



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :RABAB KEZZOUNA

Thème

Éléments finis continus/discontinus pour des problèmes elliptiques d'ordre quatre

Soutenu publiquement le : 10/06/2014

Devant le jury composé de :

Bensayah Abdallah	M.A. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Président
Ghezal Abderrazek	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Merabet Ismail	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail

:

A mes parents

A mes frères

A mes soeurs

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur MERABET Ismail de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de près ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Préliminaires	1
1 Introduction	2
1.1 Exemples des EDP d'ordre quatre	2
1.1.1 Poutre de Bernoulli (encastrée)	2
1.1.2 Equations des plaques	4
1.1.3 La régularité elliptique	4
1.1.4 Ramification de la régularité	4
1.1.5 Le problem de Stokes (2D)	6
1.1.6 Problème de l'élasticité	7
1.1.7 L'équation de Cahn-Hilliard	8
1.1.8 Un problème d'obstacle	9
1.1.9 Un problème de contrôle optimale	10
2 Cadre abstrait de la méthode des éléments finis	11

2.1	La méthode de Galerkin	11
2.1.1	Le problème modèle est-il bien posé?	12
2.1.2	Le lemme de Lax-Milgram	13
2.1.3	Le théorème de Banach-Necăs-Babuška (BNB)	13
2.1.4	Principe de la méthode de Galerkin	14
2.1.5	Le problème approché est-il bien posé?	16
2.1.6	Analyse d'erreur	18
3	Problème modèle en dimension deux	21
3.1	Un problème modèle	21
3.2	Une formulation par SIPM	23
3.3	Le problème discret	26
3.4	Analyse a priori	29
3.5	Opérateur d'enrichissement	30
3.6	Analysis intermédiaire	31
3.6.1	Une estimation concrète	39
3.6.2	Post traitement	40
3.7	Analyse a posteriori	41
3.7.1	Fiabilité de la méthode SIP	42
3.7.2	Efficacité	45

NOTATIONS

- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v .
- $D^2 v = \nabla^2 v = \begin{pmatrix} \partial_x^2 v & \partial_{yx} v \\ \partial_{xy} v & \partial_y^2 v \end{pmatrix}$: La matrice Hessienne
- $D^2 w : D^2 v = \sum_{i,j=1}^2 \partial^2 w_{x_i x_j} \partial^2 v_{x_i x_j}$: Le produit scalaire dans \mathbb{R}^4 .
- $|v|_{2, \omega} = \left(\sum_{\alpha=2} \|D^\alpha v\|_{0, \omega} \right)^{1/2}$.
- $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
- $\llbracket v \rrbracket = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+$.
- $\{v\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}$.
- $\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial n} (\nabla v \cdot n)$.
- $\left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot n$.
- $Osc_2(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - f_T\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

INTRODUCTION

L'analyse mathématique de la méthode des éléments finis débute en 1968 avec des estimations a priori sur l'approximation pour un problème d'élasticité plane par [13].

Dans ce chapitre nous présentons quelques exemples des équations aux dérivées partielles.

1.1 EXEMPLES DES EDP D'ORDRE QUATRE

1.1.1 Poutre de Bernoulli (encastrée)

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \right) = f(x) & a < x < b \\ u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

u = le déplacement vertical.

f = la densité du force verticale.

E = le module de Young.

I = le moment d'inertie (rigidité).

L'équation de Bernoulli modélise la flexion d'une poutre, elle nous permet de calculer le

déplacement.

1.1.2 Equations des plaques

On considère la déformation élastique d'une plaque plane d'épaisseur petite (négligeable devant ses autres dimensions). si on note Ω la surface moyenne de la plaque, et $f(x)$ (une fonction de Ω dans \mathbb{R}) la résultante normale des forces, alors la composante normale du déplacement $u(x)$ (un scalaire) est solution de l'équation des plaques (dites en flexion)

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

ou on note $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ avec n le vecteur normal unité extérieur à $\partial\Omega$. Remarquons qu'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre en espace (appelée aussi bi-laplacien). C'est pourquoi il est nécessaire d'avoir deux conditions aux limites. Ces conditions aux limites traduisent l'encastrement de la plaque (pas de déplacement ni de rotation du bord de la plaque).

1.1.3 La régularité elliptique

Si le domaine Ω est régulier, la solution du problème (1.2) appartient à $H^4(\Omega)$ par une simple utilisation de la régularité des problèmes elliptiques. Cependant, cela n'est pas toujours le cas pour un domaine polygonal général. La solution faible du problème (1.2) appartient à $H^{2+\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (1/2, 2]$ la valeur α dépend de l'angle intérieur du domaine. Pour un domaine convexe on $\alpha > 1$ et on l'estimation suivante :

$$\|u\|_{H^{2+\alpha}} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.3)$$

1.1.4 Ramification de la régularité

La régularité de la solution du problème (1.2) joue un rôle très important dans l'analyse d'erreur comme nous le verrons plus tard. Il est très naturel de penser à résoudre le problème du quatrième ordre (1.2), on le transforme sous forme du système des équations

d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = v & \text{dans } \Omega & \Delta v = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega & v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

qui est au moins formellement équivalent à (1.2). Cependant, la solution obtenue en résolvant le problème (1.4) se coïncide avec la solution du problème (1.2) si et seulement si Ω est convexe. En effet, généralement la solution du problème (1.4) n'a pas la régularité $H^2(\Omega)$ si Ω n'est pas convexe.

Plaque de Krichhoff (encastrée)

$$\begin{cases} \Delta \left(\frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\sigma^2)} \Delta u \right) = f & \text{dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.5)$$

u = le déplacement vertical.

f = la densité de la force verticale.

E = le module de Young.

σ = le coefficient de Poisson.

ε = l'épaisseur de la plaque.

Plaque de Krichhoff simplement fixée

$$\begin{cases} \Delta \left(\frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\sigma^2)} \Delta u \right) = f & \text{dans } \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.6)$$

► Les deux conditions aux limites pour le cas d'une plaque encastree sont essentiels, i.e, sont imposées sur l'espace pour la formulation variationnelle (le problème faible).

► La condition $\Delta u = 0$ pour une plaque simplement encastree est naturelle.

1.1.5 Le problem de Stokes (2D)

$$\begin{cases} -v\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

Ω est un domaine simplement connexe.

u la vitesse du fluide.

p la pression.

f la densité des forces.

$v =$ viscosité

Stream Function ψ .

$$\nabla \times \psi = u \quad (1.8)$$

Après simplifications le problème aux limites pour ψ devient :

$$\begin{cases} v\Delta^2\psi = \nabla \times f & \text{dans } \Omega \\ \psi = \partial\psi/\partial n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.9)$$

ce qui présente un problème d'ordre quatre.

1.1.6 Problème de l'élasticité

En physique, l'élasticité est la tendance d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. La déformation élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées. Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiales quand ces forces ne s'exercent plus.

Les raisons physiques du comportement élastique peuvent être quelque peu différentes d'un matériau à un autre. Pour les métaux, le treillis atomique change de taille et de forme quand des forces leurs sont appliquées (ajout d'énergie au système). Quand les forces sont supprimées, le système retourne à son état original où l'énergie est la plus faible. Pour le caoutchouc et autres polymères l'élasticité est due à l'extension des chaînes de polymère lorsque les forces sont appliquées.

L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation. L'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \operatorname{div} \sigma(u) = f \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d = 2, 3) \\ \sigma(u) = 2\mu\epsilon_*(u) + \lambda[\operatorname{tr}\epsilon_*(u)]I \\ \epsilon_*(u) = (1 - \gamma^2\Delta)\epsilon(u) \\ \epsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u) \end{array} \right. \quad (1.10)$$

- u le déplacement des points d'un matériaux élastique.
- σ = tenseur des contraintes.
- f la densité du force.
- μ et λ les constantes de Lamé.
- $\epsilon(u)$ = le tenseur de déformation standard.
- $\epsilon_*(u)$ le tenseur de déformation modifiée.
- γ est paramètre.

Si :

- $\gamma = 0$: c'est le système de l'élasticité standard ($\epsilon_*(u) = \epsilon(u)$)
- $\gamma \neq 0$: on obtient un système d'ordre quatre.

1.1.7 L'équation de Cahn-Hilliard

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \beta(c) \nabla (\mu(c) - \Delta c) \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.11)$$

plus des conditions initiales et conditions aux limites.

$\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$.

$c(x, t)$ = concentration d'une des substances ($0 \leq c \leq 1$)

$\beta(c)$ = mobilité.

$\mu(c)$ dérivée de l'énergie.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \beta(c) \nabla (\mu(c) - \Delta c) \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.12)$$

- Écoulement de fluide à deux phases
- Traitement des images

Nous signalons que cette équation est non linéaire d'ordre quatre.

1.1.8 Un problème d'obstacle

Soit Ω est un domaine polygonal borné, f dans $L^2(\Omega)$, ψ dans $C^2(\overline{\Omega})$, $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$ (l'obstacle). On considère l'ensemble suivant :

$$K = \{v \in H_0^2(\Omega) : v \geq \psi \text{ sur } \Omega\} \quad (1.13)$$

$$H_0^2(\Omega) = \{v \text{ dans } L^2(\Omega) / \partial^\alpha v / \partial x^\alpha \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq 2 \text{ et } v = \partial v / \partial n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (1.14)$$

le problème consiste à :

$$\begin{cases} \text{chercher } u = \underset{v \text{ dans } K}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) \right) \\ a(w, v) = \int_{\Omega} D^2 w : D^2 v dx. \end{cases} \quad (1.15)$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f v dx$$

$$D^2 w : D^2 v = \sum_{i,j=1}^2 w_{x_i x_j} v_{x_i x_j}.$$

Le problème peut se formuler sous forme de l' inéquation variationnelle suivante :

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \text{ dans } K \quad (1.16)$$

1.1.9 Un problème de contrôle optimale

La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années 50, avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations. Dès lors, la théorie a connu un essor spectaculaire, ainsi que de nombreuses applications.

minimize $\frac{1}{2}\|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$
 sur (y, u) dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$
 sujet à

$$\begin{cases} -\Delta y = u \text{ dans } \Omega \\ y \leq w \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (1.17)$$

$y \in H_0^1(\Omega)$ est l'état (de la distribution de la température) y_d est l'état désiré .

- $y \leq w$ est une contrainte ponctuelle de l'état $u \in L^2(\Omega)$ est le contrôle.
- $\beta > 0$ est liée au coût de la mise en oeuvre de la commande u .

$$\begin{cases} \text{chercher } (y, u) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ \text{minimiser } \frac{1}{2}\|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} -\Delta y = u \quad \text{dans } \Omega \\ y \leq w \text{ a.e. } \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (1.19)$$

Si Ω est convexe, y appartient à $H^2(\Omega)$ par la régularité elliptique et nous pouvons réécrire le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } y \in K = \{v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : v \leq w \text{ in } \Omega\} \\ y = \underset{v \in K}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \left(\|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{cases} \quad (1.20)$$

Ceci présente un problème d'obstacle d'ordre quatre avec les conditions aux limites d'une plaque simplement fixée.

CADRE ABSTRAIT DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

L'analyse mathématique de la méthode des éléments finis débute en 1968 avec des estimations a priori sur l'approximation pour un problème d'élasticité plane par [13]. Dans ce chapitre est consacré à une description " mathématiques " de la méthode des éléments finis. Cette partie est basée essentiellement sur le livre : Aide-mémoire Eléments finis A. Ern [8]. Les démonstrations peuvent être se trouver par exemple dans [9].

2.1 LA MÉTHODE DE GALERKIN

La méthode de Galerkin permet d'approcher la solution de problèmes modèles dont la formulation abstraite est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V & \text{tel que} \\ a(u, w) = f(w), & \forall w \in W \end{cases} \quad (2.1)$$

où V et W sont des espaces fonctionnels (des espaces vectoriels dont les éléments sont des fonctions), a est une forme bilinéaire définie sur $V \times W$ et f est une forme linéaire définie sur W . On dit que V est l'espace solution et que W est l'espace test. Les éléments de W

sont appelés des fonctions tests.

Les espaces fonctionnels V et W sont équipés de normes, notées $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$ respectivement, qui leur confèrent une structure d'espace de Banach (V et W sont des espaces vectoriels normés où toute suite de Cauchy est convergente).

Dans de nombreuses applications, les normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$ sont induites par des produits scalaires, notés $(\cdot, \cdot)_V$ et $(\cdot, \cdot)_W$ respectivement, si bien que V et W sont en fait des espaces de Hilbert. Pour simplifier, on conserve cette hypothèse par la suite.

On suppose que la forme bilinéaire a est continue sur $V \times W$, ce qu'on note $a \in (V \times W, \mathbb{R})$.

On rappelle que cette hypothèse consiste à supposer qu'il existe une constante c_1 telle que pour tout $(v, w) \in V \times W$.

$$a(v, w) \leq c_1 \|v\|_V \|w\|_W. \quad (2.2)$$

De même, on suppose que la forme linéaire f est continue sur W , ce qu'on note

$f \in L(W; \mathbb{R}) := W'$, c'est-à-dire qu'il existe une constante c_2 telle que pour tout $w \in W$,

$$f(w) \leq c_2 \|w\|_W. \quad (2.3)$$

On introduit les normes de a et f (dans $L(V \times W; \mathbb{R})$ et W' respectivement) définies par

$$\|a\|_{V,W} = \sup_{(v,w) \in V \times W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W}, \quad \|f\|_{W'} = \sup_{w \in W} \frac{f(w)}{\|w\|_W} \quad (2.4)$$

étant entendu que les arguments des suprema sont pris non-nuls. On renvoie à la section A.1 pour des compléments.

2.1.1 Le problème modèle est-il bien posé ?

L'objet de cette section est de rappeler brièvement les deux principaux résultats qui permettent d'étudier le caractère bien posé du problème (2.1) par [8]. La notion de problème bien posé est entendue au sens de la définition suivante.

Définition 2.1.1 (*Hadamard*). *On dit que le problème (2.1) est bien posé s'il admet une et une seule solution.*

Lorsque le problème (2.1) est bien posé, son unique solution u satisfait l'estimation a priori suivante : il existe une constante c tel que pour tout $f \in W'$.

$$\|u\|_V \leq c \|f\|_{W'}. \quad (2.5)$$

Cette estimation découle des propriétés générales des opérateurs bijectifs dans les espaces de Banach .

2.1.2 Le lemme de Lax-Milgram

On considère d'abord le cas particulier où l'espace solution et l'espace test dans (2.1) sont identiques : $V = W$. Le problème modèle consiste donc à

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V & \text{tel que} \\ a(u, w) = f(w), & \forall w \in W \end{cases} \quad (2.6)$$

Définition 2.1.2 (*Coercivité*) Soit V un espace de Hilbert. On dit qu'une forme bilinéaire $a \in L(V \times V; \mathbb{R})$ est V -coercive, ou coercive sur V , si

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad (2.7)$$

Lemme 2.1.3 (*Lax-Milgram*) Soit V un espace de Hilbert $a \in L(V \times V, \mathbb{R})$ et $f \in V'$. On suppose que la forme bilinéaire a est V -coercive. Alors, le problème (2.6) est bien posé.

Lorsque la forme bilinéaire a n'est pas coercive sur V , peut-on en déduire que le problème (2.6) n'est pas bien posé ? La réponse est négative : le lemme de Lax-Milgram ne fournit que des conditions suffisantes pour analyser le caractère bien posé de (2.6).

2.1.3 Le théorème de Banach-Necăs-Babuška (BNB)

Le théorème BNB est le résultat fondamental pour analyser le caractère bien posé des problèmes (2.1) et (2.6). Contrairement au lemme de Lax-Milgram qui ne fournit que des conditions suffisantes, le théorème BNB fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème modèle soit bien posé.

Théorème 2.1.4 (*Banach-Necăs-Babuška*). Soit V et W deux espaces de Hilbert, $a \in L(V \times W, \mathbb{R})$ et $f \in W'$. Alors, le problème (2.1) est bien posé si et seulement si

$$(BNB1) \quad \exists \alpha > 0, \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \geq \alpha \quad (2.8)$$

$$(BNB2) \quad \forall w \in W, (\forall v, a(v, w) = 0) \implies (w = 0) \quad (2.9)$$

La terminologie adoptée pour ce théorème a été introduite par Ern et Guermond [38]. Elle fait référence au fait que le théorème BNB est une reformulation de deux résultats fondamentaux dus à Banach : le théorème de l'image fermée et le théorème de l'application ouverte. Le théorème BNB a été énoncé dans sa forme ci-dessous par Nec'as en 1962 [58]. Son importance pour l'analyse des méthodes d'éléments finis a été soulignée par Babus'ka en 1972 [9].

La condition inf-sup (BNB1) se reformule de la façon suivante : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $v \in V$.

$$\alpha \|v\|_V \leq \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|w\|_W} \quad (2.10)$$

Pour prouver la condition inf-sup, on peut procéder comme suit : on considère une fonction $v \in V$ et on construit une fonction $w_v \in W$ telle que $a(v, w_v) \geq \alpha_1 \|v\|_V^2$ et $\|w_v\|_W \leq \alpha_2 \|v\|_V$. Ceci permet de montrer que la condition (BNB1) est satisfaite avec $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

2.1.4 Principe de la méthode de Galerkin

On considère le problème modèle (2.1) et on suppose qu'il est bien posé. La méthode de Galerkin permet d'approcher la solution u de ce problème. L'idée consiste à remplacer dans (2.1) les espaces fonctionnels V et W par des espaces de dimension finie, notés V_h et W_h , ce qui conduit à

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h & \text{tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = f_h(w_h), & \forall w_h \in W_h \end{cases} \quad (2.11)$$

On dit que (2.11) est le problème approché ou le problème discret et que u_h est la solution approchée. On notera que sous sa forme la plus générale, le problème approché (2.11) fait intervenir une forme bilinéaire $a_h \in L(V_h \times W_h, \mathbb{R})$ qui est une approximation de la

forme bilinéaire a et une forme linéaire $f_h \in W_h'$ qui est une approximation de la forme linéaire f . L'espace V_h , qu'on appellera espace d'approximation, et l'espace W_h , qu'on appellera espace test discret, sont construits à l'aide de la méthode des éléments finis selon les techniques présentées dans le chapitre 1 pour les problèmes en dimension 1 et dans les chapitres 3 et 4 pour les problèmes en dimension supérieure. L'indice h fait référence à la finesse des maillages employés pour construire ces espaces. Les éléments de W_h sont appelés des fonctions tests discrètes.

Un choix particulier dans (2.11) consiste à utiliser le même espace V_h comme espace d'approximation et comme espace test discret, ce qui conduit au problème approché suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = f_h(w_h), \quad \forall w_h \in W_h \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans ce cas, on parle de méthode de Galerkin standard, alors que si les espaces discrets V_h et W_h sont différents, on parle de méthode de Galerkin non-standard (dans la littérature, on rencontre également la terminologie « méthode de Petrov-Galerkin »).

Définition 2.1.5 (*Conformité*) *L'approximation (2.11) est dite conforme si $V_h \subset V$ et $W_h \subset W$; elle est dite non-conforme si $V_h \subset V$ ou $W_h \subset W$. On dit que l'espace V_h est V -conforme lorsque $V_h \subset V$ et que l'espace W_h est W -conforme lorsque $W_h \subset W$.*

Définition 2.1.6 (*Consistance*). *Soit u la solution unique de (2.1). On suppose que la forme bilinéaire a_h peut être étendue à $(V + V_h) \times W_h$. L'approximation (2.11) est dite consistante si*

$$\forall w_h \in W_h \quad a_h(u, w_h) = f_h(w_h) \quad (2.13)$$

Si tel n'est pas le cas, l'approximation est dite non-consistante.

En d'autres termes, l'approximation est consistante si la solution exacte satisfait les équations discrètes. La non-consistance de la méthode d'approximation peut, par exemple, provenir de l'utilisation de quadratures pour évaluer les intégrales dans la forme bilinéaire a et la forme linéaire f . Le problème approché (2.11) est un système linéaire. En effet, on pose

$$N = \dim V_h \text{ et } M = \dim W_h \quad (2.14)$$

Soit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ une base de V_h et soit $\{\Psi_1, \dots, \Psi_M\}$ une base de W_h . On décompose la solution approchée u_h dans la base de V_h selon

$$u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i \quad (2.15)$$

et on introduit le vecteur U de \mathbb{R}^N formé par les composantes de u_h dans et on introduit le vecteur U de \mathbb{R}^N formé par les composantes de u_h dans cette base, $U = (U_i)_{1 \leq i \leq N}$, soit

$$A_{ij} = a_h(\varphi_j, \Psi_i), i \in \{1, \dots, M\}, j \in \{1, \dots, N\} \quad (2.16)$$

et soit $F \in \mathbb{R}^M$ le vecteur de composantes

$$F_i = f_h(\Psi_i), i \in \{1, \dots, M\}$$

Il est clair que u_h est solution de (2.11) si et seulement si

$$AU = F \quad (2.17)$$

2.1.5 Le problème approché est-il bien posé ?

L'objet de cette section est d'analyser le caractère bien posé du problème approché (2.11). On retiendra les résultats suivants.

- Pour une approximation consistante et conforme d'un problème dont la forme bilinéaire est coercive, le problème approché est automatiquement bien posé. De plus, la matrice de rigidité est définie positive.
- Lorsque le caractère bien posé du problème modèle repose sur les conditions inf-sup (BNB1) et (BNB2), celles-ci ne sont pas transférées automatiquement au cadre discret. Pour montrer que le problème discret est bien posé, il faut (et il suffit de) prouver une condition inf-sup discrète et vérifier que l'espace d'approximation et l'espace test discret ont la même dimension

Approximation consistante et conforme d'un problème coercif

Soit V un espace de Hilbert, soit $a \in L(V \times V; \mathbb{R})$ une forme bilinéaire et V -coercive et soit $f \in V'$. Dans ce cadre, le problème modèle (2.6) admet une discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = f_h(w_h), \forall w_h \in W_h \end{cases} \quad (2.18)$$

et on suppose que $V_h \subset V$. On notera que le problème discret (2.16) fait intervenir la même forme bilinéaire a et la même forme linéaire f que le problème modèle (2.6).

Proposition 2.1.7 *Avec les hypothèses ci-dessus, la matrice de rigidité A est définie positive ; par conséquent, le problème discret (2.18) est bien posé.*

Le caractère défini positif de la matrice A résulte du fait que pour tout

$X = (X_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ ou $N = \dim V_h$, on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} A_{ij} X_i X_j = a(\xi, \xi) \geq \alpha \|\xi\|_V^2 \quad (2.19)$$

avec $\xi = \sum_{i=1}^N X_i \varphi_i \in V_h$, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ étant une base de V_h .

Par suite, $\sum_{1 \leq i, j \leq N} A_{ij} X_i X_j = 0$ implique $\xi = 0$ et donc $X = 0$.

Remarque 2.1.8 *Si la forme bilinéaire a est symétrique, la matrice de rigidité l'est également.*

Cas général

On considère maintenant le cas général, c'est-à-dire que l'on considère le problème modèle (2.1), que l'on suppose bien posé, et on souhaite utiliser le problème discret (2.11) pour obtenir une solution approchée u_h . On notera $\|\cdot\|_{V_h}$ et $\|\cdot\|_{W_h}$ les normes dont sont équipés les espaces discrets V_h et W_h , respectivement.

L'approximation pouvant être non-conforme, il n'est pas possible d'équiper a priori les espaces discrets V_h et W_h des normes induites par V et W , respectivement. Clairement, en vertu du théorème BNB, le caractère bien posé de (2.11) est équivalent aux deux conditions suivantes :

$$\exists \alpha_h > 0, \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{a_h(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{W_h}} \geq \alpha_h \quad (2.20)$$

$$\forall w_h \in W_h, (\forall v_h \in V_h, a_h(v_h, w_h) = 0) \implies (w_h = 0). \quad (2.21)$$

La condition $(BNB1_h)$ est une condition inf-sup discrète. Même si l'approximation est conforme et consistante, rien ne garantit a priori que la condition inf-sup $(BNB1)$ implique la condition inf-sup discrète $(BNB1_h)$. La même difficulté se pose entre les conditions $(BNB2)$ et $(BNB2_h)$.

On constate que l'interprétation des conditions $(BNB1_h)$ et $(BNB2_h)$ en termes matriciels est la suivante :

1. $(BNB1_h)$ équivaut au fait que la matrice A est injective ;
2. $(BNB2_h)$ équivaut au fait que la matrice A est de rang maximal. Par conséquent, les conditions $(BNB1_h)$ et $(BNB2_h)$ sont équivalentes à $(BNB1_h)$ et $\dim V_h = \dim W_h$.
En résumé, on a le résultat suivant.

Théorème 2.1.9 *Le problème approché (2.11) est bien posé si et seulement si la condition inf-sup discrète $(BNB1_h)$ est satisfaite et si $\dim V_h = \dim W_h$.*

Remarque 2.1.10 *La constante a_h intervenant dans $(BNB1_h)$ est la plus petite valeur propre de $A^T A$.*

2.1.6 Analyse d'erreur

On considère le problème modèle (2.1) et son approximation (2.11) par la méthode de Galerkin. On suppose que ces deux problèmes sont bien posés, c'est-à-dire que :

1. la forme bilinéaire a est dans $L(V \times W; \mathbb{R})$ et elle satisfait les conditions inf-sup $(BNB1)$ et $(BNB2)$.
2. la forme bilinéaire a_h est dans $L(V_h \times W_h; \mathbb{R})$, elle satisfait la condition inf-sup discrète $(BNB1_h)$ et $\dim V_h = \dim W_h$.

On note u et u_h la solution unique de (2.1) et (2.11), respectivement.

L'objectif de cette section est d'estimer l'erreur $u - u_h$. Cette quantité est appelée l'erreur d'approximation. En particulier, on souhaite préciser sous quelles hypothèses l'erreur

d'approximation tend vers zéro lorsque h tend vers zéro (on rappelle que le paramètre h fait référence à la finesse du maillage qui est utilisé pour construire les espaces V_h et W_h). On s'intéresse donc à des familles d'espaces $\{V_h\}_{h>0}$ et $\{W_h\}_{h>0}$ obtenues en raffinant le maillage.

Approximation consistante et conforme

On suppose dans cette section que l'approximation est consistante et conforme. On a donc $V_h \subset V$ et $W_h \subset W$ et la relation (2.13) est satisfaite.

On considère le problème approché suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h & \text{tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = f_h(w_h), & \forall w_h \in W_h \end{cases} \quad (2.22)$$

L'hypothèse $V_h \subset V$ implique en particulier que l'erreur $u - u_h$ est dans V .

On peut donc utiliser la norme $\|\cdot\|_V$ pour la mesurer. Une conséquence immédiate de (2.13) est la suivante.

Lemme 2.1.11 (Orthogonalité de Galerkin) . *Avec les hypothèses ci-dessus, on a la relation, dite d'orthogonalité de Galerkin,*

$$\forall w_h \in W_h, \quad a_h(u - u_h, w_h) = 0 \quad (2.23)$$

On suppose en outre que $a_h = a$ et $f_h = f$. Le résultat suivant est connu sous le nom de lemme de Céa.

Lemme 2.1.12 (Céa) . *Avec les hypothèses ci-dessus, on a*

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(1 + \frac{\|a\|_{V,W}}{\alpha_h}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.24)$$

On suppose en outre que $V = W$, $V_h = W_h$ et que la forme bilinéaire a est V -coercitive. Dans ces conditions, on montre que l'estimation d'erreur devient

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a\|_{V,V}}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.25)$$

où α est la constante de coercitive de a . Si la forme bilinéaire a est de plus symétrique, cette estimation peut encore être améliorée en

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(\frac{\|a\|_{V,V}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.26)$$

Afin d'établir la convergence de u_h vers u , on doit contrôler la quantité $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$. Il s'agit donc d'estimer la distance de u à V_h pour la norme $\|\cdot\|_V$.

PROBLÈME MODÈLE EN DIMENSION DEUX

3.1 UN PROBLÈME MODÈLE

Le problème pour le bi-Laplacien

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & x \in \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

(problème biharmonique sur (3.1) un domaine polygonal avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes).

- ▶ Ce problème peut être résolu numériquement en utilisant des méthodes conformes de classe C^1 . La méthode d'éléments finis basée sur ces éléments (par exemple l'élément Argyris ou l'élément Bogner - Fox - Schmit est compliquée par [2], et encore plus dans la dimension trois .
- ▶ Il est connu aussi qu'on peut résoudre le problème par des méthodes d'éléments finis non conforme (par exemple les éléments de Morly) par [2].
- ▶ La construction des méthode des éléments finis non conformes est aussi très compliquée et il n'est pas facile de démontrer la convergence de la méthode si elle est non conforme.

► Elles utilisent des éléments d'ordre inférieur 1,2 mais ceci ne donne pas de très bonnes résultats si la solution est très régulière.

► On sait très peu d'éléments 3D pour les problèmes d'ordre quatre.

Une autre alternative pour résoudre le problème est d'utiliser la formulation mixte qui consiste à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ such that} \\ \int_{\Omega} \sigma \mu \, dx - \int_{\Omega} \nabla \mu \cdot \nabla u \, dx = 0 \quad \forall \mu \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

En Ce formulation mixte, le problème biharmonique est divisé en deux problèmes d'ordre deux, nous avons seulement besoin d'utiliser des espaces d'éléments finis qui sont des sous-espaces d'éléments. $H^1(\Omega)$, i.e., C^0 éléments par [2].

► Il n'est pas facile de trouver des formulations mixtes correctif pour plus compliqués problèmes d'ordre quatre.

► Dans la formulation mixte, nous utilisons un espace d'éléments finis pour l'inconnu ω et un espace d'éléments finis pour u . la méthode mixte ne fonctionne que si la paire d'éléments finis satisfait la Ladyzhenskaya - état Brezzi - Babuska par [2].

Il N'est pas facile de trouver de telles paires d'éléments finis !

► A la fin on a encore besoin de résoudre un problème de point de selle, ce qui est plus compliqué de résoudre un problème de (Sapondzhyan paradosc) SPD par [2].

Les inconvénients des méthodes d'éléments finis classiques pour des problèmes d'ordre quatre con être surmontés par des méthodes de pénalité intérieur.

3.2 UNE FORMULATION PAR SIPM

La méthode que nous sommes entrain d'utiliser est la méthode " C^0 Symmetric Interior Penalty Method " en anglais.

Soit \mathcal{T}_h une triangulation régulière de Ω .

On considère l'espace des éléments finis continus de Lagrange :

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); v|_T \in \mathbb{P}_k(T), (k \geq 2), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \quad (3.3)$$

$\mathbb{P}_k(T)$ polynôme de degré k

Alors il est claire que $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

Si e une arête intérieure commune de T^\pm (voir la figure 3.1).

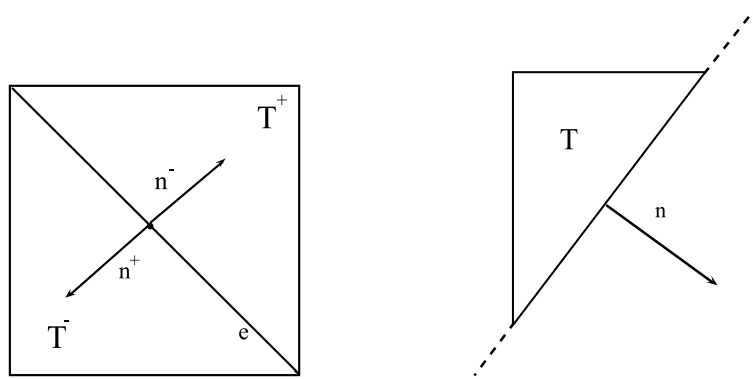


FIGURE 3.1 – deux triangles adjacents et un triangle du bord

Alors on définit le **saut** et la **moyenne** sur une arête intérieure e par :

$$[[v]] = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+ \quad \text{et} \quad \{v\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}.$$

Pour les problèmes d'ordre quatre on définit :

$$\left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)$$

Si e une arête du bord (voir la figure 3.1) alors

$$[[v]] = v_T \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \{\{\nabla v\}\} = \nabla v_T$$

Lemme 3.2.1 (Inégalité inverse) $\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall v \in \mathcal{P}^k(T)$ il existe une constante C indépendante de h_T tel que

$$\|v\|_{1,T} \leq C \frac{\|v\|_{0,T}}{h_T}. \quad (3.4)$$

Preuve. Pour simplifier supposons que $h_T \leq h \leq 1$.

On passe au triangle de référence \hat{T} défini par

$$\hat{T} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ et } x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

Nous avons pour chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ du maillage, il exist A_T matrice 2×2 et $b_T \in \mathbb{R}^2$ tels que $T = F_T(\hat{T}_0)$ où F_T est l'application affine définie par $F_T(\hat{x}) = A_T(\hat{x}) + b_T$.

Soit $v \in \mathcal{P}^k(T)$, et on pose $\hat{v}(\hat{x}) = (v \circ F)(\hat{x})$, on utilise le fait que en dimension finie les normes sont équivalentes, on déduit que $\|\hat{v}\|_{1,\hat{T}} \leq C_{\hat{T}} \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}}$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} |v|_{1,T}^2 &= \int_T |\nabla_x v|^2 dx \leq \int_{\hat{T}} \|A_T^{-1}\|^2 |\nabla_{\hat{x}} \hat{v}|^2 |\det(A_T)| d\hat{x} \quad (\text{puisque } \nabla_x v = A_T^{-1} \nabla_{\hat{x}} \hat{v}) \\ &= \|A_T^{-1}\|^2 |\det(A_T)| \|\hat{v}\|_{1,\hat{T}}^2 \leq C \|A_T^{-1}\|^2 |\det(A_T)| \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}}^2 \\ &\leq C \|A_T^{-1}\|^2 \|v\|_{0,T}^2 \leq C h_T^{-2} \|v\|_{0,T}^2 \quad \text{puisque } \|A_T^{-1}\| \leq \frac{\rho_{\hat{T}}}{h_T}. \end{aligned}$$

■

Lemme 3.2.2 (Inégalité de trace discrète) $\forall T \in \mathcal{T}_h, e \in \partial T$ et $\forall v \in \mathcal{P}^k(T)$ il existe une constante C indépendante de h tel que

$$|e| \left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{0,e}^2 \leq C \|\nabla v\|_{0,T}^2. \quad (3.5)$$

Preuve.

Nous passons au triangle de référence \hat{T} . On utilise le fait que les normes sont équivalente en dimension finie donc on

$$\|\partial \hat{v} / \partial n\|_{0,\hat{e}} \leq \|\nabla_{\hat{x}} \hat{v}\|_{0,\hat{T}}$$

On a d'une part

$$\|\partial \hat{v} / \partial n\|_{0,\hat{e}}^2 = |e| \|\partial v / \partial n\|_{0,e}^2$$

d'autre part on a ¹ :

$$\|\nabla_{\hat{x}} \hat{v}\|_{0,\hat{T}}^2 = \frac{\|A_T\|^2}{|\det(A_T)|} \|\nabla_x v\|_{0,T}^2 \sim \|\nabla_x v\|_{0,T}^2.$$

■

Du lemme 3.2.2 (puisque $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot n$), on peut déduire facilement que :

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\{\{\nabla v\}\}\|_{0,e}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{1,T}^2 \quad (3.6)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\{\{\partial v^2 / \partial n^2\}\}\|_{L_2(e)}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2. \quad (3.7)$$

La formulation variationnelle SIP est basée sur le résultat suivant :

Lemme 3.2.3 *Soit u solution de (3.1), si $u \in H^4(\Omega)$, $v \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Alors*

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds$$

où

$$\nabla^2 u : \nabla^2 v = \sum_{i,j=1}^2 \partial_{ij}^2 u \, \partial_{ij}^2 v$$

Preuve. Nous avons (par intégration par parties) :

$$\begin{aligned} \int_T (\Delta^2 u) v \, dx &= \int_T \Delta(\Delta u) v \, dx \\ &= \int_{\partial T} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v \, ds - \int_T \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\partial T} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v \, ds - \int_T \Delta(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\partial T} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v \, ds - \int_{\partial T} \frac{\partial(\nabla u)}{\partial n} \cdot \nabla v \, ds + \sum_{i,j=1}^2 \int_T \partial_{ij}^2 u \, \partial_{ij}^2 v \, dx \\ &= \int_{\partial T} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v \, ds - \int_{\partial T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) n \cdot \nabla v \, ds + \sum_{i,j=1}^2 \int_T \partial_{ij}^2 u \, \partial_{ij}^2 v \, dx \\ &= \int_{\partial T} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v \, ds - \int_{\partial T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \sum_{i,j=1}^2 \int_T \partial_{ij}^2 u \, \partial_{ij}^2 v \, dx \end{aligned}$$

¹si le maillage \mathcal{T}_h est régulier, i.e., $\exists \sigma_0$, tel que $\forall T \in \mathcal{T}_h$, $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma_0$

Par sommation sur tous les triangles de \mathcal{T}_h (en utilisant le fait que $[[v]]=0$) on obtient :

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u)v \, dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds.$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds$$

et puisque $u \in H^4(\Omega)$, alors $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \in H^1(\Omega)$ sa trace est continue sur chaque e , et donc on peut écrire :

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds$$

et même sous forme symétrique :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \, dx &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left[\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds, \end{aligned}$$

puisque les deux derniers termes sont pratiquement nuls. ■

Remarque 3.2.4 *Les termes de stabilisation ne s'annulent pas lorsqu'on se restreint sur les éléments de l'espace V_h car les dérivées suivant la normale de ces éléments est discontinue.*

3.3 LE PROBLÈME DISCRET

D'après le lemme précédent, si u est suffisamment régulière elle résout le problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} a_h(u, v) &= \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_h \\ a_h(w, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 w : \nabla^2 v \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \left[\left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds \end{aligned}$$

On définit les espaces de Sobolev suivants :

$$H^\ell(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_T \in H^\ell(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V_h \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Proposition 3.3.1 *Les deux quantités suivantes $\|\cdot\|_h$ et $|||\cdot|||_h$ définissent deux normes sur V_h . Ces deux normes sont équivalentes sur $H^3(\Omega, \mathcal{T}_h)$.*

$$\|v\|_h^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|\llbracket \partial v / \partial n \rrbracket\|_{L_2(e)}^2$$

$$|||v|||_h^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{|e|}{\sigma} \|\{\partial v^2 / \partial n^2\}\|_{L_2(e)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|\llbracket \partial v / \partial n \rrbracket\|_{L_2(e)}^2$$

Preuve. Il est claire que

$$\|v\|_h \leq |||v|||_h \quad \forall v \in H^3(\Omega, \mathcal{T}_h).$$

D'autre part, on d'après le lemme 3.2.2

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{|e|}{\sigma} \|\{\partial v^2 / \partial n^2\}\|_{L_2(e)}^2 \leq \frac{C}{\sigma} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2$$

ce qui implique que :

$$|||v|||_h \leq C \|v\|_h \quad \forall v \in H^3(\Omega, \mathcal{T}_h) \quad \forall v \in H^3(\Omega, \mathcal{T}_h).$$

■

Proposition 3.3.2 *La forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est continue :*

$$a_h(w, v) \leq 2 |||w|||_h |||v|||_h \quad \forall w, v \in H^3(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (3.9)$$

Pour σ suffisamment grand $a_h(\cdot, \cdot)$ est coercive sur V_h

$$a_h(v, v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_h^2 \quad \forall v \in V_h \quad (3.10)$$

Preuve. Pour la continuité, nous avons

$$\begin{aligned} 2 \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{ \partial^2 w / \partial n^2 \} [\partial v / \partial n] ds \right| \\ \leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \left(\frac{|e|}{C} \| [\partial^2 w / \partial n^2] \|_{L_2(e)}^2 + \frac{C}{|e|} \| [\partial v / \partial n] \|_{L_2(e)}^2 \right) \\ \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w|_{2,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{C}{|e|} \| [\partial v / \partial n] \|_{L_2(e)}^2 \end{aligned}$$

(C est la constante apparait dans le lemme 3.2.2) et donc,

$$a_h(w, v) \leq C^* \|w\|_h \|v\|_h \quad \forall v, w \in H^3(\Omega, \mathcal{T}_h) \quad (3.11)$$

Pour la coercivité nous avons :

$$a_h(v, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 + 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{ \partial^2 v / \partial n^2 \} [\partial v / \partial n] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \| [\partial v / \partial n] \|_{L_2(e)}^2$$

On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{ \partial^2 v / \partial n^2 \} [\partial v / \partial n] ds \\ \geq - \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \| \{ \partial^2 v / \partial n^2 \} \|_{L_2(e)}^2 \right)^{1/2} \times \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e|^{-1} \| [\partial v / \partial n] \|_{L_2(e)}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

On utilise le lemme 3.2.2 on obtient :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{ \partial^2 v / \partial n^2 \} [\partial v / \partial n] ds \\ \geq -C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{2,T}^2 \right)^{1/2} \times \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e|^{-1} \| [\partial v / \partial n] \|_{L_2(e)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Maintenant on utilise le fait que :

$$-C\sqrt{a}\sqrt{b} \geq - \left(\frac{a + C^2b}{2} \right), \quad \forall a, b \geq 0$$

$$\text{on obtient} \quad a_h(v, v) \geq \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 + \left(\sigma - \frac{C^2}{2} \right) \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e|^{-1} \| [\partial v / \partial n] \|_{L_2(e)}^2.$$

Alors si on choisit σ tel que

$$\left(\sigma - \frac{C^2}{2} \right) \geq \frac{1}{2}$$

on obtient :

$$a_h(v, v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_h^2 \quad \forall v \in V_h \quad (3.12)$$

■

3.4 ANALYSE A PRIORI

Proposition 3.4.1 *Soit u_h la solution du problème (3.8). Supposons que la solution u du problème (3.1) a la régularité $H^4(\Omega)$ alors :*

$$\| \| u - u_h \| \|_h \leq C \inf_{v \in V_h} \| \| u - v \| \|_h \quad (3.13)$$

Preuve. Soit $v_h \in V_h$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v_h \, dx &= \int_{\Omega} (\Delta^2 u) v_h \, dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v_h \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v_h}{\partial n} \right] \right] \, ds \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v_h \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v_h}{\partial n} \right] \right] \, ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 v_h}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] \, ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \left[\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] \left[\left[\frac{\partial v_h}{\partial n} \right] \right] \, ds \\ &= a_h(u, v_h) \end{aligned}$$

et donc on a :

$$a_h(u_h - u, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.14)$$

Ensuit

$$\begin{aligned} \| \| u - u_h \| \|_h &\leq \| \| u - v_h \| \|_h + \| \| v_h - u_h \| \|_h && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \| \| u - v_h \| \|_h + C \| \| v_h - u_h \| \|_h && \text{(équivalence des normes)} \\ &\leq \| \| u - v_h \| \|_h + C \frac{a_h(u_h - v_h, v_h)}{\| \| v_h \| \|_h} && \text{(coercivité de } a_h) \\ &\leq \| \| u - v_h \| \|_h + C \frac{a_h(u - v_h, v_h)}{\| \| v_h \| \|_h} && \text{(on utilise l'orthogonalité (3.14))} \\ &\leq \| \| u - v_h \| \|_h + C \| \| u - v_h \| \|_h && \text{(coercivité de } a_h) \\ &\leq C \inf_{v_h \in V_h} \| \| u - v_h \| \|_h && \text{(équivalence des normes)} \end{aligned}$$

■

3.5 OPÉRATEUR D'ENRICHISSEMENT

Définition de l'opérateur E_h

Il existe un opérateur $E_h : V_h \rightarrow H_0^2(\Omega)$ cet opérateur est défini par : soit $v \in V_h$, est défini $w = E_h v$

$$w(x) = v(x) \quad \text{si } x \text{ sommet intérieur} \quad (3.15)$$

pour $x \in \mathcal{T}_h$

$$(\nabla w(x)) = \frac{1}{|\mathcal{T}_x|} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \nabla v \quad (3.16)$$

sur m_e point centre un borne de \mathcal{E}_h^i défini par :

$$\frac{\partial w}{\partial n}(m_e) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\partial v_t}{\partial n}(m_e) \quad (3.17)$$

Lemme 3.5.1

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^{-4} \|v - E_h(v)\|_{L_2(T)}^2 + h_T^{-2} |v - E_h(v)|_{H^1(T)}^2 + |v - E_h(v)|_{H^2(T)}^2) \\ & \leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \quad \forall v \in V_h \end{aligned}$$

Preuve. voir [12]. ■

Corollaire 3.5.2

$$E_h(v) \leq C \|v\|_h, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.18)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\partial(v - E_h(v)) / \partial n_e \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \leq C \|v\|_h^2, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.19)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\partial(v - E_h(v)) / \partial n_t \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \leq C \|v\|_h^2, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.20)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|} \left\| \left\{ \partial(v - E_h(v)) / \partial n_e \right\} \right\|_{L_2(e)}^2 \leq C \|v\|_h^2, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.21)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|^3} \left\| \left\{ \partial(v - E_h(v)) / \partial n_e \right\} \right\|_{L_2(e)}^2 \leq C \|v\|_h^2, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.22)$$

3.6 ANALYSIS INTERMÉDIAIRE

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.6.1

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left(\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h + Osc_2(f) \right) \quad (3.23)$$

où

$$Osc_2(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - f_T\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

et f_T est la projection de f dans $P_{k-2}(T)$ par rapport au produit scalaire de $L_2(T)$.

Preuve.

Nous utilisons l'inégalité triangulaire et la coercivité de la forme a_h nous obtenons :

$$\|u - u_h\|_h \leq \|u - v\|_h + C \max_{w \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a_h(v - u_h, w)}{\|w\|_h}. \quad (3.25)$$

De la section précédente nous avons :

$$E_h : V_h \longrightarrow H_0^2(\Omega).$$

Alors pour tout $v, w \in V_h$:

$$a_h(v - u_h, w) = a_h(v, E_h w) + a_h(v, w - E_h w) - \int_{\Omega} f w dx, \quad (3.26)$$

et par définition (de a_h),

$$\begin{aligned}
 a_h(v, E_h w) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 v : \nabla^2(E_h w) dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2(E_h w)}{\partial n_e^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right] ds \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2(v - u) : \nabla^2(E_h w) dx + \int_{\Omega} f(E_h w) dx \\
 &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2(E_h w)}{\partial n_e^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right] ds.
 \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
 a_h(v, w - E_h w) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Delta^2 v)(w - E_h w) dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2(w - E_h w)}{\partial n_e^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right] ds \\
 &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left(\left[\left[\frac{\partial \Delta v}{\partial n_e} \right] \right] (w - E_h w) - \left[\left[\frac{\partial^2 v}{\partial n_e^2} \right] \right] \left\{ \left\{ \frac{\partial(w - E_h w)}{\partial n_e} \right\} \right\} \right) ds \\
 &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left[\left[\frac{\partial^2 v}{\partial n_e \partial t_e} \right] \right] \frac{\partial(w - E_h w)}{\partial t_e} ds + \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \int_e \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right] \left[\left[\frac{\partial(w - E_h w)}{\partial n_e} \right] \right] ds.
 \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}
 a_h(v - u_h, w) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2(v - u) : \nabla^2(E_h w) dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n_e^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right] ds \\
 &\quad + \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \int_e \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right] \left[\left[\frac{\partial(w - E_h w)}{\partial n_e} \right] \right] ds \\
 &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\left[\frac{\partial^2 v}{\partial n_e \partial t_e} \right] \right] \left[\left[\frac{\partial(w - E_h w)}{\partial t_e} \right] \right] ds \\
 &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left(\left[\left[\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial n_e} \right] \right] (w - E_h w) - \left[\left[\frac{\partial^2 v}{\partial n_e^2} \right] \right] \left\{ \left\{ \frac{\partial(w - E_h w)}{\partial n_e} \right\} \right\} \right) ds \\
 &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f - \Delta^2 v)(w - E_h w) dx
 \end{aligned}$$

Notre objectif maintenant est de majorer le second membre de l'inégalité précédente.

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2(v - u) : \nabla^2(E_h w) dx \right| \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - v\|_{H^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_h.$$

D'autre part Nous rappelons que ∇^2 est la matrice Hessienne, $E_h w$ est de classe C^1 et que $u \in H^s, s > 5/2$ donc :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n_e^2} \right\} \left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] ds \right| &= \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n_e^2} \right\} \left[\frac{\partial(v-u)}{\partial n_e} \right] ds \right| \\
 &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \left\| \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n_e^2} \right\} \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w|_{H^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_h
 \end{aligned}$$

Pour le troisième terme on a :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \int_e \left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \left[\frac{\partial(w - E_h w)}{\partial n_e} \right] ds \right| \\
 \leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\frac{\partial(w - E_h w)}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_h.
 \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité (3.19) on obtient :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial^2 v}{\partial n_e \partial t_e} \right] \times \left[\frac{\partial(w - E_h w)}{\partial t_e} \right] ds \right| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \left\| \left[\frac{\partial^2 v}{\partial n_e \partial t_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \left\| \frac{\partial(w - E_h w)}{\partial t_e} \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_h \\
 &\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\frac{\partial(u-v)}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_h
 \end{aligned}$$

L'inégalité (3.20) donne

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial \Delta v}{\partial n_e} \right] (w - E_h w) ds \right| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e|^3 \left\| \left[\frac{\partial \Delta v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|^3} \|w - E_h w\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e|^3 \left\| \left[\frac{\partial \Delta v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_h
 \end{aligned}$$

et l'inégalité (3.22) donne :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial^2 v}{\partial n_e^2} \right] \left\{ \frac{\partial(w - E_h w)}{\partial n_e} \right\} ds \right| \\
 & \leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e| \left\| \left[\frac{\partial^2 v}{\partial n_e^2} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|} \left\| \left\{ \frac{\partial(w - E_h w)}{\partial n_e} \right\} \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e| \left\| \left[\frac{\partial^2 v}{\partial n_e^2} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_h
 \end{aligned}$$

Ensuit (3.21) implique que :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f - \Delta^2 v)(w - E_h w) dx \right| & \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|w - E_h w\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_h
 \end{aligned}$$

Finalement (3.22) montre que :

$$\begin{aligned}
 a_h(v - u_h, w) & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - v\|_{H^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\frac{\partial(u - v)}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right) \\
 & \quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e|^3 \left\| \left[\frac{\partial \Delta v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e| \left\| \left[\frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \\
 & \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)}^2 \|w\|_h. \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Pour compléter l'analyse intermédiaire, nous avons besoin de borner les trois termes dans le second membre de (3.27) en terme de $\|u - u_h\|_h$ et Osc_2 .

La technique utilisée pour ceci est celle des fonctions du bulle qui est un outil utilisé dans l'analyse a posteriori.

Oscillations des données.

Soit $P_j(\Omega, \mathcal{T}_h)$ l'espace des fonctions polynomiales par morceaux de degré $\leq j$ et soit \tilde{f} la projection de f dans $P_j(\Omega, \mathcal{T}_h)$ par rapport au produit scalaire de L^2 .

$$\int_{\Omega} (f - \tilde{f})v dx = 0 \quad \forall v \in P_j(\Omega, \mathcal{T}_h).$$

et on définit les oscillations de f (d'ordre j) par :

$$Osc_j(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - \tilde{f}\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.28}$$

Estimation de $h_T^4 \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)}^2$.

Soit $T \in \mathcal{T}_h$ et soit $\zeta \in \mathbb{P}^6(T)$ la fonction de bulle qui s'annule sur ∂T est égale à 1 au centre de T . Alors les inégalités inverses donnent :

$$|\zeta|_{H^2(T)} \leq Ch_T^{-2} \|\zeta\|_{L_2(T)} \leq Ch_T^{-1}.$$

$$C_1 \int_T (\tilde{f} - \Delta^2 v)^2 \zeta^2 dx \leq \|\tilde{f} - \Delta^2 v\|_{L_2(T)}^2 \leq C_2 \int_T (\tilde{f} - \Delta^2 v)^2 \zeta dx.$$

On pose $z = (\tilde{f} - \Delta^2 v)^2 \zeta$

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - \Delta^2 v\|_{L_2(T)}^2 &\leq C \int_T (\tilde{f} - \Delta^2 v)^2 z dx \\ &= C \left[\int_\Omega f z dx - \int_T (\Delta^2 v) z dx + \int_T (\tilde{f} - f) z dx \right] \\ &= C \left[\int_\Omega \nabla^2 u : \nabla^2 z dx - \int_T \nabla^2 v : \nabla^2 z dx + \int_T (\tilde{f} - f) z dx \right] \\ &= C \left[\int_T (\nabla^2 u - \nabla^2 v) : \nabla^2 z dx + \int_T (\tilde{f} - f) z dx \right] \\ &\leq C \left[|u - v|_{H^2(T)} \|z\|_{H^2(T)} + \|f - \tilde{f}\|_{L_2(T)} \|z\|_{L_2(T)} \right] \\ &\leq C \left[h_T^{-2} |u - v|_{H^2(T)} + \|f - \tilde{f}\|_{L_2(T)} \right] \|z\|_{L_2(T)} \\ &\leq h_T^{-2} |u - v|_{H^2(T)} + \|f - \tilde{f}\|_{L_2(T)} \|\tilde{f} - \Delta^2 v\|_{L_2(T)} \end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned} h_T^2 \|\tilde{f} - \Delta^2 v\|_{L_2(T)} &\leq C \left(|u - v|_{H^2(T)} + h_T^2 \|f - \tilde{f}\|_{L_2(T)} \right), \\ h_T^4 \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)} &\leq C \left(|u - v|_{H^2(T)} + h_T^4 \|f - \tilde{f}\|_{L_2(T)} \right) \\ h_T^4 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)} &\leq C [\text{Osc}_j(f)]^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - v|_{H^2(T)}. \end{aligned}$$

Estimation de $|e| \|\llbracket \partial^2 \nu / \partial n_e^2 \rrbracket\|_{L_2(e)}^2$.

Soit $e \in \mathcal{E}_h^i$ arbitraire et n_e la normale unitaire dirigée de T_+ vers T_- . On définit sur $T_+ \cup T_-$ une fonction de bulle comme suit :

- Soit $\beta \in \mathbb{P}_{k-2}(\mathbb{R}^2)$ qui coincide avec le saut $\llbracket \partial^2 \nu / \partial n_e^2 \rrbracket$ sur e .
- β est constante suivant les lignes normales à e .
- On définit $\zeta_1 \in \mathbb{P}_{k-1}(T_+ \cup T_-)$ qui satisfait :

$$\zeta_1 = 0 \text{ sur } e \quad \text{et} \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial n_e} = \beta \quad (3.29)$$

Alors les propriétés des fonctions de bulles donnent :

$$|e|^{-1} \|\zeta_1\|_{L_2(T_- \cup T_+)} + \|\zeta_1\|_{L_\infty(T_- \cup T_+)} \leq C |e|^{\frac{1}{2}} \|\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket\|_{L(e)}. \quad (3.30)$$

Ensuite on définit ζ_2 qui satisfait les conditions suivantes :

- $\zeta_2 \in \mathbb{P}_8(T_+ \cup T_-)$.
- ζ_2 s'annule sur $T_+ \cup T_- \setminus e$ et égale à 1 au milieu de e .

Alors ζ_2 satisfait :

$$|e|^{-1} \|\zeta_2\|_{L_2(T_- \cup T_+)} + \|\zeta_2\|_{L_\infty(T_- \cup T_+)} \leq C \|\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 \quad (3.31)$$

$$\leq C \int_e \llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket^2 \zeta_2 ds. \quad (3.32)$$

De (3.29) et (3.32) nous avons :

$$\begin{aligned} \|\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 &\leq C \int_e \llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket \beta \zeta_2 ds. \\ &= C \int_e \llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket (\partial \zeta_1 / \partial n_e \zeta_2) ds \\ &= C \int_e \llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket [\partial(\zeta_1 \zeta_2) / \partial n_e] ds. \end{aligned}$$

On peut facilement étendre la fonction $\zeta_1 \zeta_2$ à une fonction dans $H^2(\Omega)$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} \int_e \llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket [\partial(\zeta_1 \zeta_2) / \partial n_e] ds &= \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \left(- \int_T \nabla^2 v : \nabla^2(\zeta_1 \zeta_2) dx + \int_T (\Delta^2 v)(\zeta_1 \zeta_2) dx \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \left(- \int_T \nabla^2(u - v) : \nabla^2(\zeta_1 \zeta_2) dx - \int_\Omega \Delta^2 u : \Delta^2(\zeta_1 \zeta_2) dx \right) \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \int_T (\Delta^2 v)(\zeta_1 \zeta_2) dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \left(- \int_T \nabla^2(u - v) : \nabla^2(\zeta_1 \zeta_2) dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \int_T (f - \Delta^2 v)(\zeta_1 \zeta_2) dx \right) \end{aligned}$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
 \|\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_e} |u - v|_{H^2(T)} \zeta_1 \zeta_2 |_{H^2(T)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)} \|\zeta_1 \zeta_2\|_{L_2(T)} \right) \\
 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_e} [h_T^{-2} |u - v|_{H^2(T)} + \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)}] \|\zeta_1 \zeta_2\|_{L_2(T)} \\
 \|\zeta_1 \zeta_2\|_{L_2(T_- \cup T_+)} &\leq C |e|^{\frac{3}{2}} \|\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket\|_{L_2(e)} \\
 |e| \|\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_e} [|u - v|_{H^2(T)}^2 + h_T^4 \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)}^2]. \\
 |e| \|\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_e} [|u - v|_{H^2(T)}^2 + h_T^4 \|f - \tilde{f}\|_{L_2(T)}^2]. \\
 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e| \|\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 &\leq C [\text{Osc}_j(f)]^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - v|_{H^2(T)}^2
 \end{aligned}$$

Estimation de $|e|^3 \|\llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket\|_{L_2(e)}^2$.

Soit ζ_2 comme dans le cas précédent. On définit ζ_3 comme suit :

- $\zeta_3 \in \mathbb{P}_{k-3}(\mathbb{R}^2)$ qui coïncide avec le saut $\llbracket \partial(\Delta v) / \partial n \rrbracket$ sur e .
- ζ_3 est constante suivant les lignes normales à e .

Un calcul direct implique que :

$$\|\zeta_3\|_{L_2(T_- \cup T_+)} \leq C |e|^{1/2} \|\llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket\|_{L_2(e)} \quad (3.33)$$

$$\|\llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 \leq C \int_e \llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket^2 \zeta_2 ds \quad (3.34)$$

$$= C \int_e \llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket^2 (\zeta_2 \zeta_3) ds. \quad (3.35)$$

En utilisant l'équivalence des normes en dimension finie, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_e \llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket^2 (\zeta_2 \zeta_3) ds &= \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \left(\int_T \nabla^2 v : \nabla^2 (\zeta_2 \zeta_3) dx - \int_T (\Delta^2 v) (\zeta_2 \zeta_3) dx \right) \\
 &+ \int_e \left[\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket (\partial(\zeta_2 \zeta_3) / \partial n_e) + \llbracket \partial^2 v / \partial n_e \partial t_e \rrbracket (\partial(\zeta_2 \zeta_3) / \partial t_e) \right] ds \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \int_T \nabla^2 (v - u) : \nabla^2 (\zeta_2 \zeta_3) dx + \int_\Omega \nabla^2 u : \nabla^2 (\zeta_2 \zeta_3) dx \\
 &+ \int_e \left[\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket (\partial(\zeta_2 \zeta_3) / \partial n_e) + \llbracket \partial^2 v / \partial n_e \partial t_e \rrbracket (\partial(\zeta_2 \zeta_3) / \partial t_e) \right] ds \\
 &- \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \int_T (\Delta^2 v) (\zeta_2 \zeta_3) dx \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \int_T \nabla^2 (v - u) : \nabla^2 (\zeta_2 \zeta_3) dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \int_T (f - \Delta^2 v) (\zeta_2 \zeta_3) dx \\
 &+ \int_e \left[\llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket (\partial(\zeta_2 \zeta_3) / \partial n_e) + \llbracket \partial^2 v / \partial n_e \partial t_e \rrbracket (\partial(\zeta_2 \zeta_3) / \partial t_e) \right] ds.
 \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}
 \llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket^2_{L_2(e)} &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_e} [\|u - v\|_{H^2(T)} \|\zeta_2 \zeta_3\|_{H^2(T)} + \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)} \|\zeta_2 \zeta_3\|_{L_2(T)}] \right) \\
 &+ \llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket_{L_2(e)} \|\partial(\zeta_2 \zeta_3) / \partial n_e\|_{L_2(e)} \\
 &+ \llbracket \partial^2 v / \partial n_e \partial t_e \rrbracket_{L_2(e)} \|\partial(\zeta_2 \zeta_3) / \partial t_e\|_{L_2(e)} \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_e} [h_T^{-2} \|u - v\|_{H^2(T)} + \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)}] \right) \\
 &+ (|e|^{-\frac{3}{2}} \llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket_{L_2(e)} + |e|^{-\frac{5}{2}} \llbracket \partial v / \partial n_e \rrbracket_{L_2(e)}) \|\zeta_2 \zeta_3\|_{L_2(T)}
 \end{aligned}$$

De (3.31) et (3.33) on obtient :

$$\|\zeta_2 \zeta_3\|_{L_2(T)} \leq C |e|^{1/2} \llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket_{L_2(e)}$$

donc

$$\begin{aligned}
 |e|^3 \llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket^2_{L_2(e)} &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_e} [\|u - v\|_{H^2(T)}^2 + h_T^4 \|f - \Delta^2 v\|_{L_2(T)}^2] \right) \\
 &+ |e| \llbracket \partial^2 v / \partial n_e^2 \rrbracket^2_{L_2(e)} + \frac{1}{|e|} \|\partial(u - v) / \partial n_e\|_{L_2(e)}^2,
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 |e|^3 \|\llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_e} [|u - v|_{H^2(T)}^2 + h_T^4 \|f - \tilde{f}\|_{L_2(T)}^2] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{|e|} \|\partial(u - v) / \partial n_e\|_{L_2(e)}^2 \right), \\
 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e|^3 \|\llbracket \partial(\Delta v) / \partial n_e \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 &\leq C ([Osc_j(f)]^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - v|_{H^2(T)}^2 \\
 &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|} \|\partial(u - v) / \partial n_e\|_{L_2(e)}^2).
 \end{aligned}$$

$$a_h(v - u_h, w) \leq C ([Osc_j(f)]^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - v|_{H^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|} \|\partial(u - v) / \partial n_e\|_{L_2(e)}^2)^{\frac{1}{2}} \|w\|_h$$

et par conséquent,

$$\|u - u_h\|_h \leq C (\|u - v\|_h + Osc_j(f)) \quad \forall v \in V_h. \quad (3.36)$$

puisque v est arbitraire dans V_h alors on a l'estimation " abstraite " (3.23) ■

3.6.1 Une estimation concrète

Il est clair que la quantité $|||u|||_h$ est définie si $u \in H^s(\Omega)$, $s > 5/2$, alors que pour $\|u\|_h$ il suffit que $u \in H^s(\Omega)$, $s > 2$. Si une de ces conditions de régularité est vérifiée, alors on utilise l'interpolé de Lagrange dans l'estimation (3.23) on obtient une des estimation concrètes suivantes :

$$|||u - u_h|||_h \leq Ch^{s-2} |u|_{H^s(\Omega)} \quad 5/2 < s \leq k + 1 \quad (3.37)$$

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch^{s-2} |u|_{H^s(\Omega)} \quad 2 < s \leq k + 1 \quad (3.38)$$

3.6.2 Post traitement

La solution u_h obtenue par la méthode SIP est continue mais n'est pas de classe C^1 . L'utilisation de l'opérateur E_h nous permet de construire une solution approchée $\tilde{u}_h = E_h(u_h)$ de classe C^1 .

Théorème 3.6.2 *Soit u la solution faible de (3.1) et u_h la solution de (3.8). Alors*

$$|u - E_h(u_h)|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^{\min(s,k+1)-2}. \quad (3.39)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} |u - \tilde{u}_h|_{H^2(\Omega)} &\leq |u - E_h \Pi_h u|_{H^2(\Omega)} + |E_h(\Pi_h u - u_h)|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C(h^{\min(s,k+1)-2} + \|\Pi_h u - u_h\|_h) \\ &\leq C(h^{\min(s,k+1)-2} + \|\Pi_h u - u_h\|_h + \|u - u_h\|) \\ &\leq Ch^{\min(s,k+1)-2} \end{aligned}$$

■

3.7 ANALYSE A POSTERIORI

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.7.1 *Soit u la solution du problème (3.1) et u_h la solution du problème (3.8).*

Alors

$$C_1 \|u - u_h\|_h \leq \eta_h \leq C_2 (\sigma^{1/2} \|u - u\|_h + \text{Osc}_2(f)) \quad (3.40)$$

$$\eta_h = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f + \Delta^2 u_h\|_{L_2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e| \|\llbracket \partial^2 u_h / \partial n^2 \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 \right) \quad (3.41)$$

$$+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma^2}{|e|} \|\llbracket \partial u_h / \partial n \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 \quad (3.42)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives indépendantes de h .

On Note tout d'abord que la quantité η_h peut être calculer localement sur chaque triangle ce qui présente un avantage considérable par rapport à l'analyse a priori. Ce dernier avantage présente l'outil de base pour l'adaptation automatique de maillage. Avant de démontrer le théorème (3.7.1), nous signalons quelques propriétés de la méthode SIP.

► L'erreur résidu

$$\eta_T = h_T^2 \|f - \Delta^2 u_h\|_{L^2(T)} \quad (3.43)$$

indique si u_h résout l'équation biharmonique ou pas.

► La quantité

$$\eta_{e,1} = \frac{\sigma}{|e|^{\frac{1}{2}}} \|\llbracket \partial u_h / \partial n_e \rrbracket\|_{L^2(e)} \quad (3.44)$$

measure le fait que u_h appartient à $H_0^2(\Omega)$.

Le résidu :

$$\eta_{e,2} = |e|^{\frac{1}{2}} \|\llbracket \partial^2 u_h / \partial n_e^2 \rrbracket\|_{L^2(e)} \quad (3.45)$$

indique si $u_h \notin H^3(\Omega)$, alors que

$$\eta_{e,3} = |e|^{\frac{3}{2}} \|\llbracket \partial(\Delta u_h) / \partial n_e \rrbracket\|_{L^2(e)} \quad (3.46)$$

measure si u_h n'est pas dans l'espace $H^4(\Omega)$.

3.7.1 Fiabilité de la méthode SIP

Cette sous-section nous montrons la fiabilité de la méthode SIP i.e., l'estimateur η_h est une majoration de $\|u - u_h\|_h$ modulo un terme bien contrôlé et nous aide à démontrer facilement la convergence de la méthode SIP.

Démonstration du théorème (3.7.1)

La régularité de u et de $E_h(u_h)$ nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \partial(u - u_h) / \partial n_e \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 &= \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \partial u_h / \partial n_e \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \\ &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h} n_{e,1}^2 \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - u_h|_{H^2(T)}^2 &\leq 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (|u - E_h u_h|_{H^2(T)}^2 + |u_h - E_h u_h|_{H^2(T)}^2) \\ &\leq 2|u - E_h u|_{H^2(\Omega)}^2 + C \sum_{e \in \mathcal{E}_h} n_{e,1}^2 \end{aligned}$$

et on a par dualité,

$$|u - E_h u_h|_{H^2(\Omega)} = \sup_{\phi \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{a(u - E_h u_h, \phi)}{|\phi|_{H^2(\Omega)}} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} a(u - E_h u_h, \phi) &= \int_{\Omega} \nabla^2(u - E_h u_h) : \nabla^2 \phi dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2(u_h - E_h u_h) : \nabla^2 \phi dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u_h : \nabla^2(\phi - \Pi_h \phi) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla^2 u : \nabla^2 \phi dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u_h : \nabla^2(\Pi_h \phi) dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2(u_h - E_h u_h) : \nabla^2 \phi dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u_h : \nabla^2(\phi - \Pi_h \phi) dx \\ &\quad + a_h(u_h, \Pi_h \phi) - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u_h : \nabla^2(\Pi_h \phi) dx + \int_{\Omega} f(\phi, \Pi_h \phi) dx \\ &\quad \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u_h : \nabla^2(\phi - \Pi_h \phi) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Delta^2 u_h)(\phi - \Pi_h \phi) dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial(\Delta u_h)}{\partial n_e} \right] (\phi - \Pi_h \phi) ds \\
&\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 u_h}{\partial n_e} \right\} \right\} \left[\frac{\partial \Pi_h \phi}{\partial n_e} \right] ds - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e^2} \right] \left\{ \left\{ \frac{\partial(\phi - \Pi_h \phi)}{\partial n_e} \right\} \right\} ds \\
&\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial^2 u_h}{\partial n_e \partial t_e} \right] \frac{\partial(\phi - \Pi_h \phi)}{\partial t_e} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_h(u_h, \Pi_h \phi) &- \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u_h : \nabla^2 (\Pi_h \phi) dx \\
&= \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 u_h}{\partial n_e^2} \right\} \right\} \left[\frac{\partial \Pi_h \phi}{\partial n_e} \right] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 \Pi_h \phi}{\partial n_e^2} \right\} \right\} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e} \right] ds \\
&\quad + \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \int_e \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e} \right] \left[\frac{\partial \Pi_h \phi}{\partial n_e} \right] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(u - E_h u, \phi) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 (u_h - E_h u_h) : \nabla^2 \phi ds + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f - \Delta^2 u_h)(\phi - \Pi_h \phi) dx \\
&\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial(\Delta u_h)}{\partial n_e} \right] (\phi - \Pi_h \phi) ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial^2 u_h}{\partial n_e^2} \right] \left\{ \left\{ \frac{\partial(\phi - \Pi_h \phi)}{\partial n_e} \right\} \right\} ds \\
&\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial^2 u_h}{\partial n_e \partial t_e} \right] \frac{\partial(\phi - \Pi_h \phi)}{\partial t_e} ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 \Pi_h \phi}{\partial n_e^2} \right\} \right\} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e} \right] ds \\
&\quad + \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \int_e \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e} \right] \left[\frac{\partial \Pi_h \phi}{\partial n_e} \right] ds \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Le second membre de (3.48) peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 (u_h - E_h u_h) : \nabla^2 \phi dx \right| &\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \eta_{e,1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\phi|_{H^2(\Omega)} \\
\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f - \Delta^2 u_h)(\phi - \Pi_h \phi) dx \right| &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - \Delta^2 u_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-4} \|\phi - \Pi_h \phi\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\phi|_{H^2(\Omega)} \\
\left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial(\Delta u_h)}{\partial n_e} \right] (\phi - \Pi_h \phi) ds \right| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e|^3 \left\| \left[\frac{\partial(\Delta u_h)}{\partial n_e} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e|^{-3} \|\phi - \Pi_h \phi\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \eta_{e,3}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\phi|_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial^2 u_h}{\partial n_e^2} \right] \left\{ \frac{\partial(\phi - \Pi_h \phi)}{\partial n_e} \right\} ds \right| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e| \left\| \left[\frac{\partial^2 u_h}{\partial n_e^2} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e|^{-1} \left\| \frac{\partial(\phi - \Pi_h \phi)}{\partial n_e} \right\|_{L^2(e)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \eta_{e,2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\phi|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \left[\frac{\partial^2 u_h}{\partial n_e \partial t_e} \right] \frac{\partial(\phi - \Pi_h \phi)}{\partial t_e} ds \right| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e| \left\| \left[\frac{\partial^2 u_h}{\partial n_e \partial t_e} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e|^{-1} \left\| \frac{\partial(\phi - \Pi_h \phi)}{\partial t_e} \right\|_{L^2(e)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \eta_{e,1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\phi|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \frac{\partial^2 \Pi_h \phi}{\partial n_e} \right\} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e} \right] ds \right| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \eta_{e,1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \left\| \left\{ \frac{\partial^2 \Pi_h \phi}{\partial n_e} \right\} \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \eta_{e,1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\Pi_h \phi|_{H^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \eta_{e,1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\phi|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \int_e \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e} \right] \left[\frac{\partial \Pi_h \phi}{\partial n_e} \right] ds \right| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \eta_{e,1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e|^{-1} \left\| \left[\frac{\partial(\Pi_h \phi - \phi)}{\partial n_e} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \eta_{e,1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\phi|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$a(u - E_h u_h, \phi) \leq C \eta_h |\phi|_{H^2(\Omega)} \quad (3.49)$$

et par conséquent,

$$\|u - u_h\| \leq C \eta.$$

■

3.7.2 Efficacité

Une autre chose très importante dans l'analyse a posteriori, c'est ce qu'on appelle l'efficacité, i.e.,

$$\eta_h \leq C \left(\sigma^{\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_h + \text{Osc}_{k-3}(f) \right).$$

ce qui signifie que l'indicateur d'erreur présente une minoration de l'erreur autrement dit il définit une norme équivalente à $\|\cdot\|_h$.

Preuve.

$$\eta_h^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - u_h|_{H^2(T)}^2 + \sigma^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[\partial(u - u_h) / \partial n_e \right] \right\|_{L_2(e) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - \tilde{f}\|_{L_2(T)}^2 \quad (3.50)$$

■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours de ce mémoire nous avons remarqué quelques remarque importantes concernant l'analyse par élément continue / discontinue en particulier la méthode SIP, et nous les résumons comme suit :

- pour les problèmes d'ordre intérieurs la méthode SIP est une simple méthode non conforme.
- si la solution exacte du problème est suffisamment régulière ($H^4(\Omega)$). Alors la méthode SIP donne les mêmes résultats que les méthode conforme de classe C^1 de plus la méthode SIP est plus simple à implémentée (programmée).
- Contrairement au cas de la méthode problème d'ordre supérieurs 4,6,8 etc sans difficultés.
- Puisque les espace des éléments finis utilisés sont des espace standards l'utilisation de la méthode SIP conduit à un système linéaire dont le conditionnement est d'ordre 0 (h^{-2} au lieu $0h^{-4}$ pour d'autre méthode .
- Pour les problème d'ordre deux la méthode des éléments finis discontinus fait intervenir des systèmes linéaire de taille relativement grands par rapport aux méthodes continus. Alors que pour les problème d'ordre quatre c'est l'inverse qui apparait
- LA méthode SIP peut être programmée sur un maillage non conforme. Alors que , pour les méthode continue nécessite un maillage conforme.

La convergence adaptative de maillage pour la méthode SIP est un problème ouvert. comme perspective de ce travail, nous pouvons citer essentiellement :

- L'application de la méthode SIP pour d'autres modèles mathématiques par exemple, l'équation de Cahn-Hillard, Stokes,.....

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Bonito and R.H. Nochetto. Quasi-optimal convergence rate of an interior penalty adaptive discontinuous Galerkin method , SIAM J. Numer. Anal., 2010.
- [2] B. and L.-Y. Sung. C^0 interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains
J. Sci. Comput., 2005.
- [3] B. Rivière, M.F. Wheeler and V. Girault. A priori error estimates for finite element methods based on discontinuous approximation spaces for elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal., 2001.
- [4] B., T. Gudi and L.-Y. Sung, An a posteriori error estimator for a quadratic C^0 interior penalty method for the biharmonic problem, IMA J. Numer. Anal.,2010.
- [5] D. Arnold, An interior penalty finite element method with discontinuous elements, SIAM J. Numer. Anal., 1982.
- [6] D. N. Arnold and F. Brezzi, Locking-free finite element methods for shells, Math. Comp., 66 (1997), pp. 114.
- [7] G.Engel, k .Garikipati, T.J.R. Hughes, M.G. larson,G. Engel, K. Garikipati, T.J.R. Hughes, M.G. Larson, L. Mazzei, and R.L. Taylor . Continuous/discontinuous finite

-
- element approximations of fourth order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2002.
- [8] A. Ern. Aide-mémoire éléments finis. Dunod, Paris 2005.
- [9] A. Ern et J-L Guermond. Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre. Springer 2002.
- [10] H. HADRI. Méthode des finis discontinus pour les problèmes elliptiques d'ordre deux. Mémoire Master. Univ. Kasdi Merbah-Ouargla 2014.
- [11] I. Mozolevski and E. Süli. A priori error analysis for the hp-version of the discontinuous Galerkin finite element method for the biharmonic equation, Comput. Methods Appl. Math., 2003.
- [12] J. Blowey and M. Jensen. Frontiers in Numerical Analysis-Durham 2010
- [13] M.W. Johnson and R.W McLay. Convergence of finite element method in the theory of elasticity. J. Appl. Mech. E. 35,P. 274-278. 1969.
- [14] O.A. Karakashian and F. Pascal Convergence of adaptive discontinuous Galerkin approximations of second-order elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal., 2007.
- [15] R.H.W. Hoppe and G. Kanschat and T. Warburton Convergence analysis of an adaptive interior penalty discontinuous Galerkin method, SIAM J. Numer. Anal., 2008/2009.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا إلى حل نموذج رياضي للمعادلات التفاضلية من الرتبة الرابعة من النمط الناقص باستخدام طريقة العناصر المنتهية وقد تطرقنا إلى تقدير الخطأ المركب بعدة طرق و نذكر حالة بينا تقارب الطريقة نحو الحل الصحيح في حال تقارب خطوة التجزئة إلى الصفر

Abstract

In this work, we have studied a model problem of elliptic partial differential equations of order four by using the finite element method. We have estimate the error between the exact solution and the approximation solution and we have prouve the convergece of the methode when $(h \rightarrow 0)$.