جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

فرع: رياضيات

اختصاص: تحليل

من إعداد الطالبة : عروة عائشة

الموضوع

المؤثرات المشابهة بالمؤثر الوحدوي

نوقشت يوم 2014/06/11 من طرف لجنة المناقشة :

مزابية محمد الهادي	أستاذ مساعد. أ	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
سعيد محمد السعيد	أستاذ محاضر .أ	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
عسيلة مصطفى	أستاذ محاضر .ب	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مقررا

إهداء

إلى من لا يمكن للكلمات أن توفي حقهما إلى من لا يمكن للأرقام أن تحصي فضائلهما إلى والدي العزيزين أدامهما الله لي

إلى التي رآني قلبها قبل عينيها، وحضنتني أحشائها قبل يديها أقولها ملئ فمي، ويصبوبها قلبي، وأعجز عن إيفاء حقِّها بشكري لها:

"أمِّي الحنونة "

إلى قدوتي في الحياة، مكمن فخري وعزَّتي، إلى معيني وسندي في الوجود

"أبي العزيز "

إلى زينة الحياة، وشموع الدرب، إخوتي وأخواتي الأعزاء

"مروة، فاطمة الزهراء، فريال، عبدالرزاق، عبدالفتاح "

إلى البراعم الصغيرة، ورمز البراءة

"تقوى وإسلام "

إلى مكمن العطف والحنان "أجدادي وجداتي وأخوالي وخالاتي وعماتي "

إلى العَّمين الغاليين "عبدالعزيز و جمال"

"إلى بنات عمّي صفاء وإكرام وعواطف وسندس"

إلى صديقاتي الوفيات:

"آمنة، نور، كريمة، حنان، روميصاء، رباب، عديلة، نورة، سعيدة، سمية، صورية، هادية، خديجة، حدة، سهيلة، فطيمة، خولة، منى ... "

إلى كل من سقط من قلمي سهوا   أهدي هذا العمل المتواضع

شكر وعرفان

الحمد لله رب العالمين، الحمد لله الذي هدانا لهذا وماكنا لنهتدي لولا أن هدانا الله، الحمد لله و الشكر لله والصلاة والسلام على رسول الله.

يطيب لي أن أضع اللمسات الأخيرة لمذكرتي هذه وأن أتقدم ببالغ الشكر و التقدير للأستاذ الفاضل "الدكتور عسيلة مصطفى" على إقتراحه موضوع المذكرة، وما بذله من جهد ومتابعة مدة الإشراف.

كما أتقدم بالشكر والتقدير إلى أساتذة اللجنة المناقشة إلى كل من الأستاذ: " مزابية محمد الهادي " على قبوله ترؤس لجنةالمناقشة، و الأستاذ الدكتور "سعيد محمد السعيد " على قبوله مناقشة هذه المذكرة.

كما أتقدم بالشكر الجزيل إلى الأستاذ المحترم: " بن السايح عبدالله " الذي مدَّ لي يد العون والمساعدة في برنامج لاتاكس وإلى الدكتور: " مرابط إسماعيل " وكما لا أنسى الأستاذ المحترم: " باحيو محمد الأمين "

وأستهل بتوجيه أعمق عبارات الشكر و العرفان إلى جميع أساتذتي الكرام الذين أشرفوا على تكويني طيلة مشواري الجامعي وأخص بالذكر الأستاذالفاضل "د. عسيلة مصطفى"
وكما أشكر صديقتي "الطالبة مدخل آمنة" التي كانت سندا لي طيلة العام الدراسي
"وإلى كل طلبة سنة ثانية ماستر تحليل و تحليل عددي دفعة 2014 "

الرموز المستعملة

الرمز	معناه	أول صفحة
$(X, \langle , \rangle)$	فراغ شبه هيلبرتي	05
$A^{\perp}$	مجموعة العناصر العمودية على A	05
$X_0^{\perp}$	المتمم التبولوجي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H	06
$P_{X_0}x$	المسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0	06
$L(X,Y)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في Y	08
$l(X,Y)$	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y	09
$(F_n)_{n\geq 1}$	متتالية المؤثرات	15
$F_n \xrightarrow{u} F$	F_n متقاربة بانتظام نحو المؤثر F	15
$F_n \xrightarrow{s} F$	F_n متقاربة بقوة نحو المؤثر F	16
$F_n \xrightarrow{w} F$	F_n متقاربة بضعف نحو المؤثر F	16
$\rho(F)$	مجموعة النقط النظامية للمؤثر F	17
$\sigma(F)$	طيف المؤثر F	17
$P_{\sigma}(F)$	الطيف النقطي للمؤثر F	17
$C_{\sigma}(F)$	الطيف المستمر للمؤثر F	17
$R_{\sigma}(F)$	الطيف الباقي للمؤثر F	17
$R_{\lambda}(F)$	مؤثر الحالة للمؤثر F	18
$f(F)$	دالة المؤثر F	19
$A(F)$	مجموعة الدوال التحليلية في جوار ما لـ $\sigma(F)$	20
$P(e^{i\varphi})$	كثير حدود مثلثي	25
E_{φ}	الدالة الطيفية للمؤثر F	25
$\{E_{\varphi}\}$	تحليل الوحدة لـ F	25
$V_{i=-\infty}^{\infty} M_i$	أصغر فراغ حاوي لكل الفراغات M_i، $i \in \mathbb{Z}$	29
B_{-}, B_{-}^{*}	الفراغات الناقصة	31
$F\|_{H_0}$	إقتصار المؤثر F على H_0	33
$\Theta_F(\lambda)$	الدالة المميزة للمؤثر F	35

المحتويات

مقدمة عامة

يعتبر التحليل الدالي أحد فروع التحليل الرياضي الذي يهتم بدراسة فضاءات الدوال ومن أهم مفاهيم التحليل الدالي " مفهوم المؤثر " وهو يشغل مركز الصدارة في التحليل الدالي، لدراسة المؤثرات الخطية وبالأخص نظريتها الطيفية في الفراغات غيرالمنتهية (فراغ هيلبار، فراغ بناخ، ...)أهمية كبيرة في دراسة قابلية الحلول للمعادلات الدالية، ولتعدد أنواع المؤثرات الخطية خصصنا في هذه المذكرة دراسة المؤثرالوحدوي الذي يملك مجموعة من الصفات والخصائص الطيفية تجعل من قابلية الحل للمعادلات التي معاملاتها مؤثرات من هذا النوع سهلة الدراسة، لما كانت هذه الصفات تنتقل بالتشابه بين المؤثرات. جاءت أهمية دراسة المؤثرات المشابهة للمؤثر الوحدوي و هو الموضوع بصدد دراسته في هذه المذكرة المعنونة بـ **" المؤثرات المشابهة بالمؤثر الوحدوي".**
وتحوي هذه المذكرة ثلاثة فصول وهي كالتالي:
الفصل الأول: " مفاهيم أساسية".
الفصل الثاني: "المؤثر الوحدوي و دراسته الطيفية والمؤثر المقلص".
الفصل الثالث: " معايير تشابه المؤثر الوحدوي ".
في بداية هذه المذكرة وضحنا أهم الرموز المستعملة، ثم عرضنا فيها مايلي:
الفصل الأول أهم المفاهيم الأساسية من التبولوجيا والتحليل الدالي وبالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية التي تستعمل في الفصول اللاحقة، وأمَّا في الفصل الثاني تعرضنا إلى نوعين من المؤثرات وهي المؤثر المقلص والمؤثر الوحدوي وقد ركزنا في المؤثر المقلص على دالته المميزة وبالنسبة للمؤثر الوحدوي على دراسته الطيفية، لما لهذه المفاهيم من أهمية في التشابه بالمؤثر الوحدوي، وتناولنا في الفصل الثالث معايير تشابه المؤثر الوحدوي وتوضيح الشروط اللازمة والكافية للتشابه.

حاولنا في هذه المذكرة توضيح النظريات المهتمة بتشابه المؤثرات بالمؤثر الوحدوي. ولهذا الغرض وفرنا مجموعة من المراجع المهمة من أهمها بعض المقالات التي درست الموضوع ونخص بالذكر المقال الموجود تحت رقم [18] في قائمة المراجع.

الفصل 1

مفاهيم أساسية

مقدمة

يتناول هذا الفصل أهم المفاهيم الأساسية من التبولوجيا والتحليل الدالي وبالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية هذه المفاهيم وردت مختصرة بالقدر الكافي لاستعمالها في الفصل الثاني والثالث.

1.1 الفراغ التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية، و $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X.

تعريف 1

تعرف التبولوجيا على X ويرمز لها بالرمز τ على أنها أسرة جزئية من $P(X)$، تحقق:

1. $X \in \tau$, $\varnothing \in \tau$.
2. $\forall O_1, O_2 \in \tau \longrightarrow O_1 \bigcap O_2 \in \tau$.
3. $(O_i \in \tau / i \in I) \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$، I مجموعة دلائل كيفية.

- الزوج (X,τ) يسمى فراغا تبولوجيا.
- عناصر الأسرة τ تسمى مفتوحات الفراغ التبولوجي (X,τ).

تعريف 2

تعرف المجموعة المغلقة في الفراغ التبولوجي على أنها متمم المفتوح فيه.

تعريف 3

ليكن (X,τ) فراغا تبولوجيا و x من X.

المجموعة الجزئية ϑ من X يقال أنها جوار للنقطة x إذا وجد مفتوح O ، أي $O \in \tau$ ويحقق $x \in O \subset \vartheta$.

مجموعة كل جوارات النقطة x يرمز لها بالرمز $\vartheta(x)$ وتسمى أسرة جوارات x.

تعريف 4
ليكن $T = (X, \tau)$ فراغا تبولوجيا، M مجموعة جزئية غير خالية من X وx نقطة من X.

نقول إن النقطة x، نقطة تلاصق للمجموعة M، إذا كان كل جوار للنقطة x، يحوي نقطة على الأقل من M.
يرمز لمجموعة نقط تلاصق M، بالرمز $\overline{M}$.
المجموعة $\overline{M}$ تسمى لصاقة M، ونكتب:

$$x \in \overline{M} \Longleftrightarrow (\forall v \in \vartheta(x) \longrightarrow v \cap M \neq \varnothing)$$

1.1.1 قابلية الفصل

ليكن (X, τ) فراغاً تبولوجيا و A, B مجموعتين جزئيتين من X.

تعريف 5
نقول إن:

1. المجموعة A كثيفة في المجموعة B، إذا كان $B \subset \overline{A}$.
2. المجموعة A كثيفة في كل مكان ، أو كثيفة في X ، إذا كان $X = \overline{A}$.
3. الفراغ التبولوجي T قابل للفصل ، إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة وعلى الأكثر قابلة للعد .

2.1 الفراغ المتري

لتكن X مجموعة غير خالية . يسمى فراغ متريا ، كل زوج (X, d) ، حيث $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ و $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ تحقق مايلي:

1. $\forall (x, y) \in X, d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $\forall (x, y) \in X, d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall (x, y, z) \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$d(x, y)$ المسافة بين x و y.

نتيجة 1
كل فراغ متري يكون فراغا تبولوجيا.

1.2.1 المتتاليات في الفراغ المتري

لتكن $(x_n)_{n \geq 1}$ متتالية من الفراغ المتري (X, d) و x_0 عنصر من X.

تعريف 6

1. يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو العنصر a إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1, \forall n \geq n_\varepsilon \longrightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

2. يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ لكوشي إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1, \forall p, q \geq n_\varepsilon \longrightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

3.1 الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 7
يسمى فراغا شعاعيا نظيميا، كل زوج $(X, \|.\|)$، حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K}$ أحد الحقلين إما $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$، $\|.\|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}_+$ ويحقق الشروط التالية:

$$X \mapsto \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \|x\|$$

1. $\forall x \in X, \|x\|_X = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
3. $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

الرمز $\|.\|$ يسمى نظيما، والعدد $\|x\|$ يسمى نظيم العنصر x.

نتيجة 2
كل فراغ شعاعي نظيمي يكون فراغا متريا عندها يكون:

- $d(x, 0) = \|x\|$
- $d(x, y) = \|x - y\|$

ملاحظه 1
الفراغ الشعاعي النظيمي ، إختصارا يكتب ف.ش.ن .

1.3.1 فراغ بناخ

ليكن $(X, \|.\|)$ ف.ش.ن .

تعريف 8
يقال إن X فراغ بناخ ، إذا كانت كل متتالية كوشي منه متقاربة فيه.

4.1 الفراغ الهيلبرتي

1.4.1 الجداء السلمي

ليكن X ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 9

يعرف الجداء السلمي على X بأنه تطبيق من $X \times X$ في $\mathbb{K}$ من أجل كل x, y, z من X وكل α من $\mathbb{K}$ مايلي:

$$h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

1. $h(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, h(x,x) \geq 0$
2. $h(\alpha x, x) = \alpha h(x,x)$
3. $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$
4. $h(x+y, z) = h(x,z) + h(y,z)$

يرمز للجداء السلمي بالرمز $\langle , \rangle$ عندها الزوج $(X, \langle , \rangle)$ يسمى فراغا شبه هيلبرتي.

نتيجة 3

كل فراغ شبه هيلبرتي يكون فراغ شعاعي نظيمي.

عندها يكون:

$$\|x\| = \sqrt{h(x,x)}$$

2.4.1 الفراغ الهيلبرتي

الفراغ الهيلبرتي هو كل فراغ شبه هيلبرتي تام، ونرمز لفراغ هيلبار بالرمز H.

3.4.1 التعامد

مفهوم التعامد

ليكن X فراغا شبه هيلبرتي ، A و B مجموعتان من X ،حيث $A \neq \varnothing \neq B$.

تعاريف

1. يقال إن العنصرين (الشعاعيين)، x, y من X متعامدان إذا كان جداؤهما السلمي معدوما.
   ويرمز لهما بالرمز $x \perp y$ ونكتب:
   $$x \perp y \Longleftrightarrow < x, y >= 0$$
2. يقال إن العنصر x من X عمودي على المجموعة A إذا كان عموديا على كل عنصر من A ، ونكتب:
   $$x \perp A \Longleftrightarrow \{\forall y \in A \longrightarrow < x, y >= 0\}$$
   يرمز لمجموعة العناصر العمودية على A ، بالرمز $A^{\perp}$.

3. يقال إن A وB متعامدان إذا تحقق:

$$\forall x \in A, \forall y \in B \longrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$

ونكتب $A \perp B$.

قضيه 1
إذا كان X ، فراغا شبه هيلبرتي، فإن:

1. متراجحة كوشي شوارتز $\forall x, y \in X \longrightarrow |< x, y >| \leq \|x\|\|y\|$
2. قانون متوازي الأضلاع $\forall x, y \in X, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$
3. $\forall x, y \in X, \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(< x, y > + < y, x >)$
4. $\forall x, y \in X, 4 < x, y >= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$

4.4.1 الإسقاط العمودي

ليكن H فراغا لهيلبار .

نظريه 1
إذا كانت A مجموعة مغلقة ومحدبة من H و x من H، حيث $x \notin A$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من A يكون أحسن تقريب للعنصر x في المجموعة A.
أي:

$$\forall x \in H, (x \notin A), \exists! y_0 \in A / d(x, y_0) \equiv \|x - y_0\| = d_0(x, A)$$

نظريه 2
إذا كان X_0 فراغا جزئيا مغلقا من H، وx عنصرا من H، حيث $x \notin X_0$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من X_0 ، يمثل أحسن تقريب للعنصر x في X_0.
يحقق

$$x - y_0 \perp X_0$$

في هذه الحالة يسمى y_0 المسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0 ، ويرمز له بالرمز $P_{X_0}x$.

5.4.1 التحليل العمودي

ليكن H فراغاً لهيلبار، و X_0 فراغاً جزئياً مغلقاً منه.

تعريف 10
يعرف المتمم العمودي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H ، بأنه مجموعة كل العناصر من H العمودية على X_0 ، أي أنه المجموعة ${X_0}^{\perp}$.

نتيجة 4

1. ${X_0}^\perp$ فراغ جزئي مغلق من H.
2. كل عنصر x من H يكتب بشكل وحيد كالتالي:

$$x = y + z / y \in X_0, z \in {X_0}^\perp$$

3. $H = X_0 \oplus {X_0}^\perp$.
عندها نقول إن ${X_0}^\perp$، X_0 هما التحليل العمودي للفراغ H، ونكتب:

$$z = P_{X_0^\perp} x \ , y = P_{X_0} x.$$

حيث:
$P^\perp_{X_0}$ تطبيق الإسقاط على الفراغ $X_0^\perp$ ، P_{X_0} تطبيق الإسقاط على الفراغ X_0.

قضيه 2
تطبيق الإسقاط P_{X_0} ، هو تطبيق خطي ومحدود ويحقق:

1. $P_{X_0} = P^2_{X_0}$
2. $\|P_{X_0}\| \leq 1$
3. $\forall x, y \in H \longrightarrow < P_{X_0} x, y > = < x, P_{X_0} y >$

5.1 المؤثرات ونظرية الأطياف

1.5.1 المؤثرات الخطية

ليكن $(X, \|.\|_X)$، $(Y, \|.\|_Y)$ فراغين شعاعيين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ وليكن D مجموعة غير خالية من X، ($D \subseteq X$).

تعريف 11
إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصرا معينا y من Y، يقال أنه قد عرف مؤثرا من X في Y، يرمز له بالرمز F ونكتب $y = F(x)$ أو $y = Fx$.

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر F ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y حيث $y = Fx$ و $x \in D(F)$ تسمى مجموعة قيم المؤثر F ويرمز لها بالرمز $E(F)$ ونكتب $E(F) = \{y \in Y \backslash y = Fx, x \in D(F)\}$.
- صيغة المؤثر F تكتب كالتالي:

$$X \supset D(F) \xrightarrow{F} E(F) \subset Y$$

إختصارا نكتب:

$$F : X \longrightarrow Y$$

- مجموعة الأزواج (x, Fx) من فراغ الجداء $X\times Y$ حيث $x \in D(F)$ تسمى بيان المؤثر F ويرمز لها بالرمز Γ_F ونكتب:

$$\Gamma_F = \{(x, Fx)/x \in D(F)\} \subset X\times Y.$$

- مجموعة أصفار المؤثر F تسمى نواة المؤثر F ويرمز لها بالرمز $\ker F$ ونكتب:

$$\ker F = \{x \in D(F) \quad /y = Fx\}$$

تعريف 12
المؤثر F من X في Y يقال أنه خطي إذا تحقق مايلي:

1. المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X.
2. $\forall x_1, x_2 \in D(F).\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k} \longrightarrow F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 (Fx_2)$

يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y بالرمز $L(X, Y)$.

- في حالة $X = Y$ إختصارا نكتب $L(X, X) = L(X)$.
- في حالة $Y = \mathbb{K}$ المجموعة $L(X, \mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية على X، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي، ويرمز لها بالرمز X^* وتسمى الثنوي الجبري للفراغ X .

6.1 مجموع وجداء المؤثرات

تعريف 13
من أجل كل مؤثرين كيفيين F_1, F_2 من $L(X, Y)$ يعرف

1. جمع المؤثريين F_1, F_2 كالتالي:

$$(F_1 + F_2)x = F_1 x + F_2 x \quad \text{حيث} \quad x \in D(F_1) \cap D(F_2)$$

2. ضرب المؤثر F_1 بعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي:

$$(\alpha F_1)x = \alpha F_1 x, \quad x \in D(F_1) \quad /\alpha \in \mathbb{K}$$

نتيجة 5
$L(X, Y)$ فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

1.7 المؤثرات الخطية المحدودة

ليكن F مؤثرا خطيا من X في Y.

تعريف 14
يقال أن F محدود على مجموعة تعريفه إذا تحقق:

$$\exists M > 0, \forall x \in D(F), \|F(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

إذا تحققت الصيغة الأخيرة من أجل كل x من X يقال أن F محدود على X أو محدود.
-نرمز لمجموعة المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y حيث $D(F) \equiv X$ بالرمز $l(X,Y)$ وهو فراغ جزئي من الفراغ $L(X,Y)$.

تعريف 15
يعرف نظيم المؤثر F من $l(X,Y)$ بأحد الصيغ التالية:

1. $\|F\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Fx\|}{\|x\|}$
2. $\|F\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Fx\|$
3. $\|F\| = \min\{M/\|Fx\| \leq M\|x\|\}$

-الفراغ $l(X,Y)$ في حالة $Y \equiv \mathbb{K}$ يسمى الفراغ الثنوي التبولوجي ويرمز له بالرمز X' أي

$$X' = l(X,X) = l(X)$$

تعريف 16
يقال أن المؤثر F مستمر في النقطة x_0 من $D(F)$ إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0/(\forall x \in D(F) \cap X/\|x - x_0\| < \delta) \longrightarrow \|Fx - Fx_0\| < \varepsilon$
2. يقال أن المؤثر F مستمر إذا كان مستمرا في كل نقطة من مجموعة تعريفه.

نتيجة 6
إذا كان المؤثر F من $L(X,Y)$ فإن F مستمر يكافئ F محدود.

نتيجة 7
إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ فإن:

1. $\forall x \in X, \|Fx\| \leq \|F\|\|x\|$
2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \in X/\|Fx_\varepsilon\| > (\|F\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$

8.1 نظرية ريس للأشكال الخطية

نظريه 3
ليكن H فراغاً لهيلبار

1. إذا كان f شكلاً خطياً ومحدوداً على H ،(أي $f \in H'$) ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_f من H، بحيث:

$$\forall x \in H \longrightarrow f(x) = \langle x, y_f \rangle, \|f\| = \|y_f\|$$

2. إذا كان y عنصراً كيفياً من H ، فإن الصيغة التالية:

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle, x \in H$$

تعرف شكلا خطيا ومحدودا f_y ، ويكون عندها:

$$\|f_y\| = \|y\|$$

البرهان

1. بما أن f شكل خطي ومحدود (مستمر)، فإن $\ker f$ تمثل فراغا جزئيا مغلقا في H.

$$\ker f = \{x \in H / \langle x, y_f \rangle = 0\}$$

في حالة $H = \ker f$ ، واضح أن $f \equiv 0$ ، ومنه:

$$\exists ! y_f = 0 / \langle x, y_f \rangle = 0$$

في حالة $H \neq \ker f$ ، حسب نظرية التحليل العمودي للفراغ H ، يكون $H = \ker f \oplus \ker f^{\perp}$ ، أو بمعنى آخر
$\ker f^{\perp} = H - \ker f$ ، أي يوجد عنصر x_0 يختلف عن الصفر ويحقق:

$$x_0 \in \ker f^{\perp} = H - \ker f$$

من أجل كل x من H العنصر $f(x)x_0 - f(x_0)x$ من $\ker f$ ، لأن:

$$f(f(x)x_0 - f(x_0)x) = f(x)f(x_0) - f(x_0)f(x) = 0$$

بما أن $x_0 \in \ker f^{\perp}$ ، فإن

$$\langle f(x)x_0 - f(x_0)x, x_0 \rangle = 0$$

أي:

$$\langle f(x)x_0, x_0 \rangle - \langle f(x_0)x, x_0 \rangle = 0$$

وبالتالي يكون

$$\langle f(x)x_0, x_0 \rangle = \langle x, \overline{f(x_0)}x_0 \rangle$$

أو نكتب:

$$f(x) = \langle x, \frac{\overline{f(x_0)}}{\langle x_0, x_0\rangle} x_0\rangle$$

هذا يعني من أجل كل f يوجد عنصر $y_f = \frac{\overline{f(x_0)}}{\langle x_0,x_0\rangle}x_0$ من H ، يحقق:

$$f(x) = \langle x, y_f\rangle$$

- نبرهن أن y_f وحيد:
نفرض وجود y'_f , y''_f ، بحيث:

$$\forall x \in H \longrightarrow f(x) = \langle x, y'_f\rangle = \langle x, y''_f\rangle$$

$$\forall x \in H \longrightarrow \langle x, y'_f - y''_f\rangle = 0 \tag{1.1}$$

من أجل $x = y'_f - y''_f$ ، المعادلة (1.1) صحيحة وتعني أن $\|y'_f - y''_f\|^2 = 0$ وبالتالي حتما يكون $y'_f = y''_f$

- نبرهن أن $\|f\| = \|y_f\|$ عندنا:

$$f(x) = \langle x, y_f\rangle \Longrightarrow |f(x)| \leq \|x\|\|y_f\| \Longrightarrow \|f\| \leq \|y_f\| \tag{2.1}$$

من ناحية ثانية من أجل $x = y_f$ يكون:

$$f(y_f) = \|y_f\|^2 \Longrightarrow |y_f\|^2 \leq \|f\|\|y_f\| \Longrightarrow \|y_f\| \leq \|f\| \tag{3.1}$$

من (2.1) ،(3.1) نستنتج: $\|f\| = \|y_f\|$

2. بما أن

$$\forall x \in H \longrightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbb{K} \tag{4.1}$$

والجداء السلمي خطي بالنسبة للمركبة الأولى ومستمر، فإن الصيغة (4.1) ، تعرف شكلاً خطياً ومستمراً، (محدودا) .
و نرمز له بالرمز $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ بسهولة كما في (1) ، نحصل على

$$\|f_y\| = \|y\|$$

□

1.8.1 المؤثر القرين

ليكن H_1، H_2 فراغين لهيلبار و F من $l(H_1, H_2)$.

تعريف 17
يسمى مؤثرا قرينا للمؤثر F، المؤثر F^* المعرف من H'_2 في H'_1، بحيث من أجل كل (x,y) من $H_1 \times H_2$ يكون

$$\forall (x,y) \in H_1 \times H_2 \longrightarrow \langle Fx, y\rangle = \langle x, F^* y\rangle$$

نظريه 4
إذا كان $F \in l(H_1, H_2)$ فإن F^* موجود ووحيد من $l(H'_2, H'_1)$ وتحقق:

$$\|F\| = \|F^*\|$$

خواص المؤثر القرين

إذا كان $F, T \in l(H)$ و α من $\mathbb{K}$ فإن:

1. $(F+T)^* = F^* + T^*$
2. $(\alpha F)^* = \bar{\alpha}\, F^*$
3. $(F^*)^* = F$
4. $I^* = I$

2.8.1 المؤثر القرين لنفسه

تعريف 18
يقال أن المؤثر $F \in l(H)$ قرينا لنفسه إذا إنطبق مع قرينه أي $F = F^*$ عندها يكون:

$$x, y \in H, \langle Fx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle$$

خواص المؤثر القرين لنفسه

ليكن F و T مؤثرين قرينين لنفسهما من $l(H)$.
لدينا الخواص التالية:

1. من أجل α و β من $\mathbb{R}$ فإن المؤثر $\alpha F + \beta T$ قرين لنفسه.
2. إذا كان $FT = TF$ فإن المؤثر FT قرين لنفسه.
3. العدد $\langle Fx, x\rangle$ من $\mathbb{R}$ مهما تكن x من H .
4. $\|F\| = \max(|M_F|, |m_F|)$ حيث:

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle \quad , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle$$

3.8.1 المؤثرالعكسي

ليكن F مؤثرا من X في Y و $D(F)$ مجموعة تعريفه $E(F)$ مجموعة قيمه.

تعريف 19
يقال أن المؤثر F قابل للقلب إذا كانت المعادلة $y = Fx$ تقبل حلا وحيدا x من أجل كل $y \in E(F)$.
إذا كان F يقبل القلب فمن أجل كل $y \in E(F)$ يوجد عنصر وحيد $x \in D(F)$ وهو حل المعادلة $y = Fx$
يسمى المؤثر من $E(F)$ في $D(F)$ الذي يلحق بـ y العنصر x مقلوب F ونرمز له بالرمز F^{-1}.

4.8.1 قابلية القلب باستمرار

تعريف 20
المؤثر F من $L(X,Y)$ يقال أنه قابل للقلب باستمرار إذا وجد له مؤثر عكسي معرف ومحدود على كل الفراغ أي $\exists F^{-1} \in l(Y,X)$.

نتيجة 8 (نظرية بناخ للمؤثر العكسي)
إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ تقابلا حيث Y ،X لبناخ، فإنّ المؤثر F قابل للقلب باستمرار.

نتيجة 9
ليكن المؤثر F من $l(X,Y)$ حيث Y ،X لبناخ إذا وجد مؤثر T من $l(X,Y)$ يحقق:
$TF = I_Y$ و $FT = I_X$ فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار عندها يكون $F^{-1} = T$.

قضيه 3
إذا كان المؤثر F من $l(X)$ حيث X لبناخ و $\|F\| < 1$، فإن المؤثر $I - F$ قابل للقلب باستمرار، عندها يكون:

$$\|I - (I-F)^{-1}\| \leq \frac{\|F\|}{1-\|F\|}, \|(I-F)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|F\|}$$

البرهان

نبرهن أن السلسلة

$$I + F + F^2 + F^3 + ... + F^n + ... \tag{5.1}$$

متقاربة في $l(X)$، بما أن X لبناخ، فإن $l(X)$ بناخ أيضا، لذا يكفي أن نبرهن أن السلسلة (5.1) متقاربة مطلقا.
لاحظ $\|F^k\| \leq \|F\|^k$، هذا يعني أن:

$$I + \|F\| + \|F^2\| + ... + \|F^n\| + ... \leq 1 + \|F\| + \|F\|^2 + ... + \|F\|^n + ...$$

واضح أن السلسلة في الطرف الأيمن متقاربة لكون $\|F\| < 1$، هذا يؤدي إلى تقارب السلسلة في الطرف الأيسر.

أي أن السلسلة (5.1) متقاربة مطلقا، ومنه فهي متقاربة .
لتكن S نهايتها أي:

$$S_n = I + F + ... + F^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$$

من ناحية ثانية عندنا

$$\begin{cases}(I-F)S_n = I - F^{n+1}\\ S(I-F) = I - F^{n+1}\end{cases} \qquad (6.1)$$

بماأن $\|F^{n+1}\| \leq \|F\|^{n+1}$ و $\|F\| < 1$، فإن: $\lim\limits_{n\to\infty} F^{n+1} = 0$.
بإدخال النهاية في (6.1) .
نحصل على:

$$(I-F)S = I, S(I-F) = I$$

حسب النتيجة (9)، التطبيق $(I-F)$ يكون قابلا للقلب باستمرار، عندها يكون $S = (I-F)^{-1}$
لاحظ أن:

$$\|S_n\| \leq 1 + \|F\| + ... + \|F\|^n = \frac{1 - \|F\|^{n+1}}{1 - \|F\|}$$

$$\|I - S_n\| \leq \|F\| + ... + \|F\|^n = \frac{\|F\| - \|F\|^{n+1}}{1 - \|F\|}$$

بإدخال النهاية على المتراجحتين، نحصل على :

$$\|I - (I-F)^{-1}\| \leq \frac{\|F\|}{1 - \|F\|}; \|(I-F)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|F\|}$$

□

قضيه 4
يكون للمؤثر F , $(F \in L(X,Y))$ مؤثرا عكسيا محدودا على $E(F)$.
إذا وفقط إذا وجد عدد ثابت c و $c > 0$ يحقق:

$$\forall x \in D(F) \longrightarrow \|Fx\| \geq c\|x\|$$

5.8.1 المؤثرالمتقايس

تعريف 21
يسمى المؤثر المحدود F في فراغ هيلبار H مؤثر متقايس إذا كان $\|Fx\| = \|x\|$ من أجل كل $x \in H$.

6.8.1 مؤثرالإسقاط العمودي

ليكن M فراغا جزئيا مغلقا من فراغ هيلبار H.

يعرف الإسقاط العمودي على أنه تطبيق الإسقاط على الفراغ M المعرف في الفقرة (5.4.1) ، إختصارا يسمى مؤثر الإسقاط العمودي بالإسقاط.

خصائص:

1. المؤثر P_M قرين لنفسه.
2. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \geq 0$
3. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \leq \|x\|^2$

قضيه 5
إذا كان المؤثر F قرين لنفسه في H و $F = F^2$ فإن F يمثل مؤثر إسقاط على فراغ جزئي مغلق من H .

7.8.1 المؤثر غير سالب

تعريف 22
يسمى المؤثر F من $l(H)$ مؤثر غير سالب إذا كان قرينا لنفسه و يحقق $\langle Fx, x\rangle \geq 0$ من أجل كل $x \in H$.

9.1 تبولوجيا الفراغ $l(x, y)$

نعتبر أن X, Y فراغان لبناخ (معلوم أن $l(x, y)$ لبناخ أيضا).

التبولوجيا المنتظمة

تعريف 23
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geq 1}$ من $l(X, Y)$ يقال أنها متقاربة بانتظام (وفق نظيم الفراغ) نحو مؤثرا F من $l(X, Y)$ ، إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} \|F_n - F\| = 0$ ، ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{u} F \quad \text{أو} \quad F = u - \lim_{n\to\infty} F_n$$

التبولوجيا القوية

تعريف 24
تعرف التبولوجيا القوية على الفراغ $l(X, Y)$ بأنها أضعف تبولوجيا على $l(X, Y)$ من أجلها يكون المؤثر Ψ_x المعرف كالتالي:

$$\Psi_x : l(X, Y) \longrightarrow Y / \Psi_x(F) = Fx$$

مستمر من أجل كل x من X.

تعريف 25
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geq 1}$ من $l(x,y)$ يقال أنها متقاربة بالنسبة لتبولوجيا القوية نحو مؤثرا F ، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(F_nx)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو Fx بالنسبة لنظيم الفراغ Y ،هذا من أجل x من X.
أي من أجل كل x من X يكون: $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_nx-Fx\|=0$ ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{s} F \text{ أو } F=s-\lim_{n\to\infty}F_n$$

التبولوجيا الضعيفة

تعريف 26
تعرف التبولوجيا الضعيفة على الفراغ $l(X,Y)$ بأنها أضعف تبولوجيا على $l(X,Y)$ من أجلها يكون المؤثر $\Psi_{x,f}$ المعرف كالتالي:

$$\Psi_{x,f}:l(X,Y)\longrightarrow \mathbb{C}/\Psi_{x,f}=f(Fx)$$

مستمر من أجل كل x من X، و f من Y'.

تعريف 27
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geq 1}$ من $l(X,Y)$ يقال أنها متقاربة بالنسبة لتبولوجيا الضعيفة نحو مؤثرا F، إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(F_nx)_{n\geq 1}$ متقاربة بضعف في الفراغ Y نحو Fx، هذا من أجل كل x من X.
أي من أجل كل f من Y' يكون:

$$\lim_{n\to\infty}\|f(F_nx)-f(Fx)\|=0$$

ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{w} F \text{أو} F=w-\lim_{n\to\infty}F_n$$

10.1 نظرية الأطياف

1.10.1 مفهوم الطيف والحالة

ليكن F مؤثرا من $L(X)$ حيث X فراغ بناخ مركب $(\mathbb{K}\equiv\mathbb{C})$.
مفهوم الطيف والحالة للمؤثر F له علاقة بقابلية الحل للمعادلة الدالية التالية:

$$Fx-\lambda Ix=y \tag{7.1}$$

أو إختصارا نكتب:

$$F_\lambda x=y/F_\lambda\equiv F-\lambda I$$

حيث I المؤثر الحيادي من X في نفسه و x مجهول من $D(F)$ و y معطى من X و λ وسيط مركب.
في حالة $y=0$ المعادلة (7.1) تسمى متجانسة .

تعريف 28

العدد المركب λ يقال أنه نقطة نظامية للمؤثر F، إذا كان المؤثر F_λ قابلا للقلب باستمرار، أي $\exists F_\lambda^{-1} \in l(X)$ يرمز لمجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالرمز $\rho(F)$ ونكتب:

$$\rho(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}/F_\lambda^{-1} \in l(X)\}$$

تعريف 29

يعرف طيف المؤثر F ويرمز له بالرمز $\sigma(F)$، بأنه متمم مجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالنسبة للمستوي المركب

أي: $\sigma(F) = \mathbb{C}\backslash\rho(F)$.

ينقسم الطيف إلى ثلاثة أقسام وهي:

1. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ لا يقبل مؤثرا عكسيا، (أي مجموعة القيم الذاتية للمؤثر F). تسمى هذه المجموعة بالطيف النقطي ويرمز له بالرمز $P_\sigma(F)$، ونكتب:
$$P_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\ker F_\lambda \neq 0\}$$
2. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيامجموعة تعريفه أي المجموعة $E(F_\lambda)$ كثيفة في X، لكنه غير محدود . تسمى هذه المجموعة بالطيف المستمر ويرمز له بالرمز $C_\sigma(F)$، ونكتب F_λ^{-1} غير محدود.
$$C_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}P_\sigma(F)/E(F_\lambda) \neq \overline{E(F_\lambda)} = X\}$$
3. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا، (محدود أو غير محدود) مجموعة تعريفه أي المجموعة $E(F_\lambda)$ ليست كثيفة في X. تسمى هذه المجموعة بالطيف الباقي ونرمز له بالرمز $R_\sigma(F)$، ونكتب:
$$R_\sigma(F) = \{\lambda \in CP_\sigma(F)/\overline{E(F_\lambda)} \neq X\}$$

نتائج

1. $\sigma(F)$ مجموعة متراصة في $\mathbb{C}$.
2. $\{\forall\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > \|F\|\} \subset \rho(F).$
3. $\{\forall\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \|F\|\} \supset \sigma(F)$

11.1 طيف المؤثر القرين

قضيه 6

ليكن $F \in l(H)$.

1. إذا كان المؤثر F قابلا للقلب باستمرار فإن المؤثر F^* أيضا يكون قابلا للقلب باستمرار عندها يكون
$$(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$$
2. $\sigma(F^*) = \{\overline{\lambda}/\lambda \in \sigma(F)\}$

12.1 طيف المؤثر القرين لنفسه

إذا كان F قرينا لنفسه، فإن:

1. كل القيم الذاتية للمؤثر F حقيقية.

2. $F = F^* \Longrightarrow \sigma(F) \subset [m_F, M_F]$
حيث $m_F = \inf_{\|x\|=1}\langle Fx, x\rangle \quad , \quad M_F = \sup_{\|x\|=1}\langle Fx, x\rangle$

3. كل شعاعين ذاتيين مرفقين بقيمتين ذاتيتين مختلفتين يكونا متعامدين .

4. إذا كان الفراغ الجزئي M ثابت بالنسبة للمؤثر F، فإن متممه العمودي $M^\perp$ يكون كذلك .
(M ثابت بالنسبة لـ F يعني $FM \subset M$).

قضيه 7
العدد λ يكون قيمة ذاتية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا كان: $\overline{E(F_\lambda)} \neq H$.

نظريه 5
ليكن المؤثرين F, T من $l(X)$

1. إذا كانت λ, ξ من $\rho(F)$ فإن:

$$R_\lambda(F) - R_\xi(F) = (\lambda - \xi)R_\lambda(F)R_\xi(F) \qquad (8.1)$$

الصيغة (8.1) تسمى المتطابقة الأولى للحالة أو متطابقة هيلبار للحالة.

13.1 تحليلية الحالة

تعريف 30
ليكن المؤثر F من $l(X)$ ، من أجل كل λ من $\rho(F)$ يرمز للمؤثر F_λ^{-1} بالرمز $R_\lambda(F)$.
المؤثرات $\{R_\lambda(F)/\lambda \in \rho(F)\}$ تسمى حالة المؤثر F.

نظريه 6
حالة المؤثر F أي $R_\lambda(F)$ دالة تحليلية في كل مجال تعريفها بمافيها المالانهاية.
عندها يكون:

- من أجل λ_0 ثابتة من $\rho(F)$ يكون:

$$R_\lambda(F) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)\, R_{\lambda_0}^{n+1}$$

- من أجل $\lambda_0 = \infty$ يكون:

$$R_\lambda(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} F^n$$

البرهان

- لتكن λ_0 ثابتة من $\rho(F)$.
من أجل كل λ من $\rho(F)$ يكون:

$$R_{\lambda_0}(F) = [I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(F)]R_\lambda(F)$$

ومنه نحصل على

$$R_\lambda(F) = [I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(F)]^{-1}R_{\lambda_0}(F) \tag{1.9}$$

العبارة $[I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(F)]^{-1}$ من أجل كل $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ تكتب في شكل سلسلة متقاربة كالتالي:

$$[I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(F)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^n(F)$$

بتعويض هذا في الصيغة (1.9) يكون:

$$R_\lambda(F) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \, R_{\lambda_0}^{n+1}$$

وهو تحليل $R_\lambda(F)$ في جوار النقطة λ_0.

- في جوار المالانهاية أي $\|F\| < |\lambda|$ أو $\frac{\|F\|}{|x|} < 1$، نكتب:

$$R_\lambda(F) = (F - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}F)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)^{-n-1}F^n$$

وهو تحليل $R_\lambda(F)$ في المالانهاية. □

1.14 دالة المؤثر

ليكن F مؤثرا من $l(B)$.
معلوم أنه إذا كانت f دالة كثير حدود، أي $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ فإن دالة المؤثر F تعرف كالتالي:

$$f(F) = \sum_{k=0}^{n} a_k F^k$$

يمكن تعميم التعريف السابق على الدوال الصحيحة (التحليلية على $\mathbb{C}$)، أي إذا كانت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

فإن

$$f(F)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF^n$$

عندها يكون $f(F)\in l(B)$.
-يمكن تعميم هذا التعريف إلى دوال الصنف $A(F)$.
($A(F)$ هو صنف كل الدوال f التحليلية في جوار ما للطيف $\sigma(F)$) كالتالي:
-تعرف دالة المؤثر F لدوال الصنف $A(F)$ بأحد الصيغ التالية:

$$f(F)=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega}f(\lambda)R_\lambda(F)d\lambda$$

$$f(F)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}F^n\oint_{\Gamma}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}d\lambda$$

حيث Ω جوار مفتوح للطيف $\partial\Omega\cup\Omega=\overline{\Omega}$ واقع في نطاق تحليلية f.
Γ دائرة مركزها الصفر حاوية تماما للطيف $\sigma(F)$.

نتيجة 10
إذا كانت الدالة f من الصنف $A(F)$، فإن: $f(\sigma(F))=\sigma(f(F))$

15.1 التحليل الطيفي

نظريه 7
كل مؤثر F من $l(H)$ قرين لنفسه يمكن تمثيله بشكل وحيد في مجموعة مؤثرات إسقاط E_μ متعلقة بوسيط حقيقي μ وتحقق.

1. $E_\mu\le E_\nu,\mu\le\nu$.
2. $E_{\mu+0}=E_\mu$.
3. $\mu\ge M_F\longrightarrow E_\mu=I$ $\mu<m_F\longrightarrow E_\mu=0$.

عندها المؤثر F يكتب بالشكل:

$$F=\int_{m_F-0}^{M_F}\mu dE_\mu$$

نتيجة 11

1. $F^n = \int\limits_{m_F - 0}^{M_F} \lambda^n dE_\lambda, n \geq 1$
2. $\|Fx\|^2 = \langle Fx, Fx \rangle = \langle F^2 x, x \rangle = \int\limits_{m_F - 0}^{M_F} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x \rangle$
3. $\mu \in \rho(F) \longrightarrow R_\mu = \int\limits_{m_F - 0}^{M_F} \frac{\lambda}{\lambda - \mu} dE_\lambda$

الفصل 2

المؤثر الوحدوي ودراسته الطيفية والمؤثر المقلص

مقدمه

يتناول هذا الفصل بالخصوص نوعين من المؤثرات وهي المؤثرات الوحدوية والمؤثرات المقلصة بالنسبة للمؤثر الوحدوي ثم التركيز على دالته المميزة ذلك لأن مفهوم الطيف للوحدوي والدالة المميزة للمقلص مرتبط بشكل كبير بدراسة التشابه في الفصل الثالث.

1.2 المؤثر الوحدوي

تعريف 31

نقول عن المؤثر F من $l(H)$ إنه وحدوي إذا حقق مايلي:

1. $\forall x, y \in H, \langle F(x), F(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
2. F غامر .

نتيجة 12

إذا كان F من $l(H)$ فإن الإثباتات التالية

1. F وحدوي.
2. $FF^* = I = F^*F$ أي $F^* = F^{-1}$
3. $E(F) = H$ و $\|x\| = \|Fx\|$ أي متقايس وغامر.

متكافئة.

نتيجة 13

المؤثر الوحدوي قابل للقب باستمرار.

مبرهنة 1
ليكن $F : H \longrightarrow H$ و $T : H \longrightarrow H$ مؤثرين وحدويين، تحقق مايلي:

1. المؤثر F إيزومتري ، وبالتالي يكون $\|Fx\| = \|x\|, \forall x \in H$.
2. $\|F\| = 1$ ، شرط أن يكون $H \neq \{0\}$.
3. المؤثر F^{-1} وحدوي.
4. المؤثر FT وحدوي .
وزيادة عن ذلك فإن
5. الشرط اللازم والكافي لكي يكون مؤثر خطي S على فراغ هيلبار المركب H وحدوي هو أن يكون S إيزومتريا وغامرا.

البرهان

1. لدينا
$$\|Fx\|^2 = \langle Fx, Fx\rangle = \langle x, F^*Fx\rangle = \langle x, Ix\rangle = \|x\|^2$$
ومنه
$$\|Fx\| = \|x\| \tag{1.2}$$
2. واضح من (1.2)
3. إذا كان F غامرا ومتباينا ، فإن F^{-1} يكون كذلك .
بالتالي نجد أن:
$$(F^{-1})^* = F^{**} = F = (F^{-1})^{-1}$$
4. بما أن FT متباين وغامر ولديناأن:
$$(FT)^* = T^*F^* = T^{-1}F^{-1} = (FT)^{-1}$$
5. نفرض أن S إيزومتريا وغامرا . بما أن الإيزومترية تقتضي التباين، فإن S متباين وغامر .

نبين أن: $S^* = S^{-1}$
ولدينا من الإيزومترية مايلي:
$$\langle S^*Sx, x\rangle = \langle Sx, Sx\rangle = \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle$$
وبالتالي فإن:
$$\langle (S^*S - I)x, x\rangle = 0$$
إذن $S^*S - I = 0$ أي أن $S^*S = I$.
ينتج من هذا أن:
$$SS^* = S^*S(SS^{-1}) = S(S^*S)S^{-1} = SIS^{-1} = I.$$
وهذا ينتج أن $S^*S = SS^* = I$ ، وبالتالي يكون $S^* = S^{-1}$ وهذا يعني أن S وحدوي .
أما العكس فواضح لكون أن S إيزومتريا وبناءا على (1.2) وهو غامرا تعريفا . □

2.2 طيف المؤثر الوحدوي

نظريه 8
طيف المؤثرالوحدوي F يقع على دائرة الوحدة.
عندها يكون :

$$\|(F-\lambda I)^{-1}\| \leq |1-|\lambda||^{-1} \ , |\lambda| \neq 1. \tag{2.2}$$

البرهان

بما أنَّ F وحدوي ($\|F\| = 1$) فإن:

$$\forall \lambda, |\lambda| > 1 \longrightarrow \lambda \in \rho(F).$$

بما أن F قابل للقلب باستمرار فإنه حتما $0 \in \rho(F)$.
حالة $1 > |\lambda| > 0$ نكتب:

$$F - \lambda I = F(I - \lambda F^{-1}) = -\lambda F(F^* - \frac{1}{\lambda}I)$$

ومنه

$$(F - \lambda I)^{-1} = \frac{-1}{\lambda}(F^* - \frac{1}{\lambda}I)^{-1}F^*$$

بما أن F^* وحدوي و $\frac{1}{|\lambda|} > 1$. فإن $\frac{1}{\lambda} \in \rho(F)$.
هذا يعني أن المؤثر $(F^* - \frac{1}{\lambda})^{-1}$ موجود ومعرف على كل الفراغ أي أن $(F - \lambda I)^{-1}$ كذلك.
وبالتالي يكون $\lambda \in \rho(F)$ وعليه يكون حتما

$$\sigma(F) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}/|\lambda| = 1\}$$

بوضع $\lambda = re^{i\varphi}$ ، $r > 1$ يكون إذن

$$\begin{aligned}
\|(F - \lambda I)x\|^2 &= \langle (F - \lambda I)x, (F - \lambda I)x \rangle \\
&= \langle (\overline{F^* - \lambda} I)(F - \lambda I)x, x \rangle \\
&= (r^2 + 1)\|x\|^2 - \langle (\overline{\lambda}F + \lambda F^*)x, x \rangle \\
&\geq (r^2 + 1)\|x\|^2 - \|(\overline{\lambda}F + \lambda F^*)\|\|x\|^2 \\
&\geq (r^2 + 1)\|x\|^2 - 2r\|x\|^2 \\
&\geq (r^2 + 1)\|x\|^2 - 2r\|x\|^2 \\
&= (r - 1)^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

هذا يثبت (2.2) من أجل $|\lambda| > 1$.
حالة $\lambda = 0$

المعادلة (2.2) واضحة.
نأخذ $1 > |\lambda| > 0$ أي $1 < |\lambda^{-1}|$ وبما أن $F^* = F^{-1}$ أي

$$\|(F-\lambda I)^{-1}\| = \|\lambda^{-1}(F^* - \lambda^{-1})^{-1}F^*\|$$
$$\leq |\lambda^{-1}|(|\lambda^{-1}|-1|)^{-1} = (1-|\lambda|)^{-1}$$

□

3.2 التحليل الطيفي للمؤثر الوحدوي

نظريه 9

كل مؤثر وحدوي F من $l(H)$ يمكن تمثيله بشكل وحيد في مجموعة مؤثرات إسقاط E_φ متعلقة بوسيط حقيقي φ حيث ، $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ وتحقق:

1. $E_{\varphi_1} \leq E_{\varphi_2}, \varphi_1 \leq \varphi_2$
2. $E_{\varphi+0} = E_\varphi$
3. $E_0 = 0, E_{2\pi} = I$

عن طريق E_φ المؤثر F يكتب كالتالي:

$$F = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE_\varphi \tag{3.2}$$

$\{E_\varphi\}$ تسمى تحليل الوحدة لـ F و E_φ دالة طيفية أو قياس طيفي .

البرهان

معلوم في دراسة كثيرات الحدود المثلثية إذا كان

$$P(e^{i\varphi}) = \sum_{k=-m}^{n} C_k e^{ik\varphi}$$

كثير حدود مثلثي فإن:

1. مرافقه يكتب كالتالي $\overline{P(e^{i\varphi})} = \sum_{k=-m}^{n} \overline{C_k} e^{-ik\varphi}$
2. إذا كان $P(e^{i\varphi}) \geq 0$ فإنه يوجد كثير حدود مثلثي آخر $Q(e^{i\varphi})$ تحقق:

$$P(e^{i\varphi}) = |Q(e^{i\varphi})|^2$$

أو نكتب

$$P(e^{i\varphi}) = Q(e^{i\varphi})\overline{Q(e^{i\varphi})}$$

3. لكل دالة ψ من C_0 توجد متتالية كثير حدود مثلثي $P_n(e^{i\varphi})_{n\geq 1}$ متناقصة ومتقاربة في كل نقطة نحو الدالة $\psi(e^{i\varphi})$.
حيث C_0 صنف كل الدوال الحقيقية المستمرة $Q(e^{i\varphi})$ على دائرة الوحدة والدوال $\psi(e^{i\varphi})$ المستمرة بالأجزاء (كل دالة ψ هي نهاية المتتالية من النوع φ).
من خلال تعريف دالة المؤثر، فإن دالة المؤثر F المرفقة بكثير الحدود المثلثي $P(e^{i\varphi})$ تكتب كالتالي

$$P(F) = \sum_{k=-m}^{n} C_k F^k$$

وتحقق
- $(P(F))^* = (\sum_{k=-m}^{n} C_k F^k)^* = \sum_{k=-m}^{n} \overline{C_k}\overline{F^k} = \overline{P(F)}$
- $P(F) = Q(F)(Q(F))^*$

أو نكتب $\langle P(F)f, f\rangle = \langle Q(F), (QF)^* f, f\rangle = \langle (QF)^* f, (QF)^* f\rangle \geq 0$

4. متتاليات المؤثرات $(P_n(F))$ متناقصة ومحدودة من الأسفل بالمؤثر αI حيث:

$$\alpha = \inf_{0\leq\varphi\leq 2\pi} \psi(e^{i\theta})$$

تكون متقاربة نحو المؤثر $\psi(F)$. وهو معرف جيدا لأنه غير متعلق باختيار المتتالية $(P_n(e^{i\varphi}))_{n\geq 1}$.

نتيجة 14

للصنف C_0 توجد دالة مؤثر.
نأخذ الآن الصنف C_1 كل الدوال التي تكتب بشكل فرق بين دالتين من الصنف C_0.
لاحظ إذا كانت ψ_3 من الصنف C_1 فإنه توجد $\psi_1, \psi_2 \in C_0$ حيث: $\psi_3(F) = \psi_1(F) - \psi_2(F)$ أي للصنف C_0 أيضا توجد دالة مؤثر.

هذا الصنف الأخير يحوي صنف الدوال $e_\psi(\varphi)$ المتعلقة بوسيط حقيقي ψ حيث $0 \leq \psi \leq 2\pi$.
معرفة كالتالي:
$e_0(\varphi) = 0, e_{2\pi}(\varphi) = 1$ وعندما $0 < \psi < 2\pi$ كالتالي

$$e_\psi(\varphi) = \begin{cases} 1, & 2k\pi < \varphi \leq 2k\pi + \psi \\ 0, & 2k\pi + \psi < \varphi \leq 2(k+1)\pi \end{cases} \tag{4.2}$$

حيث$(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

فعلا لأنه

$$e_\psi(\varphi) = e^1_\psi - e^1_0(\varphi)$$

$$e^1_\psi(\varphi) = \begin{cases} 1, & 2k\pi \leq \varphi \leq 2k\pi + \psi \\ 0, & 2k\pi + \psi < \varphi < 2(k+1)\pi \end{cases} \tag{5.2}$$

الصيغة $C_0 \in (5\ .\ 2)$ ومنه توجد دالة المؤثر لهذا الصنف نرمزلها بـ E_ψ أي $E_\psi = e_\psi(F)$.
بماأن دوال هذا الصنف تنطبق مع مربعها فإن E_ψ مؤثر إسقاط .
واضح أن:

$$E_0 = 0 \text{ و } E_{2\pi} = I$$

بما أن
$e_\psi(\varphi) \leq e_\chi(\varphi)$ من أجل $\psi < \chi$ فإن:

$$E_\psi \leq E_\chi$$

نبرهن E_ψ كدالة في ψ مستمرة من اليمين أي $E_\psi = E_{\psi+0}$.
الدالة $e^1_\psi(\varphi)$ من الصنف C_0 ومنه حسب الخاصية (3) لكثيرات الحدود المثلثية توجد متتالية كثير حدود مثلثي $(P_n(e^{i\varphi}))_{n\geq 1}$ متناقصة متقاربة نحو الدالة $e^1_\psi(\varphi)$.

هذا يعني من أجل n كبيرةنجد:

$$P_n(e^{i\varphi}) \geq e^1_{\psi+\frac{1}{n}}(\varphi)$$

ومنه دالة المؤثر المرفقة تحقق:

$$E^1_{\psi+\frac{1}{n}} \longrightarrow E'_\psi$$

من الصيغة (5.2) عندنا $E^1_\psi = E_\psi + E^1_0$ وعليه يكون:

$$\lim_{\chi \longrightarrow \psi+0} E_\chi = E_\psi$$

وبالتالي الأسرة $\{E_\psi\}$ تحقق شروط النظرية ومنه يمكن إعتبارها تحليل وحدة على $[0, 2\pi]$ للمؤثر F .
لبرهان الصيغة:

$$F = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE_\varphi$$

نقسم المجال $[0, 2\pi]$ كالتالي:

$$0 = \psi_0 < \psi_1 < ... < \psi_n = 2\pi$$

بحيث:

$$\max(\psi_k - \psi_{k-1}) \leq \varepsilon$$

نأخذ في كل مجال من النوع $[\psi_{k-1}, \psi_k]$ نقطة كيفية φ_k.
من أجل: $\psi_{h-1} < \varphi \leq \psi_h$ نحصل على:

$$|e^{i\varphi}| - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi k}|[e_{\psi_k}(\varphi) - e_{\psi_{k-1}}(\varphi)]| = |e^{i\varphi} - e^{i\varphi_h}| \leq |\varphi - \varphi_h| \leq \varepsilon$$

من أجل $\varphi = 0$ الصيغة الأخيرة أيضا محققة ومنه من أجل كل φ يكون:

$$0 \leq \overline{[e^{i\varphi} - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k}[e_{\psi_k}(\varphi) - e_{\psi_{k-1}}(\varphi)]} \times [e^{i\varphi} - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k}(e_{\psi_k}(\varphi) - e_{\psi_{k-1}}(\varphi))] \leq \varepsilon^2$$

عبارةدالة المؤثر المرفقة هي

$$0 \leq [F - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi k}[E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}}]]^*[F - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi k}[E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}}]] \leq \varepsilon^2 I$$

ومنه نستنتج:

$$\|F - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k}[E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}}]\| \leq \varepsilon$$

من الصيغة الأخيرة وباستعمال تكامل ستيلجاس نحصل على:

$$F = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE_\varphi$$

□

نتيجة 15

1. من أجل كل كثير حدود مثلثي أو حتى من أجل كل دالة مستمرة $f(e^{i\varphi})$ يكون

$$f(F) = \int_0^{2\pi} f e^{i\varphi} dE_\varphi$$

2.

$$F^n = \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} dE_\varphi \quad /n = 0 \pm 1 \pm 2, ...$$

تعريف 32

ليكن V تقايس في H.
الفراغ الجزئي X من H يسمى من النوع (p, q) بالنسبة لـ V إذا كان

$$V^p X \perp V^q X$$

من أجل كل الأعداد الصحيحة غير السالبة p, q حيث $(p \neq q)$.

4.2 مؤثر الإزاحة

تعريف 33

التقايس V من H يسمى مؤثر إزاحة من جهة واحدة إذا وجد فراغ X من H يحقق من أجل كل q, p أعداد صحيحة موجبة $p \neq q$ يحقق:

$$V^p X \perp V^q X$$

و

$$M_+X = H$$

حيث

$$M_+(X) = \oplus_0^{+\infty} V^n X$$

عندها يسمى X بالفراغ الجزئي المولد بالنسبة لـ V.

تعريف 34

المؤثر الوحدوي U من H يسمى مؤثر إزاحة من الجهتين إذا وجد فراغ X من H من أجل كل p, q أعداد صحيحة موجبة $p \neq q$ يحقق

$$V^p X \perp V^q X$$

و

$$MX = H \quad \text{حيث}$$

$$M(X) = \oplus_{-\infty}^{+\infty} V^n X$$

عندها يسمى الفراغ X بالفراغ الجزئي المولد بالنسبة لـ U.

تعريف 35

يسمى تمثيل فوري للفراغ $M(X), M_+(X)$ المؤثر Φ_X, Φ_X^+ على التوالي المعرفة كالتالي:

$$\Phi_X : M(X) \longrightarrow L^2(X)$$

$$[\Phi^X \sum_{-\infty}^{+\infty} U^k a_k](t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt} a_k \qquad / a_k \in X, \sum_{-\infty}^{+\infty} \|a_k\|^2 < \infty$$

$$\Phi_X^+ : M_+(X) \longrightarrow H^2(X)$$

$$[\Phi_X^+ \sum_0^{+\infty} V^k a_k](\lambda) = \sum_0^{+\infty} \lambda^k a_k \quad (a_k \in X / \sum_0^{+\infty} \|a_k\|^2 < +\infty \quad |\lambda| < 1)$$

نتيجة 16

1. إذا كان U_X مؤثر الجداء في e^{it} بالفراغ $L^2(X)$ و V_X مؤثر الجداء في λ بالفراغ $H^2(X)$.
فإن:
$$\Phi_X U = U_X \Phi_X, \quad \Phi_X^+ V = V_X \Phi_X^+$$
2. Φ_X, Φ_X^+ كل منهما مؤثر وحدوي.

حيث $H^2(X)$ فراغ الدوال التحليلية في D . $\{D = \lambda \ \ |\lambda| < 1\}$ المرفقة بالنظيم $\|U\|_2$ كالتالي:

$$\|U\|_2 = \{\sup_{0<r<1} [\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |U(re^{it})|^2 dt]^{\frac{1}{2}}\}$$

5.2 المؤثر المقلص

المؤثر الخطي F من فراغ هيلبار H في فراغ H' يسمى مقلصا.
إذا تحقق

$$\|Fx\|_{H'} \leq k\|x\|_H \ , \forall x \in H \quad 0 < k \leq 1 \tag{6.2}$$

في حالة $k = 1$ يكون :

$$\|Fx\|_{H'} \leq \|x\|_H \ , \forall x \in H \tag{7.2}$$

نتيجة 17
إذا كان F مقلص فإن:

1. $0 < \|F\| \leq 1.$
2. F^n مقلص من أجل $n \geq 1$.
3. F^* مقلص.
4. $\langle F^*Fx, x\rangle \leq \langle x, x\rangle$ من أجل كل x من H.
5. من أجل F^* يكون $\langle FF^*y, y\rangle \leq \langle y, y\rangle$ من أجل كل y من H'.

وعليه من أجل المؤثر المقلص الكيفي F من H في H'.
يتحقق الشرط:

$$F^*F \leq I_H \text{ و } FF^* \leq I_{H'}$$

وعليه يكون كل من المؤثرات

$$T = (I_H - F^*F)^{1/2} \ , \ S = (I_{H'} - FF^*)^{1/2} \tag{8.2}$$

مؤثر قرين لنفسه في H و H' على التوالي، عندها يكون

$$FT^2 = F(I_H - F^*F) = F - FF^*F = (I_{H'} - FF^*)F = S^2F.$$

بسهولة باستعمال التراجع نجد أن:

$$F(T^2)^n = (S^2)^nF$$

من أجل $n = 0, 1, 2...$ ومنه نستنتج أن

$$FP(T^2) = P(S^2)F \tag{9.2}$$

من أجل كل كثير حدود $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$.
نختار متتالية كثيرات حدود $P_m(x)$ متقاربة بانتظام على المجال $0 \leq x \leq 1$ نحو الدالة $x^{1/2}$.

من أجل كل مؤثر A قرين لنفسه حيث $m_F = 0$ ، $M_F = 1$ المتتالية $P_m(A)$ متقاربة بانتظام نحو $A^{1/2}$.
نستعمل (2.9) لكثير الحدود المذكور وندخل النهاية عندما $m \to \infty$ نحصل على

$$FT = SF \tag{2.10}$$

العلاقة المشابهة للمؤثر القرين هي:

$$TF^* = F^*S \tag{2.11}$$

لاحظ أيضا أن

$$\|Tx\|^2 = \langle T^2x, x\rangle = \langle x - F^*Fx, x\rangle = \|x\|^2 - \|Fx\|^2 \tag{2.12}$$

ومنه نستنتج أن مجموعة العناصر x من H التي من أجلها $\|Fx\| = \|x\|$ تتطابق مع المجموعة X_1 حيث:

$$X_1 = \{x \in H / Tx = 0\}$$

واضح أن X_1 فراغ جزئي من H.

تعريف 36
المؤثران S, T المعرفان بالصيغة (2.8) تسمى المؤثرات الناقصة للمؤثر المقلص F.

تعريف 37
الفراغان B_- ، B_-^* المعرفان كالتالي:

$$B_- = \overline{TH} = X_1{}^{\perp} \text{و} B_-^* = \overline{SH'} = X_2^{\perp}$$

حيث:

$$X_2 = \{x \in H / Sx = 0\}$$

يسمى الفراغات الناقصة للمؤثر المقلص F.
بعد الفراغين B_- ، B_-^* تسمى الأعداد الناقصة للمؤثر المقلص F.

من (2.10) و (2.11) نستنتج أن

$$FB_- \subset B_-^*, F^*B_-^* \subset B_- \tag{2.13}$$

قضيه 8
إذا كان F من H في H' مقلص فإن

$$B_-^* = \overline{FB_-} \oplus X'_1 \ / X'_1 = \{y : y \in H', F^*y = 0\} \tag{2.14}$$

$$B_- = \overline{F^*B_-^*} \oplus X'_2 \ / X'_2 = \{x : x \in H, Fx = 0\} \tag{2.15}$$

البرهان

نبرهن (14.2)
لاحظ
$$y \in X'_1 \Longrightarrow y = y - FF^*y = (B_-^*)^2 y$$
ومنه يكون:
$$X'_1 \subset SH' \subset \overline{SH'} = B_-^*$$
من ناحية ثانية بما أن

$\langle FTx, y \rangle = \langle Tx, F^*y \rangle = 0$ **من أجل كل** $x \in H, y \in X'_1$

فإن
$$X'_1 \perp FB_-$$
لاحظ أن
$$(z \in B_-^*, z \perp FB_-) \Longrightarrow (F^*z \in F^*B_-^* \subset B_-, F^*z \perp B_-)$$
هذا يعني أن

$F^*z = 0$ أي أن $z \in X'_1$

من ماسبق ينتج الصيغة (14.2). بتغيير الأدوار بين F و F^* نحصل على الصيغة (15.2). □

قضيه 9

المؤثرالمقلص F وقرينه F^* يملكان نفس الشعاع الثابت، أي:
$$Fx = x \Longleftrightarrow F^*x = x$$

البرهان

عرفنا سابقا أنه إذا كان F مقلص فإن F^* كذلك.
نفرض $Fx = x$ لاحظ
$$\langle x, F^*x \rangle = \langle Fx, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$
ومنه
$$\|x - F^*x\|^2 = \|x\|^2 - 2Re\langle x, F^*x \rangle + \|F^*x\| = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|F^*x\|^2 =$$
$$= -\|x\|^2 + \|F^*x\|^2 \leq -\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0$$
هذا يعني $F^*x = x$
و العكس يستنتج من تغيير بين F و F^* □

من بين المؤثرات المقلصة في فراغ هيلبار يوجد صنفين مهمين هما صنف المؤثرات الوحدوية وصنف المؤثرات المقلصة ليست وحدوية بتمام .

تعريف 38

المؤثرالمقلص Fمن H يسمى ليس وحدويا بتمام إذا كان ليس وحدوي لا في H ولا في أي فراغ جزئي من H مخالف للصفر.

نظريه 10

لكل مؤثر مقلص F من H يوجد تحليل عمودي وحيد مرفق به للفراغ H كالتالي:
$H = H_0 \oplus H_1$ حيث H_0 ، H_1 فراغين ثابتين بالنسبة لكل مؤثر من المؤثرين F، F^*.
إقتصار Fعلى H_0 مؤثر وحدوي و إقتصار F على H_1 ليس وحدوي بتمام.
H_0 متكون من العناصر $x \in H$ من أجلها يكون:

$$\|F^n x\| = \|x\| = \|F^{*n} x\| \ (n = 1, 2, ...).$$

عندهاالمؤثر $F_0 = F|_{H_0}$ يسمى الجزء الوحدوي للمؤثر F والمؤثر $F_1 = F|_{H_1}$ الجزء غير الوحدوي بتمام.
التحليل $F = F_0 \oplus F_1$ يسمى التحليل النموذجي لـ F.

البرهان

لاحظ بوضع:

$$F(n) = F^n \quad n \geq 1, F(0) = I$$
$$F(n) = F^{*|n|} \quad (n \leq -1)$$

يكون المؤثر $F(n)$ مقلص من أجل كل عدد صحيح ثابت n وعليه تكون مجموعة الأشعة x من H التي من أجلها يكون

$$\|F(n)x\| = \|x\| \quad n = 0 \pm 1, ...$$

أي الفراغ H_0 يطابق الفراغ الجزئي Y'_n حيث

$$Y'_n = \{x \in H / F(n)h = 0, n = 0 \pm 1, ...\} = H_0$$

ومنه $H_0 = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} Y'_n$ أي أن H_0 فراغ جزئي مغلق من H.
نبرهن أن H_0 ثابت بالنسبة للمؤثر F و F^* من أجل كل x من H_0 لاحظ أن

$$\|F^n F x\| = \|F^{n+1} x\| = \|x\| = \|Fx\| \quad (n = 0, 1, ...),$$

$$\|F^{*n} F x\| = \|F^{*n-1} F^* F x\| = \|F^{*n-1} x\| = \|x\| = \|Fx\| \quad (n = 1, 2, ...)$$

هذا يعني أن $Fx \in H_0$ ومنه الفراغ H_0 ثابت بالنسبة لـ F.
بنفس الطريقة نبرهن أن الفراغ H_0 ثابت بالنسبة لـ F^*.
من ناحية ثانية بوضع $F_0 = F|_{H_0}$ يكون ${F_0}^* = F^*|_{H_0}$ وعليه يكون

$$ {F_0}^* F_0 = F^* F|_{H_0} = I_{H_0}, F_0 {F_0}^* = F F^*|_{H_0} = I_{H_0}$$

هذا يعني أن المؤثر F_0 وحدوي.
نعرف الآن الفراغ H_1 كالتالي:

$$H_1 = H \ominus H_0$$

واضح أن H_1 أيضا ثابت بالنسبة لـ F^*.
نبرهن أن المؤثر $F_1 = F|_{H_1}$ ليس وحدوي بتمام.
بفرض العكس نحصل على فراغ جزئي H_2.
$\{0\} \neq H_2 \subset H_1$ ثابت بالنسبة للمؤثر $F|_{H_2}$ و $F^*|_{H_2}$ والمؤثر $F|_{H_2}$ وحدوي ويحقق $\|F(n)x\| = \|x\|$ من أجل كل x من H_2 ، $(n = 0, \pm 1, ...)$ ومنه ينتج أن $H_2 \subset H_0$. وهذا مناف كون $H_2 \subset H_1 = H \ominus H_0$.
- برهان وحدانية التحليل
نفرض أن $H = H'_0 \oplus H'_1$ تحليل آخر لـ H يحقق شروط النظرية.
بما أنَّ المؤثر $F|_{H'_0}$ وحدوي فإن $\|F(n)x\| = \|x\|$ من أجل كل $x \in H'_0$ ومنه يكون $H'_0 \subset H_0$.
بما أن F على H_0 و H'_0 مؤثر وحدوي .
فإن المؤثر $F|_{H_0 \ominus H'_0}$ يكون وحدوي أيضا .
واضح أن:

$$H_0 \ominus H'_0 \subset H \ominus H'_0 = H'_1$$

بما أن المؤثر $F|_{H'_1}$ ليس وحدوي بتمام فإن $H_0 \ominus H'_0 = \{0\}$ أي $H'_0 = H_0$.
وعليه فالتحليل وحيد. □

6.2 التوسيع المتقايس والوحدوي للمؤثر المقلص

ليكن F، T مؤثرين من $l(H_1)$ ، $l(H_2)$ على التوالي

تعريف 39

المؤثر T يقال أنه توسيع للمؤثر F إذا تحقق:

1. $H_1 \subset H_2$
2. $\forall x, y \in H_1 \longrightarrow \langle F^n x, y\rangle = \langle T^n x, y\rangle, n = 1, 2, ...$

الشرط الثاني يكافئ الشرط

$$F^n x = P_{H_1} T^n x \quad x \in H_1, n = 1, 2, ...$$

حيث P_{H_1} الإسقاط العمودي من H_2 على H_1

تعريف 40

التوسيعان T، S من $l(H_2)$ ، $l(H_3)$ للمؤثر F من $l(H_1)$ يقال أنهما إزمورفيزميان، إذا وجد مؤثر وحدوي A من H_3 على H_2 تحقق:

1. $\forall x \in H_1 \longrightarrow Ax = x$
2. $S = A^{-1}TA$

نظريه 11

كل مؤثر مقلص F في فراغ هيلبار H يملك توسيع تقايسي Vفي فراغ هيلبار $\Re_+$ يحوي H كفراغ جزئي .
هذا التوسيع يعتبر أصغري إذا كان

$$\Re_+ = V_0^{\infty} V^n H. \tag{2.16}$$

هذا التوسيع التقايسي أصغري وحيدا إيزومورفيزميا.
عندها يكون الفراغ Hثابت بالنسبة للمؤثر V^* و

$$FP_+ = P_+V \text{ و } F^* = V^*|_H. \tag{2.17}$$

حيث P_+ إسقاط عمودي من $\Re_+$ على H.
(والرمز $V_0^{\infty} V^n H$ يرمز لأصغر فراغ حاوي لكل الفراغات $V^n H$. $n = 0, 1, ..., \infty$)

البرهان

أنظر المرجع [8]. □

نظريه 12

كل مؤثر مقلص F في فراغ هيلبار H يملك توسيع وحدوي U في فراغ $\Re$ يحوي H كفراغ جزئي .
هذاالتوسيع يكون أصغري عندهايكون:

$$\Re = V_{-\infty}^{\infty} U^n H. \tag{2.18}$$

هذا التوسيع الوحدوي الأصغري وحيدا وإيزومورفيزميا .

البرهان

أنظر المرجع [8]. □

2.7 الدالة المميزة

لتكن $\Theta(\lambda)$ دالة معرفة عن طريق سلسلة صحيحة

$$\Theta(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \Theta_k$$

معاملاتها عبارة عن مؤثرات خطية محدودة من H_1 في H_2 ؛ أي من أجل كل λ تكون $\Theta(\lambda) \in l(H_1, H_2)$ ومتقاربة من أجل $|\lambda| < 1$ إذا كانت

$$\|\Theta(\lambda)\| \leq c < +\infty \quad |\lambda| < 1$$

تسمى $\Theta(\lambda)$ بالدالة التحليلية المحدودة على النطاق

$$D = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$$

ونرمز لها بالرمز $\{H_1, H_2, \Theta(\lambda)\}$

تعريف 41

1. الدالة $\Theta(\lambda)$ التحليلية المحدودة تسمى تحليلية مقلصة إذا كان

$$\|\Theta(\lambda)\| \leq 1 \quad (\lambda \in D)$$

2. الدالتان التحليليتان المقلصتان $\{H_1, H_2, \Theta(\lambda)\}$ و $\{H_3, H_4, \psi(\lambda)\}$ يقال أنهما منطبقتان إذا وجد مؤثر U_1 وحدوي من H_1 على H_3 ومؤثر وحدوي U_2 من H_2 على H_4 تحققان:

$$\psi(\lambda) = U_2 \Theta(\lambda) U_1^{-1} \quad |\lambda| < 1$$

عندها نكتب

$$\{H_1, H_2, \Theta(\lambda)\} \equiv \{H_3, H_4, \psi(\lambda)\}$$

3. الدالة $\Theta(\lambda)$ التحليلية المقلصة تسمى صرفة إذا تحقق

$$\|\Theta(0)x\| \leq \|x\| \quad \forall x \in H \quad (x \neq 0)$$

نظريه 13

إذا كان F من $l(H)$ مقلص فإن الدالة $\Theta_F(\lambda)$ المعرفة كالتالي

$$\Theta_F(\lambda) = [-F + \lambda(I + \lambda S F^*)^{-1} T]|_{B_-} \tag{2.19}$$

حيث T ، S المؤثرات الناقصة المرفقة بـ F، و B_- الفراغ الناقص المرفق بالمؤثر F أي

$$T = (I - F^*F)^{1/2}, \quad S = (I - FF^*)^{1/2}$$

$$B_- = \overline{TH}, B_-^* = \overline{SH}$$

هي دالة تحليلية مقلصة صرفة.

البرهان

لتكن Λ_F لمجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها يكون المؤثر $I-\lambda F^*$ قابل للقلب باستمرار.
من خصائص مجموعة الحالة مؤثر الحالة وباستعمال المساواة في الصيغة (10.2) و (11.2) وباعتبار تعريف $\Theta(\lambda)$ ينتج أن:

1. المجموعة Λ_F مفتوحة وتحوي القرص $D=\{\lambda : |\lambda|<1\}$ والدالة $\Theta_F(\lambda)$ تحليلية عليها.

2. $\Theta_F(\lambda)$ مؤثر من B_- في B_-^* ($B_-^*=\overline{SH}$ الفراغ الناقص) تحقق:

$$\Theta_F(\lambda)T = S[-F+\lambda(I-\lambda F^*)^{-1}(I-F^*F)]$$
$$= S(I-\lambda F^*)^{-1}[-(I-\lambda F^*)F+\lambda(I-F^*F)],$$

أي

$$\Theta_F(\lambda)T = S(I-\lambda F^*)^{-1}(\lambda I-F) \quad (\lambda\in\Lambda_F) \qquad (20.2)$$

بتغيير F مع F^* يكون:

$$\Theta_{F^*}(\mu)S = T(I-\mu F)^{-1}(\mu I-F^*) \quad (\mu\in\Lambda_{F^*}) \qquad (21.2)$$

3.

$$\lambda,\lambda^{-1}\in\Lambda_F \Longrightarrow \Theta_F(\lambda)\Theta_{F^*}(\lambda^{-1})S=S$$
$$\Theta_{F^*}(\lambda^{-1})\Theta_F(\lambda)T=T$$

أي

$$\Theta_{F^*}(\lambda^{-1})=\Theta_F(\lambda)^{-1} \quad \lambda,\lambda^{-1}\in\Lambda_F \qquad (22.2)$$

من ناحية ثانية من أجل كل $\lambda,\mu\in\Lambda_F$ بوضع

$$A(\lambda,\mu)=I-F^*F-T(\Theta_F(\mu))^*\Theta_F(\lambda)T$$

باستعمال (20.2) يكون

$$A(\lambda,\mu)=I-F^*F-(\overline{\mu}I-F^*)(I-\overline{\mu}F)^{-1}(I-FF^*)(I-\lambda F^*)^{-1}(\lambda I-F)$$

لاحظ من أجل كل $\lambda\in\Lambda_F$

$$(I-\lambda F^*)^{-1}(\lambda I-F) = -F+\lambda(I-\lambda F^*)^{-1}(I-F^*F)$$
$$(\lambda I-F)(I-\lambda F^*)^{-1} = -F+\lambda(I-FF^*)(I-\lambda F^*)^{-1}$$

من العلاقات الأخيرة ومن المعادلة $(I-FF^*)F=F(I-F^*F)$ ينتج

$$(I-FF^*)(I-\lambda F^*)^{-1}(\lambda I-F)=(\lambda I-F)(I-\lambda F^*)^{-1}(I-F^*F)$$

ومنه نستنتج

$$A(\lambda,\mu) = [I - (\overline{\mu}I - F^*)(I - \overline{\mu}F)^{-1}(\lambda I - F)(I - \lambda F^*)^{-1}](I - F^*F) =$$
$$= [(I - \lambda F^*)(I - \overline{\mu}F) - (\overline{\mu}I - F^*)(\lambda I - F)](I - \overline{\mu}F)^{-1}(I - \lambda F^*)^{-1}(I - F^*F) =$$
$$= (1 - \lambda\overline{\mu})(I - F^*F)(I - \overline{\mu}F)^{-1}(I - \lambda F^*)^{-1}(I - F^*F)$$

عندها من أجل كل x كيفي من H يكون:

$$\|Tx\|^2 - \langle \Theta_F(\lambda)Tx, \Theta_F(\mu)Tx\rangle = \langle A(\lambda,\mu)x, x\rangle =$$
$$= (I - \lambda\overline{\mu}))\langle (I - \lambda F^*)^{-1}T^2x, (I - \mu F^*)^{-1}T^2x\rangle$$

ومنه نستنتج من أجل كل $f = Tx$ و $\mu \in \Lambda_F$ أن:

$$\langle f, f\rangle - \langle \Theta_F(\lambda)f, \Theta_F(\mu)f\rangle = (I - \lambda\overline{\mu})\langle (I - \lambda F^*)^{-1}Tf, (I - \mu F^*)^{-1}Tf\rangle \qquad (23.2)$$

باعتبارالاستمرارية الصيغة (23.2) تبقى صحيحة .

من أجل كل $f \in B_- = \overline{TH}$ و بوضع $\lambda = \mu$ نحصل على

$$\|f\|^2 - \|\Theta_F(\lambda)f\|^2 = (1 - |\lambda|^2)\|(I - \lambda F^*)^{-1}Tf\|^2 \qquad (24.2)$$

من (24.2) نستنتج مباشرة المتراجحة

$$\|f\|^2\|\Theta_F(\lambda)f\|^2 \geqq 0 \quad f \in B_- \ ,\lambda \in D$$

ومنه يكون $\|\Theta_F(\lambda)\| \leq 1$.

لاحظ من أجل $\lambda = 0$ (24.2) تكتب كالتالي

$$\|f\|^2 - \|\Theta_F(0)f\|^2 = \|Tf\|^2$$

لاحظ من الشرط $Tf = 0$ نستنتج أن العنصر f عمودي على كل عنصر من الشكل Tx حيث $(x \in H)$ أي $f \perp B_-$.

إذا كان $f \in B_-$ فإنه هذا ممكن فقط في حالة $f = 0$ و على هذا الأساس يكون:

$$\|\Theta_F(0)f\| < \|f\| \quad f \in B_-, \quad f \neq 0$$

وبالتالي تكون $\Theta_F(\lambda)$ دالة تحليلية مقلصة صرفة. □

نتيجة 18

$$\|\Theta_F^{-1}(\lambda)\| = \|(I - \overline{\lambda}F)R_\lambda(F)\| \qquad |\lambda| < 1$$

تعريف 42

الدالة التحليلية المقلصة الصرفة $\{B_-, B_-^*, \Theta_F(\lambda)\}$, $\lambda \in D$ تسمى الدالةالمميزة للمؤثرالمقلص F.

حسب (19.2) يكون:

$$\Theta_F(\lambda) = [-F + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n SF^{*n-1}T]|_{B_-} \quad /\lambda \in D \qquad (25.2)$$

حيث السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n SF^{*n-1}T$ متقاربة حسب النظيم.

قضيه 10

المؤثر $\Theta_F(\lambda)$ هو مؤثر وحدوي من B_- على B_-^*

البرهان

من تعريف $\Theta_F(\lambda)$ واضح أن

$$\Theta_{F^*}(\lambda) = (\Theta_F(\lambda))^* \tag{26.2}$$

لاحظ إذا كان $\lambda \in \cap\rho(F)$ و $|\lambda| = 1$ فإن $\lambda = \lambda^{-1} \in \Lambda_F$ ومنه يمكن إستعمال (22.2) و (26.2) نحصل على

$$\Theta_F^{-1}(\lambda) = \Theta_{F^*}(\lambda^{-1}) = \Theta_{F^*}(\overline{\lambda}) = (\Theta_F(\lambda))^*$$

أي المؤثر $\Theta_F(\lambda)$ وحدوي. □

نتيجة 19

إذا كان α قوس من دائرة الوحدة ينتمي إلى مجموعة الحالة للمؤثر F فإن الدالة $\Theta_F(\lambda)$ تحليلية عليه وقيمتها من أجل $\lambda \in \alpha$ تكون مؤثر وحدوي من B_- إلى B_-^*.

قضيه 11

إذا كان F مؤثرا مقلصا فإن المؤثر F_a المعرف كالتالي:

$$F_a = (F - aI)(I - \overline{a}F)^{-1} \quad |a| < 1$$

يكون أيضا مقلصا عندها يكون:

$$\{B_{-a}, B_{-a}^*, \Theta_{F_a}(\lambda)\} \equiv \{B_-, B_-^*, \Theta_F(\frac{\lambda + a}{1 + \overline{a}\lambda})\} \tag{27.2}$$

حيث (B_{-a}, B_{-a}^* الفراغات الناقصة لـ F_a).

البرهان

من تعريف المؤثر F_a نستنتج أن:

$$I - F_a^* F_a = N^*(I - F^*F)N \quad \text{و} \quad I - F_a F_a^* = N(I - FF^*)N^*$$

حيث

$$N = (1 - |a|^2)^{1/2}(I - \overline{a}F)^{-1}$$

وبالتالي

$$\|T_a x\|^2 = \|TNx\|^2 \ , \ \|S_a x\|^2 = \|SN^* x\|^2 \tag{28.2}$$

من أجل كل $x \in H$ و T_a ، S_a المؤثرات الناقصة للمؤثر F_a.
بما أن N و N^* من H في نفسه فإن من العلاقة (28.2) يستنتج وجود مؤثر وحدوي Z للفراغ B_{-a} على

B_- و Z_* مؤثر وحدوي للفراغ B^*_{-a} على B^*_-.
بحيث يكون:

$$ZT_a = TN \text{ و } Z_*T_a^* = SN^* \qquad (29.2)$$

باستخدام الصيغ (20.2) و (29.2) نحصل على

$$Z_*\Theta_{F_a}(\lambda)Z^{-1}T = Z_*\Theta_{F_a}(\lambda)T_aN^{-1} = Z_*T_a^*(I-\lambda F_a^*)^{-1}(\lambda I - F_a)N^{-1} =$$
$$= SN^*(I-\lambda F_a^*)^{-1}(\lambda I - F_a)N^{-1} =$$
$$= S(I-aF^*)^{-1}(I-\lambda F_a^*)^{-1}(\lambda I - F_a)(I-\overline{a}F) =$$
$$= S(I-\mu F^*)^{-1}(\mu I - F)$$

حيث:

$$\mu = \frac{\lambda + a}{1+\overline{a}\lambda}$$

وعليه يكون

$$Z_*\Theta_{F_a}(\lambda)Z^{-1}T = \Theta_F(\mu)T$$

ومنه نستنتج أن:

$$Z_*\Theta_{F_a}(\lambda)Z^{-1} = \Theta_F(\mu)$$

هذا يعني أن:

$$\{B_{-a}, B^*_{-a}, \Theta_{F_a}(\lambda)\} \equiv \{B_-, B^*_-, \Theta_F(\frac{\lambda+a}{1+\overline{a}\lambda})\} \qquad \square$$

قضيه 12
ليكن V_1 و V_2 مؤثري إزاحة من طرف واحد في الفراغ H_1, H_2 على التوالي والفراغات

$$X_1 = H_1 \ominus V_1H_1 \quad X_2 = H_2 \ominus V_2H_2$$

فراغات جزئية مولدة بالنسبة لـ V_1, V_2 على التوالي إذا كان Q مؤثر مقلص من H_1 في H_2 تحقق

$$QV_1 = V_2Q$$

فإنه توجد دالة تحليلية مقلصة $\Theta(\lambda)$ H_2 H_1 تحقق

1. $\Phi_{H_1}Q = Q\Phi_{H_2}$ حيث Φ_{H_1}, Φ_{H_2} تمثيل فوري المعرف بالتعريف (35)
2. يكون $\Theta(\lambda)$ قابل للقلب باستمرار إذا وفقط إذا كان $Q^{-1}\Theta^{-1}$ موجود ويحقق

$$\|Q^{-1}\| \leq k \leq +\infty$$

قضيه 13

إذا كان F مؤثر مقلص ليس وحدوي بتام في H و U توسيعه الوحدوي الأدنى في $\mathbb{R}$ و Ω, Ω_* فراغات معرفة كالتالي:

$$\Omega = \overline{(U-F)H} \quad \text{و} \quad \Omega_* = \overline{(F-UF^*)H}$$

فإنه توجد دالة تحليلية مقلصة صرفة $\{\Omega, \Omega_*, \Theta_\Omega(\lambda)\}$ تحقق

$$\Phi_{\Omega_*} P_{\Omega_*} f = \Theta_\Omega \Phi_\Omega f \quad f \in M(\Omega) \tag{30.2}$$

حيث $\Phi_\Omega, \Phi_{\Omega_*}$ تمثيل فوري للفراغات $M(\Omega), M(\Omega_*)$ على التوالي.
عندها الدالة $\Theta_\Omega(\lambda)$ تطابق الدالة المميزة $\Theta_F(\lambda)$ للمؤثر F.

نظريه 14

إذا كان F مؤثرا مقلصا من H و U توسيعه الوحدوي الأدنى من $\mathbb{R}$ و V توسيعه المتقايس الأدنى من $\mathbb{R}_+$ $(\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_+)$ فإن

$$\mathbb{R} = M(\Omega_*) \oplus \mathbb{R}_\circ$$
$$\mathbb{R}_+ = M_+(\Omega_*) \oplus \mathbb{R}_\circ = H \oplus M_+(\Omega)$$

حيث الرمز $M_+(A), M(A)$ يعني $\oplus_0^{+\infty} U^n A, \oplus_{-\infty}^{+\infty} U^n A$ على التوالي. و

$$\Omega = \overline{(U-F)H}, \Omega_* = \overline{(I-UF^*)H}$$

فراغات جزئية من $\mathbb{R}_+$ تحقق:

$$U^q\Omega \perp U^p\Omega, U^p\Omega_* \perp U^q\Omega_*, V^p\Omega \perp V^q\Omega, V^p\Omega_* \perp V^q\Omega_*$$

والفراغ $\mathbb{R}_\circ$ فراغ جزئي من $\mathbb{R}_+$ من أجله يكون المؤثر $V|_{\mathbb{R}_\circ} \equiv U|_{\mathbb{R}_\circ}$ مؤثر وحدوي.
عندها يكون

$$\Omega \cap \Omega_* = \{0\}, P_{\Omega_*} M_+(\Omega) \subset M_+(\Omega_*)$$

البرهان

أنظر المرجع [8] $\square$

تعريف 43

يعرف الجزء الباقي للتوسيع الوحدوي الأدنى U للمؤثر المتقايس F بأنه المؤثر $U|_{\mathbb{R}_\circ}$ حيث $\mathbb{R}_\circ = \mathbb{R} \ominus M(\Omega_*)$ المعرف في النظرية السابقة.

نتيجة 20

إذا كان U التوسيع الوحدوي الأدنى للمؤثر المقلص F من H فإن

$$P_{\mathbb{R}_\circ} x = \lim_{n \longrightarrow \infty} U^n F^n x$$

أي أن

$$\|P_{\mathbb{R}_\circ} x\| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|F^{*n} x\|$$

نتيجة 21

إذا كان على الأقل نقطة واحدة داخل كرة الوحدة لا تعتبر قيمة ذاتية للمؤثر المقلص F فإن:

$$\overline{P_{\mathbb{R}_\circ} H} = P_{\mathbb{R}_\circ}$$

نتيجة 22

إذا كان F مؤثرا مقلصا و U توسيعه الوحدوي الأدنى

$$Fx \neq 0, \lim_{n \longrightarrow \infty} F^{*n} x \neq 0 \quad (0 \neq x \in H)$$

فإن المؤثر $P_{\mathbb{R}_\circ}|_H$ يكون خطيا ومحدوداً ويوجد $(P_{\mathbb{R}_\circ}|_H)^{-1}$.
عندها يكون

$$(U|_{\mathbb{R}_\circ})^*(P_{\mathbb{R}_\circ}|_H)F^*$$

$$(P_{\mathbb{R}_\circ}|H)^*(U|_{\mathbb{R}_\circ}) = F(P_{\mathbb{R}_\circ})^*$$

عندها يوجد مؤثر S خطي ومحدود من $\mathbb{R}_\circ$ في H حيث S^{-1} موجود من أجله يكون

$$U|_{\mathbb{R}_\circ} = S^{-1}FS$$

الفصل 3

معايير تشابه المؤثر الوحدوي

مقدمه

يتناول هذا الفصل معايير التشابه بالمؤثر الوحدوي وهي عبارة عن ثلاثو معايير أساسية، المعيار الأول على دالته المميزة والثاني على أس المؤثر، والثالث هو معيار الحالة.

1.3 تعريف المؤثرات المشابهة بالمؤثرات الوحدوية

تعريف 44

المؤثران F_1، F_2 من $l(H)$ يقال أنهما متشابهان إذا وجد مؤثر S من $l(H)$ قابل للقلب باستمرار ويحقق:

$$F_2 = S^{-1}F_1S$$

نتيجة 23

المؤثران المتشابهان F_1, F_2 يملكان نفس الطيف أي:

$$\sigma(F_2) = \sigma(F_1)$$

تعريف 45

المؤثران F_1, F_2 من $l(H_1), l(H_2)$ على التوالي يقال أنهما متشابهان وحدويا إذا وجد مؤثر وحدوي S من H_2 على H_1 يحقق:

$$F_1 = S^{-1}F_2S$$

نتيجة 24

F_1, F_2 مؤثرين مقلصين متكافئين وحدويا فإن دالتيهما المميزة متطابقة، أي

$$\Theta_{F_1} = \Theta_{F_2}$$

تعريف 46

المؤثر F من $l(H)$ يقال أنه شبيه بالمؤثر الوحدوي إذا وجد مؤثر وحدوي T ومؤثر S من $l(H)$ قابل للقلب باستمرار وتحقق:

$$F = S^{-1}TS$$

نتيجة 25

حسب نظرية التحليل الطيفي للمؤثر الوحدوي إذا كان المؤثر F شبيه بالمؤثر الوحدوي T أي

$$F = S^{-1}TS$$

فإن

$$E'_\lambda = S^{-1}E_\lambda S \quad \text{حيث} \quad F = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE'_\lambda$$

و E_λ هي الدالة الطيفية للمؤثر T.

2.3 معايير تشابه المؤثر المقلص بالمؤثر الوحدوي

1.2.3 معيار الدالة المميزة

قضيه 14

ليكن $H = H_3 \oplus H_4$ و $H = H_1 \oplus H_2$ تحليليين عموديين للفراغ H.
و P_{H_1} ، P_{H_2} الإسقاط العمودي من H على H_1 على التوالي.
إذا كان

$$\exists(P_{H_1}^{-1}) \in l(H_1, H_3) \quad \text{و} \quad P_{H_1} \in l(H_3, H_1)$$

فإن

$$\exists(P_{H_2}^{-1}) \in l(H_2, H_4) \quad \text{و} \quad P_{H_2} \in l(H_4, H_2)$$

أي أن

$$(P_{H_1}H_3 = H_1, \|P_{H_1}x\| \geq c\|x\|, x \in H_3, c > 0) \Longrightarrow \tag{1.3}$$

$$(P_{H_2}H_4 = H_2, \|P_{H_2}y\| \geq c\|y\|, y \in H_4, c > 0) \tag{2.3}$$

البرهان

نفرض أن

$$\|P_{H_1}x\| \geq c\|x\|$$

بما أن $x = P_{H_1}x + P_{H_2}x$ فإن

$$\|P_{H_1}x\|^2 \geq c^2\|x\|^2 = c^2[\|P_{H_1}x\|^2 + \|P_{H_2}x\|^2]$$

وعليه يكون

$$k^2\|P_{H_1}x\|^2 \geq \|P_{H_2}x\|^2$$

حيث

$$k = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}$$

على هذا الأساس من الصيغة (1.3) نستنتج أن الصيغة

$$F(P_{H_1}x) = P_{H_2}x \quad x \in H_3$$

تعرِّف مؤثرا خطيا محدودا F من H_1 في H_2.
بما أن بيان هذا المؤثر أي المجموعة $\{a + F_a, a \in H_1\}$ متطابقة مع المجموعة $\{P_{H_1}x \oplus P_{H_2}x, x \in H_3\}$ أي مع H_3 ، فإن متممه العمودي أي المجموعة $\{-F^*b \oplus b, b \in H_2\}$ متطابقة مع H_4.
هذا يعني أن $P_{H_2}H_4 = H_2$ و $P_{H_1}y = -F^*P_{H_2}y$ من أجل كل $y \in H_4$ ومنه يكون:

$$\|P_{H_1}y\| \leq k\|P_{H_2}y\|$$

$$\|y\|^2 = \|P_{H_1}y\|^2 + \|P_{H_2}y\|^2 \leq (1+k^2)\|P_{H_1}y\|^2 = \frac{1}{c^2}\|P_{H_2}y\|^2$$

أي أن

$$\|P_{H_2}y\| \geq c\|y\| \quad c > 0, y \in H_2$$

□

قضيه 15
كل مؤثر مقلص F شبيه بالمؤثر الوحدوي يكون شبيها أيضا بالجزء الباقي من توسيعه الوحدوي الأدنى.

البرهان

ليكن F مقلصا في H و U توسيعه الوحدوي الأدنى من $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}_\circ$ فراغ الجزء الباقي من U إلى $U|_{\mathbb{R}_\circ}$ هو الجزء الباقي من U.
عندنا

$$F = S^{-1}US \quad \textbf{حيث} \quad S^{-1}, S \in l(H)$$

في هذه الحالة يكون كل من F^{*-1}, F^{-1} قابلين للقلب باستمرار ومن أجل كل عدد صحيح n يتحقق

$$F^{-n} = S^{-1}U^nS \qquad F^{*-n} = S^*U^nS^{*-1}$$

ومنه

$$\|F^{-n}\| \le k, \quad \|F^{*-n}\| \le k$$

حيث

$$k = \|S\|.\|S^{-1}\| = \|S^*\|.\|S^{*-1}\|$$

بوضع $c = \frac{1}{k}$ نحصل على

$$\|F^nx\| \ge c\|x\|, \|F^{*n}x\| \ge c\|x\| \quad x \in H \tag{3.3}$$

من الصيغة (3.3) وباعتبار النتيجة (20) يكون:

$$\|P_{\mathbb{R}_\circ}\| \ge c\|x\| \quad x \in H \tag{4.3}$$

حيث $P_{\mathbb{R}_\circ}$ الإسقاط العمودي من $\mathbb{R}$ على $\mathbb{R}_\circ$.
بما أن الصفر ليس قيمة ذاتية للمؤثر المقلص فإنه حسب النتيجة (21) يكون:

$$\overline{P_{\mathbb{R}_\circ}H} = \mathbb{R}_\circ$$

من الصيغة (4.3) يكون:

$$P_{\mathbb{R}_\circ}H = \mathbb{R}_\circ \tag{5.3}$$

وبالتالي يكون المؤثر $P_{\mathbb{R}_\circ}|H$ محدود وقابل للقلب باستمرار وكذلك المؤثر $(P_{\mathbb{R}_\circ}|H)^*$.
من الصيغة (3.3) وباعتبار النتيجة (22) يكون:

$$(P_{\mathbb{R}_\circ}|H)^*(U|_{\mathbb{R}_\circ}) = F(P_{\mathbb{R}_\circ}|H)^*$$

من الصيغة الأخيرة يستنتج أن F شبيه بالمؤثر $U|_{\mathbb{R}_\circ}$ أي مع الجزء الباقي من U. □

نظريه 15

المؤثر المقلص F من $l(H)$ يكون شبيها بالمؤثر الوحدوي إذا وفقط إذا وجد المؤثر $((\Theta_F^{-1}(\lambda))$ من أجل كل λ من D $(D = \{\lambda/|\lambda| < 1\})$ يحقق

$$\sup|(\Theta_F^{-1}(\lambda))| < \infty$$

البرهان

حسب نظرية (14) فراغ التمديد التقايسي الأدنى $\mathbb{R}_+$ للمؤثر F يملك التحليل التالي:

$$\mathbb{R}_+ = M_+(\Omega_*) \oplus \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}_+ = M_+(\Omega) + H$$

فإنه من (4.3) و (5.3) وباعتبار القضية (15) يكون:

$$P_{\Omega_*}M_+(\Omega) = M_+(\Omega_*) \quad \|P_{\Omega_*}y\| \geq c\|y\| \quad y \in M_+(\Omega)$$

ومنه يكون المؤثر

$$Q = p_{\Omega_*}|_{M_+(\Omega)}$$

مؤثر مقلص من $M_+(\Omega)$ في $M_+(\Omega_*)$ يحقق:

$$\|Q^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$$

وبالتالي حسب القضية (12) وتكون الدالة التحليلية المقلصة $\{\Omega, \Omega_*, \Theta_\Omega(\lambda)\}$ الموجودة حسب القضية (13) تكون قابلة للقلب باستمرار ويحقق:

$$\|\Theta_\Omega^{-1}(\lambda)\| \leq \frac{1}{c} \quad \lambda \in D$$

باعتبار أن $\Theta_\Omega(\lambda)$ تطابق الدالة المميزة للمؤثر F أي أن $\Theta_F(\lambda)$ فإن:

$$\sup\|(\Theta_F^{-1}(\lambda))\| < \infty \quad \lambda \in D$$

نفرض الآن أن $(\Theta_F(\lambda))^{-1}$ موجود ويحقق:

$$\|\Theta_F^{-1}(\lambda)\| \leq \frac{1}{c} \quad \lambda \in D$$

بما أن الدالة $\{\Omega, \Omega_*, \Theta_\Omega(\lambda)\}$ تطابق $\{B_-, B_{-*}, \Theta_F(\lambda)\}$ ومنه باعتبار الصيغة (30.2) المعرفة بـ $\Theta_\Omega(\lambda)$ والقضية (12) نستنتج أن

$$P_{\Omega_*}M_+(\Omega) = M_+(\Omega_*) \quad \|P_{\Omega_*}y\| \geq c\|y\| \quad y \in M_+(\Omega)$$

من الصيغة الأخيرة وباعتبار تحليل الفراغ $\mathbb{R}_+$ أي

$$\mathbb{R}_+ = M_+(\Omega_*) \oplus \mathbb{R} \quad \mathbb{R}_+ = M_+(\Omega) \oplus H$$

ومنه حسب القضية (14) يكون

$$\|P_{\mathbb{R}_\circ}\| \geq c\|x\| \quad x \in H$$

$$P_{\mathbb{R}_\circ}H = \mathbb{R}_\circ$$

هذا يعني أن المؤثر $P_{\mathbb{R}_\circ}|_H$ قابل للقلب باستمرار ويحقق

$$\|(P_{\mathbb{R}_\circ}|_H)^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$$

من النتيجة (22) عندنا

$$(P_{\mathbb{R}_\circ}|_H)^*(U|_{\mathbb{R}_\circ}) = F(P_{\mathbb{R}_\circ}|_H)^*$$

بما أن $(P_{\mathbb{R}_\circ}|_H)^*$ قابل للقلب باستمرار فإن المؤثر F شبيه بالمؤثر $(U|_{\mathbb{R}_\circ})$ أي الجزء الباقي للمؤثر U هو مؤثر وحدوي. □

2.2.3 معيار أس المؤثر

ليكن F مؤثرا مقلصا من $l(H)$ وقابل للقلب باستمرار.
لاحظ أن متتالية الأشكال التربيعية

$$\|F^n f\|^2 = \langle F^{*n}F^n f, f\rangle \quad n \geq 1 \quad f \in H$$

رتيبة ومحدودة، ومنه متتالية المؤثرات $(F^{*n}F^n)_{n\geq 1}$ متقاربة بقوة أي يوجد مؤثر T_F يحقق:

$$T_F = s - \lim_{n\longrightarrow\infty} F^{*n}F^n$$

المؤثر T_f يحقق مايلي

$$T_F \in l(H), 0 \leq T_F \leq I$$
$$F^* T_F F = T_F$$

من ناحية ثانية بوضع

$$X = \{f \in H \ \ / \sup_{n\geq 1}\|F^{-n}f\| < \infty\}$$

تكون متتالية الأشكال التربيعية $n \geq 1 \quad \langle F^{*-n}F^{-n}f, f\rangle$ رتيبة ومحدودة من من أجل كل f من X ومنه متتالية المؤثرات $(F^{*-n}F^{-n})_{n\geq 1}$ متقاربة بقوة على X أي يوجد مؤثر S_F يحقق:

$$S_F f = \lim_{n\longrightarrow\infty} F^{*-n}F^{-n}f \qquad /f \in X$$

نتيجة 26

1. S_F محدود يكافئ $X = H$
2. $S_F > I \quad , F^{-1}X = X \quad , F^{*-1}S_F F^{-1} = S_F$

نظريه 16

إذا كان F مؤثرا مقلصا من H، فإن الإثباتات التالية متكافئة.

1. F مشابه بالمؤثر الوحدوي.
2. F قابل للقلب باستمرار و
$$\lim_{n\longrightarrow 0}\|F^{-n}\| < \infty$$
3. $T_F > I$
4. F قابل للقلب باستمرار و $S_F \in l(H)$

البرهان

واضح أن $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 4$

نبرهن $4 \Longrightarrow 1$

بما أن $S_F \in l(H)$ فإنه من النتيجة (26) رقم (1) الصيغة $S_F^{1\backslash 2} F S_F^{-1\backslash 2}$ معرفة جيدا وتعرف مؤثر وحدوي U أي أن F شبيه بالمؤثر الوحدوي U.

نبرهن $2 \Longrightarrow 3$:

من (2) نستنتج أن $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|F^{*-n}\| < \infty$ ومنه حسب النتيجة (26) رقم (2) يكون $S_{F^*} \in l(H)$ حيث

$$S_{F^*} = s - \lim_{n\longrightarrow\infty} F^n F^{*-n}$$

واضح أن

$$T_F S_{F^*} = S_{F^*} T_F = I$$

ومنه يكون المؤثر T_F قابل للقلب باستمرار وبالتالي يكون $T_F > I$.

نبرهن $3 \Longrightarrow 1$

من (3) وباعتبار النتيجة (26) رقم (2) يكون المؤثر $(T_F)^{1\backslash 2} F (T_F)^{-1\backslash 2}$ معرف جيد ويعرف مؤثر وحدوي U_F أي أن F شبيه بالمؤثر الوحدوي U_F. □

نتيجة 27

المؤثر المقلص من H يكون شبيه بالمؤثر الوحدوي إذا وفقط إذا كان قابل للقلب باستمرار ويحقق

$$\sup\|F^n\| < \infty \qquad n = 0 \pm 1, ...$$

3.2.3 معيار الحالة

معلوم أنه من خصائص الدالة المميزة و حسب النتيجة (18) ، إذا كان F مؤثرا مقلصا من H فإن:

$$\|\Theta_F^{-1}(\lambda)\| = \|(I - \overline{\lambda} F) R_\lambda(F)\| \qquad |\lambda| < 1$$

من الصيغة الأخيرة يكون

$$\sup_{|\lambda|<1}\|\Theta_F^{-1}(\lambda)\| = \sup_{|\lambda|<1}\|(I - \overline{\lambda} F) R_\lambda(F)\| \tag{6.3}$$

قضيه 16

يكون المؤثر المقلص F من H شبيه بالمؤثر الوحدوي إذا وفقط إذا كان طيفه وحدوي أي

$$\sigma(F) \subset \{\lambda \quad / |\lambda| = 1\}$$

و

$$\sup_{|\lambda|<1}(1 - |\lambda|)\|R_\lambda(F)\| < \infty$$

البرهان

لاحظ أن

$$\{\sup_{|\lambda|<1}(1-|\lambda|)\|R_\lambda(F)\|<\infty\} \Longleftrightarrow \sup_{|\lambda|<1}\|(I-\overline{\lambda}F)R_\lambda(F)\|<\infty$$

ومنه حسب الصيغة (6.3) يكون

$$\sup_{|\lambda|<1}(1-|\lambda|)\|R_\lambda(F)\|<\infty$$

وبالتالي حسب معيار الدالة المميزة يكون F شبيه بالمؤثر الوحدوي. □

نظريه 17

يكون المؤثر المقلص F من H شبيه بالمؤثر الوحدوي إذا وفقط إذا كان طيفه وحدوي ويحقق:

$$\sup_{|\lambda|>1}(|\lambda|^2-1)\int_0^{2\pi}\|(F-\lambda I)^{-1}x\|^2 d\Theta \le c\|x\|^2 \qquad (7.3)$$

$$\sup_{|\lambda|>1}(1-|\lambda|^{-2})\int_0^{2\pi}\|(F^*-\lambda^{-1}I)^{-1}x\|^2 d\Theta \le c\|x\|^2 \qquad (8.3)$$

حيث

$$x\in H \quad \lambda=|\lambda|e^{i\Theta} \quad |\lambda|>1$$

البرهان

نفرض أن F مؤثر مقلص طيفه وحدوي وشبيه بالمؤثر الوحدوي U أي يوجد مؤثر S من $l(H)$ حيث $S^{-1}\in l(H)$ ويحقق

$$\|F\|\le 1 \quad F=S^{-1}US \qquad (9.3)$$

من الصيغة (9.3) لبرهان الصيغة (7.3) يكفي برهانها من أجل المؤثر الوحدوي U أي نبرهن

$$\sup_{|\lambda|>1}(|\lambda|^2-1)\int_0^{2\pi}\|(U-\lambda I)^{-1}x\|^2 d\Theta \le c\|x\|^2 \qquad (10.3)$$

حسب تحليلية الحالة يكون

$$(|\lambda|^2-1)\int_0^{2\pi}\|R_\lambda(U)x\|^2 d\Theta = (|\lambda|^2-1)\int_0^{2\pi}\|\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-(n+1)}U^n x\|^2 d\Theta =$$

$$= (|\lambda|^2 - 1) \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \langle U^n x, U^m x\rangle |\lambda|^{-(n+m+2)e^{i(m-n)\Theta}} d\Theta =$$

$$= (|\lambda|^2 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \|U^n x\|^2 |\lambda|^{-(2n+2)} 2\pi = 2\pi . \|U\|^2$$

ومنه الصيغة (10.3) صحيحة.
من الصيغة (10.3) وباعتبار الصيغة (9.3) يكون:

$$(|\lambda|^2 - 1)\int_0^{2\pi} \|(F - \lambda I)^{-1} x\|^2 d\Theta \le 2\pi \|x\|^2 \qquad x \in H \qquad |\lambda| > 1$$

وبالتالي الصيغة (7.3) صحيحة.
من ناحية ثانية عندنا

$$F^* = (S^{-1}US)^* = S^* U^* S^{-1*} = S^* U^{-1} S^{-1*} \tag{11.3}$$

من الصيغة (10.3) نستنتج أن

$$\sup_{|\lambda|>1} (1 - |\lambda|^{-2}) \int_0^{2\pi} \|(U^{-1} - \lambda^{-1} I)^{-1} x\|^2 d\Theta \le c\|x\|^2 \tag{12.3}$$

من الصيغة (12.3) والصيغة (11.3) نستنتج أن

$$\sup_{|\lambda|>1} (1 - |\lambda|^{-2}) \int_0^{2\pi} \|(F^* - \lambda^{-1} I)^{-1} x\|^2 d\Theta \le c\|x\|^2$$

أي أن الصيغة (8.3) صحيحة.
نفرض الآن أن الصيغة (7.3) و (8.3) محققة.
حسب نظرية التحليل الطيفي وتعريف دالة المؤثر يكون

$$F^n = -\frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^n (F - \lambda I)^{-1} d_\lambda + \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^{-n-2} (F - \frac{1}{\lambda})^{-1} d\lambda$$

حيث التكامل مأخوذ في الإتجاه الموجب على دائرة نصف قطرها أكبر تماما من الواحد.
لاحظ أن

$$(-2\pi i)\langle F^n x, y\rangle = \oint \lambda^n [\langle (F - \lambda)^{-1} x, y\rangle - \langle (F - \frac{1}{\overline{\lambda}})^{-1} x, y\rangle] d\lambda +$$

$$+ \oint \lambda^n \langle (F - \frac{1}{\overline{\lambda}})^{-1} x, y\rangle d\lambda + \oint (\overline{\lambda})^{-n-2} \langle (F - \frac{1}{\overline{\lambda}})^{-1} x, y\rangle d\overline{\lambda} =$$

$$= \oint \lambda^n(\frac{1}{\overline{\lambda}} - \lambda)(\langle (F-\lambda)^{-1}x, (F^* - \frac{1}{\lambda})^{-1}y\rangle)d\lambda +$$
$$+ \oint \langle (F - \frac{1}{\overline{\lambda}})^{-1}x, y\rangle(|\lambda|^{2n+2} - 1)\lambda(\overline{\lambda})^{-(n+1)}d\lambda$$

ومنه باعتبار متراجحة شوارتز

$$2\pi|\langle F^n x, y\rangle| \leq |\lambda|^n(|\lambda|^2 - 1)(\int_0^{2\pi} \|(F-\lambda I)^{-1}x\|^2 d\Theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times(\int_0^{2\pi} \|(F^* - \frac{1}{\lambda})^{-1}y\|^2 d\Theta)^{\frac{1}{2}} + |(|\lambda|^{2n+2} - 1)||\lambda|^{-(n+1)}\|y\|$$

$$(\int_0^{2\pi} \|(F - \frac{1}{\overline{\lambda}})^{-1}x\|^2 d\Theta)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi} \leq$$

$$\leq |\lambda|^{n+1}c\|x\|\|y\| + |(|\lambda|^{2n+2} - 1)|\lambda|^{-n}|\|y\|\sqrt{2\pi c}\|x\|(|\lambda|^2 - 1)^{-1\backslash 2}$$

لاحظ من أجل كل n ثابت الطرف الثاني من المتراجحة يؤول إلى الصفر عندما $|\lambda| \longrightarrow 1$ وبالتالي يكون:

$$2\pi|\langle F^n x, y\rangle| \leq c\|x\|\|y\|$$

أي أن $n = 0, \pm 1, ...$ $\|F^n\| \leq \frac{c}{2\pi}$ هذا حسب معيار أس المؤثر يعني أن F شبيه بالمؤثر الوحدوي. □

نتيجة 28

حتى يكون المؤثر $F \in l(H)$ وطيفه وحدوي شبيه بالمؤثر الوحدوي يكفي أن يتحقق:

$$\sup_{|\lambda|>1}(|\lambda|^2 - 1)\int_0^{2\pi} \|(F - \lambda I)^{-1}x\|^2 d\Theta \leq c\|x\|^2$$

$$\sup_{|\lambda|>1}(1 - |\lambda|^{-2})\int_0^{2\pi} \|(F^* - \lambda^{-1})^{-1}x\|^2 d\Theta \leq c\|x\|^2$$

خاتمة عامة

يندرج محتوى هذه المذكرة في العمل على توضيح معايير تشابه المؤثرات الخطية المحدودة بالمؤثر الوحدوي التي قسمناها إلى ثلاثة معايير كالتالي:
معيار الدالة المميزة -معيار أس المؤثر-معيار الحالة.
ولما كان هذا الموضوع واسعا إشترطنا أن يكون المؤثر مقلصا.
لهذا الغرض جمعنا أهم المقالات التي تناولت هذا الموضوع بأوجهه المختلفة وبعض المراجع من التحليل الدالي ونظرية المؤثرات .

و تكمن أهمية المؤثر الوحدوي في تسهيل الدراسة الطيفية لأن المؤثر المشابه بالوحدي يحمل نفس الصفات الطيفية للمؤثر الوحدوي.
هذه الصفات تجعل من دراسة قابلية الحل للمعادلات سهلة وميسّرة.
وهذه المعايير كلها عبارة عن شروط لازمة وكافية لتشابه المؤثر المقلص بالمؤثر الوحدوي والملاحظ أن المعيار الأخير أي معيار الحالة ونخص بالذكر المعيار التكاملي الخاص بالحالة تبين من برهان النظرية الخاصة به أنه يعتبر شرطا كافيا لتشابه مؤثر خطي محدود غير مقلص بالمؤثر الوحدوي وبالتالي يكون منطلق لبحث آخر خاص بتشابه مؤثر غير مقلص بالمؤثر الوحدوي.

المصادر

المصادر باللغة العربية

[1] د.أ.كولموغوروف، س. فومين، مبادئ في نظرية التوابع و في التحليل التابعي، - تعريب أبو بكرخالد سعد الله -د.م.ج.1987.

[2] إيروين كريزيك ، المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته-ترجمة د.خضر حامد الأحمد- ،الطبعة الرابعة -دمشق-2004-2005 م.

[3] محمد حازي، المختصر في الطبولوجيا، ديوان المطبوعات الجامعية، 02- 1992.

[4] مصطفى . عسيلة، دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي، د.م.ج-الجزائر- 2009.

[5] مصطفى . عسيلة، دروس في المؤثرات ونظرية الأطياف، الجزء الأول ، ا لمؤثرات المحدودة ، UKMO , 2013.

المصادر باللغة الأجنبية

[6] Angus. E. Taylor ; Introduction to Functional, Neu York, 1958.

[7] Banach. S ; Theory of Linear Operators, North-Holland, 1987.

[8] Béla Sz.Nagy and Ciprian Foias ; Harmonique Analysis of operators on Hilbert space, Szeged and Bucharest, 1969.

[9] Brezis H ; Analyse fonctionnelle, Dunod, 1999.

[10] B.Sz.-Nagy ; On uniformly bounded linear transformotions in Hilbert space. Acta sci.Math.(szeged, Hung.), V.11 :3, P.152-157, 1947.

[11] Dunford N., Schwartz J.T. ; Linear Operators, Part I : General Theory, Wiley-Interscience, New York,1958.

[12] I.Ts. Gokhberg, M. G. Krein ; Description of contraction operators which are similar to unitary operators. Funkts.Anal. Prilozh., V.1 :1, P. 38-60, 1967.

[13] Gohberg I., Gohberg S.,Kaashoek M.A. ; Classes of Linear Operators, Part I, Birkhhauser Verlag, 1990.

[14] Gohberg I., Gohberg S.,Kaashoek M.A. ; Classes of Linear Operators, Part II, Birkhauser Verlag, 1990.

[15] Goldberg S. ; Unbounded Linear Operators, North-Holland, McGraw-Hill, Book Company, 1966.

[16] Kato T. ; Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, 1966.

[17] Muller V. ; Spectral Theory of Linear Operators, Birkhauser-Verlag, 2007.

[18] Naboko. S.N ; Conditions for similarity to unitary and self-adjoint operators.Funkts. Anal. Prilozh, V. 18 :1, P. 16-27, 1984.

[19] Porter D.B., Stirling D.S.G. ; Integral Equations a Practical Treatment from Spectral Theory to Applications, Cambridge University Press, 1990.

[20] Riesz F., Nagy B.S ; Leçons d analyse fonctionnelle, Budapest, 1952.

[21] Rudin W. ; Functional analysis, McGraw-Hill, Book Company, 1973.

[22] Taylor A.E, Milman V, Tsolomitis A ; Introduction to Functional Analysis NewYork,1958.

[23] Walter H, Marcel L, Corina R ; Introduction à l analyse fonctionnelle, Les Presses de l Université du Québéc, 1981.

[24] Yosida K. ; Functional Analysis, Springer-Verlag, 1965.

المؤثرات المشابهة للمؤثر الوحدوي

الملخص

تكمن أهمية هذا العمل في توضيح معايير تشابه مؤثرخطي محدود بالمؤثر الوحدوي، هذه المعايير عبارة عن شروط وضعت على كل من أس المؤثر، دالته المميزة، حالته.
الهدف هو تبسيط حلول المعادلات الدالية التي معاملاتها عبارة عن مؤثر أو مؤثرات غير وحدوية لكنها مشابهةبالمؤثر الوحدوي.
أساس هذا العمل هو توضيح ماورد في المقالات الموجودة في قائمة المراجع تحت رقم [10] ، [12]، [18] و بالأخص المقال [18].

الكلمات المفتاحية: المؤثر الخطي المحدود، المؤثر الوحدوي، المؤثر المقلص، الدالة المميزة، تشابه المؤثرات.

The operators similar to the unitary operator

Abstract

This work is important in clarifying the criteria of similarity between a bounded linear operator and a unitary operator. These criteria are a from of conditions placed on the characteristic function , the exponent as well on the resolvent of the operator.
The objective of this work is to simplify the solution of functional equations whose coefficients are non unitary operators but similar to a unitary operator.
In fact, this work is mainly based on what is reported on the criteria of similarity in the articles listed in the references section under NO.[10], [12], [18], in particular article [18].

key words : bounded linear operator, unitary operator, contraction operator, characteristic function, operators similarity.