UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par :Kecheha Hossine

Thème

Etude des opérateurs p-sommables.

Soutenu publiquement le : /06/2014

Devant le jury composé de :

Amara Abdelkader	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Agti Mohamed	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Baddidja Salim	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

l'année universitaire :2013/2014

Dédication

Je dédie ce modeste travail :

-Aux joyaux de ma vie "mes parents" qui sont la source de ma réussite, je souhaite qu'ils trouvent à travers ce mémoire le faible témoignage de leurs efforts et sacrifices.

-A mes frères,

- A ma sœur,

-A toute la famille et

- A mes chers amis,

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Remerciment

Tout d'abord, je remercie Dieu qui nous guident pour terminer ce travail humble.

Je tiens à remercier le professeur **Badidja Salim** qui portons en nous la souffrance de ce travail,Je le souhaite la réussite dans son doctorat

Je tiens également à remercier les enseignants Assila, gherfi et Saide de toute l'aide donnée par nous.

Je tiens à remercier tous les collègues qui m'ont accompagné pendant les années de l'étude Mossa, Massoude, Sadam, Ismaille, Ahmed, Sabar, Ba9ouch, Hocine, abd elkarim, Kamal, Taher,......

Je tiens à remercier tous les collègues chers Djailane, Bakkar, Amar, Hamida, Yacine, Said, Taher, 3aiche, Mohamed .....

Merci à tous nous aide de près ou de loin.

Merci pour tout.

Table des matières

Notations

$\|.\|$ définit un normé.

$< ., . >$ définit un produit scalaire.

$L^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow Y$ mesurable tel que $\|f\|_p < \infty\}$.

$X^+ = \{x \in X, X$ espace de Riesz : $x \geq 0\}$.

$\mathcal{L}(X, Y) = \{$l'espace des opérateurs de X dans Y$\}$.

X^* est le dual (topologique) de X.

T^* est appelle l'adjoint d'opérateur T.

B_X La boule d'unité fermée de X.

$\Pi_p(X, Y)$ L'ensemble des opérateurs p-sommable de X dans Y.

$L(X, Y) = \{$ application linéaires $u : X \longrightarrow Y\}$.

$SL(X, Y) = \{$application sous-linéaires $T : X \longrightarrow Y\}$.

$\nabla T = \{u \in L(X, Y) : u \leq T(i.e., \forall x \in X, u(x) \leq T(x))\}$.

$SB(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y$ sous-linéaire bornés $\}$.

$B(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y$ linéaire bornés $\}$.

$\pi_p^+(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y$ sous-linéaire positivement p-sommants $\}$.

$D_p(X, Y)$ l'ensemble de tous les operateurs sous-linéaires qui sont fortement p-sommables de X dans Y.

Introduction

Les application sous-linéaires ont été uneobjet mathématique très étudiées au cours ces dernièires années et surtout dans le domaine de l'interpolation et des factorisations sous toutes les formes. Très récemment Grafakos, Defant, Garcia Cureva et Cie ont donné un dévelopement importent à cette notion. Dans ce mémoire, on va s'intéresser aux opérateurs sous-linéaires T et les opérateurs linéaire $\leq T$. On essayera d'introduire, de comparer et de généraliser des résultats classiques ou universels du linéaires au sous-linéaires.

Le plan de ce mémoire est comme suivant : Dans le premier chapitre introducation sur les espaces nécessaire à définition les opérateurs p-sommants. on donnera dans un premiere temps un aperçu général sur les espaces normés, quasi-normés et les applications linéaires continues (les opérateur) et ces types, espace Banach et quasi-Banach. Puis on étudiera les espaces de Banach réticulés et complètement réticulés sur quel on introdiut les espaces ordonné (ou espace Riesz) et quelques propriétés qui s'y raménent, telle que l'ensemble positif ($X^+ = \{x \in X, X$ espace de Riesz :$x \geq 0\}$).

Dans le second chapitre,on donnera généralement la définition des opérateurs p-sommants. Aprés que on prend les notations relativement la normé sur l_p(resp. l_p^n) et $l_p^{n\ \omega}$(resp. l_p^ω), et encore on définition les opérateurs p-sommants avec le Théorème Factorisation de pietsch. Puis, on étudier les opérateurs sous linéaires et quelques propriétés qui s'yraménent, et on introduit un peu les définitions nécessaires comme l'opérateur différentiel ($\nabla T = \{u \in L(X,Y) : u \leq T(i.e., \forall x \in X, u(x) \leq T(x))\}$). telle que l'extention du théorème Hahn-Banach aux opérateurs sous-linéaires. On donnera aussi quelques résultats relatifs à cette classe d'opérateurs.

Dans le chapitre troisiéme on donnera le grand théorème pour les opérateurs sous-linéaires positivement p-sommants($\pi_p^+(X;Y) = \{T : X \longrightarrow Y$ opérateur positivements

p-sommants }) comme théorème d'inclusion et théorème de pietsch aus opérateurs positifs. Puis on cadre du développement de théorème de factorisation dans ce cas sous-linéaire par L_q. On dit que généralement un opérateur $T \in L(X;Y)$ se factorise par un espace de Banach Z s'il existe un opérateur $U \in L(X;Z)$ et $V \in L(Z;Y)$ tel que $T = U \circ V$.
Lorsque on parle des théorèmes de factorisation d'après les études déjà faîtes, à maintes reprises un schéma apparut, nous pouvons donner une simple caratérisation de ce schéma par ce diagramme, pour X,Y et Z.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[rr, "\mathrm{T}"] \arrow[dr, "\mathrm{S}"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "T_g"'] & \end{tikzcd}$$

où S est un opérateur linéaire continu de X dans Z, et T_g désigne l'opérateur linéaire borné de multiplication par une fonction $g \in Y, g > 0, (Y$ réticulé).
On teminer ce chapitre avec étudie la relaion entre les opérateurs linéaires sommants et les opérateurs sous-linéaires de X un espace de Banach réticulé dans un espace de Banach complétement réticulé.

Enfin en donnant des quelques remarques et question ouvertes.

Chapitre 1

Apparçu les epaces

On commence par les théorèmes et les définitions des types quelques espaces qui sont notre source d'inpiration.

1.1 Espace quasi-normé

Définition 1.1.1 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, une application $\| \, . \, \|$:$X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une norme ssi :*

1. $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = | \, \lambda \, | \, \|x\|$. *(homogenéité)*

2. $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. *(inégalité triangulaire)*

3. $\forall x \in X \quad \|x\| \geqslant 0$. *(positivété)*

4. $\forall x \in X \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. *(defini)*

-Une espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel norme (en abrége $\ll$ E.V.N $\gg$).

-Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ l'espace vectoriel $X = C^{\infty}[a, b]$ muni de la norme :

$$\|T\|_{\infty} = \sup \, | \, T(x) \, | \ . \ \|T\|_2 = \sqrt{\int_a^b T(x)^2 dx} \ .$$

on encore de la norme :

$$\|T\|_1 = \int_a^b | \, T(x) \, | \, dx \ .$$

est une espace vectoriel

-Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on definition la norme sur l'espace $l^p (1 \leq p \leq \infty)$:

si $p < \infty$: $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n | \, x_i \, |^p)^{\frac{1}{p}}$.

si $p=\infty$: $\|x\|_\infty = \sup\{| x_i | .i \in \mathbb{N}^*\}$.

Définition 1.1.2 *Soit E un e.v. muni de normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.*

-On dit que $\|.\|_2$ est plus fort que $\|.\|_1$ s'il existe une constante $c>0$ telle que $\forall x \in X$.

$$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2 \ .$$

-On dit que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont equivalants s'il existe $c>0$ telle que $\forall x \in X$.

$$c^{-1}\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2 \ .$$

Définition 1.1.3 *Une quasi-norme sur X, est une application*

$$\|.\|: X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \longmapsto \|x\|$$

telle que :

i) $\|x\| > 0$, pour tout $x \neq 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in X$

iii) $\|x+y\| \leq C(\|x\|+\|y\|)$, pour tout $x, y \in X$.

où $(C \geq 1)$ une cnstante indépendante de x et y appelée le module de concavité de $\|.\|$.

Définition 1.1.4 *Soit $0<p\leq 1$, une quasi norme $\|.\|$ sur X est dit une p-norme si pour toue suite finie $x_1, ..., x_n \in X$ l'inégalité suivant est vérifiée*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans ce cas on dit que l'espace X est "p-normé" pour tout $p \in]0,1]$.

Remarque 1.1.5 .

- *Tout p-normé est un quasi-norme avec $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$ (notons que la 1-norme est la norme usuelle).*
- *Le téorème de Aoski-Rolewicz assure que pour toute quasi norme $\|.\|$ il existe $0<p\leq 1$ tel que $\|.\|$ est une p-norme équivalente (i.e., si $\|.\|_1$ une quasi-norme dans X, alors il*

existe $0 <\leq 1$ *qui satisfait* $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$*et une p-norme* $\|.\|_2$*) dans* X *tel que* $C^{-1}\|x\|_1\leq \|x\|_2\leq \|x\|_1, x \in X$*).La p-norme est définie par*

$$\|x\|_2= \inf \left\{ (\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_1^p)^{\frac{1}{p}} : n > 0, x = \sum_{i=1}^{n} x_i, (x_i) \subset X \right\}.$$

Rappelons qu 'une norme $\|.\|$ sur un espace de vectoriel X est une norme réticulée si $\forall x, y \in X, |x| \leq |y| \Rightarrow \|x\|\leq \|y\|$.Un espace de vectoriel muni d'une norme réticulée est appelé espace de vectoriel normé .

1.2 Espace Hilbert

soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *Une produit scalaire sur X est une application bilinéaire sur X. notée* $< .,. >_X: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *et verifier les trois propriéte suivantes :*
1/ Symetric : $\forall u, v \in X \quad < u, v >_X=< v, u >_X$.
2/ positivité : $\forall u \in X \quad < u, u >_X\geqslant 0$.
3/ defini : $< u, u >_X= 0 \Longleftrightarrow u = 0$.
Si $< .,. >$ *definit un produit scalaire sur X.*
$(X, < .,. >)$ *est appelé espace préhilbertien.*
$X = \mathbb{R}^n$. $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *definit produit scalaire sur X.*
$X = C([a, b], \mathbb{R})$. *avec* $-\infty < a < b < +\infty$

$$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

defini un produit scalaire.
Soit H espace préhilbertien on a la définition suivant :
a) on dit que x et y orthogonaux si :

$$x, y \in X, < x, y >= 0.$$

b) on dit que M et N orthogonaux tel que $M \subset X, N \subset H$ *si*

$$\forall x \in M, \forall y \in N, < x, y >= 0.$$

c)on dit que $M \subset X$ orthogonal si

$$y \in X; \forall x \in M, < x, y >= 0.$$

d) on dit que $U \subseteq X$ est unensemble orthogonal si

$$\forall x, y \in U, x \neq y, < x, y >= 0.$$

Pour tout x dans U(orthogonal) et $\|x\|= 1$. alors U est un ensemble orthonormal(ou orthonormé).

Définition 1.2.2 *Un espace préhilbertienne complet sur produit scalaire est appelle espace de Hilbert.*

Proposition 1.2.3 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel norme complet $(X, \|.\|)$ dont la norme $\|.\|$ est induite par un produit scalaire.*

Proposition 1.2.4 *Soit $< ., . >_X$ produit scalaire sur X.*
L'application $x \in X \longmapsto \|x\|= \sqrt{< x, x >}$ est un norme.

Preuve.

Soit X un espace Hilbert Alors.

$$\forall x, y \in X^2 \quad | < x, y > | \leq \|x\|\|y\|.$$

1) $\|x\|= 0 \Longrightarrow \sqrt{< x, x >} = 0$

$\Longrightarrow < x, x >= 0$

$\Longrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\|= \sqrt{< \lambda x, \lambda x >}$

$= \sqrt{\lambda^2 < x, x >}$

$= |\lambda|\sqrt{< x, x >}$

$= |\lambda|\|x\|.$

3) $\|x + y\|^2= \sqrt{< x + y, x + y >}^2$

$=< x + y, x + y >$

$$=< x,x > + < x,y > + < y,x > + < y,y >$$
$$= \|x\|^2 + 2 < x,y > + \|y\|^2.$$
on a $< x,y > \leq | < x,y > | \leq \|x\| \|y\|$.

$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

$\leq (\|x\| + \|y\|)^2$ ∎

Définition 1.2.5 *On pose, pour $p \geq 1$*

$$L^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow Y \ \textit{mesurable tel que} \ \|f\|_p < \infty\}.$$

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pose également

$$L^\infty(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow Y \ \textit{mesurable tel que} \ \|f\|_\infty < \infty\},$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \leq 0 : |f(x)| \leq M \ p.p \ \}.$$

Théorème 1.2.6 *(inégalité de Hölder)Soient $p, q \in]1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; si $f \in L_p(\Omega, \mu)$ et $g \in L_q(\Omega, \mu)$, la fonction produit fg est intégrable et*

$$\left| \int_\Omega fg d\mu \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

1.3 Application linéaire continue

Soit X et Y deux espaces vectoriels normes.

On note L(X,Y) l'ensemble des applications linéares de X dans Y.

Théorème 1.3.1 *Soit $T \in L(X,Y)$ les propriétes suivants sont équivalants .*

1. T est continue sur X .

2. T est continue en 0 .

3. $\exists M > 0$ tel que

$$\forall x \in E \ \|T(x)\|_Y \leqslant M \|x\|_X \ .$$

Preuve.

Il est claire que (i)$\Longrightarrow$ (ii).

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

Si T est continu en 0,

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall u \in X \ \ \|u\|_X \leq \delta \Longrightarrow \|T(u)\|_Y \leq 1.$$

Etant donné un vecteur $\forall (x \neq 0) \in X, u = \delta \|x\|_X^{-1} x$ vérifie $\|u\|_X \leq \delta$, donc $\|T(u)\|_Y \leq 1$, ce qui revient à dire que $\|T(x)\|_Y \leq \delta^{-1} \|x\|_X$.

On a ainsi montré que (iii) est vraie,avec $M = \delta^{-1}$.

(iii)$\Longrightarrow$(i)

on pose une suite (x_n) de X tend vers un $x \in X$, on aura

$$\|T(x_n) - T(x)\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y \leq M \|x_n - x\|_X \longrightarrow 0,$$

ce qui montre que T est continue au point x, et ceci pour tout $x \in X$. ■

Définition 1.3.2 *Soit $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continue de X dans Y. Pour $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. on note $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ le plus petit constante M telle que.*

$$\forall x \in X \quad \|T(x)\|_Y \leqslant M \|x\|_X \ .$$

On a donc $\forall x \in X$.

$$\|T(x)\|_Y \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \ .$$

et

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|_Y.$$

On a aussi l'ensemble des formes linéaires continus sur X est appellé dual topologique de X et note X^*

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$$

$\|T\|_{X^*}$ d'un element de X^* est donc défini par

$$\|T\|_{X^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|}$$

Soit X un espace de Banach et soit que X^* est aussi un espace de Banach. On note X^{**} l'ensemble des formes linéaire continue sur X^*.C'est encore un espace de Banach appelé bidual de X.

Proposition 1.3.3 *L'espace ($\mathcal{L}(X,Y), \|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$) est un espece vectoriel normé.*

Si X est un espace normé non nul, on a toujours $\|Id_X\|= 1$.

Proposition 1.3.4 *Soient X,Y et Z trois espaces v.n. si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Alors $S \circ T \in \mathcal{L}(X,Z)$ et l'inegalité suivante.*

$$\|S \circ T\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|S\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}.$$

Preuve.

Soit $x \in X$; on peut écrire

$$\|(S \circ T)(x)\|_Z = \|S(T(x))\|)_Z \leq \|S\| \|T(x)\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|_X,$$

ce qui entraîne l'inégalité voulue. ■

Définition 1.3.5 *Soit $X_1, ..., X_n$ et Y des espace vectoriel minu de la normes $\|.\|_{X_1}, ..., \|.\|_{X_n}$ et $\|.\|_Y$. soit T une application de $X_1 \times ... \times X_n$ dans Y .on dit que T est n-linéaire si :*

1. $\forall x, y \in X_i$

$$T(x_1, ..., x_i, x + y, x_{i+1}, ..., x_n) = T(x_1, ..., x, ..., x_n) + T(x_1, ..., y, ..., x_n).$$

2. $\forall x \in X_i \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$T(x_1, ..., x_i, \lambda x, x_{i+1}, ..., x_n) = \lambda T(x_1, ..., x, ..., x_n).$$

Proposition 1.3.6 *Soit $X_i(i = 1, ..., n)$ et Y des espaces vectoriel muni de la norme $\|.\|_{X_i}(i = 1, ..., n)$ et $\|.\|_Y$. soit T une appmication n-linéaires de $X_1 \times .... \times X_n$ dans Y. Alors les propriétes suivants sont équivalents.*

1. T est continue.

2. T est continue en $(0_1, 0_2, ..., 0_n)$.

3. $\exists M \in \mathbb{R}^* \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times .... \times X_n$.

$$\|T(x_1, ..., x_n)\| \leqslant M \|x_1\|_{X_1} \times ... \times \|x_n\|_{X_n}$$

1.4 Espace de Banach

Définition 1.4.1 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace vectoriel norme X.*

1. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point a de X si :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 1 \quad n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon.$$

2. On dit que la suit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suit cauchy si :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 1 \quad m, n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Proposition 1.4.2 *Soit X un espace vectoriel norme, alors tout suit convergente est un suit de cauchy.*

Preuve.

Soit (x_n) suit converge vers point a de X on a

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad n \geq N \Longrightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon.$$

où

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad m \geq N \Longrightarrow \|x_m - a\| < \varepsilon.$$

Donc, pour tout $m, n \geq N$, on

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - a\| + \|a - x_m\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

et donc $x_n - x_m \longrightarrow 0$ pour $n, m \longrightarrow \infty$. ■

Définition 1.4.3 *L'espace vectoriel norme X est dit que complet. si tout suit de cauchy d'element de X converge dans X.*

Proposition 1.4.4 *Soit X espace vectoriel norme et $A \subset X$.*

1) Si A complet. Alors A est finie dans X.

2) Si X complet,Alors A est complet si seulement si A fermé.

Preuve.

1) Supposons que A est complet dans X et montrons que l'ensemble A est finie.soit $(x_n) \subset A$ convergente vers un point $x \in X$. Alors (x_n) est une suite de cauchy. Comme A est complet (x_n) dont convergent vers point de A : $x \in A$. alors ($A =\bar{A}$).

2) Supposons que A est complet, et soit $a \in \bar{A}$. Il existe donc (x_n) suite de A telle que $x_n \longrightarrow a$ pour $n \longrightarrow \infty$. Comme la suite (x_n) est convergente dans X, c'est une suite de Cauchy ;comme A est complet, (x_n) converge dans A : ainsi $a \in A$,d'où A est fermé.

Réciproquement, supposons A fermé dans X et soit (x_n) suite de Cauchy dans A ; comme c'est une suite de Cauchy dans X complet, elle converge vers une limite $a \in X$. Comme $x_n \in A$ et A est fermé, $a \in A$,

C.Q.F.D. ■

On aussi A une partie d'un espace de Banach X. A est convexe si et seulment si

$$\forall t \in [0,1], \forall (x,y) \in (A \times A) \text{ la fonction } f : (x,y) \longrightarrow tx + (1-t)y$$

est continue de X^2 dans X ou $f(A \times A) \subset A$.

Définition 1.4.5 *(Espace quasi-Banach)Soit X un espace vectoriel norme et complet. alors X est un espace Banach . Dans cas X est un espace quasi norme, on dit que espace quasi-Banach*

Proposition 1.4.6 *Soient X et Y deux espaces normés.si Y est un espace de Banach,l'espace* $\mathcal{L}(X,Y)$ *est un espace de Banach.*

Preuve.

supposons que Y soit un espace de Banach. Soit $\sum u_k$ une série normalement convergente dans $\mathcal{L}(X,Y)$, c'est à dire que $\sum \|u_k\| < \infty$

$$\forall x \in X \ \ \|u_k(x)\| \leq \|u_k\| \|x\|,$$

donc la série $\sum u_k(x)$ est normalement convergente dans Y. Puisque Y est complet, cette série converge dans Y et on peut poser pour tout $x \in X$

$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \in Y.$$

Il est facile de vérifier que application $U : X \longrightarrow Y$ est linéaire,et de plus pour tout $x \in X$ on a

$$\|U(x)\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k(x)\| \leq (\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|)\|x\|,$$

ce qui montre que U est continue et

$$\|U\| \leq \sum_{k=i}^{+\infty} \|u_k\|. \tag{1.1}$$

Il reste à voir que U est la limite dans $\mathcal{L}(X, Y)$ de la suit (U_n) des sommes partielles.
On a

$$(U - U_n)(x) = \sum_{j>n} u_j(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(x)$$

où on a posé $v_k = u_{n+k+1}$ pour tout $k \geq 0$ en appliquant l'inégalité (1.1) à la série $\sum v_k$ on obtient

$$\|U - U_n\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|v_k\| = \sum_{k>n} \|u_k\|,$$

et quantité tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$. ■

Corollaire 1.4.7 *Tout espace vectoriel norme de deminsion finie est un espace Banach.*

Preuve.

Soit X un espace vectoriel norme et avec utiliser les proposition 1.4.4, Alors X est complet.ce que implique X un espace de Banach. ■

1.5 Espace de Banach réticulés et complétement réticulés

Définition 1.5.1 *Un espace vectoriel réel X, partiellement ordonné par un ordre partiel noté $\leq$, est un espace vectoriel ordonné (ou espace de Riesz)si*

$$x \leq y \Longleftrightarrow x + z \leq y + z, \quad \forall z \in X,$$

$$x \geq 0 \Longleftrightarrow \alpha x \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

On note

$$X^+ = \{x \in X, X \text{ espace de Riesz} : x \geq 0\}.$$

Un élément x de X est positif si $x \in X^+$. L'ensemple X^+ est appelé positif de X.

Proposition 1.5.2 *Soit X un espace de Riesz.*

a) $x \in X^+, y \in X^+ \Longleftrightarrow x + y \in X^+$.

b) $x \in X^+ \Longleftrightarrow \alpha x \in X^+$ *pour tout réel* $\alpha \geq 0$.

c) $x \in X^+, -x \in X^+ \Longleftrightarrow x = 0$.

La borne supérirure d'un ensemble à deux élements est notée $x \vee y$ ou $\sup\{x, y\}$ et la borne inférieure d'un ensemble à deux éléments est notée $x \wedge y$ ou $\inf\{x, y\}$.Pour tout $x \in X$ on peut écrire $x^+ = x \vee 0; x^- = -x \vee 0$, donc $|x| = x^+ \vee (-x)$ et $x = x^+ - x^-$.

On a aussi les propriétés suivantes :

a) $0 \leq x^+ \leq |X|$ et $0 \leq x^- \leq |X|$ d'où $-x^- \leq x^- \leq x^+$.

b) $x \leq y$ si seulement si $x^+ \leq y^+$ et $x^- \geq y^-$.

c) $|x| \wedge |y| = 0 \Longleftrightarrow |x + y| = |x - y|$.

d) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}\{|x + y| + |x - y|\}$ et $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}\{|x + y| - |x - y|\}$.

Définition 1.5.3 .

a) Un sous ensemble A de X dit borné pour l'ordre (ou simplement borné) s'il existe un élément y dans X tel qua $x \leq y$ *pour tout* $x \in A$ *et y est alors appelé majorant de A.*

b) Si A est borné, alors z est appelé la borne supérieure de A ou supremume de A si z est une borne supérieure de A et $z \leq y$ *pour tout majorant y de A.*

c) Un espace vectoriel partiellement ordonné X dans lequel toute paire d'élements a une borne supérieure est appelé espace vectoriel réticulé ou de Riesz.

d) On dira qu'un espace vectoriel est complétement réticulé si toute partie non vide et majorée pour l'ordre, admet un supremum.

Remarque 1.5.4 *Rappelons qu'une norme* $\|.\|$ *sur un espace de Riesz X est une norme réticulée si*

$$\forall x, y \in X, |x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

(ce qui implique que pour tout $x \in X$ *l'élément* x *et* $|x|$ *ont la même norme).*

Un espace de Riesz équipé d'un norme réticulée est appelé espace de Riesz normé. Si la *norme est compléte, on dira que X est un espace de Bancach réticulé(Il est complétement réticulé s'il est complétement réticulé en tant qu'espace vectoriel).Les deux inégalités suivantes sont vérifiées*

$$\|x^+ - y^-\| \leq \|x-y\| \text{ et } \||x|-|y|\| \leq \|x-y\|.$$

Exemple 1.5.5 .

(1) L'espace $C(K)$ est un espace se Banach réticulé.

(2) L'espace $L_p(\mu)(1 \leq p \leq \infty)$ est un espace de Banach complétement réticulé.

Théorème 1.5.6 *([Zaa97])*

Le dual d'un espace de Riesz normé est un espace de Banach réticulé.

Proposition 1.5.7 *([LT96])*

Le dual X^* d'un espace de Banach réticulé X est un espace de Banach complétement réticulé minu de l'ordre naturel

$$x_1^* \leq x_2^* \Longleftrightarrow \langle x_1^*, x\rangle \leq \langle x_2^*, x\rangle, \quad \forall x \in X^+ \tag{1.2}$$

Preuve.

Nous allons esquisser la démonstration. Nous définitions le cône positif dans X^* par

$$x^* \geq 0 \Longleftrightarrow x^*(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \geq 0 \text{ dans } X.$$

Dans ce cas, il est facile de vérifier que pour tout x^*, y^* dans X^* et pour tout $x \geq 0$, on a

$$(x^* \vee y^*)(x) = \sup\{x^*(u) + y^*(x-u) : 0 \leq u \leq x\}$$

et

$$(x^* \wedge y^*)(x) = \inf\{x^*(v) + y^*(x-v) : 0 \leq v \leq x\}.$$

Pour plus de détails voir [LT96] ■

Chapitre 2

Les opérateurs sous-linéaires

2.1 Généralités sur les opérateurs

Définition 2.1.1 *Tout application linéaire continue $T : X \longrightarrow Y$. s'appelle un opérateur. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(X, Y)$ des application linéaire continues de X dans Y est l'espace des opérateurs de X dans Y.*

Définition 2.1.2 *On dit que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est inversible. si T est une bijection de X dans Y et si T^{-1} est continue et on ecrire :*

$$T \circ T^{-1} = I_Y.$$

$$T^{-1} \circ T = I_X.$$

Théorème 2.1.3 *Si H un espace Hilbert et $\dim H < +\infty$, les propriétés suivant sont equivalents :*
1/ T est inversible.
2/ T est injectif.
3/ T est surjectif.
4/ T admet un inverse à adroite.
5/ T admet un inverse à gauche.

Définition 2.1.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.l'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle que :*

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \qquad < Tx, y > = < x, T^* y > .$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T.

Exemple 2.1.5 .

Soit $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire usuel, et $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in [0,1]$, on pose

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$

Calculer l'adjoint T.

Pour calculer de l'adjoint, comme à l'accoutumée, on fixe $g \in L^2$, et pour tout $f \in L^2$, on a :

$$< Tf, g > = \int_0^1 \int_0^1 K(x,y) f(y) \overline{g(x)} dx.$$

Par le théorème de Fubini (pourquoi peut-on l'appliquer ?), cela donne

$$\begin{aligned} < Tf, g > &= \textstyle\int_0^1 f(y) \int_0^1 K(x,y) \overline{g(x)} dx \\ &= \textstyle\int_0^1 f(y) \overline{\int_0^1 \overline{K(x,y)} g(x) dx}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$T^*(g) = \int_0^1 \overline{K(x,y)} g(y) dy.$$

Définition 2.1.6 *Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est tel que $T = T^*$. on dit que l'opérateur autoadjoint.*

Par définition de la norme opérateur,

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|T^*(y)\|.$$

Corollaire d'Hahn-Banach, $\|T^*(y)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, T^*(y) \rangle|$. De plus, comme $\langle x, T^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$, on obtient

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |\langle T(x), y \rangle|.$$

En appliquant de nouveau un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur de T on obtient :

$$\sup_{\|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |\langle T(x), y \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \|T\|.$$

ce qui prouve que T^* est aussi continue.

Proposition 2.1.7 .

1) Pour tout $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ on a

$$(T^*)^* = T \qquad et \qquad \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

2) Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y,X)$. Alors

$$(TS)^* = S^*T^*.$$

Preuve.

1) Montrons que $(T^*)* = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, on a $\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*) * (x), y\rangle$. On a

$$\begin{aligned}\langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\ &= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\ &= \langle (T^*)^*(x), y\rangle.\end{aligned}$$

Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rapelle que la norme opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier, $\|T^*T\| \leq \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2$.

D'autre part, en utilisant encore une fois de plus un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &= \sup\nolimits_{\|x\|\leq 1} \|T^*T(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle T^*T(x), y\rangle| \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*T(x), x\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), T(x)\rangle| \\ &= \|T\|^2\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

2) Pour vérifier que $(ST)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$ on a $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$. On a, par définition de l'adjoint,

$$\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle x, (TS)(y)\rangle$$

$$= \langle T^*(x), S(y)\rangle$$
$$= \langle S^*T^*(x), y\rangle.$$

Comme ceci est vrai pour tpus vecteurs x, y, on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$. ■

2.2 Les opérateurs p-sommants

Commençons cette section par quelques préliminaires nécessaire des définition les opérateurs p-sommants. Soit X un espace de Banach réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. On note par $X(l_p^n)(n \in \mathbb{N})$ l'espace des suites $x = (x_1, ..., x_n)$ des éléments de X telles que

$$\|x\|_{X(l_p^n)} = \|(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\| \quad si \quad 1 \leq p < \infty \tag{2.1}$$

et

$$\|x\|_{X(l_\infty^n)} = \| \sup_{1\leq i\leq \infty} |x_i|\| \quad si \quad p = \infty. \tag{2.2}$$

L'espace $X(l_p^n)$ muni de l'ordre naturel

$$x \leq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i, \quad \forall i,$$

est un espace de Banach réticulé.

Soit X un espace de Banach. Soit $1 \leq p \leq \infty$, On note $l_p(X)$ (resp.$l_p^n(X)$) l'espace de Banach des suits (x_i) dans X muni de la norme

$$\|(x_i)\|_{l_p^n(X)} = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$(resp. \|(x_i)\|_{l_p^n(X)} = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}})$$

Si p est fini, et on prend le sup si p est infini.

Et $l_p^\omega(X)$ (resp. $l_p^{n\omega}(X)$) l'espace de Banach des suites $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans X muni de la norme

$$\|(x_n)\|_{l_p^\omega(X)} = \sup_{\xi\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

$$(resp. \|(x_n)\|_{l_p^{n\omega}(X)} = \sup_{\xi\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}).$$

où X^* est le dual (topologique) de X. La boule d'unité fermée de X est notée B_X (si p est infini on prend de sup).

On a aussi si $1 < p \leq \infty$ (où p^* est le conjugué de p (i.e.,$\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$)) et $v : l_{p^*} \longrightarrow X$ un opérateur linéaire tel que $v(e_i) = x_i$ (i.e., $v = \sum_{j=1}^{\infty} e_j \otimes x_j$, (e_j) est la base canonique de l_p). Alors,

$$\|v\| = \|(x_n)\|_{l_p^\omega(x)} \tag{2.3}$$

Définition 2.2.1 *Une opérateur $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est p-sommant $p \in]1,+\infty[$, s'il existe une constante $C \geqslant 0$ tel que $\forall x_1,...,x_n$ dans X on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} | < x^*, x_i > |^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4}$$

L'ensemble des opérateurs p-sommants de X dans Y est noté $\Pi_p(X,Y)$ et muni de la norme $\pi_p(T) = \{\inf C.$ verifier l'inégalité (2.4) $\}$ telle que pour tout $T \in \Pi_p(X,Y)$ on a :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \leqslant \pi_p(T).$$

Théorème 2.2.2 *(Domination de pietsch) Soient $p \in [0,\infty[$ et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire p-sommant et. Alors, il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{x^*}, \sigma(X^*,X))$ telle que*

$$\forall x \in X : \|T(x)\| \leqslant \pi(T) \left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p d\lambda(x^*)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.5}$$

Inversement, s'il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^*}, \sigma(X^*,X))$ et $C > 0$ telle que cette formule est verifieé, alors T est p-sommant et $\pi(t) \leqslant C$.

La Factorisation proprement dite de pietsch est

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{T} & Y \\
i_X \big\downarrow & & \big\uparrow \tilde{T} \\
i_X(X) & \xrightarrow{k_p} & S \\
\cap & & \cap \\
C(K) & \xrightarrow{j_p} & L_p(\mu)
\end{array}$$

où $\tilde{T}$ un opérateur linéaire borné, k_p restriction de j_p, $K = B_{X^*}$ et S la fermeture de $k_p \circ i_X(X)$ dans $l_p(\mu)$. Dans ce cas $\pi_p(T) = \|\tilde{T}\|$.

Théorème 2.2.3 *(théorème d'inclusion). Si $1 \leq p < q < \infty$, alors*

$$\Pi_p(X;Y) \subseteq \Pi_q(X;Y).$$

De plus, on a $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$ pour tout $T \in \Pi_p(X;Y)$

Théorème 2.2.4 *(Les théorème de GrothendieK). si tout opérateur borné de X dans Y est 1-sommant i.e.*

$$B(X,Y) = \Pi_1(X,Y).$$

avec $\pi_1(T) \leqslant K_G\|T\|$.
K_G est la constant inversible de GrothendieK.

2.3 Les opérateurs sous-linéaires

On introduit dans cette section par introduire quelques terminologies et propriétés notations par donner definition les opérateurs sous-linéaire.Pour plus de détails en voir [MT04] et [AM04].

Définition 2.3.1 *Soit T une application d'un espace vectoriel X dans un espace réticulé Y. On dira que T est sous-linéaire si,*

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X \qquad T(\lambda x) = \lambda T(x),$

2) $\forall x \in X, \forall y \in X \qquad T(x+y) \leqslant T(x) + T(y).$

La somme de deux opérateurs sous-linéaires est un opérateur sous-linéaire et la multiplication par un nombre positif donne aussi un opérateur sous-linéaire.

Exemple 2.3.2 .

Dans cas Y réticulé tout opérateur linéaire est un opérateur sous-linéaire.

Soit X un espace vectoriel et Y un espace réticulé. On note par

$$L(X,Y) = \{ \text{ application linéaires } u : X \longrightarrow Y\}$$

et on dira si X est réticulé, que u est positive si $u(x) \geq 0, \forall x \geq 0$

$$SL(X,Y) = \{\text{application sous-linéaires } T : X \longrightarrow Y\}$$

et on le munit de l'ordre induit par Y

$$T_1 \leq T_2 \Longleftrightarrow T_1(x) \leq T_2(x), \quad \forall x \in X \tag{2.6}$$

Comme conséquence immédiate

$$u \leq T \Longleftrightarrow -T(-x) \leq u(x) \leq T(x), \quad \forall x \in X \tag{2.7}$$

car

$$\begin{aligned} u \leq T &\Longleftrightarrow u(x) \leq T(x), \quad \forall x \in X, \\ &\Longleftrightarrow u(-x) \leq T(-x), \quad \forall x \in X, \\ &\Longleftrightarrow -u(x) \leq T(-x), \quad \forall x \in X, \\ &\Longleftrightarrow u(x) \geq -T(-x), \quad \forall x \in X, \end{aligned}$$

On définie le différentiel par

$$\nabla T = \{u \in L(X,Y) : u \leq T(i.e., \forall x \in X, u(x) \leq T(x))\}.$$

Définition 2.3.3 *Soit $T \in SL(X,Y)$. On dira que*

- T est symétrique si pour tout x dans X,

$$T(x) = T(-x)$$

- T est croissant si pour tout x, y dans X

$$x \leq y \Longrightarrow T(x) \leq T(y).$$

-T est positif si pour tout x dans X,

$$T(x) \geq 0.$$

Remarque 2.3.4 .

1) Soit T un opérateur sous-linéaire symétrique entre espace réticulé X et Y. Alors, $T \geq 0$ au sens l'inegalité (2.3). En effet, soit x dans X

$$\begin{aligned} 0 &= T(x-x) \\ &\leq T(x) + T(-x) \\ &\leq T(x) + T(x) \\ &\leq 2T(x) \end{aligned}$$

La réciproque est fausse mème si T est croissant.

2) On sait aussi que la symétrie n'entraîne pas la croissance.

Proposition 2.3.5 *Soient X, Y deux espaces vectoriels dont Y réticulé et T dans $SL(X,Y)$. Alors,*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in X,\ \ \lambda T(x) \leq T(\lambda x). \tag{2.8}$$

Preuve.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $x \in X$.

Si $\lambda > 0$ on a

$$\lambda T(x) = T(\lambda x) \leq T(\lambda x),$$

si $\lambda < 0$, on a

$$\lambda T(x) = -(-\lambda T(x)) = -T(-\lambda x)$$

et

$$T(\lambda x - \lambda x) = 0 \leq T(-\lambda x) + T(\lambda x) \Longrightarrow -T(-\lambda x) \leq T(\lambda x)$$

donc, en combienant les deux quantités précédentes on aura

$$\lambda T(x) \leq T(\lambda x).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition 2.3.6 *Soient X, Y et Z, trois espaces vectoriels dont Y et Z réticulés.*

(a) $\forall T \in SL(X,Y)$ et $\forall u \in L(Y,Z)$ (positif) $\Longrightarrow u \circ T \in SL(X,Z)$.

(b) $\forall u \in L(X,Y)$ et $\forall T \in SL(Y,Z) \Longrightarrow T \circ u \in SL(X,Z)$.

(c) $\forall T \in SL(X,Y)$ et $\forall S \in L(Y,Z)$ (croissant) $\Longrightarrow S \circ T \in SL(X,Z)$.

Preuve.

Si u est un opérateur linéaire positif, alors u est croissant. (et réciproquement). En effet, soit u un opérateur linéaire positif ; x, y dans X tel que $x \geq y$. On a

$$x - y \geq 0 \Longrightarrow u(x-y) \geq 0$$

puisque

$$u(x-y) = u(x) - u(y) \geq 0 \Longrightarrow u(x) \geq u(y).$$

Donc u est croissant.

(a) Soient x, y dans X. Alors,

$$\begin{aligned} u \circ T(x,y) &= u(T(x+y)), \\ &\leq u(T(x) + T(y)) \text{ (car u est positif)}, \\ &\leq u \circ T(x) + u \circ T(y). \end{aligned}$$

Soit λ dans $\mathbb{R}^+$ et x dans X

$$\begin{aligned} u \circ T(\lambda x) = u(T(\lambda x)) &= u(\lambda T(x)), \\ &= \lambda (u \circ T)(x). \end{aligned}$$

Donc

$$u \circ T \in SL(X,Z).$$

(b) Soient x, y dans X

$$T \circ u(x+y) = T(u(x+y))$$
$$= T(u(x)+u(y))$$
$$= T \circ u(x) + T \circ u(y)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $x \in X$

$$T \circ u(\lambda x) = T(\lambda u(x)) = \lambda T \circ u(x)$$

Donc

$$T \circ u \in SL(X, Y).$$

(c) Pareil que (b).

Ainsi s'achève la démonstration. ■

Proposition 2.3.7 *Soit T un opérateur sous-linéaire d'un espace de Banach réticulé Y. Alors, les propriétés suivant sont équivalentes :*

(1) T continu,

(2) T continu en 0,

(3) Il existe $C > 0$ telle que $\forall x \in X,\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$.

Dans ce cas, T est borné et on pose

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|\|T(x)\|: \|x\|_{B_X} = 1\}. \tag{2.9}$$

Preuve.

(1) $\Longrightarrow$ (2).Evidente.

(2) $\Longrightarrow$ (3).Soit T un opérateur sous-linéaire continu en 0, donc

$$\exists \eta > 0 : \forall x (\neq 0) \in X, \|x\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|T(x)\| \leqslant 1.$$

Posant $y = \frac{x}{\|x\|}\eta$. Alors

$$\|T(y)\| \leq 1$$

donc

$$\|T(x)\| \leq \frac{1}{\eta}\|x\|$$

d'où (3).

(3) $\Longrightarrow$ (1) Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x \in X, \|T(x)\| \leq C\|x\|.$$

Soit x_0 dans X. On a

$$T(x) = T(x + x_0 - x_0) \leq T(x - x_0) + T(x_0) \Longrightarrow T(x) - T(x_0) \leq T(x - x_0).$$

et

$$T(x_0) = T(x_0 - x + x) \leq T(x_0 - x) + T(x) \Longrightarrow T(x_0) - T(x) \leq T(x_0 - x).$$

Donc pour tout x dans X on a

$$\begin{aligned} |T(x) - T(x_0)| &\leq \sup\{T(x - x_0), T(x_0 - x)\} \\ &\leq |T(x - x_0)| + |T(x_0 - x)| \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(x_0)\| &= \|T(x) - T(x_0)\| \\ &\leq \|T(x - x_0)\| + \|T(x_0 - x)\| \\ &\leq 2C\|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Donc T est continu. ■

On note par

$$SB(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ sous-linéaire bornés }\}$$

et

$$B(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaire bornés }\}.$$

Proposition 2.3.8 *Soit T un opérateur sous-linéaire borné entre X un espace de Banach et Y un espace de Banach réticulé.*

(1) Pour tout x dans X, on pose

$$\varphi(x) = \sup\{T(x), T(-x)\}.$$

Alors, φ est un opérateur sous-linéaire symétrique. De plus,

$$|T| \leq \varphi \ et \ \|\varphi(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|.$$

(2) Pour tout $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$*, on a*

$$T(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \varphi(x_i).$$

De plus

$$\left\| T(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|\varphi(x)\|.$$

Preuve.

(1) Il est claire que φ est un opérateur sous-linéaire symétrique, donc d'après la remarque 2.3.4 φ est positif.

Soit x dans X. On a,

$$\begin{aligned} |T(x)| &= \sup\{T(x), -T(x)\}, \\ &\leq \sup\{T(x), T(-x)\} = \varphi(x). \end{aligned}$$

Concernant l'égalité des normes on a,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| \leq \|\varphi(x)\| &= \|\sup\{T(x), T(-x)\}\|, \\ &\leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|. \end{aligned}$$

(2) Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, en écrit $\alpha_i = \alpha_i^+ - \alpha_i^-$ tels que $\alpha_i^+, \alpha_i^- \in \mathbb{R}^+$, dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} T(\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) &= T(\textstyle\sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) x_i), \\ &\leq T(\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i^+ x_i) + T(\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i^- (-x_i)), \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i^+ T(x_i) + \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i^- T(-x_i), \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ + \alpha_i^-) \sup\{T(x), T(-x)\}, \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \varphi(x_i). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$-T(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq T(\sum_{i=1}^n \alpha_i (-x_i)) \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \varphi(x_i),$$

donc

$$|T(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \varphi(x_i).$$

En prenant la norme des deux côtés, on obtient

$$\|T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)\|\leq \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\|\varphi(x_i)\|.$$

D'où la proposition. ■ Le théorème suivant établit un lien direct entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires.

Théorème 2.3.9 *[MT04] Soient X, Y deux espace de Banach dont Y complétement réticulé et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire continu. Alors,*

(a) $\forall x \in X, \|T(x)\|\leq \sup_{u\in\nabla T}\|u(x)\|\leq \|T(x)\|+\|T(-x)\|$.

(b) $\|T\|\leq \sup_{u\in\nabla T}\|u\|\leq 2\|T\|$.

Preuve.

(a) Soit x dans X. On a d'une part,

$$\|T(x)\|= \|u_x(x)\|\leq \sup_{u\in\nabla T}\|u(x)\|.$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq \sup\{|T(x)|, |T(-x)|\},\\ &\leq |T(x)| + |T(-x)|.\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\|u(x)\|&\leq \||T(x)| + |T(-x)|\|,\\ &\leq \|T(x)\|+\|T(-x)\|.\end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{u\in\nabla T}\|u(x)\|\leq \|T(x)\|+\|T(-x)\|.$$

(b) Se déduit immédiatement de (a). ■

2.4 Théorème de Hahn-Banach pour les opérateur sous-linéaires

Nous donnons le théorème de Hahn-Banach généraliseé aux opérateurs sous-linéaires.Nous aurons bien besoin. Pour faire le démonstration on trouvera une dans[Zaa97].

Théorème 2.4.1 *(théorème de Hahn-Banach)*
Soient X, Y deux espaces vectoriels dont Y complétement réticulé, $T \in SL(X, Y)$ et E un sous-espace vectoeiel de X. soit u dans $L(E, Y)$ tel que $u \leq T$. Alors, u se prolonge en un opérateur linéaire $\tilde{u} \in L(X, Y)$ tel que $\tilde{u} \leq T$.

Corollaire 2.4.2 *Soient X, Y deux espaces vectoriels dont Y complétement réticulé. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire. Alors,*
pour tout x dans X il existe $u_x \in \nabla T$ tel que

$$T(x) = u_x(x) \quad (ie., T(x) = \sup_{u \in \nabla T} u(x)). \tag{2.10}$$

Preuve.
Soit x dans X. On pose

$$u_x : \mathbb{R}x \longrightarrow Y$$
$$\lambda x \longmapsto u_x(\lambda x) = \lambda T(x)$$

l'opérateur u_x est linéaire sur $X_0 = \mathbb{R}x$ et $u_x(\lambda x) = \lambda T(x) \leq T(\lambda x)$ (proposition 2.3.5) donc d'après le théorème de Hahn-Banach, il se prolonge en un opérateur noté encore $u_x \in \nabla T$ et $T(x) = u_x(x)$. ∎

Corollaire 2.4.3 *Comme conséquence immédiate on a :*
1) T est un continu $\Longleftrightarrow \forall u \in \nabla T, u$ est continu.
2) Si T est symétrique, on aura

i) $\|T(x)\| = \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\|, \forall x \in X.$

ii) $\|T\| = \sup_{u \in \nabla T} \|u\|.$

Chapitre 3

La relation entre les opérateurs linéaires et sous-linéaires

3.1 Factorisation des opérateurs sous-linéaires par L_q

On donnera dans cette section la fatorisation des opérateurs sous-linéaires T de X un espace de Banach dans $L_p(\Omega, \mu), 0 < p < \infty$ par $L_q(\Omega, \mu)$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Nous vous référons sur ce résultat à [MT04] et [LT96].

D'abord on donner la notation d'opérateur p-convexe et q concaves aux opérateurs sous-linéaires.

1) Soit E un espace de Banach, X un espace de Banach réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. Un opérateur sous-linéaire $T : E \longrightarrow X$ est dit que p-convexe s'il existe une constante positive C telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ les opérateurs

$$\begin{aligned} T_n :\ & l_p^n(E) && \longrightarrow X(l_p^n) \\ & (x_1, ..., x_2) && \longmapsto (T(x_1), ...T(x_n)) \end{aligned}$$

sont uniformément bornés par C.

C'est à dire que

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |T(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad si\ \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |T(x_i)| \right\| \leq C \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \quad si\ \ p = \infty.$$

La plus petite constante C vérifiant ces inégalités sera notée par $C^p(T)$.

2) Soient X, Y deux espaces de Banach dont X réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. Un opérateur sous-linéaire $T : X \longrightarrow Y$, est dit que p-concave s'il existe une constante C telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ les opérateurs

$$\begin{aligned} T_n : \ X(l_p^n) &\longrightarrow l_p^n(Y) \\ (x_1, ..., x_2) &\longmapsto (T(x_1), ...T(x_n)) \end{aligned}$$

sont uniformément bornés par C.

C'est à dire que

$$\|T(x_i)\|_{l_p^n(Y)} \leq C \|(x_i)\|_{X(l_p^n)} \quad si \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\sup_{1\leq i\leq n} \|T(x_i)\| \leq C \left\|\sup_{1\leq i\leq n} |x_i|\right\| \quad si \ p = \infty.$$

La plus petite constante C vérifiant ces inégalités sera notée par $C^p(T)$.

Tout opérateur sous-linéaire q-convexe(resp. qconcave) est borné et $\|T\| \leq C^q(T)$ (resp.$\|T\| \leq C_q(T)$).

On utilise le théorème suivant pour le démonstration théorème de factorisation.

Théorème 3.1.1 *[Mau74] Soient p,q et r trois nombres réel où $0 < p \leq q \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, (Ω, μ) un espace mesuré, I un ensemble d'indices et $\{f_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments de $L_p(\Omega, \mu)$. Les condition suivantes sont équivalentes.*

a) $\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}$

$$\left(\int_\Omega \left[\sum_{i\in I} |\alpha_i f_i(\omega)|^q\right]^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{i\in I} |\alpha_i|^q\right).$$

b) Il existe une fonction g telle que $\int_\Omega |g|^r d\mu(\omega) \leq 1$ et que

$$\forall i \in I, \quad \int_\Omega \left|\frac{f_i}{g}\right|^q d\mu(\omega) \leq C.$$

(avec la convention $\frac{0}{0} = 0$).

Théorème 3.1.2 *Soient X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace mesuré, T un opérateur sous-linéaire continu de X dans $L_p(\Omega, \mu)$ et $0 < p \leq q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) Il existe une constante positive finie C telle que pour toute suite finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans

X, on a

$$\left(\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}|T(x_i)|^q\right]^{\frac{p}{q}}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_X^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(i.e., T est p-convexe et $C_{qp}\leq C$).

2) Il existe une fonction g dans $B^+_{L_r(\Omega,\mu)}$, telle que pour tout x dans X, on a

$$\left(\int_{\Omega}\left|\frac{T(x)}{g}\right|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\|x\|_X.$$

3) Il existe une fonction g dans $B^+_{L_r(\Omega,\mu)}$ et S un opérateur sous-linéaire continu de X dans $L_q(\Omega,\mu)$, tel que $\|S\|\leq C$ et $T=T_g\circ S$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "S"'] & & L_p(\Omega,\mu) \\ & L_q(\Omega,\mu) \arrow[ur, "T_g"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve.

1) $\Rightarrow$ 2) Il suffit de prendre dans le (théoreme 3.1.1) l'ensemble $\{\alpha_i=\|x_i\|_X\}_{i\in I}\in\mathbb{R}^{(I)}$ où $I=\{1,...,n\}$ et pour les $\{f_i\}_{1\leq i\leq n}$ dans $L_p(\Omega,\mu)$ telles que $f_i=T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|_X}\right)$. En effet

$$\left(\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}|T(x_i)|^q\right]^{\frac{p}{q}}d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\|x_i\|_X T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|_X}\right)\right|^q\right]^{\frac{p}{q}}d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_X^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

donc il existe g dans $B^+_{L_r(X,Y)}$telle que

$$\forall i\in I\quad\left(\int_{\Omega}\left|\frac{T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|_X}\right)}{g}\right|^q d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{q}}\leq C$$

ce qui implique

$$\forall i\in I\quad\left(\int_{\Omega}\left|\frac{T(x_i}{g}\right|^q d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\|x_i\|_X.$$

Et par conséquent pour tout x dans X, on aura

$$\left(\int_\Omega \left|\frac{T(x)}{g}\right|^q d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\|x\|_X.$$

2) $\Rightarrow$ 3) Il suffit de définir S par $S(x) = \dfrac{T(x)}{g}$.
L'opérateur S est sous- !inéaire. En effet, soit x, y dans X

$$\begin{aligned} S(x+y) &= \tfrac{T(x+y)}{g} \\ &\leq \tfrac{T(x)}{g} + \tfrac{T(y)}{g} \\ &\leq S(x) + S(y). \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} S(\lambda x) &= \frac{T(\lambda x)}{g} \\ &= \lambda \frac{T(x)}{g} \\ &= \lambda S(x) \end{aligned}$$

et on bien que $T = T_g \circ S$ et $\|S\| = \left\|\dfrac{T}{g}\right\| \leq C$ (car T est continu).

3) $\Rightarrow$ 1) On utilisera l'inégalité de Hölder, avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |T(x_i)|^q\right)^{\frac{p}{q}} d\mu &= \left(\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n |g|^q \left|\frac{T(x_i)}{g}\right|^q\right]^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega)\right) \\ &\leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{T(x_i)}{g}\right|^q d\mu(\omega)\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega (|g|^p)^{\frac{r}{p}} d\mu(\omega)\right)^{\frac{p}{r}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{T(x_i)}{g}\right|^q d\mu(\omega)\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega |g|^r d\mu(\omega)\right)^{\frac{p}{r}} \\ &\leq C^p \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q\right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve 3) $\Rightarrow$ 1). ■

Proposition 3.1.3 *Soient T_1, T_2 deux opérateurs sous linéaires de X un espace de Banach dans Y un quasi-Banach réticulé. Si $T_1 \leq T_2$ (au sens de l'inégalité(2.6)). Alors, il existe* *une constante C_Y ne dépendant que de Y telle que*

a) $|T_1(x)| \leq \sup\{|T_2(x)|, |T_2(-x)|\}$,

b) $\|T_1(x)\| \leq C_Y(\|T_2(x)\| + \|T_2(-x)\|)$.

Preuve.

a) on a

$$T_1(x) \leq T_2(x) \Longleftrightarrow -T_1(x) \leq T_1(-x) \leq T_2(-x), \quad \forall x \in X.$$

Ce qui entraîne que

$$|T_1(x)| \leq \sup\{|T_2(x)|, |T_2(-x)|\}.$$

b) De a) on a

$$|T_1(x)| \leq |T_2(x)| + |T_2(-x)|.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|T_1(x)\| &\leq \||T_2(x)| + ||T_2(-x)|\| \\ &\leq C_Y(\|T_2(x)\| + \|T_2(-x)\|).\end{aligned}$$

(La constante C_Y apparaît si Y est un quasi-Banach réticulé) d'où le résultat annoncé. ■

Proposition 3.1.4 *Soient X un espace de Banach,(Ω, μ) un espace mesuré,T_1 et T_2 deux opérateurs sous-linéaires continues de X dans $L_p(\Omega, \mu)$, et $0 < p \leq q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Si T_2 se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$, et $T_1(x) \leq T_2(x)$ pour tout x dans X, alors T_1 se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$.*

Preuve.

Supposons que T_2 se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$. D'aprés le Théorème 3.1.2 il existe une constante positive finie C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans X, on a

$$\left(\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n |T_2(x_i)|^q \right]^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{pq} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

D'autre part et d'aprés la proposition 3.1.3, on a

$$|T_1(x)| \leq \sup\{|T_2(x)|, |T_2(-x)|\}.$$

Ce qui entraîne que pour tout x dans X, on a

$$|T_1(x)| \leq |T_2(x)| + |T_2(-x)|, \quad \forall x \in X.$$

Alors on a clairement que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |T_1(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q \left(\left[\sum_{i=1}^{n} (|T_2(x_i)|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |T_2(-x_i)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \right)$$

D'où

$$\left\| \left[\sum_{i=1}^{n} |T_1(x_i)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{l_p} \leq C_q^{'} C_p \left(\left\| \left[\sum_{i=1}^{n} |T_2(x_i)|^p\right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{l_p} + \left\| \left[\sum_{i=1}^{n} |T_2(-x_i)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \right\|_{l_p} \right).$$

Finalement et par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans X, on a

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} |T_1(x_i)|^q\right]^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\leq 2C_q^{'} C_p \left(\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} |T_2(x_i)|^q\right]^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^q\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

où $C_1 = 2C_{pq}(T_2) C_q^{'} C_p$ est une constante absolue dépendant que de p et q ($C_p = C_{L_p} = 2^{\frac{1}{p}-1}$ et $C_q = C_{L_q} = 2^{\frac{1}{q-1}}$ si $p, q < 1$). D'aprés le théorème 3.1.2,on déduit que T_1 se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$.

Ce qui terminer la démonstration. ■

Corollaire 3.1.5 *Soient X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace mesuré, T un opérateur sous-linéaire continu de X dans $L_p(\Omega, \mu)$ et $0 < p \leq q \leq \infty$, tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Si T se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$, alors u se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$ pour tout u dans ∇T.*

Preuve.

On a pour tous $u \in \nabla T$ alors $u \leq T$. d'aprés utiliser la proposition 3.1.4. on obtient la Démonstration de cette coorollaire. ■

Dans ce dernier théorème et avec la supposition que $\{g_u\}_{u \in \nabla T}$ est latticiellement borné on donne une réponse positive. C'est le principal résulta de ce section.

Théorème 3.1.6 *Soit T un opérateur sous linéaire continu de X dans $L^p(\Omega, \mu)$ qui est un quasi-Banach réticulé complet. Supposons qu'il existe une constante positive finie C telle que pour tout u dans ∇T, $C_{pq}(u) \leq C$ et $\{g_u\}_{u \in \nabla T}$ est latticiellement borné dans $L_r(\Omega, \mu)$ (i.e.,$\exists g_0 \in L_r^+(\Omega, \mu) : \forall u \in \nabla T, g_u \leq g_0$). Donc, T se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$ (Comme dans le théorème 3.1.2)*

Preuve.
Il suffit de prendre $\tilde{\mathrm{T}}(x) = \dfrac{T(x)}{g}$ où $g = \dfrac{g_0}{\|g_0\|}$. Donc g_0 est dans $L_r^+(\Omega, \mu)$ et par proposition 2.4.2, on a

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathrm{T}}(x)\| &= \left\| \frac{T(x)}{g} \right\| \\
&= \left\| \frac{u_x(x)}{g} \right\| \\
&\leq \|g_0\| \left\| \frac{u_x(x)}{g_0} \right\| \\
&\leq \|g_0\| \left\| \frac{u_x(x)}{g_{u_x}} \right\| \\
&\leq C\|g_0\|
\end{aligned}$$

Ce qui terminer la démonstration. ■

Remarque 3.1.7 *Sans la condition additionnelle, ce théorème n'est pas vrai en général.*

3.2 Les opérateurs sous-linéaires positivement p-sommants

Dans cette section on va généraliser la notion d'opérateurs positivement p-sommants défini au cas linéaires par Blasco[Bla86] aus opérateurs sous-linéaires(on peut consulter aussi [DJT95]). Pour plus de détails sur les opérateurs sous-linéaires p-sommants, nous suggérons au lecteur de voir [Sch74] et [AM04].

Nous désingnons par un sous-lattice d'un espace de Banach réticulé X le sous espace linéaire E de X tel que pour tout $x, y \in E$, le $\sup\{x, y\}$ appartient à E. L'injection isométrique $i : X \longrightarrow X^{**}$ telle que $\langle i(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$ envoie X dans un sous lattice de X^{**}. On poura consulter [LT96] pour plus d'information. Si on considér X comme un sous-lattice de X^{**} on a pour $x_1, x_2 \in X$.

$$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow \langle x_1, x^* \rangle \leq \langle x_2, x^* \rangle, \quad \forall x^* \in X_+^*. \tag{3.1}$$

Nous continuons, en donnant une définition l'opérateur adjoint de T par $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ tel que $T^*(y^*) : X \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$T^*(y^*)(x) = y^*(T(x)) = \langle T^*(y^*), x \rangle = \langle y^*, T(x) \rangle. \tag{3.2}$$

Définition 3.2.1 *Soient X, Y deux Banach réticulés et $T \in SB(X,Y)$.On dira que T est positivement p-sommant pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ si'il existe un constante positive C telle que pour que, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X^+$, on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} | < x_i, \xi > |^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3}$$

ou bien

$$\|T(x_i)\|_{l_p^n(Y)} \leqslant C \|(x_i)\|_{l_p^{nw}(X)}. \tag{3.4}$$

On note par

$$\pi_p^+(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y \ \textit{sous- linéaire positivement p-sommant} \ \}$$

et

$$\pi_p^+(T) = \inf\{C, \textit{vérifiant l'inégalité (3.4)}\}.$$

Proposition 3.2.2 *Soient $0 \leqslant p \leqslant \infty$ et X un espace de Banach réticulé. Soit Y un espace complement réticulé. Alors, les propriétés suivantes de la constante C et de l'opérateur sous linéaire $T : X \longrightarrow Y$ sont équivalentes.*

(1) L'opérateur $T \in \pi_p^+(X,Y)$ et $\pi_p^+(T) \leqslant C$.

(2) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout $v : l_{p^*}^n \longrightarrow X$, tel que $v(e_i) \in X^+$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|Tv(e_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\|v\| \quad et \quad \pi_p^+(Tv) \leqslant C\|v\|. \tag{3.5}$$

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supposons $T \in \pi_p^+(X,Y)$ et $\pi_p^+ \leqslant C$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $v : l_{p^*}^n \longrightarrow X$, d'aprés la propriérté d'idéale on a

$$Tv \in \pi_p^+(l_{p^*}^n, Y) \text{ et } \pi_p^+(Tv) \leqslant C\|v\|.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). On définit v par $v(e_i) = x_i, i \in \{1, ..., n\}$ et X^+ où (e_i) est la base canonique de l_p^n. On a

$$\|v\| = \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\textstyle\sum_{i=1}^n | < x_i, \xi > |^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}(\textstyle\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\textstyle\sum_{i=1}^n \|T(v(e_i))\|^p)^{\frac{1}{p}}.\\ &\leqslant C\|v\|\\ &\leqslant C \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\textstyle\sum_{i=1}^n | < x_i, \xi > |^p)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

D'où T est positivement p-sommant et $\pi_p^+(T) \leqslant C$. ■

Théorème 3.2.3 *(Téorème d'inclusion)*

Soit $T \in SL(X,Y)$, et $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, on a

1)-

$$\pi_p^+(X,Y) \subset \pi_q^+(X,Y)$$

et

$$\forall T \in \pi_p^+(X,Y), \pi_q^+(T) \leqslant \pi_p^+(T).$$

2)-

$$\pi_p(X,Y) \subset \pi_p^+(X,Y)$$

et

$$\forall T \in \pi_p^+(X,Y), \pi_p^+(T) \leqslant \pi_p(T).$$

Preuve.

1)- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_1, ..., x_n\} \subset X^+$.Si on a

$$\lambda_i = \|T(x_i)\|^{(\frac{q}{p}-1)},$$

on aura

$$\|T(x_i)\|^q = \|T(\lambda_i x_i)\|^p.$$

Si T p-sommant, on a

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^q)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{n} \|T(\lambda_i x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}},$$

$$\leqslant \pi_p^+(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p | < x_i, \xi > |^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque $p < q$ et d'après l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{(p/q)} + \frac{1}{(q/q-p)} = 1$), on obtient que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \pi_p^+(T) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}} \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} | < x_i, \xi > |^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\leqslant \pi_p^+ \, (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} | < x_i, \xi > |^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Ce qui entraîne que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \pi_p^+(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} | < x_i, \xi > |^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

et par conséquent T est positivement q-sommant et $\pi_q^+(T) \leqslant \pi_p^+(T)$.

2)- Evident. ∎

Théorème 3.2.4 *[AMS09] Soient X, Y deux espaces Banach réticulés et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire positivement p-sommant et $1 \leq p < \infty$. Il existe une probabilité λ de Borel sur $(B_{X^*}^+, \sigma(X^*, X))$ $(B_{X^*}^+ = B_{X^*} \cap X_+^*)$ telle que*

$$\forall x \in X, \;\; \|T(x)\| \leq \pi_p^+(T) \left(\int_{B_{X^*}^+} | < x, \xi > |^p d\lambda(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.6}$$

S'il existe $C > 0$ vérifiant l'inégalité (3.6), alors T est positivement p-sommant et $\pi_p^+(T) \leq C$.

Proposition 3.2.5 *Soient X, Y deux espaces de Banach réticulés et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire continu. Si*

$$T \in \pi_p^+(X, Y)$$

alors

$$\forall u \in \nabla T, \quad u \in \pi_p^+(X, Y)$$

Preuve.

Puisque T est positivement p-sommant donc d'aprés le théorème 3.2.4 il existe une probabilité de Borel λ sur $(B_{X^*}^+, \sigma(X^*, X))$ telle que

$$\forall x \in X, \ \|T(x)\| \leq \pi_p^+(T) \left(\int_{B_{X^*}^+} |< x, \xi >|^p d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'aprés le théorème 2.3.9, on a pour tout x dans X et tout u dans ∇T

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|, \\ &\leq 2\pi_p^+(T) \left(\int_{B_{X^*}^+} |< x, \xi >|^p d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

D'où u est positevement p-sommant et $\pi_p^+(u) \leq 2\pi_p^+(T)$. ■

3.3 Les opérateurs sous-linéaires fortement p-sommants

Définition 3.3.1 *[Coh73] Soient X un espace de Banach, Y un Banach réticulé. Un opérateur sous-linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est fortement p-sommant $(1 < p < \infty)$, s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a*

$$\|(\langle T(x_i), y_i^* \rangle)\|_{l_1^n} \leqslant C \|(x_i)\|_{l_p^n(X)} \|(y_i^*)\|_{l_{p^*}^{nw}} \tag{3.7}$$

On note par $D_p(X, Y)$ l'ensemble de tous les operateurs sous-linéaires qui sont fortement p-sommants de X dans Y et on note par $d_p(T)$ la plus petite constante C vérifiant l'intégalité (3.7).

Proposition 3.3.2 *Soient $T \in SB(X, Y)$ et $v : l_p^n \longrightarrow Y^*$ un opérateur linéaire borné. L'opérateur suos-linéaire T est fortement p-sommant si et seulement si*

$$\sum_{i=1}^{n}|\langle T(x_i),v(e_i)\rangle|\leqslant C(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}\|v\| \tag{3.8}$$

Pour p=1, on a $D_1(X,Y)=SB(X,Y)$.

Proposition 3.3.3 *Soient X un espace de Banach, Y et Z sont deux espaces de Banach réticulés. Soient $T\in SB(X,Y), R$ opérateur positif dans B(Y,Z) et $S\in B(E,X)$.*

1. *Si T est un opérateur sous-linéaire fortament p-sommant, alors, $R\circ T$ est un opérateur sous linéaire fortement p-sommant et $d_p(R\circ T)\leqslant\|R\|_Z d_p(T)$.*
2. *Si T estun opérateur sous-linéaire fortement p-sommant, alors, $T\circ S$ est un opérateur sous linéaire fortement p-sommant et $d_p(T\circ S)\leqslant\|S\|_X d_p(T)$.*

Preuve.

1. Soit $n\in\mathbb{N}, x_1,...,x_n\in X$ et $z^*,...,z^n\in Z^*$. Il suffit d'utiliser (3.8) pour démontre que

   $$\textstyle\sum_{i=1}^n|\langle R\circ T(x_i),z_i^*\rangle|\leqslant C(\sum_{i=1}^n\|x_i\|_X^p)^{\frac{1}{p}}\|v\|$$

   où $v:Z\longrightarrow l_{p^*}^n$ tel que $v(z)=\sum_{i=1}^n z_i^*(z)e_i$. On a

   $$\textstyle\sum_{i=1}^n|\langle R\circ T(x_i),z_i^*\rangle|=\sum_{i=1}^n|\langle T(x_i),R^*(z_i^*)\rangle|\leqslant\sum_{i=1}^n\|x_i\|_X^p)^{\frac{1}{p}}\|w\|$$

   où

   $$\textstyle w(y)=\sum_{i=1}^n\langle R^*(z_i^*),y\rangle e_i=\sum_{i=1}^n\langle z_i^*,R(y)\rangle=\|R(y)\|\sum_{i=1}^n\langle z_i^*,\frac{R(y)}{\|R(y)\|}\rangle e_i$$

   Ce qui implique que

   $$\begin{aligned}\|w\|&\leqslant\|R\|\sup_{z\in B_Z}\|(z_i^*(z)\|)_{1\leqslant i\leqslant n}^{l_{p^*}^n}\\&\leqslant\|R\|\|v\|.\end{aligned}$$

2. Siot $n \in \mathbb{N}, e_1, ...' e_n \in E$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$. On a

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=1}^n |\langle T \circ S(e_i), y_i^* \rangle| \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n |\langle T(S(e_i)), y_i^* \rangle| \\
&\leqslant d_p(T) \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \|(S(e_i))\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v\| (v(y) = \textstyle\sum_{i=1}^n y_i^*(y) e_i) \\
&\leqslant d_p(T) \|S\| (\textstyle\sum_{i=1}^n \|e_i\|_E^p)^{\frac{1}{p}} \|v\|
\end{aligned}$$

Ce qui entraine que $d_p(T \circ S) \leqslant \|S\| d_p(T)$

■

Corollaire 3.3.4 *Considérons* $1 < p_1, p_2 < \infty$ *tel que* $p_1 \leqslant p_2$. *Si* $T \in D_{p_2}(X, Y)$ *alors,* $T \in D_{p_1}(X, Y)$ *et*

$$d_{p_1}(T) \leqslant d_{p_2}(T).$$

Pour la preuve de théorème suivant, le lecteur pourra consulter [AMT07].

Théorème 3.3.5 *(théorème de domenition)[AMT07] Soient X un espace de Banach et Y un espace de Banach réticulé. Soit* $T \in SB(X, Y)$ *un opérateur sous-linéaire continu. On dit que T est fortement p-sommant* $(1 < p < \infty)0$ *si seulement si, il existe une constante* $C > 0$ *et une mesure de probabilité de Radon* μ *dans* $B_{Y^{**}}$ *tel que pour tout* $x \in X$, *on a*

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leqslant C\|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.9}$$

On note, dans ce cas

$$d_p(T) = \inf\{C > 0 \text{ : tout } C \text{ vérifiant l'inègalité (3.9)}\}$$

Preuve. voir [AMT07] ■

Corollaire 3.3.6 *Soient X un espace de Banach, Y un espace Banach réticulé. et un opérateur sous-linéaire* $T_1 \in D_p(X, Y)(1 < p < \infty)$, *si l'opérateur sous linéaire* $T_2 \leqslant T_1$. *Alors* $T_2 \in D_p^+(X, Y)$.

Preuve.

De l'inégalité (3.9), on a pour tout x dans X et y^* dans Y_+^*

$$\langle T_2(x), y^*\rangle \leqslant \langle T_1(x), y^*\rangle.$$

et par conséquent

$$-\langle T_2(x), y^*\rangle \leqslant \langle T_1(x), y^*\rangle.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}|\langle T_2(x), y^*\rangle| &\leqslant \sup\{\langle T_1(x), y^*\rangle, \langle T_1(-x), y^*\rangle\}\\ &\leqslant \sup\{|\langle T_1(x), y^*\rangle|, |\langle T_1(-x), y^*\rangle|\}\\ &\leqslant \langle T_1(x), y^*\rangle, \langle T_1(-x), y^*\rangle\end{aligned}$$

et d'après (3.9) on aura

$$|\langle T_1(x), y^*\rangle| \leqslant 2d_p(T_1)\|x\|\left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.10}$$

On obtient que l'opérateur T_2 est positivement fortement p-sommant et $d_p^+(T_2) \leqslant 2d_p(T_1)$.

■

3.4 Comparaison avec le cas linéaire

Dans cette section on étudie la relation entre les opérateurs sous-linéaires T et les opérateurs linéaires $u \in \nabla T$. En utilisant les résultats précédents.

Nous désingnons par un sous-lattice d'un espace de Banach réticulé X le sous espace linéaire E de X tel que pour tout $x, y \in E$, le $\sup\{x, y\}$ appartient à E. L'injection isométrique $i : X \longrightarrow X^{**}$ telle que $\langle i(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$ envoie X dans un sous lattice de X^{**}. On poura consulter [LT96] pour plus d'information. Si on considér X comme un sous-lattice de X^{**} on a pour $x_1, x_2 \in X$.

$$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow \langle x_1, x^*\rangle \leq \langle x_2, x^*\rangle, \quad \forall x^* \in X_+^*. \tag{3.11}$$

Nous continuons, en donnant une définition l'opérateur adjoint de T par $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ tel que $T^*(y^*) : X \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$T^*(y^*)(x) = y^*(T(x)) = \langle T^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, T(x)\rangle. \tag{3.12}$$

Proposition 3.4.1 *Soient X un espace de Banach réticulé et Y un espace de Banach complétement réticulé.Soit $T \in SB(X;Y)$. Supposons que $T \in D_p(X;Y)$, $(1 < p < \infty)$. Alors , pour tout $u \in \nabla T$, u est fortement positivement p-sommant, et u^* est positivement p^*-sommant.*

Preuve.

D'aprés (3.11) on a pour tout x dans X et y^* dans Y^*_+

$$\langle u(x), y^* \rangle \leq \langle T(x), y^* \rangle$$

et par conséquent

$$-\langle u(x), y^* \rangle \leq \langle T(-x), y^* \rangle$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} |\langle u(x), y^* \rangle| &\leq \sup\{\langle T(x), y^* \rangle, \langle T(-x), y^* \rangle\} \\ &\leq \sup\{|\langle T(x), y^* \rangle|, |\langle T(-x), y^* \rangle|\} \\ &\leq |\langle T(x), y^* \rangle| + |\langle T(-x), y^* \rangle| \end{aligned}$$

et d'aprés (3.9) on aura

$$|\langle u(x), y^* \rangle| \leq 2d_p(T)\|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.13}$$

Ce qui entraîne

$$\|u^*(y^*)\| \leq 2d_p(T)\|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.14}$$

Ainsi l'opérateur u^* est positiviment p^*-sommant et $\pi_+(u^*) \leq 2d_p(T)$. ■

Remarque 3.4.2 *Si y^* est négatif on a aussi l'inégalité (3.14). On ignore si u est fortement p-sommant.*

Théorème 3.4.3 *Soient X un espace de Banach réticulé et Y un espace de Banach complétement réticulé. soit $T \in SB(X;Y)$ Supposons qu'il existe une constante positive finie $C > 0$. un ensemble I, un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I et $\{u_i\}_{i \in I} \subset \nabla T$ tels que pour tout x dans X.*

$$|\langle u_i(x), y^* \rangle| \underset{\mathcal{U}}{\longrightarrow} |\langle T(x), y^* \rangle| \tag{3.15}$$

et $d_p(u_i) \leq C$ *uniformément. Alors,*

$$T \in D_p(X, Y) \quad et \quad d_p(T) \leq C.$$

Preuve.

Pour tout $i \in I$ prenons u_i fortement p-sommant, d'aprés le théorème 3.3.5 il existe μ_i une mesure de probabilité Radon sur $B_{Y^{**}}$ telle que tout $x \in X$, on a

$$|\langle u(x), y^* \rangle| \leq d_p(u_i) \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu_i(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.16}$$

Comme on a pour tout x dans X et $y^* \in Y^*$,

$$|\langle u_i(x), y^* \rangle| \underset{\mathcal{U}}{\longrightarrow} |\langle T(x), y^* \rangle|$$

on obtient que pour tout x dans X et $y^* \in Y^*$,

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq \lim_{\mathcal{U}} d_p(u_i) \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu_i(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

La boul d'unité $B_{Y^{**}}$ est faiblement compacte, d'où μ_i converge faiblement vers une probabilité μ sur $B_{Y^{**}}$. Par conséquent

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq C \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

pour tout x dans X et $y^* \in Y^*$. Ce qui implique que $d_p(T) \leq C$. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a essaye de gènèraliser quelques travaux déjà faits sur le théorème de factorisation pour les opérateurs sous-linéaires de X un espace de Banach dans $L_p(\Omega,\mu)$ par $L_q(\Omega,\mu)$ avec $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$. Puis, on a fourni un humble effort pour obtenir relation entre les opérateurs linéaires et sous-linéaires p-sommants conserne le notion de fortement p-sommant.

On terminer cette mémoire, par poser quelques question à ce travaile.

Question 1 .

Soient p,q et r tels que $0<p\leq q\leq\infty$ *et* $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$. *Soient X un espace Banach,* (Ω,μ) *un espace arbitraire de mesure et* $T: X\longrightarrow L_p(\Omega,\mu)$ *un opérateur sous-linéaire continu. Supposons que u se factorise par* $L_q(\Omega,\mu)$ *pour tout u dans* ∇T. *Est ce que T factorise par* $L_q(\Omega,\mu)$ *?*

Question 2 .

Soient X un espace de Banach réticulé et Y un espace de Banach complétement réticulé.Soit $T\in SB(X;Y)$. *Supposons que* $T\in D_p(X;Y)$, $(1<p<\infty)$. *Alors , pour tout* $u\in\nabla T$,*.Est ce que*

u est fortement positivement p-sommant $\Longleftrightarrow u^*$ *est positivement* p^**-sommant.*

Question 3 .

Soient X un espace de Banach réticulé et Y un espace de banach complétement réticulé. soit $T\in SB(X;Y)$ *Supposons qu'il existe une constante positive finie* $C>0$. *un ensemble I, un ultrafiltre* $\mathcal{U}$*sur I et* $\{u_i\}_{i\in I}\subset\nabla T$ *tels que pour tout x dans X.*

$$|\langle u_i(x),y^*\rangle|\underset{\mathcal{U}}{\longrightarrow}|\langle T(x),y^*\rangle|$$

et $d_p(u_i) \leq C$ *uniformément. Alors,*

$$T \in D_p(X,Y) \quad et \quad d_p(T) \leq C.$$

Est ce que cette propriété est vérifier dans les cas général (sans la condition $|\langle u_i(x), y^* \rangle| \underset{\mathcal{U}}{\longrightarrow} |\langle T(x), y^* \rangle|$ *) ?*

Bibliographie

[AM04] D. Achour And L. Mezrag. Little Grothendieck's theorem for sublineair operators. J. Math. Anal. Appl. 296 (2004) 541-552.

[AM07] D. Achour And L. Mezrag. On the Cohen strongly p-summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 327 (1) (2007), 550-563.

[AMS09] D. Achour And L. Mezrag And S.Khalil, On the Cohen p-nuclear sublinear operators.Volume 10 (2009),issue2,Article 46,13 pp.

[AMT07] D. Achour, L. Mezrag A. Tiaiba,On the strongly p-summing sublinear operators, Vol. 11, No. 4,pp. 959-973,(2007).

[Bla86] O. Blasco. A class of operators from a Banach lattice into a Banach space. Collect. Math. **37**(1986), 13-22.

[Bre87] Hïm Brezis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[Bu0] Q. Bu. Some mapping properties of p-summing operators with hilbertian domain, Contemp. Math. 328 (2003) 145-149.

[Coh70] J. S. Cohen. A characterization of inner product spaces using 2-summingoperators. Studia Mathematica T.1970, 271-276.

[Coh73] J. S. Cohen. Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates,Math. Ann. 201 (1973), 177-200.

[Dim03] Verónica Dimant. Strongly p-summing multilinear operators. J. Math.Anal. Appl. 278 (2003) 182-193.

[DJT95] J.Diestel, H.Jarchow, A.Tonge. Absolutely summing operators. Cambridge University Press, (1995).

[Dwy71] T. A. W. Dwyer III. Partial diferential equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidt holomorphy type. Bull. Amer. Math. Soc. 77, 725-730 (1971)..

[GDP07] Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino and Pilar Rueda. On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials. Publ.Res. Inst. Math. Sci. 43 (2007), no. 4, 1139-1155.

[KPe18] S. Kwapie And A. PeLczynski. Absolutely summing operators and translation-invariant spaces of functions on compact abelian groups. Math.Nachr. 94 (1980), 303-340.

[Kwa70] S. Kwapien. A linear topological charactrization of inner product space. Studia Mathematica T. 1970,277-278.

[LT96] J.Lindenstrauss And L. Tzafriri, Classical Banach Spaces, I and II. Springer-Verlag,Berlin,1996.

[Mat03] M. C. Matos. Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear maipings. Collect. Math. 54,111-136 (1003).

[Mau74] B. Maury, Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espace L^p, Astéristsque,no.11,Société Mathématique de France,Paris,1974.

[MT04] L. Mezrag And A. Taiba. On sublinear operators factoring through L_p. Int.J.Math. Math. Sci. 50 (2004),2695-2704.

[Pie67] A. Pietsch. Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen. Studia Math. 28, 333-353(1967). 45

[Pie83] A. Pietsch. Ideals of multilinear functionals (designs of a theory), Procee- dings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, 185-199. Leipzig. Teubner-Texte, 1983.

[Sch74] H. H. Schaeffer. Banach lattices and positive operators, Springer-Verlage, Berlin and New York, (1974).

[Zaa97] A.C.Zaanen, Introduction to operator theory in Riesz space. Springer-Verlag,1997.

Résumé

Le travail principal de ce mémoire est étudier la factorisation des opérateurs sous-linéaire, en particulier dans sens déterminer les conditions nécessaires et suffisantes d'opérateurs sous-linéaires. Puis, on essayera de comparer entre les opérateurs linéaires et sous-linéaires.

Mots clés : *Espace Banach réticulé, espace complètement réticulé, les opérateurs sous-linéaires, théorème de Hahn-Banach, opérateurs sous-linéaires positivement p-sommant, sous-linéaire fortement p-sommant et théorème de domination de pietsch.*

ملخص بالعربية

مبدأ هذه المذكرة هو الدراسة التحليلية للمؤثرات التحت خطية و تحديد الشروط الضرورية و الكافية لذلك ثم نقارن بين المؤثرات الخطية و التحت خطية.

Abstract

This desertation is part of the problem of factorisation the sublinears operators, especially in determining the meaning of the conditions necessary and sufficient for a the sublinears operators. Then, we wille try to compare between the linears operators and sublinears.

Key words: *Banach lattice, completely lattice, the sublinears operators, theorem the Hahn-Banach, sublinears positively p-sommingoperators, sublinear strongly p-summing operator and pietsch's domination theorem.*