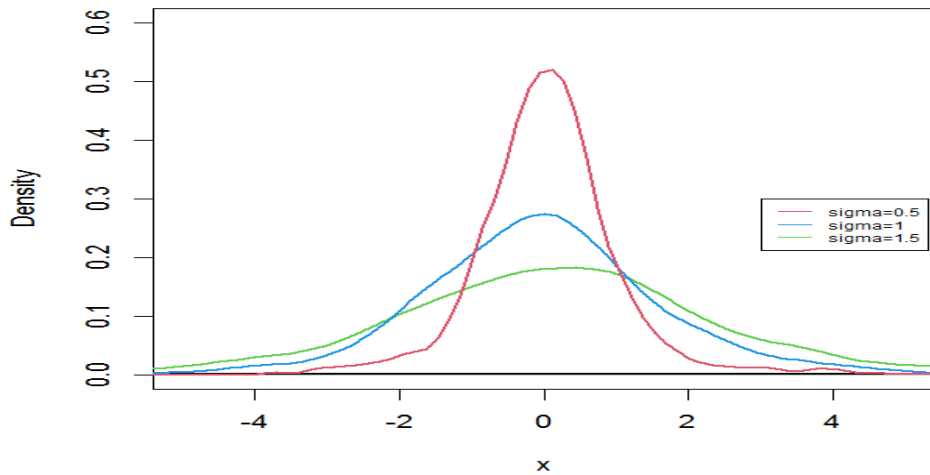


FIG. 1.2 – Courbe de densité de  $\alpha$ -stables pour différentes valeurs de  $\sigma \in \{0.5, 1, 1.5\}$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0$ ,  $\mu = 0$

- $\beta$  est appelé *paramètre d'asymétrie*. Si  $\beta$  est égal à  $-1$  (resp.  $+1$ ) la distribution est totalement asymétrique à gauche (resp. à droite). Lorsque  $\beta$  vaut zéro alors la distribution est symétrique (voir la figure 1.3).

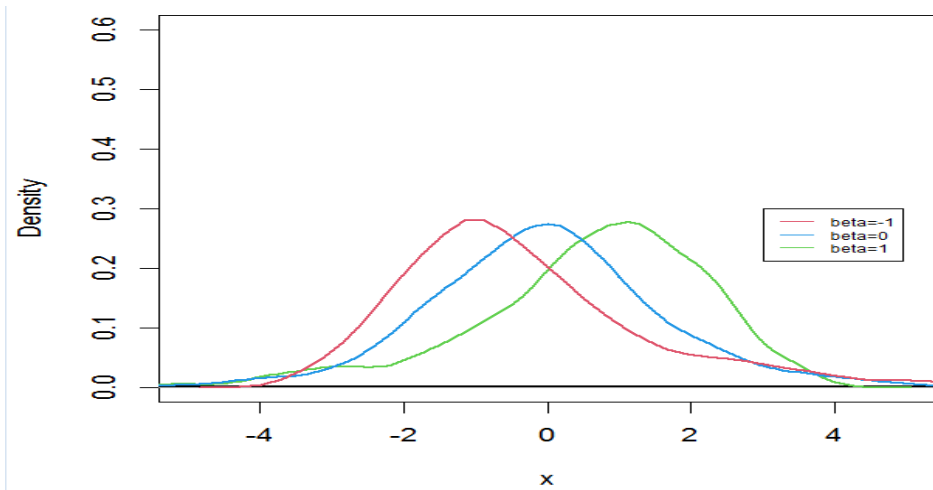


FIG. 1.3 – Courbe de densité de  $\alpha$ -stables pour différentes valeurs de  $\beta \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0$

- $\mu$  est appelé *paramètre de position ou localisation*. Il correspond, pour  $\alpha$  supérieur à 1, à l'espérance. Si  $\beta = 0$  alors  $\mu$  est la médiane. Dans les autres cas, le paramètre  $\mu$  ne peut pas être interprété (voir la figure 1.3).

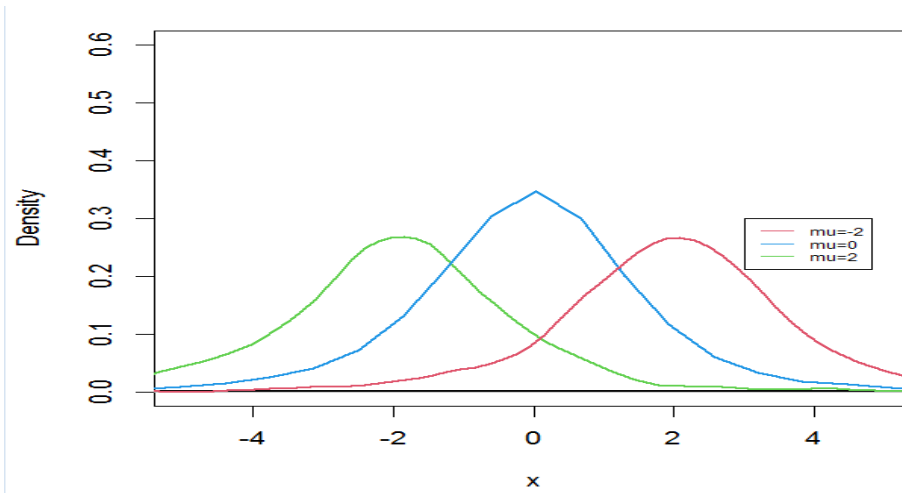


FIG. 1.4 – Courbe de densité de  $\alpha$ -stables pour différentes valeurs de  $\mu \in \{-2, 0, 2\}$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\beta = 0$

### 1.1.3 Lois alpha-stables symétriques

La distribution Lévy-stable de paramètres  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta$  et  $\mu$  sera dénotée par  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  et une v.a. stable  $X$  par  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ . Si  $\beta = \mu = 0$ , la distribution est dite symétrique et dénotée par  $S\alpha S$ . Dans ce cas, la fonction caractéristique a la forme simple

$$\varphi_X(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si seulement  $\beta = 0$ , on dit que la distribution est symétrique autour de  $\mu$ .

Les trois exceptions dont on a parlé plus haut sont :

- La distribution gaussienne  $S_2(\sigma, 0, \mu)$  où  $f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}\right)$ .
- La distribution de Cauchy  $S_1(\sigma, 0, \mu)$  où  $f(x) = \frac{2\sigma}{\pi(4\sigma^2 + (x-\mu)^2)}$ .
- La distribution de Lévy  $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$  où

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} (x-\mu)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right) \times \mathbb{1}_{] \mu, +\infty[}(x).$$

Mais, depuis l'implémentation de la transformée de Fourier rapide (FFT : fast Fourier transform), les densités stables sont devenues faciles à calculer numériquement. On peut approcher par cette méthode la densité

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

**Définition 1.1.3** (*Domaine d'attraction des lois  $\alpha$ -stables*)

On dit que  $F$  appartient au domaine d'attraction (DA) d'une loi stable d'indice de stabilité  $0 < \alpha \leq 2$  et on note  $F \in D(\alpha)$ , s'il existe deux suites réelles  $A_n > 0$  et  $B_n$  tels que

$$A_n^{-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i - B_n \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

**1.1.4 Propriétés des lois  $\alpha$ -stables**

On va rappeler quelques propriétés importantes des variables aléatoires stables de loi  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  que on utilisera dans la suite

Propriétés arithmétiques

**Proposition 1.1.1**

1. Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux v.a.'s indépendantes de loi stable avec  $X_1 \sim S_\alpha(\beta_1, \sigma_1, \mu_1)$  et  $X_2 \sim S_\alpha(\beta_2, \sigma_2, \mu_2)$  alors  $(X_1 + X_2) \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  telle que

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

On note que si  $\beta_1 = \beta_2$  alors  $\beta = \beta_1 = \beta_2$

**Proposition 1.1.2**

1. Si  $X_1$  et  $X_2$  suivent une loi stable  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ ,  $A \in \mathbb{R}^+$ ,  $B \in \mathbb{R}^+$ ,  $C \in \mathbb{R}$  alors :

$$A X_1 + B X_2 + C \stackrel{\mathcal{D}}{=} S_\alpha \left( \beta, \sigma(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \mu(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + C \right)$$

2. Si  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$ .

3. Si  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(|a| \sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu), & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ S_1 \left( |a| \sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi} a (\log |a|) \sigma \beta \right), & \text{pour } \alpha = 1. \end{cases}$$

4. Si  $0 < \alpha < 2$  et  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$  alors  $-X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0)$ .

## Queues lourdes

**Définition 1.1.4** La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est dite à "queues lourdes" d'indice  $\alpha$  s'il existe une fonction  $L$  à variation lente, c'est-à-dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1$ . pour tout  $x > 0$ , on a

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} L(x).$$

Les lois  $\alpha$ -stable sont des "Distribution à Queues lourdes". En effet, ce résumé dans la proposition suivante :

**Proposition 1.1.3** (Propriété de queues lourdes)

Soit  $X$  une v.a.r.  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , alors on a, quand  $x \rightarrow \infty$ , les deux résultats suivants :

$$\begin{cases} x^\alpha P(X > x) & \rightarrow C_\alpha \frac{1 + \beta}{2} \sigma^\alpha, \\ x^\alpha P(X < -x) & \rightarrow C_\alpha \frac{1 - \beta}{2} \sigma^\alpha, \end{cases} \quad (1.2)$$

où

$$C_\alpha := \left( \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & \alpha = 1, \\ \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2)}, & \alpha \neq 1, \end{cases}$$

avec  $\Gamma(\lambda)$  est la fonction de gamma définie, pour  $\lambda > 0$  par :

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx.$$

Voir la démonstration dans Samorodnitsky et Taqqu (1994, page 16 [32]).

Si on note par  $G(x) := P(|X| \leq x) = F(x) - F(-x)$ ,  $x > 0$ , la f.r. de  $Z := |X|$ , alors les relations de (1.2) rapportent que les queues de distribution de  $F \in D(\alpha)$ , pour  $0 < \alpha < 2$ , satisfont les deux conditions suivantes

1. La condition de la variation régulière

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 - G(tx))}{(1 - G(t))} = x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

2. La condition d'équilibre de queue, pour  $0 \leq p \leq 1$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - G(x)} \rightarrow p = \frac{1 + \beta}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(-x)}{1 - G(x)} \rightarrow 1 - p = q = \frac{1 - \beta}{2}, \quad (1.3)$$



## Moments

Soit  $X$  une v.a. de loi  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  avec  $\alpha \in ]0, 2[$  alors

$$\mathbb{E}|X|^p < \infty, \quad \text{si } p \in ]0, \alpha[,$$

$$\mathbb{E}|X|^p = \infty, \quad \text{si } p \in [\alpha, \infty[,$$

si  $\alpha \in ]1, 2[$  alors  $\mathbb{E}(X) = \mu$ . Soit  $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , on a (voir le Tableau 1.1)

$0 < \alpha \leq 1$	$1 < \alpha < 2$	$\alpha = 2$
$\mathbb{E}(X) = \infty$	$\mathbb{E}(X) = \mu$	$\mathbb{E}(X) = \mu$
$Var(X) = \infty$	$Var(X) = \infty$	$Var(X) = 2\sigma^2$

TAB. 1.1 – Moments d’une v.a. suivant une loi stable selon alpha.

## 1.2 Eléments de la théorie des valeurs extrêmes

Cette technique est utilisée pour modéliser les événements rares, est aussi en assurance pour estimer la prime de reassurance. La (TVE) a des applications dans beaucoup de domaines comme la finance (elle permet de calculer la VaR (Value-at-Risk)), hydrology, geology,...etc. Pour une présentation complète sur la TVE, voir le livre d’*Embrechts, Klüppelberg et Mikosch* [5].

### 1.2.1 Concepts et définitions

On suppose données  $n$  v.a.’s  $X_1, X_2, \dots, X_n$  indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.),  $n$  copies d’une v.a.  $X$  de f.r.  $F$  définie par :

$$F(x) := P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Définition 1.2.1** (*Fonction de distribution empirique*)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires (i.i.d)  $n$  copies d’une v.a.  $X$  de f.r.  $F$ . La fonction de répartition empirique, notée  $F_n$  est défini par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

En plus notons  $\bar{F}$  la fonction des queues, connue en fiabilité sous le nom de la fonction de survie ou de séjour, est définie pour  $x$  grand par :

$$\bar{F}(x) = P\{X > x\} = 1 - F(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Définition 1.2.2** (*Fonctions de quantiles empirique*)

La fonction des quantiles ou l'inverse généralisé de distribution  $F$  notée par  $Q$ , pour chaque entier  $n \geq 1$

$$Q(p) = F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x, F(x) \geq p\}, \quad 0 < P < 1$$

La fonction quantiles empirique, notée  $Q_n$ , est définie par

$$Q_n(p) = F_n^{\leftarrow}(p) = \inf\{x, F_n(x) \geq p\}, \quad 0 < P < 1$$

où  $F^{\leftarrow}$  est l'inverse généralisé de la fonction de distribution  $F$ .

**Définition 1.2.3** (*Fontion des quantiles de queue*)

La fonction des quantiles de queues, notée  $U$  est donnée par

$$U(x) = Q(1 - 1/x) = (1/\bar{F})^{\leftarrow}(x), \quad 1 < x < \infty$$

On définit le maximum  $M_n$  par :

$$M_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Comme les v.a.'s sont i.i.d., alors la f.r. de  $M_n$  s'écrit

$$F_{M_n}(x) = [F(x)]^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mais, il n'est pas possible de déterminer la distribution du maximum à partir de ce résultat. La difficulté provient du fait que l'on ne connaît pas en général la f.r.  $F$ . On s'intéresse alors à sa distribution asymptotique. En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(x)]^n = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_F, \\ 1, & \text{si } x \geq x_F, \end{cases}$$

où

$$x_F := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\},$$

désigne le point terminal à droite (right-end point) de la f.r.  $F$ .

On constate que la distribution asymptotique de  $M_n$  est une loi dégénérée, puisque pour certaines valeurs de  $x$ , la probabilité peut être égale à 1 dans le cas où  $x_F$  est fini. Cela ne fournit pas assez d'informations sur le maximum.

Il est souvent intéressant de déterminer les comportements asymptotiques du maximum  $M_n$  convenablement normalisés.

## 1.2.2 Distributions à queues lourdes

Les distributions à queues lourdes sont des distributions qui ont des queues non exponentiellement bornées, qui ont des queues plus lourdes que celles des distributions exponentielles.

**Définition 1.2.4** Une distribution  $F$  est dit à queue lourde si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} (1 - F(x)) = \infty, \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

## 1.2.3 Distributions à variations régulières

La classe des distributions à variations régulières constitue un bon exemple de distributions à queues lourdes. Elle inclut des modèles populaires tels ceux de *Pareto*, *Burr*, *Student* et les *distributions Lévy-Stable*, *Log-gamma*.

**Définition 1.2.5** (Fonction à variations régulière et à variation lente)

On dit qu'une fonction  $V$  est à variation régulière au voisinage de l'infini d'indice  $\rho \in \mathbb{R}$ , et on note  $V \in RV_\rho$ , si  $V$  est positive à l'infini et si pour tout  $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(tx)}{V(t)} = x^\rho. \quad (1.4)$$

Dans le cas particulier où  $\rho = 0$ , on dit que  $V$  est une fonction à *variation lente* à l'infini (c.à.d.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(tx)}{V(t)} = 1$ ). Comme exemple de fonctions à variations lentes, citons la fonction constante, les fonctions qui tendent vers une constante et la fonction  $\ln(1 + x)$ .

Une fonction  $V$  à variation régulière d'indice  $\rho$  peut toujours s'écrire sous la forme :

$$V(x) = x^\rho L(x),$$

où  $L$  est une fonction à variation lente.

## 1.2.4 Statistiques d'ordre

**Définition 1.2.6** (*Statistiques d'ordre*)

Les statistiques d'ordre associées à l'échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sont le réarrangement croissant des éléments de cet échantillon. Elles sont dénotées par  $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$  et pour  $k = 1, 2, \dots, n$ , la v.a.  $X_{k:n}$  est appelée la  $k^{\text{ème}}$  statistique d'ordre (ou statistique d'ordre  $k$ ).

La plus petite statistique d'ordre  $X_{1,n}$  (statistique du minimum) et la plus grande statistique d'ordre  $X_{n,n}$  (statistique du maximum) sont deux statistiques d'ordre particulièrement intéressantes dans l'étude des événements extrêmes.

$$X_{1,n} := \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad X_{n,n} = M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (1.5)$$

La fonction de répartition de la  $k^{\text{ème}}$  statistique d'ordre  $X_{k:n}$  pour  $1 \leq k \leq n$  est la suivante

$$F_{k,n}(x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour  $X_{1:n}$  et  $X_{n:n}$ , on obtient les deux expressions très simples, pour  $x \in \mathbb{R}$

$$F_{1,n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \quad \text{et} \quad F_{n,n}(x) = [F(x)]^n.$$

Pour une étude complète des statistiques d'ordre on peut voir le livre d'*Arnold, Balakrishnan et Nagaraja* [1].

## 1.2.5 Théorème central limite généralisé

On rappelle que, le TCL classique indique que la somme des v.a.'s indépendantes de variances finies converge vers la distribution normale :

$$a_n^{-1}(S_n - b_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \quad (1.6)$$

tels que  $Z$  est une v.a. non dégénérée normale et  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  des suites de normalisation avec  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$ .

Si la condition de variance finie est abandonnée, ce résultat n'est plus valable. Cependant, un théorème connu sous le nom de théorème central limite généralisé (TCL Généralisé) dit que les seules distributions limites possibles, dans (1.6), sont les distributions stables (voir *Nolan* [23]).

**Théorème 1.2.1** (*TCL Généralisé (Lévy, [16])*)

Une v.a. non dégénérée  $Z$  est  $\alpha$ -stable pour  $0 < \alpha \leq 2$  si et seulement s'il existe une suite de v.a.'s  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. et deux constantes  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$a_n^{-1}(S_n - b_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

avec  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

### 1.2.6 Distribution limite du maximum

*Fisher et Tippett* [7] ont trouvé en 1928 un théorème qui est la base de la TVE. Plus tard, ce théorème a été prouvé la première fois, dans la généralité complète, par *Gnedenko* [13]. Ce théorème précise les lois limites possibles pour le maximum normalisé  $M_n$ .

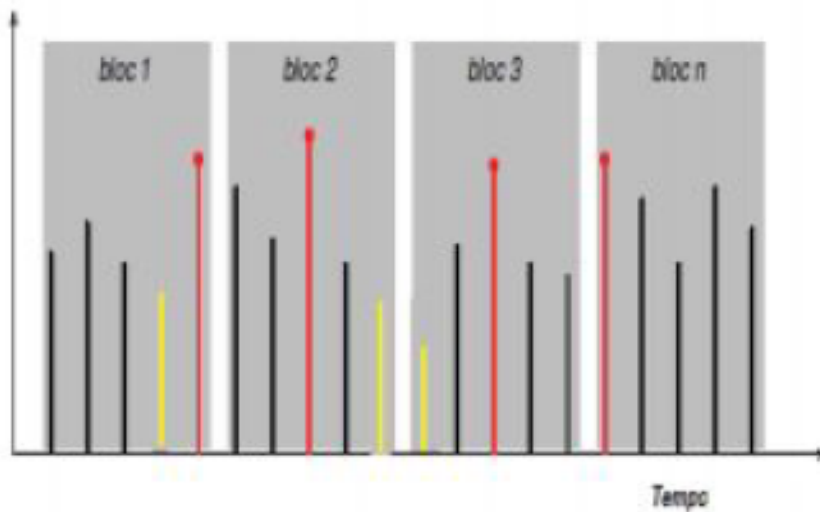


FIG. 1.5 – Maxima (Minima) par block

**Théorème 1.2.2** (*Fisher-Tippett ou théorème des 3 types extrêmes ([5])*).

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  v.a.'s i.i.d. de f.r.  $F$ . S'il existe deux constantes de normalisation  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  et une distribution limite non dégénérée  $H$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

alors  $H$  appartient à l'une des trois lois limites suivantes :

$$\text{Loi de Fréchet : } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \exp[-(x)^{-\alpha}], & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } \alpha > 0,$$

$$\text{Loi de Weibull : } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^\alpha], & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } \alpha > 0,$$

$$\text{Loi de Gumbel : } \Lambda(x) = \exp[-\exp(-x)], \quad \text{si } x \in \mathbb{R} \quad \text{et } \alpha = 0,$$

avec  $H$  est la distribution des valeurs extrêmes ( $\mathcal{EVD}$ ) et les trois distributions  $\Phi_\alpha$ ,  $\Psi_\alpha$  et  $\Lambda$  sont appelées les distributions standard des valeurs extrêmes.

Contrairement au TCL, où la loi normale est la seule loi limite possible, dans le cas des extrêmes, trois types de loi limite sont possibles.

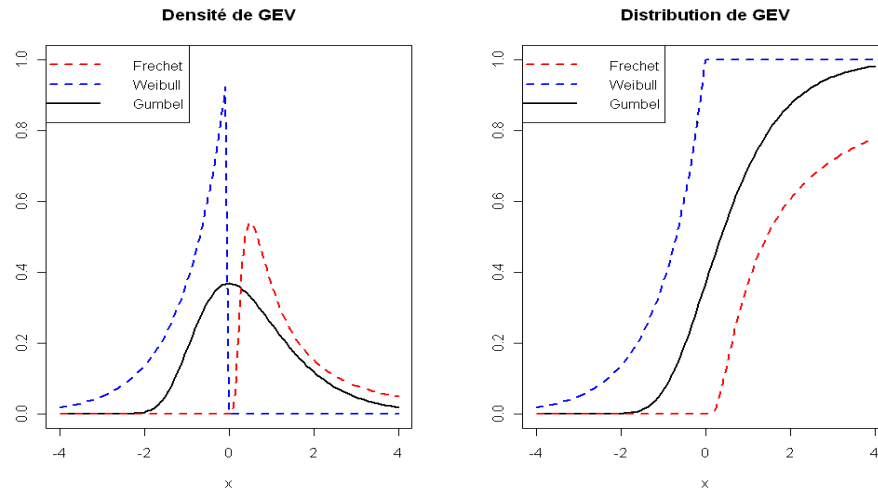


FIG. 1.6 – Densités et distributions de lois des valeurs extrêmes.

## Distribution $\mathcal{GEV}$

Nous pouvons caractériser les trois types extrêmes précédentes par une distribution unique. Von Mises (1954) et Jenkinson (1955) [15] ont proposé la distribution  $\mathcal{GEV}$  qui a pour fonction de

répartition

$$\mathcal{G}_{\gamma, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} \exp \left\{ - [1 + \gamma x]^{-1/\gamma} \right\} & \text{si } \gamma \neq 0, 1 + \gamma x > 0 \\ \exp \{ - \exp [-x] \} & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

où  $\gamma = \frac{1}{\alpha}$  est un paramètre de forme que l'on appelle l'indice des valeurs extrêmes. Plus cet indice est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important. On parle alors de distribution à "queues lourdes".

### **Domaines d'attraction du maximum**

Nous allons donner des conditions sur la fonction de répartition  $F$  pour qu'elle appartienne à l'un des trois domaines d'attraction.

#### **Domaine d'attraction de Fréchet**

Si  $\gamma > 0$ , on dit que  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ . Ce domaine d'attraction est celui des distributions à *queues lourdes*, c.à.d qui ont une fonction de survie à *décroissance polynomiale*. Comme exemple de lois appartenant à ce domaine d'attraction on a les lois de *Loglogistic*, de *Pareto*, de *Loggamma*, de *Student*, de *Burr* et de *Fréchet*.

**Théorème 1.2.3**  $F \in D(\Phi_\alpha)$  avec  $\gamma > 0$  si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$\bar{F}(x) = x^{-1/\alpha} L(x)$$

telle que  $L(\cdot)$  est une fonction à variation lentes. Dans ce cas, les suites de normalisations sont données pour tout  $n > 0$

$$a_n = F^{\leftarrow} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = \bar{F}^{\leftarrow} \left( \frac{1}{n} \right)$$

$$b_n = 0$$

#### **Domaine d'attraction de weibull**

Si  $\gamma < 0$ , on dit que  $F \in MDA(\Psi_\alpha)$ . Ce domaine d'attraction est celui des fonctions de survie dont le support est borné supérieurement. Pour ce domaine d'attraction, on trouve les lois *uniforme*, *Reverse Burr*, ...

**Théorème 1.2.4**  $F \in D(\Psi_\alpha)$  avec  $\gamma < 0$  si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$\overline{F}\left(x_F - \frac{1}{x}\right) = x^{-1/\alpha} L(x)$$

Dans ce cas, les suites de normalisations sont données pour tout  $n > 0$

$$a_n = x_F - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$b_n = x_F$$

### Domaine d'attraction de Gumbel

Si  $\gamma = 0$ , on dit que  $F \in MDA(\Lambda)$ . Ce domaine d'attraction est celui des distributions à queues légères, c-à-d qui ont une fonction de survie à décroissance exponentielle. Dans ce domaine d'attraction, on regroupe les lois normale, exponentielle, log-normale, gamma, ...

Rappelons d'abord la fonction de Von-Mises

**Définition 1.2.7 (Fonction de Von-Mises)** Soit  $F$  une fonction de répartition de point terminal  $x_F$  fini ou infini. S'il existe  $z < x_F$  tel que

$$1 - F(x) = c \exp\left\{-\int_z^x \frac{1}{a(t)} dt\right\}, \quad z < x < x_F \leq \infty$$

$F \in D(\Lambda_\gamma)$  s'il existe une fonction de Von-Mises  $F^*$  telle que pour  $z < x < x_F$  on ait :

$$1 - F(x) = c(x) [1 - F^*(x)] = c(x) \exp\left\{-\int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt\right\}$$

où  $g$  et  $c$  sont des fonction mesurables tels que  $g(x) \rightarrow 1$  et  $c(x) \rightarrow c > 0$  quand  $x \rightarrow x_F$ , et  $a$  est une fonction positive. Dans ce cas, les suites de normalisations sont données pour tout  $n > 0$

$$a_n = a(b_n)$$

$$b_n = Q\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Avec

$$a(x) = \int_z^{x_F} \frac{F(t)}{F(x)} dt, \quad x < x_F$$



### 1.2.7 Distribution de Pareto généralisée

Cette méthode consiste à observer non pas le maximum ou les plus grandes valeurs mais toutes les valeurs des réalisations qui excèdent le seuil élevé  $u < x_F$ . Donc, l'idée de base de cette approche consiste à choisir un seuil suffisamment élevé et à étudier les excès au-delà de ce seuil.

On note par  $N_u$  le nombre d'excédances  $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{N_u}}$  qui dépassent le seuil  $u$ . On dénote les  $N_u$  excès correspondants par  $Y_1, \dots, Y_{N_u}$  où  $Y_j := X_{i_j} - u$  pour  $j = 1, 2, \dots, N_u$ , (voir la figure 1.7).

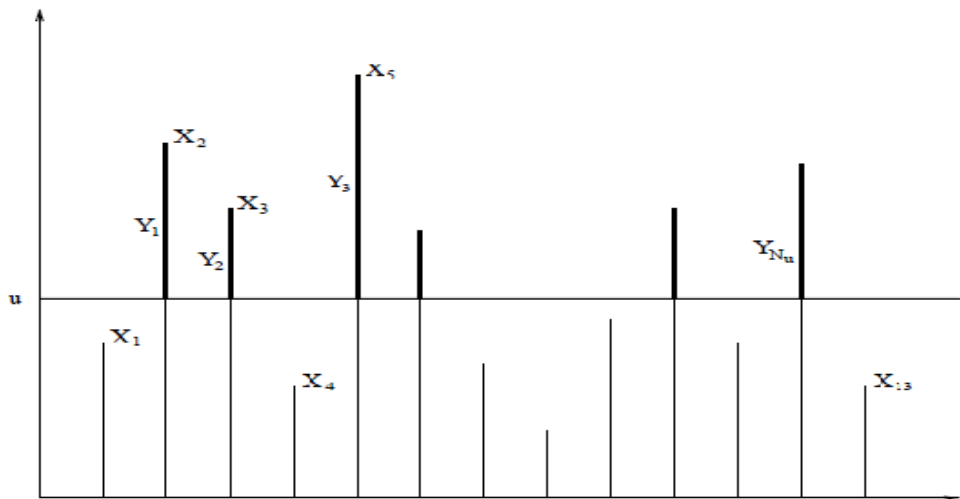


FIG. 1.7 – Les données  $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{N_u}}$  et les  $N_u$  excès correspondants  $Y_1, \dots, Y_{N_u}$  au-dessus du seuil  $u$ .

**Définition 1.2.8** La distribution de la loi pareto généralisée de paramètres  $\gamma \in \mathbb{R}$  est définie par

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma x)^{\frac{-1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

avec le support

$$\begin{aligned} x &\geq 0, & \text{si } \gamma &\geq 0, \\ 0 &\leq x \leq -1/\gamma, & \text{si } \gamma &< 0. \end{aligned}$$

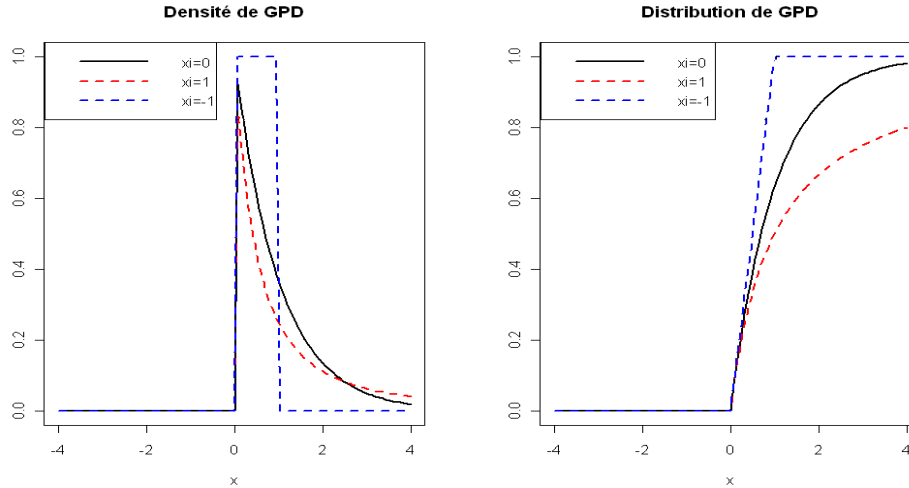


FIG. 1.8 – Densités et distributions de lois de Pareto généralisée avec différentes valeurs de  $\gamma$ .

## 1.2.8 Estimation semi-paramétrique de l'indice de queue

Dans la littérature de la théorie des valeurs extrêmes, on trouve des techniques semi-paramétriques pour l'estimation de l'indice de queue ( $\gamma$ ). Nous exposons deux estimateurs de l'indice de queue : l'estimateur de Pickands (1975) et Hill (1975).

### Estimateur de Pickands

L'estimateur de Pickands, a été introduit par Pickands [29] (1975), a l'avantage d'être valable quel que soit le domaine de définition de l'indice de queue (voir la figure 1.9).

**Définition 1.2.9** (*Estimateur de Pickands :  $\gamma \in \mathbb{R}$* )

$$\hat{\gamma}_n^{(P)} = \hat{\gamma}_n^{(P)}(k) := \frac{1}{\log 2} \log \left( \frac{X_{n-k+1,n} - X_{n-2k+1,n}}{X_{n-2k+1,n} - X_{n-4k+1,n}} \right). \quad (1.8)$$

La convergence forte ainsi que la normalité asymptotique ont été démontrées par Dekkers et de Haan [4].

### Estimateur de Hill

Cet estimateur a été défini par Hill (1975) [9]. C'est un estimateur très populaire et beaucoup utilisé mais qui est défini seulement pour les valeurs positives de  $\gamma > 0$ , qui correspond aux

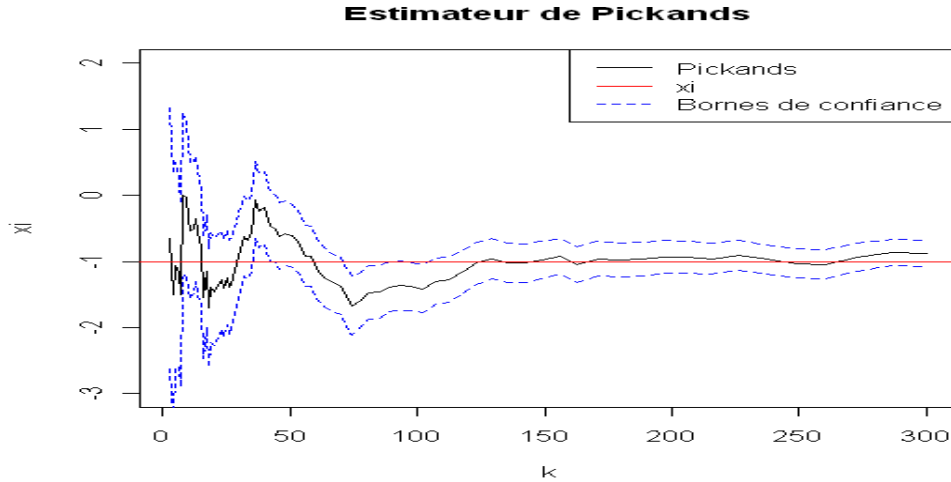


FIG. 1.9 – Estimateur de Hill avec l'intervalle de confiance au niveau 95% pour  $\gamma$  basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi de Pareto standard ( $\gamma = -1$ ).

distributions appartenant au domaine d'attraction de Fréchet ( $F \in MDA(\Phi_{1/\gamma})$ ), c-à-d, quand la queue de distribution a une forme de Pareto (distributions à *queues lourdes*) (voir la figure 1.10).

**Définition 1.2.10** (*Estimateur de Hill :  $\gamma > 0$* )

$$\hat{\gamma}_n^{(H)} = \hat{\gamma}_n^{(H)}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k,n}. \quad (1.9)$$

où  $k$  est une fonction de  $n$ , qui est choisi pour satisfaire les condition suivantes :

$$k(n) \longrightarrow \infty \quad \frac{k(n)}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

### Choix optimal du $k$

Le choix de  $k$  est d'une grande importance en pratique. Pour un échantillon de taille  $n$  donné, si  $k$  est très grand (autrement dit, si on prend beaucoup de valeurs pour l'estimation), un biais apparaît et si  $k$  est trop petit la variance d'estimation devient trop importante. Il s'agit donc d'effectuer d'un compromis entre biais et variance. On appelle  $k_{opt}$  la valeur de  $k$  optimale.

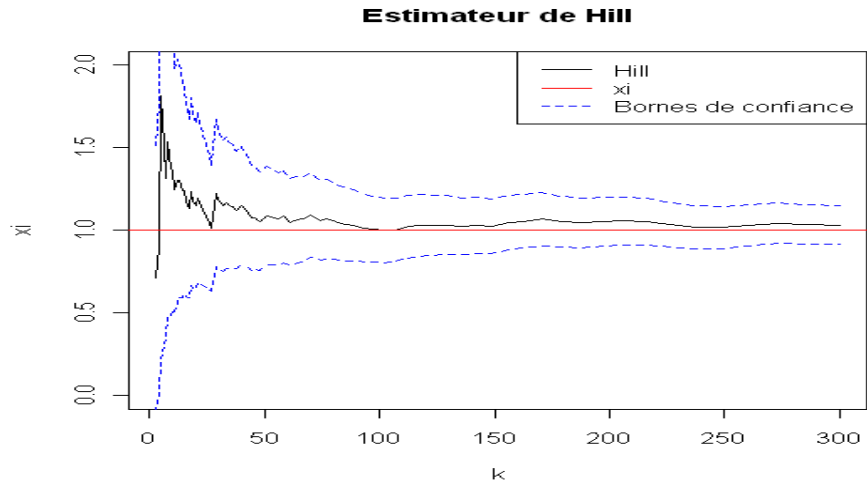


FIG. 1.10 – Estimateur de Hill avec l'intervalle de confiance au niveau 95% pour  $\gamma$  basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi de Pareto standard ( $\gamma = 1$ ).

Plusieurs procédures ont été suggérées dans la littérature pour le choix de  $k$  optimal (voir [4]).

On donne ici en revue la procédure proposé par Reiss and Thomas en 1997[31] :

$$RT(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i^\theta |\hat{\alpha}_n(i) - \text{med}(\hat{\alpha}_n(1), \hat{\alpha}_n(2), \dots, \hat{\alpha}_n(k))|,$$

où  $\text{med}$  représente la médiane et  $0 \leq \theta \leq 1/2$  et  $k$  optimal vérifie :

$$k_{opt} := \arg \min_k RT(k).$$

On choisit  $\theta = 0.3$ .

# Chapitre 2

## Estimation des paramètres de la distribution $\alpha$ -stable

Une loi  $\alpha$ -stable est caractérisée par quatre paramètres d'où on peut les estimer, mais le vrai inconvénient dans cette estimation est l'absence d'une forme explicite de la fonction de densité. Cependant, un grand nombre des procédures numériques ont été proposées des méthodes paramétriques comme la méthode de maximum de vraisemblance par DuMouchel (1971)[2], méthodes fondées sur les quantiles de la distribution (la méthode Fama et Roll(1968) dans le cas symétrique et McCulloch(1986) [18] cas général), méthodes basées sur la fonction caractéristique (la méthode de moment par Prees(1972)[30] et la méthode de régression par Koutrouvelis(1980)[17]). La différence entre ces méthodes est dans la précision et la vitesse.

D'autre part, à l'aide de la théorie des valeurs extrêmes les paramètres stables ont été estimés, pour l'exposant caractéristique  $\alpha$ , on a proposé l'estimateur de Hill ([9]), le paramètre de localisation  $\mu$  a été traité par Peng ([28]) et le paramètre d'échelle  $\sigma$  a été estimé par Necir et Meraghni([22]).

## 2.1 Estimation paramétrique

### 2.1.1 Méthode des Moments

La méthode des moments a été proposée par Prees (1972[30]), qui basée sur la transformation de la fonction caractéristique.

#### Estimation de $\alpha$ et $\sigma$

La fonction caractéristique d'une v.a.r.  $X \sim S\alpha S$ , (pour le cas  $\alpha \neq 1$ ) est donnée par :

$$\varphi_X(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$-\log |\varphi_X(t)| = \sigma^\alpha |t|^\alpha, \quad t \in \mathbb{R},$$

Choisissons deux nombres non nulle de  $t$ ,  $t_1 \neq t_2$

$$-\log |\varphi_X(t_k)| = \sigma^\alpha |t_k|^\alpha.$$

La fonction caractéristique empirique est donnée par :

$$\widehat{\varphi}_X(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(itx_j)$$

Pour  $k = 1, 2$ , la résolution les deux équations correspondantes les deux paramètres  $\alpha$  et  $\sigma$  et en remplaçant  $\varphi_X(t)$  par  $\widehat{\varphi}_X(t)$ , on trouve les estimateurs de ces deux paramètres comme suivant :

$$\widehat{\alpha} = \frac{\log \frac{\log |\widehat{\varphi}_X(t_1)|}{\log |\widehat{\varphi}_X(t_2)|}}{\log \left| \frac{t_1}{t_2} \right|}$$

et

$$\widehat{\sigma} = \exp \left( \frac{\log |t_1| (-\log |\widehat{\varphi}_X(t_2)|) - \log |t_2| (-\log |\widehat{\varphi}_X(t_1)|)}{\frac{\log |\widehat{\varphi}_X(t_1)|}{\log |\widehat{\varphi}_X(t_2)|}} \right)$$

#### Estimation de $\beta$ et $\mu$

Pour l'estimation de  $\beta$  et  $\mu$ , on considère :

$$\varphi_X(t) = \exp \left\{ i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left( 1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right\}, \quad \text{pour } \alpha \neq 1,$$

Avec

$$\widehat{\varphi}_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\cos(tx_i) + i \sin(tx_i)),$$

On considère  $u(t) = \text{Im}(\log(\varphi_X(t)))$ , alors

$$u(t) = \mu t + \sigma^\alpha |t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}$$

et

$$\widehat{u}(t) = \tan^{-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \cos(tx_i)}{\sum_{i=1}^n \sin(tx_i)} \right) \quad (2.1)$$

On prend deux autres nombre non nulle  $t_3 \neq t_4$

$$\frac{u(t_k)}{t_k} = \mu + [\sigma^\alpha |t_k|^{\alpha-1} \tan \frac{\alpha\pi}{2}] \beta. \quad (2.2)$$

A partir les équations 2.1 et 2.2 (pour  $k = 3, 4$ ). En résoudre les deux equations, on obtient les estimateurs  $\widehat{\beta}$  et  $\widehat{\mu}$  des paramètres  $\beta$  et  $\mu$  respectivement :

$$\widehat{\beta} = \frac{\frac{\widehat{u}(t_4)}{t_4} - \frac{\widehat{u}(t_3)}{t_3}}{[|t_4|^{\widehat{\alpha}-1} - |t_3|^{\widehat{\alpha}-1}] \widehat{\sigma}^{\widehat{\alpha}} \tan(\frac{\widehat{\alpha}\pi}{2})},$$

et

$$\widehat{\mu} = \frac{|t_4|^{\widehat{\alpha}-1} \frac{\widehat{u}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{\widehat{\alpha}-1} \frac{\widehat{u}(t_4)}{t_4}}{|t_4|^{\widehat{\alpha}-1} - |t_3|^{\widehat{\alpha}-1}},$$

### 2.1.2 Méthode de Régression

Koutrouvelis (1980)[17] propose une méthode de régression, basé sur certaines fonctions obtenues à partir de l'expression de la fonction caractéristique. On utilise la fonction caractéristique empirique pour estimer  $\alpha$ , qui est la pente de la droite, puis on estime  $\sigma$ .

#### Estimation de $\alpha$ et $\sigma$

D'après la formule de la fonction caractéristique d'une v.a.r.  $X \sim S\alpha S$ , on trouve :

$$|\varphi_X(t)|^2 = \exp(-2\sigma^\alpha |t|^\alpha),$$

ce qui conduit à

$$\log(-\log |\varphi_X(t)|^2) = \log(2\sigma^\alpha) + \alpha \log |t|.$$

Alors, on peut proposer le modèle de la régression linéaire suivant :

$$\hat{y}_k = m + \alpha w_k + e_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \text{ et } K \text{ entre } 9 \text{ et } 134$$

Où  $e_k$  est un terme d'erreur, et :

$$\hat{y}_k = \log(-\log |\hat{\varphi}_X(t_k)|^2),$$

$$m = \log(2\sigma^\alpha)$$

$$w_k = \log |t_k|$$

Avec

$$|\hat{\varphi}_X(t_k)|^2 = \frac{1}{n^2} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \cos(t_k x_i) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \sin(t_k x_i) \right)^2 \right]$$

On a la partie imaginaire de la fonction caractéristique de ces lois est nul, on peut estimer la fonction caractéristique sans la partie sinus. On a alors :

$$|\hat{\varphi}_X(t_k)|^2 = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \cos(t_k x_i)}{n} \right)^2$$

Koutrouvelis (1980)[17] propose d'utiliser  $t_k = \frac{\pi k}{25}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  et  $K$  entre 9 et 134 pour les différentes estimations du paramètre  $\alpha$  et les tailles d'échantillon  $n$  (voir le tableau 2.1).

$n/\alpha$	1.9	1.7	1.5	1.3	1.1	0.9	0.7	0.5	0.3
200	9	10	11	22	24	28	30	86	134
800	9	10	11	16	18	22	24	68	124
1600	10	10	11	14	15	18	20	56	118

TAB. 2.1 – Valeurs optimales de  $K$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $n$



Par régression linéaire, on obtient l'estimateur de  $\alpha$ , donné par :

$$\hat{\alpha} = \frac{K \sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{k=1}^K \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2 - \left( \sum_{k=1}^K w_k \right)^2}$$

On choisit les  $t_k$ , de telle sorte que  $\sum_{k=1}^K w_k = 0$ , et on obtient :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{\sum_{k=1}^K w_k^2}.$$

Pour l'estimateur de  $\sigma$  est obtenu par :

$$\hat{\sigma} = \left( \frac{1}{2} \exp \hat{m} \right)^{\frac{1}{\hat{\alpha}}},$$

où

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \frac{\sum_{k=1}^K w_k^2 \sum_{k=1}^K \hat{y}_k - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2 - \left( \sum_{k=1}^K w_k \right)^2} \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{y}_k, \text{ pour } \sum_{k=1}^K w_k = 0 \end{aligned}$$

### Estimation de $\beta$ et $\mu$

Si  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\sigma}$  ont été obtenus, alors les estimateurs de  $\beta$  et  $\mu$  peuvent s'obtenir à partir :

$$\varphi_X(t) = \exp \left\{ i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left( 1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right\}, \text{ pour } \alpha \neq 1,$$

Les parties réelles et imaginaires de  $\varphi_X(t)$  sont données par :

$$\text{Re } \varphi_X(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha) \cos \left[ \mu t + \sigma^\alpha |t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right]$$

et

$$\text{Im } \varphi_X(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha) \sin \left[ \mu t + \sigma^\alpha |t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right]$$

Alors

$$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} \varphi_X(t)}{\operatorname{Re} \varphi_X(t)}\right) = \mu t + \sigma^\alpha \beta \operatorname{sign}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |t|^\alpha$$

Les estimateurs de  $\beta$  et  $\mu$  peuvent obtenir avec la méthode de régression suivant les mêmes étapes précédentes :

$$\hat{y}_k = m + \mu w_k + e_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \text{ et } K \text{ entre } 9 \text{ et } 134$$

Où  $e_k$  est un terme d'erreur, et :

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} \varphi_X(t_k)}{\operatorname{Re} \varphi_X(t_k)}\right), \\ m &= \sigma^\alpha \beta \operatorname{sign}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |t|^\alpha \\ w_k &= t_k \end{aligned}$$

On obtient :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{\sum_{k=1}^K w_k^2}.$$

Pour l'estimateur de  $\beta$  est obtenu par :

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{L}}{\hat{\sigma}^{\hat{\alpha}} \tan\left(\frac{\pi\hat{\alpha}}{2}\right)},$$

avec

$$\hat{L} = \frac{K \sum_{k=1}^K w_{1k} \hat{y}_k - \sum_{k=1}^K w_{1k} \sum_{k=1}^K \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_{1k}^2 - \left(\sum_{k=1}^K w_{1k}\right)^2}$$

où  $w_{1k} = |t_k|^\alpha$

### 2.1.3 Méthode de McCulloch

La méthode de McCulloch (1986[18]) fondée sur les "quantiles" de la distribution, et qui fournit une estimation des paramètres après lecture dans des tables préétablies. Soit  $F$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire stable  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , et soit  $x_p$  le quantile d'ordre

$p$ , c.à.d,  $F(x_p) = p$ , et  $\hat{x}_P$  le quantile empirique correspondant. il a fourni des estimateurs consistents pour les quatre paramètres avec  $\alpha > 0.6$ . L'idée de McCulloch est définir quatre fonction spécifiques des quantiles empiriques ( $v_\alpha, v_\beta, v_\sigma$  et  $v_\zeta$ ) McCulloch définit :

$$v_\alpha = \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}}$$

$$v_\beta = \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{0.95} - x_{0.05}}$$

et montre que ces indices ne dépendent pas de  $\sigma$  ni de  $\mu$ . De plus ils sont respectivement des fonctions décroissante et croissante de  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être vus comme des fonctions de  $v_\alpha$  et  $v_\beta$ , soit :

$$\alpha = \mathcal{O}_1(v_\alpha, v_\beta), \quad \beta = \mathcal{O}_2(v_\alpha, v_\beta)$$

En effet, pour chaque  $\beta$ , McCulloch a remarquer que la fonction  $v_\alpha$  est une fonction strictement décroissante de  $\alpha$ . De même, pour chaque  $\alpha$ , McCulloch a remarquer que la fonction  $v_\beta$  est une fonction strictement décroissante de  $\beta$ .

McCulloch construit ensuite deux nouveaux indices :

$$v_\sigma = \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{\sigma}$$

$$v_\zeta = \frac{\zeta - x_{0.5}}{\sigma}$$

où

$$\zeta = \begin{cases} \mu + \beta\sigma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1 \\ \mu, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Nous pouvons voir que  $v_\sigma$  et  $v_\zeta$  dépendent de  $\alpha$  et  $\beta$  c.à.d :

$$v_\sigma = \mathcal{O}_3(\alpha, \beta) \text{ et } v_\zeta = \mathcal{O}_4(\alpha, \beta)$$

Si les fonctions de  $\mathcal{O}_i$ , pour  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  sont connues alors l'algorithme d'estimation des quatre paramètres peut être défini ci dessous.

**1** Ordonner l'échantillon

**2** Calculer les quantiles empiriques  $\hat{x}_{0.05}, \hat{x}_{0.25}, \hat{x}_{0.5}, \hat{x}_{0.75}$  et  $\hat{x}_{0.95}$ .

**3** Estimer les indices  $v_\alpha$  et  $v_\beta$  :

$$\begin{aligned}\widehat{v}_\alpha &= \frac{\widehat{x}_{0.95} - \widehat{x}_{0.05}}{\widehat{x}_{0.75} - \widehat{x}_{0.25}} \\ \widehat{v}_\beta &= \frac{\widehat{x}_{0.95} + \widehat{x}_{0.05} - 2\widehat{x}_{0.5}}{\widehat{x}_{0.95} - \widehat{x}_{0.05}}\end{aligned}$$

4 Estimer  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\widehat{\alpha} = \mathcal{O}_1(\widehat{v}_\alpha, \widehat{v}_\beta), \quad \widehat{\beta} = \mathcal{O}_2(\widehat{v}_\alpha, \widehat{v}_\beta)$$

5 Estimer  $\sigma$

$$\widehat{\sigma} = \frac{\widehat{x}_{0.75} - \widehat{x}_{0.25}}{\mathcal{O}_3(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})}$$

6 Estimer  $\zeta$

$$\widehat{\zeta} = \widehat{x}_{0.5} + \widehat{\sigma} \mathcal{O}_4(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$$

7 Estimer  $\mu$

$$\widehat{\mu} = \widehat{\zeta} - \widehat{\beta} \widehat{\sigma} \tan \frac{\pi \widehat{\alpha}}{2}$$

### 2.1.4 Méthode du Maximum Vraisemblance

La méthode de maximum de vraisemblance a été proposée par DuMouchel (1971[2]). L'estimation par cette méthode pour les distributions  $\alpha$ -stable ne diffèrent pas de celle des autres lois. Le problème principal pour appliquer cette méthode à une suite de variables aléatoires est qu'il très coûteux d'évaluer la fonction de vraisemblance de l'échantillon

$$l(\alpha, \beta, \sigma, \mu) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i, \alpha, \beta, \sigma, \mu)$$

Le point clé pour appliquer la méthode est le calcul de la densité d'une variable aléatoire parce qu'il n'existe pas la formule explicite pour la densité de la loi stable. Holt et Crow (1973[10]) ont fourni des tables de valeurs de la densité pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ ; Worsdal (1975[34]) et Panton (1992[26]) ont fourni des tables des fonctions de répartitions des lois stables symétriques; Brothers, DuMouchel et Paulson (1983[3]) et Paulson et Delahanty (1993[27]) en ont donnée pour les quantiles des lois stables dans la cas générale; McCulloch et Panton (1998[20]) ont donnée des tables des densités et des quantiles pour des lois stables totalement asymétriques.

Pour les lois stables symétriques McCulloch (1996[19]) à développé des algorithmes efficaces pour approcher la densité et la fonction de répartition pour  $\alpha > 0.85$ .

Zolotarev ([35]) a obtenu des représentations intégrales pour des fonctions de densité et répartition de variables aléatoires stables, mais son implémentation n'est pas efficace à cause de problèmes numérique. Nolan ([25]) obtient des formules similaires pour la paramétrisation  $S^0$  qui permettent de calculer de façon précise les fonction de densité, répartition et quantiles dans tout l'espace paramétrique

## 2.2 Estimation semi-paramétrique

Soit  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  et  $Z = |X|$ , et  $F$  et  $G$  sont des fonctions de distribution de  $X$  et  $Z$  resp. tq  $F$  et  $G$  sont reliés par :

$$G(x) = F(x) - F(-x), \quad x > 0,$$

Avec  $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$  et  $Z_{1,n} \leq Z_{2,n} \leq \dots \leq Z_{n,n}$  sont les statistiques d'ordre de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  respectivement.

### 2.2.1 Estimation d'indice de stabilité $\alpha$

L'estimateur la plus populaire pour  $\alpha$  est l'estimateur de Hill (1975 [9]) qui est un estimateur semi paramétrique simple, Il s'applique seulement dans le cas où l'indice de queue est positif ( $\alpha > 0$ ), basé sur les différences entre les logarithmes des statistique d'ordre, donné par l'expression suivante :

$$\hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}_n(k) = \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log(Z_{n-i+1,n}) - \log(Z_{n-k,n}) \right)^{-1},$$

où  $k$  est une fonction de  $n$ , qui est choisi pour satisfaire les condition suivantes :

$$k(n) \longrightarrow \infty, \quad \frac{k(n)}{n} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

Cet estimateur pour un échantillon de taille finie et noté que pour  $\alpha \leq 1.5$  l'estimateur de Hill est tout à fait raisonnable, mais lorsque  $\alpha$  approche de 2, il ya une surestimation significative lorsque on considère des échantillons de taille typique. De telles valeurs de  $\alpha$ , un très grand nombre

d'observations (un million ou plus) est nécessaire pour obtenir des estimations acceptables et éviter les inférences trompeuses sur l'exposant caractéristique, parce que le vrai comportement de la queue des distributions Lévy-stables n'est visible que pour des très grandes ensembles de données, l'estimateur de Hill tend vers une surestimation significative de l'indice de queue.

**Théorème 2.2.1** (*Convergence et Normalité asymptotique de  $\hat{\alpha}_n$* )

Soit  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  et  $Z = |X|$  avec la distribution  $G$  satisfait la condition suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 - G(tx))/(1 - G(t)) - x^{-1/\gamma}}{A^*(t)} = x^{-1/\gamma} \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad x > 0 \quad (2.3)$$

où  $\rho \leq 0$ , et  $A^*$  une fonction tend vers 0 et ne change pas son signe à  $\infty$ , on suppose que  $k = k_n \rightarrow \infty$ ,  $k_n/n \rightarrow 0$  et  $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$  quand  $n \rightarrow \infty$  alors

1. Converge en probabilité :

$$\hat{\alpha}_n^{-1} \xrightarrow{P} \alpha^{-1}, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

2. Converge forte (Presque sûre) : si  $k/\log \log n \rightarrow \infty$

$$\hat{\alpha}_n^{-1} \xrightarrow{p.s.} \alpha^{-1}, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

3. Normalité asymptotique : sous certaines conditions du second ordre, la de l'estimateur de Hill a été démontrée par Hall(1982[8]), on a :

$$\sqrt{k}(\hat{\alpha}_n^{-1} - \alpha^{-1}) \xrightarrow{D} N\left(\frac{\lambda}{1 - \rho}, \alpha^{-2}\right)$$

On peut associer à l'estimateur de Hill un intervalle de confiance d'indice de stabilité  $\alpha$  est:

$$\left[ \frac{\hat{\alpha}}{1 + z_{\alpha/2}/\sqrt{k}}, \frac{\hat{\alpha}}{1 - z_{\alpha/2}/\sqrt{k}} \right]$$

où  $z_{\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi normale centrée réduite  $N(0, 1)$ .

**Exemple 2.2.2** Pour voir la performance d'estimateur d'indice de stabilité  $\alpha$ , sous  $R$  (voir le programme dans l'annexe B), on a effectué une étude de simulation basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique avec  $\alpha = \{1.2, 1.8\}$  et  $\sigma = \{0.1, 1\}$ . Les résultats de simulation sont résumés dans le tableau 2.2

$\alpha$	$\sigma$	$\hat{\alpha}$	erreur	$mse$	IC	long de IC	Prob.cov
1.2	0.1	1.22	0.02	0.013	[1.067 – 1.436]	0.369	0.90
	1	1.25	0.05	0.023	[1.093 – 1.467]	0.374	0.90
1.8	0.1	2.22	0.42	0.391	[1.851 – 2.803]	0.952	0.60
	1	2.46	0.66	0.596	[2.084 – 3.039]	0.954	0.50

TAB. 2.2 – Résultats de simulation de l'estimateur d'indice de stabilité  $\alpha$  basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique avec  $\alpha=1.2, 1.8$  et  $\sigma=0.1, 1$

Le tableau 2.2 présente résultats de simulation de l'estimateur d'indice de stabilité  $\alpha$  basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique sont suivies par l'erreur, l'erreur quadratique moyenne ( $mse$ ), l'intervalle de confiance (IC), la longueur de l'intervalle de confiance et la probabilité de couverture (Prob.cov).

D'après le tableau, on remarque que plus les valeurs du paramètre  $\alpha$  sont petites, meilleure est l'estimation (une plus grande stabilité dans la distribution). Le bas du tableau indique que lorsque les valeurs de  $\alpha$  est plus élevées ( $\alpha = 1.8$ ) l'estimation est très mauvaise (variations importantes dans les données). Pour cela dans la suite, seules les valeurs  $\alpha \leq 1.5$  seront prises en compte.

### 2.2.2 Estimation de paramètre de localisation $\mu$

Lorsque  $1 < \alpha < 2$ , le paramètre de localisation  $\mu$  est égale a la moyenne de la distribution  $E(X)$ . Alors évidemment estimé par la moyenne empirique de l'échantillon  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  mais et la variance est infinie on peut pas appliquer théorème de centrale limite et donc la normalité asymptotique de  $\bar{X}$  ne peut pas établie. Peng (2001[28]) à proposé un estimateur asymptotiquement normal  $\hat{\mu}_n$  basé sur les valeurs extrêmes

$$\hat{\mu}_n = \hat{\mu}_n(k) = \hat{\mu}_n^{(1)} + \hat{\mu}_n^{(2)} + \hat{\mu}_n^{(3)},$$

où

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_n^{(1)} &= \widehat{\mu}_n^{(1)}(k) = \frac{k}{n} X_{k,n} \frac{\widehat{\alpha}_n^{(1)}}{\widehat{\alpha}_n^{(1)} - 1}, \\ \widehat{\mu}_n^{(2)} &= \widehat{\mu}_n^{(2)}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n-k} X_{i,n}, \\ \widehat{\mu}_n^{(3)} &= \widehat{\mu}_n^{(3)}(k) = \frac{k}{n} X_{n-k+1,n} \frac{\widehat{\alpha}_n^{(3)}}{\widehat{\alpha}_n^{(3)} - 1}.\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_n^{(1)} &= \widehat{\alpha}_n^{(1)}(k) = \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log(-X_{i,n}) - \log(-X_{k,n}) \right)^{-1} \\ \widehat{\alpha}_n^{(3)} &= \widehat{\alpha}_n^{(3)}(k) = \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log(X_{n-i+1,n}) - \log X_{n-k,n} \right)^{-1}\end{aligned}$$

Dans la thèorème suivante, on donne les résultats de la convergence et la normalité asymptotique de  $\widehat{\mu}_n$ .

**Théorème 2.2.3** (*Convergence et Normalité asymptotique de  $\widehat{\mu}_n$* )

1. Soit  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  avec  $1 < \alpha < 2$

$$\widehat{\mu}_n^{(1)} \longrightarrow 0, \quad \widehat{\mu}_n^{(3)} \longrightarrow 0, \quad \frac{\sqrt{n}(\widehat{\mu}_n^{(1)} + \widehat{\mu}_n^{(3)})}{\tau(k/n)} \longrightarrow \infty, \quad \widehat{\mu}_n^{(2)} \xrightarrow{P} E(X),$$

et la limite de  $\frac{\sqrt{n}(\widehat{\mu}_n^{(2)} - E(X))}{\tau(k/n)}$  n'existe pas.

2. Si  $-1 < \beta < 0$ ,  $\widehat{\alpha}_n^{(1)}$  est un estimateur consistant de  $\alpha$  et si  $0 < \beta < 1$ ,  $\widehat{\alpha}_n^{(3)}$  est un estimateur consistant de  $\alpha$

3. Pour  $x$  est grand,  $(k/n)(X_{n,n-k+1,n})^{\widehat{\alpha}_n^{(3)}} x^{-\widehat{\alpha}_n^{(3)}}$  est un estimateur de  $1-F(x)$  et  $(k/n)(-X_{n,k})^{\widehat{\alpha}_n^{(1)}} x^{-\widehat{\alpha}_n^{(1)}}$  est un estimateur de  $F(-x)$ .

4. Normalité asymptotique : on suppose que la f.r.  $G$  vérifie la condition (2.3). Avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 - F(t))/(1 - G(t)) - p}{A^*(t)} = r \in \mathbb{R}.$$

où  $p$  est vérifié la condition d'équilibre (1.3). Si  $k = o(n^{-2p(\alpha-2p)})$ , on a

$$\frac{\sqrt{n}}{\tau(k/n)} (\widehat{\mu} - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \delta^2(\alpha)),$$



avec

$$\delta^2(\alpha) = 1 + \left( \frac{(2 - \alpha)(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{2(\alpha - 1)^4} + \frac{2 - \alpha}{\alpha - 1} \right), 1 < \alpha < 2,$$

et

$$\tau^2(s) = \int_s^{1-s} \int_s^{1-s} (u \wedge v - uv) dF^{\leftarrow}(u) dF^{\leftarrow}(v), 0 < s < 1.$$

L'intervalle de confiance de la moyenne  $\mu$ , est donnée par :

$$\left[ \hat{\mu} - z_{\alpha/2} \frac{\hat{\tau}\hat{\delta}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + z_{\alpha/2} \frac{\hat{\tau}\hat{\delta}}{\sqrt{n}} \right]$$

où  $z_{\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi normale centrée réduite et

$$\hat{\delta} = \left( 1 + \frac{(2 - \hat{\alpha})(2\hat{\alpha}^2 - 2\hat{\alpha} + 1)}{2(\hat{\alpha} - 1)^4} + \frac{2 - \hat{\alpha}}{\hat{\alpha} - 1} \right)^{1/2}, \quad \hat{\tau} = -\frac{2\sqrt{k/n}X_{k,n}}{\sqrt{2 - \hat{\alpha}}}.$$

**Exemple 2.2.4** Pour voir la performance d'estimateur de paramètre de localisation  $\mu$ , on a effectué une étude de simulation basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique avec  $\alpha = \{1.2, 1.5\}$  et  $\sigma = \{0.1, 1\}$ . Les résultats de simulation sont résumés dans le tableau 2.3

$\alpha$	$\sigma$	$\hat{\mu}$	erreur	mse	IC	long de IC	Prob.cov
1.2	0.1	0.045	0.045	0.053	[-0.412, 0.502]	0.914	0.91
	1	0.057	0.057	1.264	[-2.327, 2.440]	4.768	0.96
1.5	0.1	0.001	0.001	0.000	[-0.021, 0.023]	0.044	0.99
	1	0.017	0.017	0.007	[-0.208, 0.242]	0.450	0.98

TAB. 2.3 – Résultats de simulation de l'estimateur de paramètre de localisation  $\mu$  basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique avec  $\alpha=1.2, 1.5$  et  $\sigma=0.1, 1$

Le tableau 2.3 présente résultats de simulation de l'estimateur d'indice de position  $\mu$  basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique.

D'après le tableau, on voit que si l'indice de stabilité  $\alpha$  est très proche de 1 ( $\alpha = 1.2$ ), l'estimateur de  $\mu$  est moins précis et plus biaisé. Ceci s'explique du fait que lorsque  $\alpha \leq 1$ , la moyenne n'existe pas et donc l'estimateur de  $\mu$  basé sur la TVE est très mauvais. Par contre, on remarque que lorsque  $\alpha = 1.5$ , l'estimateur de  $\mu$  est plus précis. Les valeurs plus proches de zéro reflètent une

centralisation plus forte autour de la valeur centrale, ce qui le rend plus fiable et moins biaisé. Il est à noter que dans  $1 < \alpha < 2$ , le paramètre de localisation  $\mu$  est égal à la moyenne de la distribution.

### 2.2.3 Estimation du paramètre d'échelle $\sigma$

Par la théorie des valeurs extrêmes, le paramètre d'échelle  $\sigma$  a été estimé par Necir et Meraghni en 2007 [22] où la consistance et la normalité asymptotique de cet estimateur est bien établie.

Parmi la condition d'équilibre (1.3). Le queue de la distribution de  $G(x) = F(x) - F(-x)$ ,  $x > 0$ , est donné par :

$$1 - G(x) \sim C_\alpha \sigma^\alpha x^{-\alpha}, x \longrightarrow \infty$$

On obtient

$$\sigma \sim x \left\{ P(Z > x) \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}, x \longrightarrow \infty$$

On pose  $s = P(Z > x)$  et  $x = Q(1 - s)$  (quantile d'ordre  $(1 - s)$ ) alors

$$\sigma \sim Q(1 - s) \left( s \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, s \longrightarrow 0$$

La dernière relation implique que

$$\sigma \sim Q\left(1 - \frac{k}{n}\right) \left( \frac{k}{n} \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, n \longrightarrow \infty$$

En substituant  $\alpha$  par  $\hat{\alpha}_n$  et  $Q(1 - \frac{k}{n})$  par  $Z_{n-k,n}$ , on obtenu la forme suivante

$$\hat{\sigma}_n = \hat{\sigma}_n(k) = Z_{n-k,n} \left( \frac{k}{n} \frac{\pi}{2\Gamma(\hat{\alpha}_n) \sin(\pi\hat{\alpha}_n/2)} \right)^{\frac{1}{\hat{\alpha}_n}}, n \longrightarrow \infty$$

**Théorème 2.2.5** (Convergence et Normalité asymptotique de  $\hat{\sigma}_n$ )

Soit  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  et  $Z = |X|$  avec la distribution  $G$  satisfait la condition (2.3), on suppose que  $k = k_n \longrightarrow \infty$ ,  $k_n/n \longrightarrow 0$  et  $\sqrt{k}A(n/k) \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$  quand  $n \longrightarrow \infty$  alors :

1.  $\hat{\sigma}_n \xrightarrow{p} \sigma$ ,

$$2. \frac{\sqrt{k}}{\log(k/n)} (\log \hat{\sigma}_n - \log \sigma) \xrightarrow{D} N\left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \alpha^{-2}\right) \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

avec  $\rho$  est donné dans (2.3)

Finalement, l'intervalle de confiance de  $\sigma$ , est :

$$\left[ \exp\left(\log \hat{\sigma}_n + z_{\alpha/2} \frac{\log(k/n)}{\hat{\alpha}_n \sqrt{k}}\right), \exp\left(\log \hat{\sigma}_n - z_{\alpha/2} \frac{\log(k/n)}{\hat{\alpha}_n \sqrt{k}}\right) \right]$$

**Exemple 2.2.6** Pour voir la performance d'estimateur de paramètre d'échelle  $\sigma$ , on a effectué une étude de simulation basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique avec  $\alpha = \{1.2, 1.5\}$  et  $\sigma = \{0.1, 1\}$ . Les résultats de simulation sont résumés dans le tableau 2.4

$\alpha$	$\sigma$	$\hat{\sigma}$	erreur	mse	IC	long de IC	Prob.cov
1.2	0.1	0.11	0.015	0.005	[0.064 – 0.214]	0.150	0.88
	1	1.08	0.084	0.167	[0.615 – 2.003]	1.387	0.90
1.5	0.1	0.14	0.042	0.007	[0.090 – 0.231]	0.141	0.67
	1	1.42	0.422	0.511	[0.880 – 2.346]	1.466	0.68

TAB. 2.4 – Résultats de simulation de paramètre d'échelle sigma basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique avec alpha=1.2,1.5 et sigma=0.1,1

Le tableau 2.4 présente résultats de simulation de l'estimateur d'indice d'échelle  $\sigma$  basée sur 100 échantillons de taille 3000 de la loi stable symétrique.

D'après ce tableau, on observe que si l'indice de stabilité est petit ( $\alpha = 1.2$ ), l'estimation de  $\sigma$  peut être considéré comme acceptable (une moindre variabilité et par conséquent des résultats plus stables). Le bas du tableau indique que lorsque les valeurs de  $\alpha$  est autour de 1.5 ( $\alpha = 1.5$ ) l'estimateur n'est pas bonne (variations significative dans les données). Ces résultats indiquent que la précision d'estimateur de  $\sigma$  peut être fortement influencée par la valeur de  $\alpha$ , l'estimateur étant plus précis et moins biaisé pour des valeurs plus faibles de  $\alpha$ .

# Conclusion

L'objectif principal de cette thèse est d'exposer les méthodes d'estimation des paramètres des lois stables. Il existe quatre principales familles d'estimateurs classiques pour ces lois comme la méthode du maximum de vraisemblance (peu utilisé en raison de sa complexité de calcul), la méthode utilisant la fonction caractéristique, et la méthode des quantiles où la méthode basée sur la fonction caractéristique proposée par Koutrouvelis[17], être un meilleur lorsque l'on prend en compte de calcul et la qualité de l'estimation à celle de la méthode des quantiles suggérée par McCulloch[18].

D'autre part, il existe des approches semi-paramétriques fondées sur le théorème des valeurs extrêmes pour estimer des paramètres des lois stables. Par exemple, l'estimateur de Hill[9] est couramment employé pour estimer l'indice de stabilité  $\alpha$ , l'estimateur de  $\mu$ , présenté par Peng (2001[28]) et Necir et Meraghni en 2007[22], vise à estimer le paramètre d'échelle  $\sigma$ .

En générale, les approches basées sur le théorème des valeurs extrêmes fournissent les estimations les plus précises, bien que leur temps d'exécution soit plus long. C'est ce que confirment des études de simulation.

# Bibliographie

- [1] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1992). A First Course in Order Statistics. Wiley, New York.
- [2] DuMouchel, W.H. (1971). Stable distributions in statistical inference. Unpublished PhD Dissertation, Yale University, Dept of Statistics.
- [3] DuMouchel W.H. and Paulson A.S (1983). Fractiles of the stable laws. Technical report, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY.
- [4] Dekkers, A.L.M., de Hann, L., (1993). Optimal choice of sample fraction in extreme-value estimation. Journal of Multivariate Analysis 47, 173 – 195.
- [5] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlag, Berlin.
- [6] Fama E. and Roll R. (1971). Parameters Estimates for Symmetric stable distribution. journal of the American statistical Association, 66, 331 – 339.
- [7] Fisher, R.A. and Tippett, L.H.C. (1928). Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **24**, 180 – 190.
- [8] Hall, P.(1982). On some simple estimators of an exponent of regular variation. J. Roy.Statistic.Soc. Ser. B . 44, 37 – 42.
- [9] Hill, B.M. (1975). A simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution. Annals of Statistics **3**, 1163 – 1174.
- [10] Holt, D. and CROW, E. (1973). Tables and graphs og the stable probability functions, J. Res. Nat. Bureau Standars, B. Math.Sci., 77b, 143 – 198.

- [11] Hosking J.R.M. and Wallis J.R. (1997). Regional Frequency Analysis : an approach based on L-moments, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- [12] Ihaka, R. and Gentleman, R. (1996). R : A Language for Data Analysis and Graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics* **5** : 299 – 314.
- [13] Gnedenko, B.V. (1943). Sur la distribution Limite du Terme Maximum d'une Série Aléatoire. *Annales de Mathématiques* **44**, 423 – 453.
- [14] Greenwood J.A., Landwehr J.M., Matalas N.C. and Wallis J.R. (1979). Probability weighted moments : definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resources Research*, 15, 1049 – 1054.
- [15] Jenkinson, A. F. (1955). The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) values of Meteorological Elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **81**, 158 – 171.
- [16] Lévy, P. (1925). *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars.
- [17] Koutrouvelis, I.A., (1980). Regression-type estimation of the parameters of stable laws. *Journal of the American Statistical Association*, 75(372) : pp. 918-928, .
- [18] McCulloch J.H. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communication in statistics. Simulation and Computation*, 15, 1109 – 1136.
- [19] McCulloch J.H. (1996) Measuring tail thickness in order to estimate the stable index  $\alpha$  : a critique. *Business and Economic Statistics*, 15, 74 – 81.
- [20] McCulloch J.H. and PANTON D.(1998). Tables of the maximally-skewed stable distributions. In R. Adler, R. Feldman, and M. Taqqu (Eds), *A practical Guide to Heavy Tails : Statistical Technique for Analyzing Heavy Tailed Distributions*, 501 – 508.
- [21] Mandelbrot Benoit, (1963). The variation of certain speculative prices. *The journal of Business*, volume 36, Issue 4 (Oct., 1963), 394 – 419.
- [22] Meraghni, D. and Necir, A. (2007). Estimating the scale Parameter of a Lévy stable Distribution via the Extreme Value Approach. *Methodology and Computing in Applied Probability* 9, 557 – 572.

- [23] Nolan, J.P. (2009). Stable Distributions-Models for Heavy Tailed Data. Department of Mathematics and Statistics, American University.
- [24] Nolan J. (1996) An algorithm for evaluating stable densities in Zolotarev's (M) parametrization. Preprint American University Washington.
- [25] Nolan J.(1996) Numerical approximation of stable densities and distribution functions. Preprint American University Washington.
- [26] Panton D. (1992). Cumulative distribution function values for symmetric standardized stable distributions. *Statistic Simula.* 21, 458 – 492.
- [27] Paulson A.S. and DELEHANTY T.A. (1993). Tables of the fractiles of the stable law. Technical Report, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY.
- [28] Peng, L., (2001) . Estimating the mean of a heavy-tailed distribution. *Statistic and Probability Letters.* 52, 255 – 264.
- [29] Pickands III, J. (1975). Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *The Annals of Statistics* **3**, 119 – 131.
- [30] Press, J. S. (1972). Estimation of univariate and multivariate stable distributions. *Journal of the American statistical association* 67, 842-846.
- [31] Reiss, R.D. and Thomas, M., (1997). Statistical analysis of extreme values with applications to insurance, finance, hydrology and other fields. Birkhauser.
- [32] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M.S. (1994). Stable non-Gaussian Random Processes : Stochastic Models with Infinite Variance. Chapman & Hall, New York.
- [33] Weron, R., 2001. Lévy-stable distributions revisited : Tail index  $\alpha > 2$  does not exclude the Lévy stable regime, *International Journal of Modern Physics. C* 12 : 209 – 223.
- [34] Worsdal G.(1975). Tables of cumulative distribution function for symmetric stable distributions. *Appl. Statistics*, 24, 123 – 131.
- [35] Zolotarev V.M. (1986). One-dimensional stable distributions, *Trans. of Math. Monographs*, AMS Vol. 65.

# Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

<b>Symbole</b>	<b>Description</b>
$\mathbb{I}_n$	matrice unité de dimension $(n, n)$ .
$\mathbb{R}$	ensemble des valeurs réelles.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des valeurs réelles positives.
$(X_1, X_2, \dots, X_n)$	échantillon de taille $n$ de $X$ .
$(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n})$	statistique d'ordre $n$ associée à $(X_1, X_2, \dots, X_n)$
$f(x)$	fonction de densité $X$
$F$	fonction de répartition
$f.r.$	fonction de répartition.
$F_n$	fonction de répartition empirique
$\overline{F}$	complémentaire de la fonction de répartition.
$F^{\leftarrow}$	l'inverse généralisé de $F$ .
<i>i.i.d</i>	indépendantes et identiquement distribuées.
<i>v.a</i>	variable aléatoire.
<i>v.a.r</i>	variable aléatoire réelle.
$Q$	fonction des quantiles.
$Q_n$	fonction des quantiles empirique.
<i>resp.</i>	respectivement
$S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$	loi stable de paramètre $\alpha, \beta, \sigma$ et $\mu$
$S\alpha S$	loi stable symétrique.
$\varphi(x)$	fonction caractéristique de $X$



$TVE$	théorie des valeurs extrêmes.
$x_p$	quantile d'ordre $p$
$\stackrel{\mathcal{D}}{=}$	égalité en distribution.
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	converge en distribution
$\xrightarrow{p}$	convergence en probabilité
$\xrightarrow{p.s}$	convergence en presque sûre
$:=$	égalité par définition.
$D(\cdot)$	domaine d'attraction
$TCL$	théorème centrale limite
$c.à.d$	c'est à dire.
$GEV$	distribution de valeurs extrêmes généralisée.
$GPD$	distribution de Pareto généralisée
$E[X]$	espérance mathématique ou moyenne du v.a. $X$ .
$\sigma^2$	variance d'une v.a.
$sign.$	signe.
$IC$	intervalle de confiance
$long\ de\ IC$	longueur de l'intervalle de confiance
$Prob.cov$	probabilité de couverture
$mse$	l'erreur quadratique moyenne.

# Annexe B : Logiciel R et Programmes de simulation

*R* est un système, communément appelé langage et logiciel, qui permet de réaliser des analyses statistiques. Plus particulièrement, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les calculs et les représentations graphiques. *R* a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fichiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques appelées paquets.

Il a été initialement créé, en 1996, par *Robert Gentleman* et *Ross Ihaka* (voir [12]) du département de statistique de l'Université d'Auckland en Nouvelle Zélande. Depuis 1997, il s'est formé une équipe "*R Core Team*" qui développe *R*. Il est conçu pour pouvoir être utilisé avec les systèmes d'exploitation *Unix*, *Linux*, *Windows* et *MacOS*.

Un élément clé dans la mission de développement de *R* est le *Comprehensive R Archive Network* (CRAN) qui est un ensemble de sites qui fournit tout ce qui est nécessaire à la distribution de *R*, ses extensions, sa documentation, ses fichiers sources et ses fichiers binaires. Le site maître du CRAN est situé en Autriche à Vienne, on peut y accéder par l'URL : "<http://cran.r-project.org/>". Les autres sites du CRAN, appelés sites miroirs, sont répartis partout dans le monde.

*R* est un logiciel libre distribué sous les termes de la "GNU Public Licence". Il fait partie intégrante du projet GNU et possède un site officiel à l'adresse "<http://www.R-project.org/>".

## **1. Programme pour dessiner les Courbes de la densité de loi stable (pour différente valeur**

---

```
> n<-1000
```

```
> x1<-c(1,n)
> x2<-c(1,n)
> x3<-c(1,n)
> beta<-0
> sigma<-1
> mu<-0
> alpha<-2
> y<-c(1 :n)
> for(i in 1 :n)
> {v<-runif(1,-pi/2,pi/2)
> w<-rexp(1)
> c<-(1/alpha)*atan(beta*tan(pi*alpha/2))
> d<-(1+((beta)^2)*(tan(pi*alpha/2))^2)^(1/(2*alpha))
> z<-((cos(v-alpha*(v+c))/w)^((1-alpha)/alpha)
> x1[i]<-d*sin(alpha*(v+c))/((cos(v))^(1/alpha))*z}
> x1<-sigma*x1+mu
> s1<-sd(x1)
> stab1<-density(x1)
> alpha<-1.5
> y<-c(1 :n)
> for(i in 1 :n)
> {v<-runif(1,-pi/2,pi/2)
> w<-rexp(1)
> c<-(1/alpha)*atan(beta*tan(pi*alpha/2))
> d<-(1+((beta)^2)*(tan(pi*alpha/2))^2)^(1/(2*alpha))
> z<-((cos(v-alpha*(v+c))/w)^((1-alpha)/alpha)
> x2[i]<-d*sin(alpha*(v+c))/((cos(v))^(1/alpha))*z}
> x2<-sigma*x2+mu
> s2<-sd(x2)
```

```
> stab2<-density(x2)
> alpha<-1.2
> y<-c(1 :n)
> for(i in 1 :n)
> {v<-runif(1,-pi/2,pi/2)
> w<-rexp(1)
> c<-(1/alpha)*atan(beta*tan(pi*alpha/2))
> d<-(1+((beta)^2)*(tan(pi*alpha/2))^2)^(1/(2*alpha))
> z<-(cos(v-alpha*(v+c))/w)^((1-alpha)/alpha)
> x3[i]<-d*sin(alpha*(v+c))/((cos(v))^(1/alpha))*z}
> x3<-sigma*x3+mu
> s3<-sd(x3)
> stab3<-density(x3)
> plot(density(rnorm(n),bw=300),lwd=2, lty=1,,type='l', xlim=c(-5,5),ylim=c(0,0.6),main="
", xlab="x", ylab="Density")
> lines(stab1,col=3,lwd=2,lty=1,type='l')
> lines(stab2,col=4,lwd=2,lty=1,type='l')
> lines(stab3,col=2,lwd=2,lty=1,type='l')
> legend(3,0.3,c("alpha=1.2","alpha=1.5","alpha=2"),col=c(2,4,3),lty=1,cex=0.6)
```

Pour les autres paramètres( $\sigma, \beta, \mu$ ), on fait la même chose où chaque fois on change la valeur d'un seul paramètre.

## **2. Programme de simulation de l'estimateur d'indice de stabilité $\alpha$ de la loi stable**

---

```
> #charger le package
> install.packages('stabledist')
> library(stabledist)
> n=3000
> Alpha<-1.2
> Beta<-0
```

```
> Mu<-0
> Sigma<-0,1
> w=0.05
> z=qnorm(1-w/2)
## L'estimateur de Alpha
> Alphachapeau<- fonction(Z, k){
> Alphachapeau<-numeric(length(k))
> for (i in 1 :length(k)) {
> Alphachapeau[i] <- ((1/k[i])*sum(log(Z[(n-k[i]+1) :n]))- log(Z[(n-k[i])]))^(-1)}
> return(Alphachapeau)}
# Réplications
> MCA=function(n,Alpha,Beta,Mu,Sigma,M,show = TRUE){
> Alphachapeaus= koqtt= lcb= ucb= covprob=lengthA= matrix(data = 0, nrow = M,
ncol = 1)
> for(h in 1 :M){
## Génération d'un n-échantillon ##
> X<-rstable(n,Alpha,Beta,Sigma,Mu,pm=1)
> Z<-sort(abs(X))
## koqt by Approach of Reiss and Thomas ##
> n1<-floor(n/50)
> n2<-floor(n/10)
> alpha<-s<-numeric(n2)
> for(j in 1 :n2){
> alpha[j]<-Alphachapeau(Z, j)}
> for(k in 1 :n2){
> u<-numeric(k)
> for(i in 1 :k){
> u[i]<-(i^0.3)*abs(alpha[i]-median(alpha[1 :k]))}
> s[k]<-(1/k)*sum(u[1 :k])}
```

```
> ss<-numeric(n2-n1+1)
> for(j in 1 :(n2-n1+1)){
> ss[j]<-s[n1+j-1]}
> kopt<-which.min(ss)
> koptt[h,]=kopt
> Alphachapeaus[h,]=Alphachapeau(Z,kopt)
### Confidance bounds ###
> lcb[h,]=Alphachapeaus[h,]/(1+(z/sqrt(koptt[h,])))
> ucb[h,]=Alphachapeaus[h,]/(1-(z/sqrt(koptt[h,])))
> covprob[h,]=(Alpha>lcb[h,] & Alpha<ucb[h,])
> }
# Résultats
> ko=floor(mean(koptt))
> Alphachap=mean(Alphachapeaus)
> bias=mean(Alphachapeaus-Alpha)
> mse=mean((Alphachapeaus-Alpha)^2)
> lcb=mean(lcb)
> ucb=(mean(ucb))
> covprob=mean(covprob)
> lengthA=(mean(ucb)-mean(lcb))
> A=c(n,M,Alpha,Sigma,Mu,ko,Alphachap,bias,mse,lcb,ucb,lengthA,covprob)
> Names=c("n","M(nbrdeRépl)","Alpha","Sigma","Mu","ko","Alphachap","bias","mse","lcb","ucb",
> names(A)= Names
> return(t(t(round(A,3))))
> }
> MCA(n,Alpha,Beta,Mu,Sigma,100,show = TRUE)
```

# Résumé

Ce mémoire se concentre sur les lois stables, une famille de distributions présentant un grand intérêt dans la modélisation de divers problèmes dans de nombreux domaines. Ces lois sont définies par quatre paramètres importants.

Dans cette étude, nous examinons les méthodes d'estimation de ces quatre paramètres en utilisant différentes approches telles que les moments, la régression, les quantiles et le maximum de vraisemblance. Une attention particulière est portée à la simulation des méthodes basées sur la théorie des valeurs extrêmes, qui permettent de traiter les situations de risques dangereux.

**Mots clés :** Lois stables, Estimation des paramètres, Valeurs extrêmes, Simulation.

# Abstract

This memory focuses on the stable laws, a family of distributions that are of great interest in modeling various problems in many fields. These laws are defined by four important parameters. In this study, we examine methods for estimating these four parameters using different approaches such as moments, regression, quantiles, and maximum likelihood. Special attention is given to simulation of methods based on extreme value theory, which allows for dealing with dangerous risks situations.

**Key words :** Stable laws, Parameter estimation, Extreme values, Simulations.