UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par :Mona Hadji

Thème

Propriétés spectrales des semigroupes

Soutenu publiquement le : /06/2014

Devant le jury composé de :

Kouidri Mohamed	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Baddidja Salim	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Exminateur
Agti Mohamed	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

l'année universitaire :2013/2014

الإهـــــدا ء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وبنوره تتنزل البركات

أهدي ثمرة جهدي إلى

رمز الحب الصافي ونبع الحنان والعطاء الوافي إلى التي أوصى بها خير الأنام

وجعلت الجنة إكراما لها تحت الأقدام

أمي .... ثم أمي لآخر يوم في عمري

إلى من أهداني بسمة الأمل و علمني المبادئ والكفاح و اسير على طريق

النجاح إلى أبي العزيز أطال الله في عمره

إلى الذين قاسموني فرحة نجاحي كل سنة وفي كل لحظة إلى أفراد عائلتي

صغيرا وكبيرا

إلى الذين ساعدوني في إنجاز هذا العمل طباعه وكتابه وخاصة سهيلة

وياسين إلى حاملي مشعل العلم والأمل وساروا بي هذا النهج من معلمي الأول

إلى أستاذي اليوم

التشكرات

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

*وما توفيقي إلا بالله *

الحمد لله الذي أخرجني من الظلمات إلى النور وسهل لي طريق العلم

الحمد لله الذي هداني وكل الإحسان أتاني وأن وفقني لإنجاز هذا العمل والصلاة

والسلام على الحبيب المصطفى صلى الله عليه وسلم

الذي قال .... ومن سلك طريق يلتمس فيه علما سهل الله به طريق إلى

الجنة ....)

أتقدم بالشكر الجزيل إلى الأستاذ القدير:

*محمد أقطي

أساتذة قسم الرياضيات

خاصة الأستاذ محمد بو سعيد وكافة الزملاء

وكل من كان له يدعون في إنجاز هذا البحث

Table des matières

Notations

- E un espace de Banach.
- $L(E)$ l'algèbre de banach des opérateurs linéaires bornés dans E.
- $L(E,F)$ l'espace des opérateurs linéaires et continus de E dans F.
- A opérateur.
- $D(A)$ l'ensemble de difinition de A.
- $\overline{D(A)}$ l'adherence de l'ensemble D(A).
- $GL(E)$ l'ensemble des éléments inversible de L(E).
- ImA l'image de A.
- $G(A)$ le graphe de A.
- $\rho(A)$ l'ensemble résolvante de $A \in L(E)$.
- $\sigma(A)$ le spectre de $A \in L(E)$.
- I l'unité de L(E).
- $r(T(t))$ le rayon spectrale de T(t).
- $SG(m,\omega)$ l'ensemble des C_0-semi groupe $T(t)_{t\geq 0} \subset L(E)$.

Introduction

Dans ce travail on a étudié les propriétés élémentaires et spectrales des semigroupes d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach , en particulier les propriétés spectrals des semigroupes analytiques , C_0- semigroupes , différentiables et compacts .
Notre travail a été effectué selon le plans suivants : Le premier chapitre est une présentation des notions qui seront utilisées dans cette recherche .
Le deuxième chapitre présente la théorie des semigroupes d'opérateurs linéaire bornés et propriétés élémentiaires du générateur infinitésimal d'un semigroupe.
Le troisième chapitre présente les propriétés spectrales des semigroupes.
Pour les semigroupe uniforméments continus on montre que si A est un générateur infinitésimal du semigroupe uniformément continue $T(t)$ alors $e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(A))$, $\forall t \geqslant 0$ et on a preuvé pour les C_0- semigroupe que $e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(A))$, $\forall t \geqslant 0$.
Pour les semigroupes analytique on expose le théorème suivant :
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0- semigroupe $T(t)$ satisfaisant $\|T(t)\| \leqslant Me^{wt}$. Alors $T(t)$ est analytique si et seulement s'il existe deux constantes $c > 0$ et $\Lambda > 0$ tel que :
$\| AR(\lambda; A)^{n+1} \| \leqslant \dfrac{c}{n\lambda^n}$ pour $\lambda > n\Lambda$, $n \in N$. Et pour C_0- semigroupe compact on a étudie en particulier le théoréme suivant :
Soit $T(t)$ un C_0- semigroupe et A son générateur infinitésimal alors $T(t)$ est un semigroupe compact si et seulement si $T(t)$ est continu pour la topologie uniforme pour $t > 0$. et $R(\lambda; A)$ est compact pour $\lambda \in \rho(A)$.

Chapitre 1 (Théorie générale)

1.1 L'espace des opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On désigne par $L(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires et continus de E dans F muni de la norme :

$$\|T\|_{L(E,F)} = \sup_{x \in E, \|x\| \leqslant 1} \|Tx\|$$

On pose $L(E) = L(E, E)$.

Théorème 1.1.1 Banach-Steinhaus
Soient E et F deux espaces de Banach.
soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F.
On suppose que :

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \ \forall x \in E.$$

.
Alors :

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L(E,F)} < \infty.$$

Autrement dit, il existe une constante c tel que :
$\|T_i x\| \leqslant c\|x\| \ \forall x \in E \ \forall i \in I$.

Remarque 1.1.1
Pour un opérateur linéaire $A : \ D(A) \subset E \longrightarrow E$ nous noterons par :
$ImA = Ax \mid x \in D(A)$ l'image de A nous noterons par $GL(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de $L(E)$.
Si $\|I - A\| < 1$, alors $A \in GL(E)$ et

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (I - A)^n.$$

.

Lemme 1.1.1
Soit E un espace de Banach, et soit $f : [a, b] \longrightarrow E$ une fonction continue. Alors :

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s) ds = f(a).$$

1.2 Opérateurs fermés

Définition 1.2.1
On dit qu'un opérateur A est fermé si le graphe de A noté
$G(A) = U_{x \in D(A)}[x, Ax] \subset E \times F$ est fermé dans $E \times F$.

1.3 Les opérateurs compacts

Soit $L(E, Y)$ un espace normé d'opérateurs linéaires bornés de E dans Y.

Définition 1.3.1
On dit qu'un opérateur $A \in L(E, Y)$ est compact si l'image par A de la boule unité de l'espace E, est relativement compacte dans l'espace Y.

Théorème 1.3.1
Tout opérateur compact $A \in L(E, Y)$ fait correspondre à un ensemble borné dans E un ensemble compact dans Y. On remarque que A est compact si et seulement si l'image de toute partie bornée est relativement compacte ou, de façon équivalente si et seulement si l'image de tout suite bornée possède une sous - suite convergente.

Corollaire 1.3.1
Si $A = \lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n$. (au sens de la norme de $L(E, Y)$), où les A_n sont des opérateurs compacts ou de dimension finie alors, A est un opérateur compact.

Théorème 1.3.2
Soient $A \in L(E, Y)$ et $C \in L(E, Y)$. Si l'un quelconque (au moins) de ces deux opérateurs est compact, leur produit CA est un opérateur compact.

1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.4.1
Soit E un espace de Banach. $A \in L(E)$. L'ensemble résolvant est :
$\rho(A) = \{\lambda \in C;\ (A - \lambda I)$ est bijectif de E sur $E\}$.
Le spectre $\sigma(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant, $\sigma(A) = C \setminus \rho(A)$.

Remarque 1.4.1 Si $\lambda \in \rho(A)$ alors $(A - \lambda I)^{-1} \in L(E)$.

Le spectre d'un opérateur compact

Proposition 1.4.1
Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact et $\sigma(A) \subset [-\|A\|,\ +\|A\|]$.

Proposition 1.4.2
Soit E un espace de Banach et A un opérateur compact de E dans E, de spectre $\sigma(A)$

1. Si E est de dimension infinie, $0 \in \sigma(A)$.

2. $\sigma(A)$ est dénombrable et s'il est infini, on peut ranger ses éléments en une suite λ_n, $|\lambda_{n+1}| \leqslant |\lambda_n|$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$.

Proposition 1.4.3
L'ensemble résolvante $\rho(A)$ est un ouvert de C , sur lequel $\lambda \longrightarrow R_\lambda(A)$ est analytique et vérifie l'équation résolvante :
$\forall\ \lambda \in \rho(A),\ \forall \mu \in \rho(A)$
$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A)$.

Chapitre 2 (Semigroupes d'opérateurs linéaires bornés)

2.1 Semigroupe d'opérateurs bornés

Définition 2.1.1 soit E un espace de Banach sur le corps C et soit $L(E)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur E.
la famille $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset L(E)$ est appelée semigroupe si :
$i)$ $T(0) = I$ (I l'élément unité d'algèbere $L(E)$)
$ii)$ $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\forall s,t \in R_+$.

Définition 2.1.2 le semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est appelé semigroupe fortement continu et noté C_0 semigroupe si l'application $t \longrightarrow T(t)$ est continu pour la topologie forte d'opérateurs sur $L(E)$ c'est-à-dire
$\lim\limits_{t\to t_0} \| T(t)f - T(t_0)f \| = 0$ pour tout $f \in E$ et pour tout $t \in R_+$ tel que $t \longrightarrow t_0$

Définition 2.1.3 on appelle semigroupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset L(E)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \| T(t) - I \| = 0$$

Définition 2.1.4 l'opérateur linéaire A défini par :
$D(A) = \{x \in E, \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{T(t)x - x}{t} \text{ existe } \}$
et $Ax = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} = \dfrac{dT(t)x}{dt} |_{t=0}$
pour $x \in D(A)$ est le générateur infinitésimal du semigroupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de A.

Remarque 2.1.1 les semigroupes uniformément continus sont C_0- semigroupes puisque :
$\| T(t)x - x \| \leqslant \| T(t) - I \| \| x \|$.
Mais il existe des C_0- semigroupes qui ne sont pas uniformément continu.

Exemple 2.1.1 considérons l'espace $L_p]0,+\infty[, 1 \leqslant p < +\infty$, avec le norme :
$\|f\|_p = \{\int_0^{+\infty} |f(\alpha)|^p d\alpha\}^{\frac{1}{p}}$.
avec cette norme , $L_p]0,+\infty[, 1 \leqslant p < +\infty$ est un espace de Banach . Définissons :
$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha), \forall t \geqslant 0$ et $\alpha \in]0,+\infty[$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|T(t)f\|_p &= \{\textstyle\int_0^{+\infty} |(T(t)f)(\alpha)|^p d\alpha\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \{\textstyle\int_0^{+\infty} |f(\alpha+t)|^p d\alpha\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \{\textstyle\int_t^{+\infty} |f(k)|^p dk\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \{\textstyle\int_0^{+\infty} |f(k)|^p dk\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_p . \end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1, \forall t \geqslant 0$.
Il est évident que $T(0) = I$ et $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t,s \geqslant 0$.
De plus on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \| T(t)f - f \|_p &= \lim_{t\to 0}\{\textstyle\int_0^{+\infty} |(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)|^p d\alpha\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{t\to 0}\{\textstyle\int_0^{+\infty} |(f(\alpha+t) - f(\alpha)|^p d\alpha\}^{\frac{1}{p}} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

par suit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0- semigroupe d'opérateurs linéaires bornés sur $L_p]0,+\infty[$

.
soit $A : D(A) \subset L_p]0,+\infty[\longrightarrow L_p]0,+\infty[$ le générateur infinitésimal du C_0- semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$.
Si $f \in D(A)$, alors nous avous :

$$\begin{aligned} Af(\alpha) &= \lim_{t\to 0}\frac{T(t)f(\alpha)-f(\alpha)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\alpha+t)-f(\alpha)}{t} \\ &= f^{'}(\alpha) \end{aligned}$$

uniformément par rapport à α. Par conséquent :
$D(A) \subset \{f \in L_p]0,+\infty[\mid f' \in L_p]0,+\infty[\}$.
si $f \in L_p]0,+\infty[$ tel que $f' \in L_p]0,+\infty[$, alors on a :

$$\| \frac{T(t)f-f}{t} - f' \|_p = \{\int_0^{+\infty} |\frac{(T(t)f)(\alpha)-f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)|^p d\alpha\}^{\frac{1}{p}}$$

.
Mais :

$$\begin{aligned} |\frac{(T(t)f)(\alpha)-f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)| &= |\frac{f(\alpha+t)-f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)| \\ &= |[\tfrac{1}{t}f(\mathsf{T})]|_\alpha^{\alpha+t} - [\tfrac{1}{t}f'(\alpha)\mathsf{T}]|_\alpha^{\alpha+t}| \\ &= |\tfrac{1}{t}\int_\alpha^{\alpha+t}[f'(\mathsf{T})-f'(\alpha)]d\,\mathsf{T}\,| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Uniformément par rapport à α si $t \longrightarrow 0$. Alors :
$\| \dfrac{T(t)f-f}{t} - f' \|_p \longrightarrow 0$ si $t \longrightarrow 0$ et on voit que :
$\{f \in L_p]0,+\infty[| \, f' \in L_p]0,+\infty[\} \subset D(A)$.
par conséquent :
$D(A) = \{f \in L_p]0,+\infty[| \, f' \in L_p]0,+\infty[\}$ et $Af = f'$.

Remarque 2.1.2 le semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset L(E)$ est fortement continu si et seulement si :
$\forall f \in E$, on a $T(t)f \longrightarrow f$ quand $t \longrightarrow 0$.

2.1.1 Semigroupe uniformément continus propriétés élémentaires des semigroupes uniformément continus

Définition 2.1.1.1
on appelle semigroupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur E une famille $\{T(t)\}_{t\geqslant O} \subset L(E)$ vérifiant les propriétés suivantes :
(i) $T(0) = I$;
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geqslant 0$;
(iii) $\lim_{t\to 0} \| T(t) - I \| = 0$.

Définition 2.1.1.2
On appelle générateur infinitésimal du semigroupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire
$A : E \longrightarrow E$
$A = \lim_{t\to 0}\dfrac{T(t)-I}{t}$.

Lemme 2.1.1.1
Soit $A \in L(E)$. Alors $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur E dont le générateur infinitésimal est A.

Preuve

Soit $A \in L(E)$ et $[0,+\infty[\ni t \mapsto T(t) \in L(E)$ une application définie par :$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!}$.

La série du membre de droite de l'égalité est convergente pour la topologie de la norme de $L(E)$.

De plus, il est évident que $T(0) = I$ et $T(t+s) = T(t)T(s)$ quels que soient $t, s \geqslant 0$. Compte tenu de l'inégalité :

$\| T(t) - I \| \leqslant e^{t\|A\|} - 1, \forall t \geqslant 0,$

il résulte : $\lim_{t \longrightarrow 0} \| T(t) - I \| = 0$

Donc la famille $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset L(E)$ est un semigroupe uniformément continu .

D'autre part , puisque :

$$\begin{aligned}
\| \frac{T(t)-I}{t} - A \| &= \| \tfrac{1}{t}(e^{tA} - I - tA) \| \\
&= \| \tfrac{1}{t}(\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!} - I - tA) \| \\
&= \| \frac{1}{t}(I + tA + \textstyle\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!} - I - tA) \| \\
&\leqslant \tfrac{1}{t} \textstyle\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{t^k \| A \|^k}{k!} \\
&= \tfrac{1}{t}(1 + t \| A \| + \textstyle\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{t^k \| A \|^k}{k!} - 1 - t \| A \|) \\
&= \tfrac{1}{t}(e^{t\|A\|} - 1 - t \| A \|) \\
&= \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t \| A \|} \| A \| - \| A \| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

si $t \longrightarrow 0$,nous obtenons :

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{T(t)-I}{t} = A$

Le semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ admet donc pour générateur infinitésimal l'opérateur A.□

Lemme 2.1.1.2

Etant donné un opérateur $A \in L(E)$, il existe un unique semigroupe uniformément continue $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$

$T(t) = e^{tA}, \forall t \geqslant 0,$

ayant pour générateur l'opérateur A.

preuve :

Soit $A \in L(E)$. Alors il existe un semigroupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ engendré par A .Si $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un autre semigroupe uniformément continu engendré par A , alors nous avons :

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{T(t)-I}{t} = A$ et : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{S(t)-I}{t} = A.$

par conséquent :

$\lim\limits_{t\to 0} \| \dfrac{T(t)-s(t)}{t} \| = 0.$

pour $a \in [0,+\infty[$, nous l'intervalle $I_a = [0, a[$. comme $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ sont des semigroupes uniformément continue , nous voyons que les applications

$t \longrightarrow \| T(t) \|$

et $t \longrightarrow \| S(t) \|$

sont continues . Il existe $C_a \in [1, +\infty[$ tel que :

$sup_{t\in I_a}\{\| T(t) \|, \| S(t) \|\} \leqslant C_a.$

Si $e > 0$,il existe $t_0 \in I_a, t_0 > 0$, tel que
$\| \dfrac{T(t) - S(t)}{t} \| \leqslant \dfrac{e}{ac_a^2}, \forall t \in]0, t_0[$.
Soit $t \in I_a$ arbitrairement fixé et $n \in N^*$ tel que $\frac{t}{n} \in [0, t_0[$. Alors :

$$\begin{aligned}
T(t) - S(t) &= [T(n\tfrac{t}{n})] - [S(n\tfrac{t}{n})] \\
&= T(n\tfrac{t}{n})S(0\tfrac{t}{n}) - T((n-1)\tfrac{t}{n})S(1\tfrac{t}{n}) + T((n-1)\tfrac{t}{n})S(1\tfrac{t}{n}) - T((n-2)\tfrac{t}{n})S(2\tfrac{t}{n}) \\
&+T((n-2)\tfrac{t}{n})S(2\tfrac{t}{n}) - \cdots - T(0\tfrac{t}{n}S(n\tfrac{t}{n}) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}[T((n-k)\tfrac{t}{n})S(k\tfrac{t}{n}) - T((n-k-1)\tfrac{t}{n})S((k+1)\tfrac{t}{n})] \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} T((n-k-1)\tfrac{t}{n})[T(\tfrac{t}{n}) - S(\tfrac{t}{n})]S(k\tfrac{t}{n})
\end{aligned}$$

quel que soit $t \in I_a$.
De l'inégalité : $\| \dfrac{T(\frac{t}{n}) - S(\frac{t}{n})}{\frac{t}{n}} \| \leqslant \dfrac{e}{ac_a^2}$,nous obtenons $\| T(\frac{t}{n}) - S(\frac{t}{n}) \| \leqslant \dfrac{e}{ac_a^2}\dfrac{t}{n}$
et par suite :

$$\| T(t) - S(t) \| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} c_a \frac{e}{ac_a^2}\frac{t}{n}c_a < e, \forall t \in I_a$$

puisque $e > 0$ est arbitraire , il en résulte que $T(t) = S(t)$, pour tout $t \in I_a$.
Mais, comme $a \in]0, +\infty[$ est aussi arbitraire , il s'ensuit que $T(t) = S(t), \forall t \in [0, +\infty[$.présentons maintenant la condition nécessaire et suffissante pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformément continu . $\square$

Théorème 2.1.1.1
un opérateur $A : E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné .

Preuve
$\Rightarrow$ Soit $A : E \longrightarrow E$ le générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformément continue $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset L(E)$. Alors :$\lim\limits_{t\to 0} \parallel T(t) - I \parallel = 0$.
L'application $[0, +\infty[\ni t \mapsto T(t) \in L(E)$ est continue et par suite $\int_0^t T(s)ds \in L(E)$.
Avec le lemme 1.1.1, on voit que :
$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^{\mathsf{T}} T(s)ds = T(0) = I$.
Il existe donc $\mathsf{T} > 0$ tel que :
$\parallel \frac{1}{t}\int_0^{\mathsf{T}} T(t)dt - I \parallel < 1$.
compte tenu de la remarque 1.1.1, l'élément $\frac{1}{\mathsf{T}}\int_0^{\mathsf{T}} T(t)dt$ est inversible, d'où il s'ensuit que $\int_0^{\mathsf{T}} T(t)dt$ est inversible.
Nous avons :
$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{\mathsf{T}} T(t)dt &= \frac{1}{h}[\int_0^{\mathsf{T}} T(t+h)dt - \int_0^{\mathsf{T}} T(t)dt] \\ &= \frac{1}{h}\int_{\mathsf{T}}^{\mathsf{T}+h} T(\mu)d\mu - \frac{1}{h}\int_0^h T(\mu)d\mu.\end{aligned}$$
Avec le lemme 1.1.1, nous obtenons :
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\tfrac{T(h)-I}{h}\int_0^{\mathsf{T}} T(t)dt &= \lim_{h\to 0}[\tfrac{1}{h}\int_{\mathsf{T}}^{\mathsf{T}+h} T(\mu)d\mu - \tfrac{1}{h}\int_0^{0+h} T(\mu)d\mu] \\ &= T(\mathsf{T}) - T(0) = T(\mathsf{T}) - I,\end{aligned}$$
d'où : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{T(h)-I}{h} = [T(\mathsf{T}) - I][\int_0^{\mathsf{T}} T(t)dt]^{-1}$.
Par consèquent, le générateur infinitésimal du semigroupe uniformément continue $\{T(t)\}_{t\geqslant}0$ est l'opérateur :
$A = [T(\mathsf{T}) - I][\int_0^{\mathsf{T}} T(t)dt]^{-1} \in L(E)$
$\Leftarrow$ cette implication est évidente compte tenu du lemme 2.1.1.1 et lemme 2.1.1.2. $\square$

Corollaire 2.1.1.1
Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant}0$ un semigroupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal. Alors :
(i) il existe $w \geqslant 0$ tel que : $\parallel T(t) \parallel \leqslant e^{wt}, \forall t \geqslant 0$;
(ii) l'application $[0, +\infty[\ni t \mapsto T(t) \in L(E)$ est différentiable pour la topolgie de la norme et $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A, \forall t \geqslant 0$.

Preuve
(i) Nous avons $\parallel T(t) \parallel = \parallel e^{tA} \parallel \leqslant e^{t\|A\|}, \forall t \geqslant 0$.Pour $w = \parallel A \parallel$, nous obtenons l'inégalité : $\parallel T(t) \parallel \leqslant e^{wt}, \forall t \geqslant 0$.
L'assertion (ii) provient des égalités suivantes :
$A = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{T(t)-I}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{T(t)-T(0)}{t-0}$,
nous en déduisons que l'application considérée est dérivable au point $t = 0$. Soient $t > 0$ et $h > 0$. Alors :
$$\parallel \frac{T(t+h)-T(t)}{h} - AT(t) \parallel \leqslant \parallel \frac{T(h)-I}{h} - A \parallel\parallel T(t) \parallel \leqslant \parallel \frac{T(h)-I}{h} - A \parallel e^{t\|A\|},$$
d'où :
$$\lim_{h\to 0} \parallel \frac{T(t+h)-T(t)}{h} - AT(t) \parallel = 0 .$$
par conséquent , l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à droite et on a : $\dfrac{d^+T(t)}{dt} = AT(t), \forall t > 0$. Soient $t > 0$ et $h < 0$ tel que $t + h > 0$ .Alors :

$\| \dfrac{T(t+h)-T(t)}{h} - AT(t) \| \leqslant \| \dfrac{I-T(-h)}{h} - AT(-h), \| T(t+h) \|$

$\leqslant \| \dfrac{T(-h)-I}{-h} - AT(-h) \| e^{(t+h)\|A\|}$,

d'où il vient :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{T(t+h)-T(t)}{h} = AT(t)$.

par conséquent l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à gauche et nous avons : $\dfrac{d^- T(t)}{dt} = AT(t), \forall t > 0.$

Finalement on voit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0, +\infty[$ et nous avons :

$\dfrac{dT(t)}{dt} = AT(t), \forall t \geqslant 0$.

on vérifie que $AT(t) = T(t)A, \forall t \geqslant 0.$ $\square$

2.1.2 Semigroupes fortement continus
propriétés élémentaires des C_0 - semigroupes

Définition 2.1.2.1
On appelle C_0 - semigroupe ou semigroupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur E une famille $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset L(E)$ vérifiant les propriétés suivantes :
i) $T(0) = I$;
ii) $T(t+s) = T(t)\,T(s)$, $\forall t, s \geqslant 0$;
iii) $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x$, $\forall x \in E$.

Définition 2.1.2.2
On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 - semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble :
$D(A) = \{x \in E \mid \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{T(t)x - x}{t}$ existe $\}$ par : $Ax = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{T(t)x - x}{t}, \forall\, x \in D(A)$.

Remarque 2.1.2.1 Il est clair que le générateur infinitésimal d'un C_0 - semigroupe est un opérateur linéaire.

Théorème 2.1.2.1 soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0 - semigroupe d'opérateurs linéaires bornés. Alors :
(i) il existe $\mathsf{T} > 0$ et $M \geqslant 1$ tel que : $\| T(t) \| \leqslant M, \forall\, t \in [0, \mathsf{T}]$.
(ii) il existe $w \in R$ et $M \geqslant 1$ tel que : $\| T(t) \| \leqslant Me^{wt}, \forall\, t \geqslant 0$.

Preuve
(i) supposons que pour tout $\mathsf{T} > 0$ et tout $M \geqslant 1$, il existe $t \in [0, \mathsf{T}]$ tel que $\| T(t) \| > M$ pour $\mathsf{T} = \frac{1}{n}$ et $M = n \in N^*$, il existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ tel que $\| T(t_n) \| > n$.
Donc la suite $(\| T(t_n) \|)_{n\in N^*}$ est non bornée.
Si la suite $(\| T(t_n)x \|)_{n\in N^*}$ était bornée pour tout $x \in E$, alors compte tenu du théoréme de 1.1.1 , il en résulterait que $(\| T(t_n) \|)_{n\in N^*}$ serait bornée , mais cela contredit l'affirmation précédent .
Donc il existe $x \in E$ tel que $(\| T(t_n)x_0 \|)_{n\in N^*}$ soit non bornée .
D'autre par , compte tenu de la définition **(2.1.2.1) (iii)**, il résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \| T(t_n)x_0 \| = x_0$ et cela est contradictoire .
(ii) pour $h > 0$ et $t > h$, nous noterons $m = [\frac{t}{h}] \in N^*$ compte tenu du théorème de division avec reste, il existe $r \in [0, h]$ tel que $t = mh + r$. Alors :
$\| T(t) \| = \| T(mh+r) \| = \| T(mh)T(r) \| \leqslant \| T(h) \|^m \| T(r) \| \leqslant M^m\, M \leqslant Me^{\frac{t}{h}\ln M}$.
L'inégalité de l'énoncé en résulte en prenant $w = \frac{1}{h}\ln M$. □

Corollaire 2.1.2.1 si $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0- semigroupe , alors l'application : $[0, +\infty[\ni t \longmapsto T(t)x \in E$ est continue sur $[0, +\infty[$, quel que soit $x \in E$.

Preuve soient $t_0, h \in [0, +\infty[$ et $x \in E$ si $t_0 < h$, nous avons :
$$\begin{aligned}
\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\| &= \|T(t_0)T(h)x - T(t_0)x\| \\
&= \|T(t_0)[T(h)x - x]\| \\
&\leqslant \|T(t_0)\|\|T(h)x - x\| \\
\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\| &\leqslant Me^{wt_0}\|T(h)x - x\|
\end{aligned}$$

si $t_0 > h$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|T(t_0-h)x - T(t_0)x\| &= \|T(t_0-h)x - T(t_0-h+h)x\| \\
&= \|T(t_0-h)x - T(t_0-h)T(h)x\| \\
&\leqslant \|T(t_0-h)\|\|T(h)x-x\| \\
\|T(t_0-h)x - T(t_0)x\| &\leqslant Me^{w(t_0-h)}\|T(h)x-x\|
\end{aligned}$$

la continuité forte en t_0 de l'application considérée dans l'énoncé est évidente. □

Définition 2.1.2.3 on dit que le C_0- semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est uniformément borné s'il existe $M \geqslant 1$ tel que : $\|T(t)\| \leqslant M$, $\forall\, t \geqslant 0$.

Théorème 2.1.2.2 soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0- semigroupe pour lequel il existe $w \in R$ et $M \geqslant 1$ tel que :
$\|T(t)\| \leqslant Me^{wt}$, $\forall\, t \geqslant 0$.
Alors la famille $\{S(t)\}_{t\geqslant 0} \subset L(E)$, où :
$S(t) = e^{-wt}T(t)$, $\forall\, t \geqslant 0$ est un C_0- semigroupe ayant la propriété :
$\|S(t)\| \leqslant M$, $\forall\, t \geqslant 0$.
De plus , si A est le générateur infinitésimal du C_0- semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, alors le C_0- semigroupe $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ pour générateur infinitésimal l'opérateur$B = A - wI$.

Preuve Dans les conditions du théorème, il evident que $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0- semigroupe et : $\|S(t)\| = \|e^{wt}T(t)\| \leqslant e^{-wt}Me^{wt} = M, \forall t \geqslant 0$.
Donc $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0- semigroupe uniformément borné .
Soit A le générateur infinitésimal du C_0- semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ si B est générateur infinitésimal du C_0- semigroupe $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, alors pour tout $x \in D(A)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{S(h)x-x}{h} &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{e^{-wh}T(h)x-x}{h} \\
= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{(e^{-wh}-1)T(h)x}{h} &+ \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{T(h)x-x}{h} \\
&= -wx + Ax = (A-wI)x
\end{aligned}$$

d'où il résulte que $x \in D(A)$ et $Bx = (A - wI)x$.
Soit $x \in D(A)$. Alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{T(h)x-x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{wh}S(h)x-x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(e^{wh}-1)S(h)x}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{S(h)x-x}{h} \\
&= (wI+B)x,
\end{aligned}$$

d'où il vient que $x \in D(B)$ et $Ax = (wI + B)x$. par conséquent $D(A) = D(B)$ et $B = A - wI$. □

Remarque 2.1.2.2 soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0- semigroupe pour lequel il existe $w \in R$ et $M \geqslant 1$ tel que :
$\|T(t)\| \leqslant Me^{wt}$, $\forall\, t \geqslant 0$.
si $w < 0$, alros nous obtenons : $\|T(t)\| \leqslant Me^{wt} \leqslant M$, $\forall\, t \geqslant 0$.
par conséquent on peut considérer que $w \geqslant 0$. Nous noterons par $SG(M, w)$ l'ensemble des C_0- semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset L(E)$
pour les quels il existe $w \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ tel que : $\|T(t)\| \leqslant Me^{wt}$, $\forall\, t \geqslant 0$.

Théorème 2.1.2.3 L'unicité de l'engendrement
Soient deux C_0- semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A . Alors :
$T(t) = S(t)$, $\forall\, t \geqslant 0$.

Preuve Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. Définissons l'application
$[0,t] \ni S \longmapsto U(S)x = T(t-s)S(s)x \in D(A)$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(x) + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(x) + T(t-s)AS(s)x = 0 \end{aligned}$$

quel que soit $x \in D(A)$. Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in D(A)$, d'où :
$T(t)x = S(t)x, \forall x \in D(A)$ et $t \geqslant 0$. puisque $\overline{D(A)} = E$ et $T(t), S(t) \in L(E)$, pour tout $t \geqslant 0$, il résulte que :
$T(t)x = S(t)x, \forall t \geqslant 0$ et $x \in E$, ou bien : $T(t) = S(t), \forall t \geqslant 0$. □

Théorème 2.1.2.4
Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ Un C_0- semigroupe, A son générateur infinitésimal et $F \in L(E)$. Alors :
$T(t)F = FT(t)$
pour tout $t \geqslant 0$ si et seulement si :
$FD(A) \subseteq D(A)$ et $FAx = AFx$, $\forall x \in D(A)$.

C_0- semigroupes analytiques

Définition 2.1.2.4
Désignerons par Δ l'ensemble : $\{z \in C |\, Re\, z > 0$ et $\Phi_1 < arg\ z < \Phi_2, \Phi_1 < 0 < \Phi_2\}$ on appelle semigroupe analytique une famille $\{T(z)\}_{z\geqslant\Delta} \subset L(E)$ vérifiant les propriétés suivantes :
i) $T(0) = I$;
ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \Delta$;
iii) $\lim\limits_{z\to 0} T(z)x = x$, $\forall z \in \Delta$;
iv) l'application : $z \in \Delta \longmapsto T(z) \in L(E)$ est analytique dans le secteur Δ .

Théorème 2.1.2.5 soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un semigroupe fortement continue , et A son générateur infinitésimal tel que $0 \in \rho(A)$, les propositions suivantes sont équivalentes :
1) $\exists \delta > 0$, tel que $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ peut être étendu en un semigroupe fortement continu analytique dans le secteur : $\Delta_\delta = \{z \in C |\ (Re\ z > 0), |argz| < \delta\}$.
Et $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est uniformément borné dans $\bar{\Delta}_{\delta'} \subset \Delta_\delta$, $(\delta' < \delta)$.
2) il existe un constante M , tel que :
pour $\forall \sigma > 0$ et $\mu \neq 0, \lambda = \sigma + i\mu$. on a :
$\| R(\lambda, A) \| \leqslant \dfrac{M}{|\mu|}$.
3) $\exists \delta, (0 < \delta < \frac{\Pi}{2})$ et $M > 0$ tel que :
$\rho(A) \supset \Sigma_\delta = \{\lambda \in C, |arg\, z| < \delta + \frac{\Pi}{2}\} \cup \{0\}$ et : $\| R(\lambda, A) \| \leqslant \dfrac{M}{|\lambda|}, \forall \lambda \in \Sigma_\delta,\ \lambda \neq 0$.
4) $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe fortement continu différentiable $\forall\, t > 0$ et $\exists\, c > 0$ tel que : $\| AT(t) \| \leqslant \frac{c}{t}$.

C_0- **semigroupes des contractions**

Définition 2.1.2.5 on dit que $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0- semigroupe de contractions sur l'espace de Banach E si $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(1,0)$.
Lemme 2.1.2.1 Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,w)$. Alors , l' applications :
$\|.\| : E \longrightarrow R_+$
$\|x\| = Sup_{t\geqslant 0} e^{-wt}\|T(t)x\|$, $\forall x \in E.$
est une norme sur E équivalente avec la norme initiale $\|.\|$.

Preuve Soit $x \in E$. Pour tout $t \geqslant 0$, on a :
$e^{-wt}\|T(t)x\| \leqslant e^{-wt}\|T(t)\|\|x\| \leqslant M\|x\|$.
En passant à la borne supérieure par rapport à t, on voit que :
$|||x||| \leqslant M\|x\|$, $\forall x \in E.$
D'autre part , nous avons :

$$\begin{aligned}|||x||| &= Sup_{t\geqslant 0} e^{-wt}\|T(t)x\| \\ &\geqslant e^{-w0}\|T(0)x\| \\ &= \|x\| \ , \ \forall x \in E,\end{aligned}$$

d'où il résulte que :
$\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant M\|x\|$, $\forall x \in E.$
Par conséquent les normes $|||.|||$ et $\|.\|$ son équivalentes. $\square$

Théorème 2.1.2.6 Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,w).A$ son générateur infinitésimal et :
$S(t) = e^{-wt}T(t)$, $\forall t \geqslant 0$. Alors
(i) $\{S(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(1,0)$;
(ii) le C_0- semigroupe $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ a pour générateur infinitésimal l'opérateur $B = A - wI.$

Preuve
(i) Il est clair que la famille $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0- semigroupe . De plus, pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}|||S(t)x||| &= sup_{s\geqslant 0} e^{-ws}\|T(s)e^{-wt}T(t)x\| \\ &= sup_{\tau\geqslant 0} e^{-w\tau}\|T(\tau)x\| \\ &\leqslant sup_{\tau\geqslant 0} e^{-w\tau}\|T(\tau)x\| \\ &= |||x|||, \forall x \in E,\end{aligned}$$

d'où obtient :
$|||S(t)x||| \leqslant |||x|||$, $\forall x \in E$ et $t \geqslant 0.$
Il s'ensuit que : $\|S(t)\| \leqslant 1$, $\forall t \geqslant 0$ et par conséquent, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(1,0)$.
(ii) Elle est analogue à celle du théorème 2.1.2.2. Pour les C_0- semigroupes de contractions. $\square$

Théorème 2.1.2.7
Un opérateur linéaire : $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(1,0)$ si seulement si :
(i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$,
(ii) $\Lambda_0 = \{\lambda \in C \mid Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_0$ on a :
$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \dfrac{1}{(Re\lambda)^n}$, $\forall n \in N^*.$

Preuve
(i) $\Rightarrow$ **(ii)** comme $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(1,0)$, nous avons :

$\|T(t)\| \leqslant 1$, $\forall t \geqslant 0$. par suite , on peut prendre $M = 1$ et $w = 0$.
Avec le théorème Hill-Yosida voir [13] page 73 , il résulte que :
(i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$,
(ii) $\Lambda_0 = \{\lambda \in C \mid Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_0$ on a :
$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \dfrac{1}{(Re\lambda)^n}$, $\forall n \in N^*$.
(ii) $\Rightarrow$ **(i)** soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$
Un opérateur linéaire vérifiant les propriétés **(i)** et **(ii)** de l'énoncé. Avec le théorème Hill-Yosida voir [13] page 73, il résulte que :
A est le générateur infinitésimal d'un C_0- semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ pour lequel il existe $M = 1$ et $w = 0$ tel que :
$\|T(t)\| \leqslant 1$, $\forall t \geqslant 0$.
Donc A est le générateur infinitésimal d'un semigroupe de contractions.

□

2.1.3 Les semigroupes fortement continus différentiables

Définition 2.1.3.1
On dit que $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe fortement continu différentiable si l'application :
$[0, +\infty[\ni t \longrightarrow T(t)x$.
Tel que : $T(t)x \in E$ où $L(E)$, est différentiable quelque soit $x \in E$.

Définition 2.1.3.2
On dit que l' application :
$t \longrightarrow T(t)x$ est différentiable si :
$\lim\limits_{t\to s} \dfrac{T(t)x - T(s)x}{t - s}$ éxiste où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{T(t+h)x - T(t)x}{h}$ éxiste

Théorème 2.1.3.1
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe fortement continu et A son générateur infinitésimal, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :
(i) $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe fortement continu différentiable
(ii) Im $\{T(t)\} \subset D(A)$, $\forall t \in [0, +\infty[$.

Proposition 2.1.3.1
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe fortement continu différentiable, alors l'application :
$[0, +\infty] \ni t \longrightarrow T(t)x$.
Tel que : $T(t)x \in (E$ où $L(E))$, est continu pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 2.1.3.2
Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe fortement continu différentiable et A son générateur infinitésimal, alors :
i) pour tout $n \in N^*$ et tout $x \in E$, on a $T(t)x \in D(A^n)$ et :
$A^n T(t)x = [AT(\frac{t}{n})]^n x$, $\forall t \in [0, +\infty[$.
ii) pour tout $n \in N^*$ l'application :
$[0, +\infty[\ni t \longrightarrow T(t)^{(n)} \in L(E)$ est n fois différentiable pour la topologie de la convergence uniforme.
En plus :

$T(t)^{(n)} = \dfrac{d^n}{dt^n} T(t) = A^n T(t) \in L(E)$.
Et cette application est continu pour la topologie de la convergence uniforme.

Lemme 2.1.3.1
Soit $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ un C_0- semigroupe et A son générateur infinitésimal si :
$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds$
alors $(\lambda I - A) B_\lambda(t) x = e^{\lambda t} x - T(t) x$ pour tout $x \in E$.

2.1.4 C_0- semigroupes compacts

Définition 2.1.4.1
Un C_0- semigroupe est compact pour $t > t_0$ si pour tout $t > t_0$, l'opérateur $T(t)$ est compact. $T(t)$ est compact s'il est compact pour $t > 0$

Théorème 2.1.4.1
Soit $T(t)$ un C_0- semigroupe dans un espace de Banach E. Si $T(t)$ est compact pour certain $t_0 > 0$, alors $T(t)$ est compact pour tout $t \geqslant t_0$, de plus $T(t)$ est continu pour la topolgie uniforme pour $t > t_0$.

Preuve
Soit $\|T(s)\| \leqslant M$ pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et soit $\varepsilon > 0$ si $t > t_0$ alors l'ensemble :
$U_t = \{T(t)x \ : \ \|x\| \leqslant 1\}$ est compact alors il existe $x_1, x_2, ..., x_N$ tel que la boule ouverte de rayon $\dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$ et de centre
$T(t)x_j, 1 < j \leqslant N$ couvrir U_t et car $T(t)$ est fortement continu, alors il existe
$0 < h_0 \leqslant 1$ tel que :
$\|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $0 \leqslant h \leqslant h_0$ et $1 \leqslant j < N$.
Soit maintenant $x \in E$ avec $\|x\| \leqslant 1$ alors il existe j , $1 \leqslant j \leqslant N$ dépendant de E
$\|T(t)x - T(t)x_j\| < \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$. Alors pour $0 \leqslant h \leqslant h_0$ et $\|x\| \leqslant 1$ On a :
$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leqslant$
$\|T(h)\| \|T(t)x - T(t)x_j\| + \|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| + \|T(t)x_j - T(t)x\| < \varepsilon$
d'où $T(t)$ est continu pour la topologie uniforme pour $t > t_0$. $\square$

Chapitre 3 (Propriétés spectrales des semigroupes)

3.1 Les propriétés spectrales des semigoupes uniformément continus

Théorème 3.1.1
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un semigroupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal.
Si $\lambda \in C$ tel que $Re\lambda > \parallel A \parallel$,
alors l'application
$R_\lambda : E \to E$,
$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt$
définit un opérateur linéaire borné, $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in E$.

Preuve
Soit $\lambda \in C$ avec $Re\lambda > \parallel A \parallel$. Avec le corllaire **(2.1.1.1) (i)** , on voit que :
$\parallel T(t) \parallel \leqslant e^{\parallel A \parallel t}, \forall t \geqslant 0.$
De même , nous avons :
$\parallel e^{-\lambda t} T(t) x \parallel \leqslant e^{-(Re\lambda - \parallel A \parallel)t} \parallel x \parallel, \forall x \in E$ et $\int_0^{+\infty} e^{-(Re\lambda - \parallel A \parallel)t} dt = \dfrac{1}{Re\lambda - \parallel A \parallel}.$
L'application R_λ est donc bornée et il est clair que R_λ est linéaire .
Pour $x \in E$, nous avons :

$$\begin{aligned} R_\lambda A x &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) A x dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t) x dt \\ &= -x + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt \\ &= -x + \lambda R_\lambda x, \end{aligned}$$

d'où $x = R_\lambda(\lambda I - A)x$, pour tout$x \in E$. par conséquent $R_\lambda(\lambda I - A) = I$.
De même , nous avons :

$$\begin{aligned} A R_\lambda x &= A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} A T(t) x dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) A x dt \\ &= R_\lambda A x, \forall x \in E \ . \end{aligned}$$

par suite , on a $AR_\lambda x = R_\lambda A x = -x + \lambda R_\lambda x,$ pour tout $x \in E$. Il en résulte que $(\lambda I - A)R_\lambda = I$.
Par conséquent $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda = R(\lambda; A)$. □

Définition 3.1.1
L'opérateur $R_\lambda : E \to E$ définit par $R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt, \lambda \in C$ avec $Re\lambda > \parallel A \parallel$, s'appelle les transformée de Laplace du semigroupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A .

Théorème 3.1.2
Soit A le générateur infintésimal d'un semigroupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$.
si Γ_A est un contour de Jordon A-spectral, alors nous avons :

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda \ , \ \forall t \geqslant 0$$

Théorème 3.1.3 Spectral mapping
Soit A le générateur infintésimal du semigroupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$.
Alors : $e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)), \forall t \geqslant 0$.

Preuve
Montrons que $e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t)), \forall t \geqslant 0$.
Soit $\mu \in \sigma(A)$. pour $\lambda \in \rho(A)$, l'application : $g_\mu(\lambda) = \dfrac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{\mu - \lambda}$
est analytique dans un voisinage de $\sigma(A)$.
Compte tenu du théorème 3.1.2 , on voit que : $e^{\mu t}I - e^{At} = (\mu I - A)g_\mu(A)$ .Si $e^{\mu t} \in \rho(T(t))$, alors il existe $Q = [e^{\mu t}I - T(t)]^{-1} \in L(E)$.
par conséquent : $I = (\mu I - A)g_\mu(A)Q$, d'où il résulte que $\mu \in \rho(A)$, ce qui est absurde .
Donc $e^{\mu t} \in \sigma(T(t))$ et par suite $e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t))$.
Montrons que $\sigma(T(t)) \subset e^{t\sigma(A)}$.
Soit $\mu \in \sigma(T(t))$.
Supposons par absurde que $\mu \notin e^{t\sigma(A)}$. Alors pour $\lambda \in \rho(A)$, l'application $\hbar(\lambda) = (\mu - e^{\lambda t})^{-1}$ est définie sur un voisinage du $\sigma(A)$.
Donc : $\hbar(A)(\mu - e^{tA})^{-1} = 1$ et il en résulte que $\mu \in \rho(T(t))$ et cela est absurde .
par suite $\mu \in e^{t\sigma(A)}$, d'où $\sigma(T(t)) \subset e^{t\sigma(A)}$.
Finalement on voit que : $e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)), \forall t \geqslant 0$. $\square$

3.2 Propriétés spectrales des C_0- semigroupes

Lemme 3.2.1
Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M, w)$ et A son générateur infinitésimal . Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_w$ et $t > 0$, l'application :
$\beta_\lambda(t) : E \to E$
$\beta_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds$
définit un opérateur linéaire sur E vérifiant les propriétés suivantes :
$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \forall x \in E$ et
$\beta_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \forall x \in D(A)$.
De plus $\beta_\lambda(t)T(t) = T(t)\beta_\lambda(t)$.

Preuve
Pour tout $x \in E$ nous avons successivement ;

$$\begin{aligned}\| \beta_\lambda(t)x \| &= \| \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds \| \\ &\leqslant \int_0^t e^{Re\lambda(t-s)} \| T(s) \| \| x \| ds \\ &\leqslant Me^{Re\lambda t} \| x \| \int_0^t e^{-(Re\lambda - w)s}ds < \infty.\end{aligned}$$

Comme la linéairité est évidente , il en résulte que $\beta_\lambda(t) \in L(E)$, quels que soient $\lambda \in \Lambda_w$ et $t > 0$, Si $x \in E$ et $\hbar > 0$, alors nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\beta_\lambda(t)x &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(h+s)xds - \tfrac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds \\
&= \tfrac{1}{h}\int_h^{t+h} e^{\lambda(t-\tau+h)}T(\tau)xd\tau - \tfrac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau - \tfrac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}[\int_0^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau - \int_0^h e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau] - \tfrac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau \\
&+\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{+\infty} e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau - \tfrac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_t^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau + \frac{e^{\lambda h}+1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_t^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau + \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\beta_\lambda(t)x - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)xd\tau.
\end{aligned}
$$

En passant à limite , on a :
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{T(h)\beta_\lambda(t)x-\beta_\lambda(t)x}{h} = T(t)x + \lambda\beta_\lambda(t)x - e^{\lambda t}x$, d'où $\beta_\lambda(t)x \in D(A)$ et
$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \forall x \in E$. Si $x \in D(A)$, alors nous avons :

$$
\begin{aligned}
\beta_\lambda(t)Ax &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)Axds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\tfrac{d}{ds}T(s)xds \\
&= T(t)x - e^{\lambda t}x + \lambda\beta_\lambda(t)x,
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire :
$\beta_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \forall x \in D(A)$.
De plus , nous obtenons que :
$\beta_\lambda(t)D(A) \subseteq D(A)$ et :
$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)x = \beta_\lambda(t)(\lambda I - A)x, \forall x \in D(A)$,
d'où : $A\beta_\lambda(t)x = \beta_\lambda(t)Ax, \forall x \in D(A)$,
compte tenu du théorème 2.1.2.4 , on voit que : $\beta_\lambda(t)T(t) = T(t)\beta_\lambda(t), \forall t \geqslant 0$. $\square$

Remarque 3.2.1
Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M,w)$ et A son générateur infinitésimal alors
$\Lambda_w = \{\lambda \in C,\ Re\lambda > w\}$ et $\sigma(A) \subset \{\lambda \in C,\ Re\lambda \leqslant w\}$.

Théorème 3.2.1 Spectral mapping
Soient $\{T(t)\}_{\geqslant} 0 \in SG(M,w)$ et A son générateur infinitésimal . Alors :
$e^{t\sigma(A)} = \{e^{\lambda t} | \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq \sigma(T(t)), \forall t \geqslant 0$.

Preuve
Soit $\lambda \in C$ tel que $e^{\lambda t} \in \rho(T(t))$.
Alors on peut considérer l'opérateur $Q = (e^{\lambda t}I - T(t))^{-1} \in L(E)$.
Compte tenu du lemme 3.2.1 (i) ,on a :
$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \forall x \in E$
et : $\beta_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}xT(t)x, \forall x \in D(A)$.
Par multiplication avec Q à droite dans la premiére égalité et à gauche dans la seconde , nous obtenons :
$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)Qx = x, \forall x \in E$
et : $Q\beta_\lambda(t)(\lambda I - A)x = x, \forall x \in D(A)$
Mais, avec le lemme 3.2.1, il en résulte que : $(e^{\lambda t}I - T(t))\beta_\lambda(t) = \beta_\lambda(t)(e^{\lambda t}I - T(t))$, en nous voyons que $Q\beta_\lambda(t) = \beta_\lambda(t)Q$. par conséquent :
$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)Qx = x, \forall x \in E$ et : $\beta_\lambda(t)Q(\lambda I - A)x = x, \forall x \in D(A)$.
Il s'ensuit que $\lambda \in \rho(A)$ et finalement on voit que : $\rho(T(t)) \subset e^{t\rho(A)}, \forall t \geqslant 0$, ou bien : $e^{t\rho(A)} \subseteq \sigma(T(t)), \forall t \geqslant 0$. $\square$

Exemple 3.2.1
Soit E l'espace de Banach des fonction continues sur l'intervalle $[0,1]$. On définie $T(t)$ par :

$$T(t)f(x) = \begin{cases} f(x+t) \text{ si } x+t \leqslant 1 \\ 0 \quad \text{si } x+t > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Si $t \geqslant 0, T(t)$ est un opérateur borné de plus on a :
i)

$$T(0)f(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \leqslant 1 \\ 0 \quad \text{si } x > 1 \end{cases} \tag{2}$$

mais $x \in [0,1]$ donc $T(0)f(x) = f(x)$ par suite $T(0) = I$.
ii)

$$T(t+s)f(x) = \begin{cases} f(x+s+t) \text{ si } x+s+t \leqslant 1 \\ 0 \quad \text{si } x+s+t > 1 \end{cases} \tag{3}$$

$= T(t)f(x+s) = T(t)T(s)f(x); \forall f \in c_0[0,1]$.
Donc $T(t+s)f(x) = T(t)T(s)f(x), \forall t,s \geqslant 0$.
iii) et

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \parallel T(t)f - f \parallel c_0[0,1] = \lim_{t\longrightarrow 0} \sup_{x\in[0,1]} |f(x+t) - f(x)| = 0$$

par conséquent $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un c_0- semigroupe d'opérateur linéaire borné sur $c_0[0,1]$.
Soit $A : D(A) \subset C_0[0,1] \to c_0[0,1]$ le générateur infinitésimal du c_0- semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Si $f \in D(A)$ on a :

$Af(x) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{T(t)f(x) - f(x)}{t}$

$$= \lim_{t \longrightarrow 0} \begin{cases} \dfrac{f(x+t) - f(x)}{t} \text{ si } x + t \leqslant 1 \\ 0 \quad \text{si } x + t > 1 \end{cases} \tag{4}$$

$= f^{'}(x)$ uniformément par rapport à x .
par conséquent :
$D(A) = \{f : f \in C^1[0,1] \cap E, f^{'} \in E\}$ et $Af = f^{'}$ pour $f \in D(A)$ .pour tout $\lambda \in c$ et $g \in E$ l'équation différentielle $\lambda f - f^{'} = g$ a pour solution unique $f \in E$ tel que $f(t) = \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} g(s)ds$. Par conséquent $\sigma(A) = \varnothing$.
D'autre part pour tout $T(t) \in L(E), \sigma(T(t)) \neq \varnothing, \forall t \geqslant 0$.

Définition 3.2.1 On dit que le C_0- semigroupe $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ est nilpotent s'il existe $t_0 > 0$ tel que $T(t) = 0$, pour tout $t > t_0$.

Proposition 3.2.1
Soient $\{T(t)\}_{t \geqslant 0} \in SG(M, w)$ un semigroupe nilpotent et A son générateur infintésimal .
Alors $\sigma(A) = \varnothing$.

Preuve
Comme le C_0- semigroupe $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ est nilpotent , il existe $t_0 > 0$ tel que $T(t) = 0, \forall t > t_0$. Pour tout $\lambda \in c$ et tout $x \in E$, on a :
$\| e^{-\lambda t} T(t)x \| \leqslant e^{-Re\lambda t} M e^{wt} \| x \|, \forall t \in [0, t_0]$ et comme : $\int_t^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)xdt = 0$, on peut définir la transformée de La place :
$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)xdt = \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} T(t)xdt$ pour tout $\lambda \in C$. Avec le théorème Hill-Yosid vior [13] page 73 , il vient $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in E$.
Donc $\rho(A) = c$, c'est -à - dire $\sigma(A) = \varnothing$.

□

Proposition 3.2.2
Soit ω_0 le type d'un semigroupe fortement continu $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$. Alors le rayon spectrale de $T(t)$

$$r(T(t)) = sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T(t))\}, t \geqslant 0$$

vérifier $r(T(t)) = e^{\omega_0 t}$

Preuve
D'après la remarque 2.1.2.2 on a

$$\omega_0 = \lim_{t \to \infty} \tfrac{1}{t} log \|T(t)\|$$

et puisque

$$r(T(t)) = \lim_{t \to \infty} \tfrac{1}{t} \|T(nt)\|^{\frac{1}{n}}$$

et pour tout $t > 0$, on obtient

$$r(T(t)) = \lim_{t \to \infty} exp\left[t(nt)^{-1} log\|T(t)\|\right] = e^{\omega_0 t}.$$

□

3.3 Propriétés spectrales des C_0- semigroupes compacts

Théorème 3.3.1
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0- semigroupe dans le générateur infinitésimal est A . $T(t)$ est compact si et seulement si $T(t)$ est continu pour la topolagie uniforme pour $t>0$ et $R(\lambda;A)$ est compact pour $\lambda\in\rho(A)$.

Preuve
(a) Soit $\| T(t) \|\leqslant Me^{wt}, si\ T(t)$ est compact pour $t>0$ alors d'aprés la Théorème **2.1.4.1**, $T(t)$ est continu pour la topologie uniforme pour $t>0$,donc
$R(\lambda;A)=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)ds$ pour $\lambda>w$ **(I)**
l'intégrale est existe pour la topologie uniforme des opérateurs .
Soit $\varepsilon>0, Re\lambda>w$ et $R_\varepsilon(\lambda)=\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)ds$.
et puisque $T(s)$ est compact pour tout $s>0, R_\varepsilon(\lambda)$ est compact mais
$\|R(\lambda;A)-R_\varepsilon(\lambda)\|\leqslant\| \int_0^\varepsilon e^{-\lambda s}T(s)ds \|\leqslant \varepsilon Me^{w\varepsilon}\to 0$
quand $\varepsilon\to 0$, pour conséquent $R(\lambda;A)$ est compact et c'est une limite uniforme d'opérateurs compact
On a
$R(\lambda;A)-R(\mu;A)=(\mu-\lambda)R(\lambda;A)R(\mu;A),\ \lambda,\mu\in\rho(A)$
par suite $R(\mu,A)$ est compact pour certain $\mu\in\rho(A), R(\lambda;A)$ est compact pour tout $\lambda\in\rho(A)$.
donc les condition du Théorème est nécessaire .
(b) Supposons maintenant que
$R(\lambda;A)$ est compact pour $\lambda\in\rho(A)$ et $T(t)$ est continu pour la topologie uniforme pour $t>0$.
D'aprés (I) il en résulte que :
$\lambda R(\lambda;A)T(t)-T(t)=\lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}(T(t+s)-T(t))ds$
Si λ est un réel , $\lambda>w$, alors pour tout $\delta>0$ on a :

$$\begin{aligned}\| \lambda R(\lambda;A)T(t)-T(t) \| &\leqslant \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s} \| T(t+s)-T(t) \| ds+\int_\delta^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} \| T(t+s)-T(t) \| ds\\ &\leqslant sup_{0<s<\delta} \| T(t+s)-T(t) \| +2\lambda(\lambda-w)^{-1}Me^{w(t+\delta)}e^{-\lambda\delta}\end{aligned}$$

D'implique que ;

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \|\lambda R(\lambda;A)T(t)-T(t) \|\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant\delta} \| T(t+s)-T(s) \|$$

pour tout $\delta>0$ et car δ est arbitraire on a

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \|\lambda R(\lambda;A)T(t)-T(t) \|=0$$

mais $\lambda R(\lambda:A)T(t)$ est compact pour tout $\lambda>w$ par conséquent $T(t)$ est compact.
$\square$

Propriété 3.3.1
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0- semigroupe et A son générateur infinitésimal .
Si $R(\lambda;A)$ est compact pour certains $\lambda\in\rho(A)$ et $T(t)$ est continu pour la topologie uniforme pour $t>t_0$, alors $T(t)$ est compact pour $t>t_0$.

Preuve
Si $R(\lambda;A)$ est compact pour certains $\lambda\in\rho(A)$ et $T(t)$ est continu pour la topologie uniforme pour $t>t_0$ d'où $R(\lambda;A)$ est compact pour tout $\lambda\in\rho(A)$ par suite
$\lambda R(\lambda;A)T(t)-T(t)=\lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}(T(t+s)-T(t))ds$ est définieé pour tout $t>t_0$, alors il résulte comme dans la partie (b) du preuve.
Précédent que : $T(t)$ est compact pour $t>t_0$. $\square$

3.4 Propriétés spectrales des C_0- semigroupes différentiables

Théorème 3.4.1
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe fortement continu différentiable et A son générateur infintésimal . Alors pour tout $n \in N^*$ on a :

$$(e^{t\sigma(A)})^{(n)} = \{\lambda^n e^{\lambda t} / \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq \sigma(T(t)^{(n)}), \forall t > 0 \ .$$

Pour preuver ce théorème on utilise les lemmes suivants :

Lemme 3.4.1
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe fortement continu différentiable et A son générateur infintésimal . Alors :
(i) pour tout $\lambda \in C$ et tout $t > 0$, l'opérateur $\beta_\lambda(t) \in L(E)$ est indéfiniment dérivable et

$$\beta_\lambda(t)^{(n)} = \lambda^n(\beta_\lambda(t) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}}), \forall n \in N^*;$$

(ii) Pour tout $\lambda \in c$ et tout $t > 0$ on a :

$$\beta_\lambda(t)^{(n)} T(t)^{(n)} = T((t)^{(n)} \beta_\lambda(t)^{(n)}, \forall n \in N^*.$$

lemme 3.4.2
Soient $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in SG(M, w)$ et A son générateur infinitésimal . Alors pour tout $\lambda \in \wedge_w$ et $t > 0$, l'application

$$\begin{gathered} \beta_\lambda(t) : E \longrightarrow E \\ \beta_\lambda(t)x = \textstyle\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds \end{gathered}$$

définit un opérateur linéaire borné sur E vérifiant les propriétés suivantes :

$$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \forall x \in E$$

et :

$$\beta_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \forall x \in D(A).$$

De plus

$$\beta_\lambda(t)T(t) = T(t)\beta_\lambda(t).$$

Preuve
Pour $\lambda \in C$ et $t > 0$, nous considérons l'opérateur

$$\begin{gathered} \beta_\lambda(t) : E \longrightarrow E \\ \beta_\lambda(t)x = \textstyle\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s) x ds \end{gathered}$$

Avec le lemme **3.4.1** on déduit que l'opérateur $\beta_\lambda(t) \in L(E)$ est indéfiniment dérivable et

$$\beta_\lambda(t)^{(n)} = \lambda^n(\beta_\lambda(t) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}}), \forall n \in lN^*;$$

Comme tenu du lemme **3.4.2** , il résulte que :

$$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \forall x \in E$$

et que :

$$\beta_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \forall x \in D(A). \text{ pour tout } n \in N^*$$

il s'ensuit que :

$$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)^{(n)}x = \lambda^n e^{\lambda t}x - T(t)^{(n)}, \forall x \in E$$

et :

$$\beta_\lambda(t)^{(n)}(\lambda I - A)x = \lambda^n e^{\lambda t}x - T(t)^{(n)}x, \forall x \in D(A).$$

Si

$$\lambda \in C \text{ est tel que } \lambda^n e^{\lambda t} \in \rho(T(t)^{(n)}) \ .$$

alors on peut considérer :

$$Q = (\lambda^n e^{\lambda t}I - T(t)^{(n)})^{-1} \in L(E), \text{ pour tout } n \in N^*$$

par conséquent

$$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)^{(n)}Qx = x, \forall x \in E$$

et

$$Q\beta_\lambda(t)^{(n)}(\lambda I - A)x = x, \forall x \in D(A) \text{ ,pour tout } n \in N^* \ .$$

Mais , avec le lemme **3.4.1** , il résulte

$$\beta_\lambda(t)^{(n)}T(t)^{(n)} = T(t)^{(n)}\beta_\lambda(t)^{(n)}, \forall n \in N^* \ .$$

Donc :

$$\lambda^n e^{\lambda t}\beta_\lambda(t)^{(n)} - \beta_\lambda(t)^{(n)}T(t)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}\beta_\lambda(t)^{(n)} - T(t)^{(n)}\beta_\lambda(t)^{(n)}$$

et :

$$\beta_\lambda(t)^{(n)}(\lambda^n e^{\lambda t}I - T(t)^{(n)}) = (\lambda^n e^{\lambda t}I - T(t)^{(n)})\beta_\lambda(t)^{(n)} \text{ pour tout } n \in N^*$$

Par suite :

$$\beta_\lambda(t)^{(n)}Q = Q\beta_\lambda(t)^{(n)}, \forall n \in N^*$$

et nous voyons que :

$$(\lambda I - A)\beta_\lambda(t)^{(n)}Qx = x, \forall x \in E$$

et :

$$\beta_\lambda(t)^{(n)}\beta_\lambda(t)^{(n)}Q(\lambda I - A)x = x, \forall x \in D(A).$$

d'où on obtient que $\lambda \in \rho(A)$.
Nous en déduisons que $\lambda \in \sigma(A)$ implique $\lambda^n e^{\lambda t} \in \sigma(T(t)^{(n)})$ pour tout $n \in N^*$.
Par conséquent :

$$\{\lambda^n e^{\lambda t} \mid \lambda \in \sigma(A)\} \subset \sigma(T(t)^{(n)}).$$

ou bien :

$$\{(e^{\lambda t})^{(n)} \mid \lambda \in \sigma(A)\} \subset \sigma(T(t)^{(n)})$$

et finalement :

$(e^{t\sigma(A)})^{(n)} \subset \sigma(T(t)^{(n)})$, pour tout $n \in N^*$ et tout $t > 0$. $\square$

Théorème 3.4.2
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un c_0- semigroupe , et soit A son générateur infinitésimal .
Si $\| T(t) \| \leqslant Me^{wt}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Il existe un $t_0 > 0$ tel que $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est différentiable pour $t > t_0$.
(ii) Il existe des constantes réelles a, b et c de telle sorte que $b > 0$, $c > 0$,

$$\rho(A) \supset \sum = \{\lambda : Re\lambda \geqslant a - b\ log \mid Im\lambda \mid\} \ \textbf{(1')}$$

et

$$\| R(\lambda; A) \| \leqslant c \mid Im\lambda \mid \text{ pour } \lambda \in \sum, Re\lambda \leqslant w \ \textbf{(2')}$$

Pour preuver ce théorème on utilise le corollaire et le lemme suivants :
Corollaire 3.4.1
Soit A le générateur infinitésimal d'un c_0- semigroupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ satisfaisant :

$$\| T(t) \| \leqslant Me^{wt} .$$

Soit $\gamma > \max\ (0, w)$. si $x \in D(A^2)$, alors

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda, A)xd\lambda \ \textbf{(I)}$$

pour tout $\delta > 0$ l'intégral (I) converge uniformément de t pour $t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]$.

Lemme 3.4.3
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0- semigroupe , et soit A son générateur infintésimal .
Si $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est différentiable pour $t > t_0$ et $\lambda \in \sigma(A), t > t_0$
alors

$$\lambda e^{\lambda t} \in \sigma(AT(t)).$$

Preuve
Nous , pouvons supposer $w < 0$.
Sinon , nous considérons le semigroupe .
$T_l(t) = e^{-(w+\varepsilon)}T(t)$ satisfaisant $\| T_l(t) \| \leqslant Me^{\varepsilon t}$.
D'aprés **(i)** et **(ii)** on peut supposen $w < 0$
commnçons par montrer que **(ii)** implique **(i)** . Soit Γ un chemin dans Σ composé de trois parties ; Γ_1, donnée par $Re\lambda = 2a - b\ log(-Im\lambda)$ pour
$-\infty < Im\lambda \leqslant -L = -e^{\frac{2a}{b}}$
Γ_2 est donnée par $Re\lambda = 0$ pour $-L \leqslant Im\lambda \leqslant L$ et Γ_3 est donnée par
$Re\lambda = 2a - blog(Im\lambda)$ pour $L \leqslant Im\lambda < \infty$.
Γ est orientée de sorte que $Im\lambda$ augmente le long de Γ . En changeant la constante c dans **(2')** on peut supposer que **(2')** est vérifiée pour une $\lambda \in \Gamma_j, j = 1, 2, 3$.

$$\Gamma_n = \Gamma \cap \{\lambda : \mid \lambda \mid < n\} .$$

Car $\lambda \to e^{\lambda t}R(\lambda; A)$ est une fonction continue de $\rho(A) \subset C$ dans $L(E)$
les intégrales

$$S_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda;A)d\lambda\ .$$

est bien définit $S_n(t)$ convrgent dans $L(E)$ quand $n \to +\infty$ nous définissons la limite l'intégral

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda;A)d\lambda\ \textbf{(3')}$$

converge dans $L(E)$,En autre , il est facile de voir que $S_n(t)$ sont différentiables dans $L(E)$. Et leurs dérivés $S_n'(t)$ sont donnés par

$$S_n'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} e^{\lambda t}R(\lambda;A)d\lambda\ \textbf{(4')}$$

Si $S_n(t)$ et $S_n'(t)$ convergent dans $L(E)$ uniformément , pour $t > t_1$, la limite $S'(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{'}(t)$ est la dérivé de $S(t)$ dans $L(E)$. montrons maintenant que **(3')** converge dans $L(E)$ pour $t > \frac{2}{b}$ et que

$$S'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda e^{\lambda t}R(\lambda;A)d\lambda\textbf{(5')} \text{ converge dans } L(E) \text{ pour } t > \frac{3}{b}\ .$$

D'autre part **(3')** et **(5')** converge uniformément en t pour $t > \frac{2}{b} + \delta$ et $t > \frac{3}{b} + \delta$ respectivement .
pour chaque $\delta > 0$. Pour prouver ces allégations posons

$$\Gamma_{jn} = \Gamma_j \cap \{\lambda : \mid \lambda \mid < n\} j = 1,2,3\ .$$
$$S_{jn}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{jn}} e^{\lambda t}R(\lambda;A)d\lambda\ .\textbf{(6')}$$

et

$$S_j(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} e^{\lambda t}R(\lambda;A)d\lambda\ \textbf{(7')}$$

On prend $n > L$, il est clair que $\Gamma_{2n} = \Gamma_2$ et $S_{2n}(t) = S_2(t)$ et donc $S_2(t)$ est bien défini pour $t \geqslant 0$ pour prouver la convergence des intégrales $S_{jn}(t), j = 1,2,3$ .Nous estimons leurs intégrales sur les parcours respectifs d'intégration et on trouve pour $\lambda = \sigma + i\tau \in \Gamma_j$, pour $j = 1,2$ ou 3

$$\| e^{\lambda t}R(\lambda;A) \| = \mid e^{\lambda t} \mid \| R(\lambda;A) \| \leqslant e^{\lambda t} \mid \tau \mid^{-bt} C \mid \tau \mid = Ce^{\lambda t} \mid \tau \mid^{1-bt}\ \textbf{(8')}$$

Par conséquent , pour $n > m \geqslant L$ nous avons ,

$$\| S_{jn}(t) - S_{jm}(t)\| = \frac{1}{2\pi} \| \int_{\Gamma\bigcap\{\lambda : m\leqslant|\lambda|\leqslant n\}} e^{\lambda t}R(\lambda;A)d\lambda \|$$

$$\leqslant C_1 e^{2at}\int_m^n \mid \tau \mid^{1-bt} d\tau$$

Où C_1 est une constante indépendante de t . Ainsi , pour $n > \dfrac{2}{b}, S_{jn}(t)$, $j = 1,2,3$ convergent dans $L(E)$ et la convergence est uniforme en t pour $t > \frac{2}{b} + \delta$ pour tout $\delta > 0$ ce qui preuve la convergence de **(3')** .
De meme manière on montre la convergence de (5').Premièrement on note que $S_2^{'}(t), j = 1,3$ existe pour $t \geqslant 0$. Alors on évalue les intégrales $S_{jn}^{'}(t), j = 1,3$ sur leur chemins ;

$$\| \lambda e^{\lambda t}R(\lambda;A) \| \leqslant \mid \lambda \mid C_1 e^{2at} \mid \tau \mid^{1-bt}$$

$$\leqslant C_2 e^{2at} \mid \tau \mid^{2-bt} \text{ \textbf{(10')}}.$$

Où C_2 est une constante indépendante de t .
la convergence de $S'_{jn}(t), j = 1,3$ pour $t > \dfrac{3}{b}$ résulte de la convergence de $S_{jn}(t), j = 1,3$ pour $t > \dfrac{2}{b}$.
Ainsi $S(t)$ existe pour $t > \dfrac{2}{b}$ et est dérivable pour $t > \dfrac{3}{b}$.
Pour que $T(t)$ soit différentiable pour $t > \dfrac{3}{b}$, nous allons maintenant montrer que $t > \dfrac{2}{b}$, $S(t) = T(t)$.
Soit $x \in D(A^2)$.
D'aprés le corollaire **3.4.1** , il s'ensuit que

$$T(t)x = \lim_{|\tau \to +\infty|} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\tau}^{\gamma + i\tau} e^{\lambda t} R(\lambda; A) x d\lambda \text{ pour tout } \gamma > 0. \text{ \textbf{(11')}}.$$

Mais pour $x \in D(A^2)$, nous avons

$$R(\lambda; A)x = \frac{x}{\lambda} + \frac{Ax}{\lambda^2} + \frac{R(\lambda; A)A^2 x}{\lambda^2} \text{ \textbf{(12')}}.$$

De **(3')** , il s'ensuit que , pour tout $x \in E$ et $t > \dfrac{2}{b}$

$$S(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda; A) x d\lambda \text{ \textbf{(13')}}.$$

Prenant $x \in D(A^2)$ dans **(13')** , en utilisant les estimation **(12')** et **(2')** , nous observons que l'on peut déplacer la voie de l'intégration dans **(13')** de Γ à la ligne $\gamma + i\tau, -\infty < \tau < +\infty$.
Par conséquent , pour $t > \dfrac{2}{b}$ et $x \in D(A^2), T(t)x = S(t)x$ puisque pour $t > \dfrac{2}{b}$ les deux $T(t)$ et $S(t)$ sont des opérateur bornées et puisque $D(A^2)$ est dense dans E , il s'ensuit que $S(t) = T(t)$ pour $t > \dfrac{2}{b}$ et par conséquent $T(t)$ est différentiable pour $t > \dfrac{3}{b}$, Dans la topologie uniforme d'opérateur. Ainsi , (ii) implique (i) .
Ensuite , on montre que (i) implique (ii) .
Si $t_1 > t_0$ donc $AT(t_1)$ est un opéateur linéaire borné .

$$\| AT(t_1) \| = M(t_1) \ .$$

D'apres le lemme **3.4.3** , il s'ensuit que

$$\sigma(A) \subset \{\lambda : \lambda e^{\lambda t_1} \in \sigma(AT(t_1))\}$$

$$\subset \{\lambda : \mid \lambda e^{\lambda t1} \mid \leqslant M(t^1)\} \text{ \textbf{(14')}}$$

donc

$$\rho(A) \supset \{\lambda : Re\lambda t_1^{-1} log M(t_1) - t_1^{-1} log \mid Im\lambda \mid\}$$

L'ensemble

$$\Sigma = \{\lambda; Re\lambda > t_1^{-1} log(1+\delta) M(t_1) - t_1^{-1} log \mid Im\lambda \mid\} \text{ pour tout } \delta > 0 \text{ \textbf{(15')}}$$

Il est évident que $\sum \subset \rho(A)$, ce qui prouve **(1')** .
Pour prouver **(2')** remplaçant $R(\lambda; A)x$ par x d'apés le lemme 2.1.3.1 il resulte :

$$\lambda e^{\lambda t} R(\lambda; A)x = AT(t)R(\lambda; A)x + T(t)x + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-S)} T(s)xds \ \textbf{(16')}$$

On prend $t = t_1$ et $\lambda = \sigma + i\tau \in \sum$ dans **(16')** on trouve

$$\| R(\lambda, A)x \| \leqslant | \tau |^{-1} e^{-\sigma t_1} (\| AT(t_1 \| \| R(\lambda; A) + \| T(t_1) \| x \| + \| \int_0^{t_1} e^{\lambda s} T(s)xds \|$$

Mais pour $\lambda \in \sum$,

$$| \tau |^{-1} e^{-\sigma t_1} \| AT(t_1 \| \leqslant (1 + \delta)^{-1}$$

choisir $| \tau | \geqslant 1$ et $\sigma \leqslant w < 0$ on trouve

$$\begin{aligned} \| R(\lambda; A)x \| &\leqslant \frac{1+\delta}{\delta} [|\tau|^{-1} e^{(w-\sigma)t_1} M \| x \| + \| \int_0^{t_1} e^{-\lambda s} T(s)xds \|] \\ &\leqslant (\frac{1+\delta}{\delta}) M e^{(w-\sigma)t_1} (| \tau |^{-1} + t_1) \| x \| \\ &\leqslant \frac{M(1+t_1)e^{wt_1}}{\delta \| AT(t_{1)} \|} | \tau | \| x \| = c | \tau | \| x \| \end{aligned}$$

et ce la pour $\lambda \in \sum, Re\lambda \leqslant w$,

$\| R(\lambda; A) \| \leqslant C \mid Im\lambda \mid$. □

3.5 Propriétés spectrales des C_0- semigroupes analytiques

Théorème 3.5.1
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0- semigroupe $T(t)$ satisfaisant $\|T(t)\| \leqslant Me^{wt}$.
Alors $T(t)$ est analytique si et seulement s'il existe des constantes $c > 0$ et $\Lambda \geqslant 0$ tel que : $\|AR(\lambda; A)^{n+1}\| \leqslant \dfrac{c}{n\lambda^n}$ pour $\lambda > n\Lambda$, $n \in N^*$ (1)

pour preuver ce théorème on a besoin des deux théorème suivants

Théorème 3.5.2
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0- semigroupe uniformément borné, et A son générateur informément on suppose que $0 \in \rho(A)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $T(t)$ peut prolonger à un semigroupe anlytique sur un secteur $\Delta_\delta = z : |argz| < \delta$ et $\|T(z)\|$ est uniformément bornée pour tout secteur fermé $\bar{\Delta}_\delta, \delta' < \delta$, de Δ_δ.
(ii) T(t) est differentiable pour $t > 0$ et il exist une constante c telque : $\|AT(t)\| \leqslant \dfrac{c}{t}$ pour $t > 0$.

Théorème 3.5.3
Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0- semigroupe sur E. Si A est le générateur infinitésimal de $T(t)$ alors :

$$T(t)x = \lim_{n \longrightarrow \infty} (I - \frac{t}{n} A)^{-n} x = \lim_{n \longrightarrow \infty} [\frac{n}{t} R(\frac{n}{t}; A)]^n x \ pour \ x \in E$$

et la limite est uniforme pour t sur tout intervalle borné .

Preuve
D'aprés le théorème 3.5.1 $T(t)$ est analytique si et seulement s'il est differentiable pour $t > 0$ et il existe $c_1 > 0$ et $w_1 > 0$ tel que :
$\|AT(t)\| \leqslant \frac{c_1}{t}e^{w_1 t}$ pour $t > 0$ (2)
si A satisfaisant (1) alors pour $\lambda > n\Lambda$ et $x \in D(A)$ on a :
$\|AR(\lambda; A)^{n+1}x\| = \|R(\lambda; A)^{n+1}Ax\| \leqslant \frac{c}{n\lambda^n}\|x\|$ (3)
En choisissant $t < \frac{1}{\Lambda}$ et $\lambda = \frac{n}{t}$ dans (3) on trouve
$\|A(\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}; A))^{n+1}x\| = \|\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}; A))^{n+1}Ax\| \leqslant \frac{c}{t}\|x\|$ pour $x \in D(A)$
L'orsque $n \longrightarrow +\infty$ et d'aprés le théorème 3.5.2 , et la fermeteure de A, il en résulte que :
$\|AT(t)x\| \leqslant \frac{c}{t}\|x\|$ pour $x \in D(A),\ 0 < t < \frac{1}{\Lambda}$ (4)
Puisque $D(A)$ est dense dans E et $AT(t)$ est fermé, l'inégalité (4) est vérifiée pour tout $x \in E$, par conséquent il existe $c_1 > 0$ et $w_1 > 0$ tel que l'inégalité (2) est vérifiée et $T(t)$ est analytique.
D'autre part dérivons la formule

$$R(\lambda; x)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

n fois on trouve :

$$R(\lambda; A)^{(n)}x = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}x = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

Il résulte d'après (2) que :

$$n!\|AR(\lambda; A)^{n+1}x\| \leqslant c_1(\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)xdt)\|x\| = \frac{c_1}{(\lambda - w_1)^n}(n-1)!\|x\|$$

Par conséquent pour $\lambda > n\Lambda$
$\|AR(\lambda; A)^{n+1}\| \leqslant \frac{c_1}{n\lambda^n}(\frac{1}{1 - \frac{w_1}{\Lambda n}})^n \leqslant \frac{c_2}{n\lambda^n}.$ $\square$

Conclusion

La théorie spectrale des semigroupes est un domaine de recherche qui suscite depuis quelques années beaucoup d'intérêt, il a connu des développement et des applications très intéressants, en particulier dans les équations d'évolution, l'étude du comportement asymptotique de certains semigroupes d'opérateur,...
Notre étude à examiné la relation entre le spectre, la résolvante d'un générateur infinitésimal et le semigroupes engendré.

Références

[1] Butzer, P.L. Berns ,H.semigroupe of operators and approximations springer verlag , New York .Imc , 1967 .

[2] H . Brezis , Analyse fonctionnelle Dunod . Paris , 1999 .

[3] Van Casteren , J .Generators of strongly continous semigroups . Pitman , Boston , 1985 .

[4] K . J . Engel ,R . Nagel , one parameter semigroup for linear evolution equations , Spring - Verlag , New York 2000 .

[5] Gomilko , A . M . conditions on the Generator of a uniformly bounded C_0 -semigroupe Func . and Its Appl , 33 (1999) , 294-296 .

[6] E . Hille and R .S. Phillips , Functional analysis and semigroups , American Mathematical Society , Providence , R . I , 1974 , third printing of the revised edition of 1957 , American Mathematical society colloqui Publicati , Vol X X X I .

[7] Lemle ,L .D . Asupra teoremei aplicatiei spectrale pentru C_0 - semigrupuri diferentiabile .Universitaria Ropet Petrosani (2000) , 33 - 38 .

[8] Lemle , L .D.C_0 - semigroupes analytiques .Analele Facultatii de I nginerie din Hunedoara, (5) 2001 , 177 - 184 .

[9] Lemle ,L .D . Le théoréme spectral pour les semigroupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés . Analele Facultatii de Inginerie din Hunedoara , (5) 2000 , 164 - 167 .

[10] Lemle , . D. Transformata Laplace a unui semigrup uniform continu de operatori liniari marginiti .Analele Facultatii de Inginerie din Hunedoara , (5) 2000 , 159 - 163.

[11] Pasy ,A . Semigroups of linear operators and application to partial differential equations . Springer Verlag , New York , Berlin , 1983 .

[12] Vrabie , I . I . Semigrupuri de operatori liniari si aplicatii . Editura universitatii "A_1 ,Icuza" ,Iasi , 2001 .

[13] Yosida , K . On the differentiability and the representation of one - parameter semigroups of linear operators .J . Math . Soc . Japan , (1948) , 15 - 21 .

الملـــــخص

فـــي هـــذا العمل قمنـــا مـــن جهة بدراســـة نظرية نصـــف زمر المؤثرات على فضاء بنـــاخ (الخواص اساسيـــة).

ومـن جهــة أخـرى درسنـــا الخــواص الطـيـفيـــة لنصــف الزمـــر المستمــــرة بانتظـــام ونصـــف الزمـــر التحـــليليـــة ونصــــف الزمــــر المستمـــــرة بقــــوة, وبخــاصـــــة القابلــــة للاشتقــــاق و المتراصـــــــة.

الكلمات المفتاحيــة: نصـــــــــف زمـــــرة, نصـــــف زمـــــرة مستمـــــرة بقـــــوة, حـــــــال, طيـــــــــف.

Résumé

Ce travail a pour but d'étudier d'une part la théorie des semigroupes d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach (Propriétés élémentaires).

D'autre part d'étudier les propriétés spectrales pour les semigroupes uniformément continus, semigroupes analytiques et les C_0-semigroupes, en particulier les semigroupes différentiables et compacts.

Mots clés : semigroupe, semigroupe fortement continu, résolvante, spectre.

Abstract

In this work we present a study concerning in part the theory of semigroups of bounded linear operators on a Banach space(Elementary properties).

Another part the spectral properties of uniformly continuous semigroups, analytic semigroups and strongly continuous semigroups, in particular C_0-semigroups differentiable and compact.

Key words : semigroups, strongly continuous semigroups, resolvant, spectrum.