UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences

de la Matière

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

N° d'ordre :

N° de série :

MASTER

Spécialité : Mathématiques
Option : **Analyse**

Par : Sebbar Aboubaker

Thème

Résolution d'un problème de réaction diffusion par la méthode des approximations successives par des équations intégrales

Soutenu publiquement le : **08/06/2014**

Devant le jury composé de :

Dr Acila Mustafa	**M.C(B)**	**Président**	Université KASDI Merbah- Ouargla
Dr Amara Guerfi	**M.C(A)**	**Examinateur**	Universié KASDI Merbah- Ouargla
Dr Said Mohamed Said	**M.C (A)**	**Encadreur**	Université KASDI Merbah-Ouargla

L'année universitaire : 2013 / 2014

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur du mémoire Le docteur : **SAID.M.Saïd**
M.de conference **à l'univercité de Kasdi Merbah -Ouargla** , qui m'a proposé
ce sujet et qui m'a beaucoup aidé durant la préparation de ce mémoire.
Je remercie les nembres du jury:
Dr : Acila Mustafa . Université KASDI MERBAH.d'avoir accepté la président
du jury
Dr : Amara Guerfi . Université KASDI MERBAH .pour avoir accepté d'examiner
ce travail.
Je remercie mes collegues qui m'ont apporté le soutien suffisant.

Table des matières

Notation

Dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathbb{N}$: corps des naturels
- $\mathbb{R}$: corps des réels
- $[0\ ,T]$: l'intervalle fermé $0 \leq t \leq T$.
- Ω : un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Γ : la frontière topologique de Ω.
- Σ : la frontière laterele de $\Omega \times]0\ ,T[$.
- D_f :domaine de définition de f.
- $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$: tronsformation de fourier de la fonction f.
- $\mathcal{F}^{-1}$: transformation de fourier inverse.
- $(f * g)$: produit convolution de f par g .
- $\|x\|$: la norme de x.
- $\|u\|_{L^\infty(I)} = \sup\limits_{t \in I} |u(t)|$
- $|.|$: la norme associée aux produits scalaires.
- Δ : opérateur de Laplace $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
- $\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \cdots\cdot, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$, le gradient de la fonction u en $x \in \mathbb{R}^n$.

  (les dérivées sont prises au sens des distributions).
- $D(\Omega)$: désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω
- $L^\infty(\Omega) := \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \sup\limits_{t \in \Omega} |u(t)| < +\infty \right\}$
- $L^1([0\ ,T])$:est l'espace des (classes des) fonctions essentiellement bornées

  $\|f\|_{L^1([0\ ,\ T])} = \left(\int_0^T |f|\, dx \right)$

Introduction générale

Les équations de réaction-diffusion du type:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\lambda u\,(1-u) \tag{1}$$

Ont été introduites à la fin des années 30 dans des travaux de Fisher (1937) [5] et Kolmogorov , Petrovsky et Piskunov (1938) [6] , pour des modèles de génétique des populations . Les non-linéarités f considérées étaient du type:
$f(u)=\lambda u(1-u)$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ (loi logistique) .

Si le cas de l'équation homogène (1) , où les coeffcients de diffusion et de réaction sont constants en espace , a donné lieu à de nombreuses études , la question de la propagation de fronts dans le cas des extensions hétérogènes de (1) n'a été envisagée que récemment.
Ici les coeffcients de diffusion et de réaction varient avec les hétérogénéités du milieu. Dans ce cas , l'un des modèles les plus simples est le patch model , dans lequel l'environnement est supposé homogène par morceaux , induisant une équation à coeffcients constants par morceaux . Ce type de modèle a été introduit par Shigesada , Kawasaki et Teramoto [11] pour étudier des phénomènes d'invasion biologique dans des environnements périodiques , comme il est décrit dans l'ouvrage [7].

Nous allons donner dans ce mémoire un aperçu sur quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites de réaction-diffusion non linéaire qui jouent actuellement un grand rôle en analyse numérique.
L'idée commune à ces méthodes "**des approximations successives**" :
il s'agit , d'utiliser le théorème des approximations successives pour la résolution d'un problème donné à la résolution d'un certain nombre de problèmes beaucoup plus simples . Les étapes de base dans la résolution du problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f & \text{dans } \Sigma=\Omega\times]0,T[\\ u\,(x,0)=u_0\,(x) \qquad x\in\Omega\subseteq\mathbb{R} & \text{(condition initialle)} \\ u\,(x,t)\ =0 \qquad on\ \ \Gamma=\partial\Omega & \text{(condition aux limite)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta}\ =0 \qquad on \qquad \Gamma=\partial\Omega & \text{(condition aux limite)} \end{cases} \tag{2}$$

Soit:

(i) transformation de Fourier.

(ii) théorème des approximations successives .

pour certaines conditions sur f et on a les cas particuliers suivants :

1) $f = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

On obtient dans ce cas un équation de la chaleur homogène avec donnée initiale .

2) $f = f(x, t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

On obtient dans ce cas un équation de la chaleur non homogène avec donnée initiale .

3) $f{=}f(u(x, t))$: (f dépend de u)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) & & \text{dans} \quad \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \subseteq \mathbb{R} & \text{(condition initialle)} \\ u(x, t) = 0 \quad on \quad \Gamma = \partial\Omega & & \text{(condition aux limite)} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad on \quad \Gamma = \partial\Omega & & \text{(condition aux limite)} \end{cases} \tag{5}$$

On considere le cas où:

$$f(u) = \lambda u(1 - u) \text{ et } \lambda > 0$$

Dans notre travail , nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème de réaction diffusion (5) , et ceci par la **méthode des approximations successives** , cee méthode étudiée par **J.Lions [2]** .

Cette méthode est basée sur la **théorème des approximations successives** qui donne les étapes suivantes :

(i) l'existence et l'unicité d'un point fixe .

(ii) la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

(iii) la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Ce théorème est d'une importance capitale; Ce qui permet d'étudier entre autres les équations matricielles , les équation différentielles , . . .

Ce mémoire contient une introduction et quatre chapitres.
nous donnons dans le premier chapitre quelques notations , définitions , propositions , propriètès de l'analyse fonctionnelle et transformation de Fourier et on va étudier la méthode des approximations successives , qui nous permet de mieux comprendre le contenu de ce travail.

Dans le deuxième chapitre nous utilisons la transformation de Fourier pour transformer le problème non linéaire en équation intégrale.

Dans le toisième chapitre nous propose d'étudier l'existence et l'unicité de la solution. Nous allons d'abord démontrer l'unicité par la méthode classique (Lemme de Gronwall). pour démontrer l'existence en utilisant un résultat , du problème (5) transformé en équation intégrale par la méthode des approximations successives.

Enfin pour valider notre travail, nous allons faire une application numérique qui sera le sujet du dernier chapitre .

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et de la transformation de Fourier

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces L^p

Définition 1.1.1

Soit $1 \leq p < +\infty$ *. on dit qu'une suite des fonctions* (f_n) *de* L^p *est p-équi-intégrable si elle est vérifiée les deux propriétés suivantes:*

(*i*) $\forall \varepsilon > 0$ *, il existe* $k \subset \Omega$ *de mesure finie tel que* $\forall n \geq 1$;*on a:*

$$\int_{\Omega \setminus k} |f_n|^p \, dx < \varepsilon$$

(*ii*) $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \ \delta > 0$, *tel que* , $\forall n \geq 1$ *et* $\forall A \subset \Omega$ *tel que* $|A| < \delta$,

On a:

$$\int_A |f_n|^p \, dx < \varepsilon$$

$L^p(\Omega)$ *est muni de la norme :*

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

si : $p = \infty$ *on définit l'espace* $L^\infty(\Omega)$ *par:*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u \ mesurable \ , \ et \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\}$$

$L^{\infty}(\Omega)$ *est muni de la norme :*

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| \tag{1.2}$$

Lemme 1.1.1 ***:(Lemme de Gronwall)***

Soit $f \in L^1([0\ ,T])$ *une fonction positive ,*

$\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $g\ ,h$ *sont deux fonction continées et positives sur l'intervalle* $[0\ ,T]$

si h *satisfait:*

$$h(t) \leqslant g(t) + \int_0^t f(s)h(s)ds \qquad \forall t \in [0\ ,T]$$

alors:

$$h(t) \leqslant g(t)\exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \tag{1.3}$$

Remarque 1.1.1 *: Si pour tout* $t \in]0\ ,T[$ *, et si:*

$$h^2(t) \leqslant c^2 + \int_0^t f(s)h(s)ds$$

alors:

$$h(t) \leqslant c + \frac{1}{2}\int_0^t f(s)ds \tag{1.4}$$

1.1.2 Méthode des approximations successives

Introduction:

Il s'agit d'un procédé plus général pour trouver les racines d'une équation non linéaire , Dans cette partie f désigne une fonction définie sur une partie non vide de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et I désigne un intervalle non vide inclus dans D_f où: D_f est le domaine de définition de f .

Définition 1.1.2 *: Soient* I *un intervalle fermé de* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *et* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite récurrente est tout suite définie par:*

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.5}$$

Où f *est une application réelle continue sur* I *.*

Définition 1.1.3 *: On dit que f est une application* ***contractante*** *ou une* ***contraction*** *sur I si:*

(i) I est stable par f, i.e: $f(I) \subset I$

(ii) il existe $k \in [0\ ,1[$ tel que:

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y| \qquad , \quad \forall (x, y) \in I \times I \tag{1.6}$$

Le réel k est appelé ***rapport de la contraction.***

Remarque 1.1.2 *:*

Si f est contractante sur l'intervalle I alors f est continue sur I.

Définition 1.1.4 *: Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\ ,b]$.*

On dit que f est lipschitzienne sur l'intervalle $[a\ ,b]$,de constante de lipschitz L si :

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \quad , \quad \forall (x, y) \in\ [a\ ,b]$$

Définition 1.1.5 *: Un point fixe d'une fonction f sur l'intervalle I est une valeur $x \in I$ telle que:*

$$f(x) = x$$

Théorème 1.1.1 ***(théorème des approximations successives)***

Soit f une fonction définie sur une partie non vide de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et soit I un intervalle non vide fermé inclus dans D_f (domaine de définition de f). Si f est contractante sur I alors:

(1) l' équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I ;

(2) pour tout $u_0 \in I$:

- *la suite $(u_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ converge et a pour limite α .*
- *On a les estimations d'erreur suivantes:*

$$(i) \quad |u_n - \alpha| \leq k^n\,|u_0 - \alpha| \quad , \quad \forall n \geq 1 \tag{1.7}$$

$$(ii) \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|u_1 - u_0| \quad , \quad \forall n \geq 1 \tag{1.8}$$

Remarque 1.1.3 *: L'estimation d'erreur* (1.7) *montre que plus k est petit , plus la suite $(u_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ converge rapidement vers α.*

Remarque 1.1.4 *:Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$, il se peut que les premiers termes $u_0 \cdots u_{n_0-1}$ n'appartiennent pas à I et un u_{n_0} appartienne à I , alors pour tout $n \geq n_0$; $u_n \in I$ et on applique le théorème des approximations successives à la suite tronquée $(u_n)_{n\geq n_0}$.*

Démonstration. (théorème des approximations successives)
On va donner la démonstration dans le cas où $I = [a\ , b]$ et on procédera en plusieurs étapes.

Première étape: Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $I = [a\ , b]$

1)Existence d'une solution :

Considérons la fonction réelle définie sur l'intervalle $[a\ , b]$ par:

$$g(x) = f(x) - x$$

la fonction g est continue sur l'intervalle $[a\ , b]$

En effet :

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad \text{car} \quad f(a) \in [a, b]$$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0 \quad \text{car} \quad f(b) \in [a, b]$$

d'ou:

$$g(a)\ g(b) \leq 0$$

donc il existe $\alpha \in [a\ , b]$ tel que : $g(\alpha) = 0$ c'est- à-dire $f(\alpha) = \alpha$

Ceci prouve que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution $\alpha \in I$

2)Unicité :

Supposons que l'équation $f(x) = x$ admet une autre solution $\beta \in I$

D'aprés contraction de f , nous avons:

$$|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| \leq k\,|\alpha - \beta|$$

donc:

$$(1-k)\,|\alpha-\beta| \leq 0$$

Ce qui , puisque $(1-k)>0$, implique que $\alpha=\beta$

Deuxième étape : Montrons que la suite $(u_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ converge et a pour limite α.

Pour cela , on va utiliser le résultat classique suivant sur les suites :

"S'il existe une suite $(v_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ telle qu'à partir d'un certain rang p on ait

$|u_n-\alpha| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ converge et a pour limite α"

Nous avons:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : |u_n-\alpha| = |f(u_{n-1}) - f(\alpha)| \leq k\,|u_{n-1}-\alpha|$$

En itérant n fois ce qui précède , on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : |u_n-\alpha| \leq k^n\,|u_0-\alpha|$$

Puisque $k \in [0\ ,1[$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} k^n = 0$

donc:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \alpha$$

Troisième étape: (estimations d'erreur)

La démonstration est assez technique , on va donc la faire en **trois sous- étapes.**

Première sous- étape :

Montrons par récurrence que , pour tout entier naturel m , nous avons:

$$|u_{m+1}-u_m| \leq k^m\,|u_1-u_0| \tag{1.9}$$

Tout d'abord , nous avons :

– L'inégalité (1.9) est vraie au rang 0 car:

$$|u_1-u_0| \leq k^0\,|u_1-u_0|$$

– L'inégalité (1.9) est vraie au rang 1 car:

$$|u_2-u_1| = |f(u_1)-f(u_0)| \leq k\,|u_1-u_0|$$

(Puisque f est une **contraction** de rapport k).

Montrons que l'inégalité (1.9)**:**

Hypothése de récurrence : l'inégalité (1.9) est vraie au rang $(m-1)$,

c'est- à-dire:

$$|u_m - u_{m-1}| \leq k^{m-1} |u_1 - u_0|$$

Au rang m , nous avons:

$$|u_{m+1} - u_m| = |f(u_m) - f(u_{m-1})| \leq k |u_m - u_{m-1}|$$

car f est une contraction de rapport k . De l'hypothése de récurrence , on déduit que:

$$|u_{m+1} - u_m| = |f(u_m) - f(u_{m-1})| \leq k k^{m-1} |u_1 - u_0| = k^m |u_1 - u_0|$$

alors:

$$|u_{m+1} - u_m| \leq k^m |u_1 - u_0|$$

Deuxième sous-étape: (**Etablissons l'inégalité suivante**)

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall p \in \mathbb{N} \ , \ |u_{n+p} - u_n| \leq k^n \frac{1-k^p}{1-k} |u_1 - u_0| \tag{1.10}$$

Montrons que l'inégalité (1.10) :

D'après l'inégalité de triangulaire

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \cdots + |u_{n+2} - u_{n+1}| + |u_{n+1} - u_n|$$

En vertu l'inégalité (1.9) , on a:

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \left(k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots k^n\right) |u_1 - u_0|$$

Or:

$$k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots k^n = k^n \left(1 + k + \cdots + k^{p-1}\right) = k^n \frac{1-k^p}{1-k}$$

alors:

$$|u_{n+p} - u_n| \leq k^n \frac{1-k^p}{1-k} |u_1 - u_0|$$

Troisième sous-étape : (L'estimation de l'erreur).

L'inégalité (1.10) peut s'écrire sous la forme:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \forall p \in \mathbb{N} \ , |u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| - \frac{k^{n+p}}{1-k} |u_1 - u_0| \tag{1.11}$$

Fixons n et faisons tendre p vers $+\infty$ dans (1.11) , on obtient

$$\lim_{p\to+\infty} |u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| - \lim_{p\to+\infty} k^p \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$$

Par ailleurs , en vertu de la continuité de la fonction valeur absolue , on a

$$\lim_{p\to+\infty} |u_{n+p} - u_n| = \left| \lim_{p\to+\infty} u_{n+p} - u_n \right|$$

d'où:

$$\left| \lim_{p\to+\infty} u_{n+p} - u_n \right| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| - \lim_{p\to+\infty} k^p \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$$

Puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n+p} = \alpha$ **(d'après la Deuxième étape)** et $\lim\limits_{p\to+\infty} k^p = 0$,
On a finalement:

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| \cdot$$

■

Lemme 1.1.2 *Si f est dérivable sur $[a\ ,b]$ et si sa dérivée est bornée par L sur $[a\ ,b]$ alors f est lipschitzienne sur $[a\ ,b]$, de constante de lipschitz L.*

1.2 Transformation de Fourier

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 *: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est localement intégrable sur I , si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I ,C'est à dire , f est localement intégrable sur I , si quelque soit $[a\ ,b] \subset I$ alors:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \textit{existe} \tag{1.12}$$

Définition 1.2.2 *: Soit f une fonction de la variable x de $\mathbb{R}$; On dit que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ si:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \ \textit{est convergente}$$

Notation 1.2.1 *:*

$$f \xrightarrow{\text{transformation de Fourier}} \mathcal{F}$$

On dit que f a une transformation de Fourier au point $\omega \in \mathbb{R}$ si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx \quad \text{converge.} \tag{1.13}$$

Définition 1.2.3 *: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, on définie la transformée de Fourier de f la fonction notée : $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que:*

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx \tag{1.14}$$

Définition 1.2.4 *: Soit $\widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$, la tronsformation inverse de Fourier de $\widehat{f}(\omega)$ est dèfinie par la formule:*

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f}\right)(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega \tag{1.15}$$

On dit que $f(x)$ est la transformation de Fourier inverse de $\widehat{f}(\omega)$

Définition 1.2.5 ***(Produit de convolution) :***

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, On appelle produit de convolution de f par g la fonction notée:

$$(f * g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

définie par:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx \tag{1.16}$$

avec l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx$ *est convergente.*

Quelques propriètès de la transformation de Fourier:

Soient f et g deux fonctions bornées , absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ et continues par morceaux sur chaque intervalle bornée. Alors la produit de convolution $f * g$ est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, admet une transformée de Fourier et on a les propriétés fondamentales suivant:

1) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$

2) $\mathcal{F}^{-1}(f * g) = \mathcal{F}^{-1}(f)\,\mathcal{F}^{-1}(g)$

3) $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$

4) $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$

Démonstration. Voir [3] . ■

1.2.2 Condition suffisante d'existence de la Transformée de Fourier

Théorème 1.2.1 *: Soit f une fonction de la variable x de $\mathbb{R}$, si f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ ($i \cdot e$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente) alors:*

(i) Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx \quad \textit{est définit sur } \mathbb{R}$$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$

Preuve. *Les résultats sont immediats puisque: $|f(x)\,e^{-i\omega x}| = |f(x)|$ et par hypothèse l'intégrale impropre: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente.* ■

1.2.3 Transformation de Fourier de la Dérivation

Proposition 1.2.1 *: Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, on suppose que la fonction f admet une dérivée $f' = \frac{d}{dt}f$ continue par morceau sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ et que $f(\pm\infty) = 0$, on a alors:*

f' admet un transformation de Fourier et la relation opérationnelle suivante est valable:

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = (i\omega)\,\mathcal{F}(f)(\omega)$$

Démonstration. on a:

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f'(x)\,dx$$

alors:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f'(x)\,dx = \left[\left[e^{-i\omega x} f(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + (i\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx\right]$$

comme $f(\pm\infty) = 0$, on aura:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f^{\backprime}(x)\, dx = (i\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx$$

alors:

$$\mathcal{F}(f^{\backprime})(\omega) = (i\omega)\, \mathcal{F}(f)(\omega)$$

■

1.2.4 Généralisation de la dérivation de la transformation de Fourier

Proposition 1.2.2 *: Soit $f(x)$ une fonction localement intégrable et absulement intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f^{(k)}(\omega)$ admet un transformation de Fourier et la relation opérationnelle suivante est valable:*

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(\omega) = (i\omega)^k\, \mathcal{F}(f)(\omega) \tag{1.17}$$

Démonstration. On a :

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f^{(k)}(x)\, dx$$

intégration par partie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f^{(k)}(x)\, dx = \left[e^{-i\omega x} f^{(k-1)}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} (i\omega) f^{(k-1)}(x)\, dx$$

alors:

si f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, admettant des dérivées continues presqu'à l'ordre $(k-1)$ et une dérivée d'ordre k continue par morceaux sur chaque intervalle borné de $\mathbb{R}$ et telle que:

$$f(\pm\infty) = f^{\backprime}(\pm\infty) = \cdots = f^{(k-1)}(\pm\infty) = 0$$

alors:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f^{(k)}(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)\, e^{-i\omega x} f^{(k-1)}(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^2\, e^{-i\omega x} f^{(k-2)}(x)\, dx \\
&= \vdots \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^k\, e^{-i\omega x} f(x)\, dx
\end{aligned}$$

On a oura:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f^{(k)}(x)\,dx = (i\omega)^k \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx \right)$$

alors:

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(\omega) = (i\omega)^k \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot$$

■

Chapitre 2

Transformation du problème non linéaire en équation intégrale

2.1 E'quation de la chaleur

2.1.1 Introduction

L'équation de la chaleur en une dimension est donnée par l'équation aux derive partielle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \;\text{ et } t > 0 \tag{2.1}$$

u est une fonction inconnue réelle de deux variables x et t . L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique .

Ici , $u = u(x,t)$ est la température dans un conducteur d'une dimension . La valeur de $u(x,t)$ d´epend du temps $t \geq 0$ et de la position x . En général , la valeur de $u(x,t)$ en $t = 0$ est donnée . C'est l'équation de la chaleur qui modélise des phénoménes d'évolution diffusion de chaleur , répartition de substances chimiques , ...

2.1.2 Solution fondamentale

Proposition 2.1.1 *:*

La solution fondamentale à l'équation de la chaleur (2.1) *est* *donée par:*

$$\phi(t,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right) & t>0 \quad et\; x\in\mathbb{R}\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases} \tag{2.2}$$

Démonstration. :

La transformée de Fourier de l'équation de la chaleur par rapport à la variable x est une éqation différentielle séparable en t avec paramètre ω .
On applique la transformation de Fourier à l'équation de la chaleur (2.1) :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x\ ,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x\ ,t)\right)_{(\omega)}=\mathcal{F}(0)_{(\omega)}=0$$

On a:

$$\mathcal{F}(u(x,t))_{(\omega)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}u(x,t)\,dx$$

d'après la proposition (1.17) , on trouve:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)_{(\omega)}=(i\omega)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}u(x,t)\,dx\right)$$

alors:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u(x,t))_{(\omega)}+\omega^2\mathcal{F}(u(x,t))_{(\omega)}=0$$

ce qui implique :

$$\partial_t\widehat{u}(\omega,t)+\omega^2\widehat{u}(\omega\ ,t)=(\widehat{u}(\omega,t))'+\omega^2\widehat{u}(\omega,t)=0$$

Ainsi:

$$\frac{(\widehat{u}(\omega,t))'}{\widehat{u}(\omega,t)}=-\omega^2$$

On obtien:

$$\ln\widehat{u}(\omega,t)=-\omega^2 t$$

c'est à dire:

$$\widehat{u}(\omega,t)=e^{-\omega^2 t}$$

On applique la transformation de Fourier inverse sur :

$$\widehat{u}(\omega,t)=e^{-\omega^2 t}$$

où $\widehat{u}(\omega,t)$ est la transformation de Fourier de $u(t,x)$

alors:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{u}(\omega,t)\right)=\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2 t}\right)$$

On obtient:

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}e^{-\omega^2 t}d\omega$$

On pose:

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}e^{-\omega^2 t}d\omega$$

intégration $\widehat{f}(\omega)$ par partie**:**

$$\widehat{f}(\omega)=\left[\frac{1}{ix}e^{i\omega x}e^{-\omega^2 t}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{ix}e^{i\omega x}\left(-2t\omega\right)e^{-\omega^2 t}d\omega$$

alors:

$$\widehat{f}(\omega)=-\frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}\left(-2\omega t\right)e^{-\omega^2 t}d\omega=-\frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}\left(-2\omega t\right)e^{-\omega^2 t}d\omega$$

donc:

$$\widehat{f}(\omega)=-\frac{2t}{x}\int_{-\infty}^{+\infty}(i\omega)\,e^{i\omega x}e^{-\omega^2 t}d\omega=-\frac{2t}{x}\left(\widehat{f}(\omega)\right)'$$

c'est à dire:

$$\frac{\left(\widehat{f}(\omega)\right)'}{\widehat{f}(\omega)}=-\frac{x}{2t}$$

Ainsi:

$$\ln\widehat{f}(\omega)=-\frac{x^2}{4t}+k_1$$

donc:

$$\widehat{f}(\omega)=k\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$$

telle que :

$$k=\widehat{f}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i0x}e^{-\omega^2 t}d\omega$$

alors:

$$k=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2 t}d\omega$$

pour calcule l'ntégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2 t}d\omega$, on pose:

$$\omega=r\cos\theta\quad\text{et}\quad y=r\sin\theta$$

d'où::

$$\omega^2 + y^2 = r^2 \text{ et } \ d\omega dy = rdrd\theta$$

alors:

$$k^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^{2t}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(\omega^2+y^2\right)} d\omega dy$$

c'est à dire:

$$k^2 = \int_{r=0}^{r=+\infty} \left[\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right) re^{-tr^2} \right] dr = \left[-\frac{2\pi}{2t} e^{-tr^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{t}$$

donc:

$$\widehat{f}(\omega) = k \exp\left(-\frac{x^2}{4t} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t} \right)$$

c'est à dire:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t} \right)$$

ce qui implique:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t} \right) \qquad , \quad \forall t > 0$$

Finalement:

$$\phi(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t} \right) & t > \ 0 \\ 0 & t \leqslant 0 \end{cases}$$

■

Lemme 2.1.1 *:Pour tout* $t > 0$ *, alors:*

$$\int_{\mathbb{R}} \ \phi(t,x)\, dx = 1 \tag{2.3}$$

Démonstration. on a:

$$\int_{\mathbb{R}} \ \phi(t,x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t} \right) dx$$

On pose:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t} \right) dx$$

écrivons:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t} \right) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4t} \right) dy$$

alors:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{4t}\right) dxdy$$

d'après la démonstration du Proposition (2.1.1) , on a:

$$I^2 = \int_{r=0}^{r=+\infty} \left[\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta\right) re^{-\frac{r^2}{4t}}\right] dr = \left[-4\pi te^{-\frac{r^2}{4t}}\right]_0^{+\infty} = 4\pi t$$

On obtien:

$$I = 2\sqrt{\pi t}$$

alors :

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot 2\sqrt{\pi t} = 1$$

donc:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t,x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) dx = 1$$

d'où on déduit:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(t,x)\, dx = 1$$

■

2.2 Solution de l'équation de la chaleur homogène avec donnée initiale

2.2.1 Problème homogène avec donnée initiale non homogène

Proposition 2.2.1

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t > 0 \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x-y)\, g(y)\, dy \quad , \ \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ t > 0 \tag{2.5}$$

On verifie que l'équation (2.5) solution du problème (2.4)

Démonstration. Pour réesoudre le problèeme (2.4) nous allons utiliser la transformation de Fourier .

On applique la transformation de Fourier sur le problèeme (2.4) , on trouve:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\omega)} = \mathcal{F}(0)_{\omega} = 0 \\ \mathcal{F}(u(0,x))_{(\omega)} = \mathcal{F}(g(x))_{(\omega)} \end{cases}$$

ce qui implique:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)_{(\omega)} - \mathcal{F}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\omega)} = 0 \\ \mathcal{F}(u(0,x))_{(\omega)} = \mathcal{F}(g(x))_{(\omega)} \end{cases}$$

c'est à dire:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u(x,t))_{(\omega)} + \omega^2 \mathcal{F}(u(x,t))_{(\omega)} = 0 \\ \mathcal{F}(u(0,x))_{(\omega)} = \mathcal{F}(g(x))_{(\omega)} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\omega,t) + \omega^2 \widehat{u}(\omega,t) = 0 \\ \widehat{u}(\omega,0) = \widehat{g}(\omega) \end{cases}$$

alors:

$$\frac{\left(\widehat{u}(\omega,t)\right)'}{\widehat{u}(\omega,t)} = -\omega^2$$

Ainsi:

$$\ln \widehat{u}(\omega,t) = -\omega^2 t + c_1$$

Or:

$$\widehat{u}(\omega,t) = ce^{-\omega^2 t} \text{ et } \quad \widehat{u}(0,t) = \widehat{g}(\omega) = c$$

donc:

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{g}(\omega)\, e^{-\omega^2 t} \tag{2.6}$$

On applique la transformation de Fourier inverse sur l'equation (2.6) , on trouve:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{u}(\omega,t)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{g}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}\right)$$

On obtient:

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{g}(\omega)\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2 t}\right)$$

Par définition du produit de convolution , on a :

$$(f * g)(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x - y) g(y) dy$$

On oura:

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}(\omega)) = g(y)$$

avec:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2 t}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \phi(t, x)$$

E effet:

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \phi(t, x - y) dy$$

c'est à dire:

$$u(t, x) = \phi(t, x) * g(y)$$

alors:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy$$

donc on peut écrire :

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy$$

Finalement:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t, x - y) g(y) dy \cdot$$

■

Commentaires:

Nous en déduisons cinq propriétés fondamentales de la solution $u(x\ , t)$ de l'équation de la chaleur:

1. La solution en un point particulier dépend de la condition initiale en tout point du domaine . Le domaine de dépendance de la solution s'étend au domaine Ω tout entier.
2. Une perturbation en un point quelconque de la solution initiale influence immédiatement à la valeur en tout point de la solution u . On dit que la vitesse de propagation est infinie.
3. La valeur ponctuelle de la solution décroit au cours du temps en $\frac{1}{\sqrt{t}}$

4. le temps t doit etre positif , Le phénomène est irréversible .
5. L'équation de la chaleur ou de diffusion a un effet régularisant . La donnée initiale peut etre discontinue, pour tout t strictement positif la solution est une fonction continue et dérivable de x

Remarque 2.2.1 *: Si la fonction g est borné , on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$ alors:*

$$\inf_{\mathbb{R}^n} g(x) \leq u(t\ ,x) \sup_{\mathbb{R}^n} g(x)$$

Théorème 2.2.1 *:*

Si la fonction $g \in C(\mathbb{R} \cap L^\infty)$ alors l'équation (2.5) vérifie:

(i) $u(x,t)$ *est de clase* C^∞ *dans* $\mathbb{R} \times]0, \infty[$

(ii)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \ln\limits_{(t\ ,\ x) \longrightarrow (0\ ,\ x_0)} u(t,x) = g(x_0) \quad , \quad x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(iii) Si $g(x) \geq 0$, $y \neq 0$ *alors:* $\forall t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$; $u(t\ ,x) \geq 0$

Démonstration.

(i) On a la fonction :

$$\phi(t\ ,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad , \ t > \ 0$$

est uniformément dérivable , avec uniformèment bornnées et uniformèment intégrables de tous ordres sur $\mathbb{R} \times [\delta\ , +\infty[$

pour tout $\delta > 0$, nous voyons que $u(t,x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times]0, \infty[$

de plus:

$$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} [(\phi_t - \Delta_x \phi)(x-y,t)]\, g(y)\, dy = 0$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ puisque $\phi(t\ ,x)$ est une solution fondamentale de l'équation de la chaleur (2.1) .

(ii) **On monter que:**

$$\lim_{(t,x) \longrightarrow (0,x_0)} u(t,x) = g(x_0)$$

Soit maintenant $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta > 0$ telle que:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \|y - x_0\| \ < \delta \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

et soit $x \in \mathbb{R}$ telle que:

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\delta}{2}$$

Nous avons :

$$|u(t,x) - g(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x-y)(g(x) - g(x_0))\, dy \right|$$

$$\leq \underbrace{\int_{B_{\delta(x_0)}} \phi(t, x-y) \ |g(y) - g(x_0)|\, dy}_{I} + \underbrace{\int_{\mathbb{R} \setminus B_{\delta}(x_0)} \phi(t, x-y)\, |g(y) - g(x_0)|\, dy}_{J}$$

alors:

$$I = \int_{B_{\delta(x_0)}} \phi(t, x-y)\, |g(y) - g(x_0)|\, dy$$

donc d'après lemme (2.3) , on obtient :

$$\int_{B_{\delta(x_0)}} \phi(t, x-y)\, |g(y) - g(x_0)|\, dy \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \phi(x-y)\, dt = \varepsilon$$

de plus si :

$$\|x - x_0\| \leqslant \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad \|y - x_0\| \geq \delta$$

alors:

$$\|y - x_0\| \leqslant \|y - x\| + \frac{\delta}{2}$$

donc:

$$\|y - x_0\| \leqslant \|y - x\| + \frac{1}{2}\|y - x_0\|$$

et donc:

$$\|y - x\| \geq \frac{1}{2}\|y - x_0\|$$

ce qui donne:

$$J = \int_{\mathbb{R} \setminus B_{\delta}(x_0)} \phi(t, x-y)\, |g(y) - g(x_0)|\, dy$$

alors:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus B_{\delta}(x_0)} \phi(t, x-y)\, |g(y) - g(x_0)|\, dy \leqslant 2\|g\|_{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus B_{\delta}(x_0)} \phi(t, x-y)\, dy$$

On a:

$$2\left\|g\right\|_{\infty}\int_{\mathbb{R}\diagdown B_{\delta}(x_0)}\phi\left(t,x-y\right)dy=\frac{c}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}\diagdown B_{\delta}(x_0)}e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}dy$$

donc:

$$\int_{\mathbb{R}\diagdown B_{\delta}(x_0)}\phi\left(t,x-y\right)\left|g\left(y\right)-g\left(x_0\right)\right|dy\leqslant\frac{c}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}\diagdown B_{\delta}(x_0)}e^{-\frac{\|y-x_0\|^2}{4t}}dy$$

On pose: $y-x_0=r$, alors:

$$\frac{c}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}\diagdown B_{\delta}(x_0)}e^{-\frac{\|y-x_0\|^2}{4t}}dy\leqslant\frac{c}{\sqrt{t}}\int_{\delta}^{\infty}e^{-\frac{r^2}{4t}}dr\quad\longrightarrow 0\quad\text{pour : }\ t\longrightarrow 0^+$$

et donc , si:

$$\left\|x-x_0\right\|\leqslant\frac{\delta}{2}$$

avec $t>0$ est " assez petit"

c'est à dire:

$$\left|u\left(t,x\right)-g\left(x_0\right)\right|\ <2\varepsilon$$

Ainsi:

$$\left|u\left(t,x\right)-g\left(x_0\right)\right|=0$$

(iii) On oura:

$$\phi\left(t,x\right)\geq 0\quad\text{et}\quad g\left(x\right)\geq 0$$

On obtient:

$$\left(\phi\left(t,x\right)*g\left(y\right)\right)\geq 0$$

Finalement:

$$u\left(t,x\right)\geq 0$$

■

Remarque 2.2.2 : *Si la fonction g est continue à support compact positive et non identiquement nulle , alors:*

$$u\left(t,x\right)=\frac{1}{\left(4\pi t\right)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}g\left(y\right)dy$$

est en fait strictement positive pour tous les points $x\in\mathbb{R}^n$ et $t>0$. Nous interprétons cette observation en disant que , pour l'équation de la chaleur , la vitesse de propagation est infinie . Si la température initiale est positive et strictement positive quelque part , alors la température plus tard sera toujours strictement positive , quel que soit l'endroit òu on se trouve.

2.3 Solution de l'équation de la chaleur non homogène avec donnée initiale

2.3.1 Problème non homogène avec donnée initiale homogène

Proposition 2.3.1 *: Soit le problème suivant:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \\ u(0,x) \ = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) f(s,y) \, dyds \tag{2.8}$$

On verifie que l'équation (2.8) *solution du problème* (2.7)

Démonstration.

On applique la transformation de Fourier sur le probème (2.7) conduit l'équation différentiale suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\omega,t) - (i\omega)^2 \widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega,t) \\ \widehat{u}(0,\omega) = 0 \end{cases}$$

On cherche la solution par la méthode de la varition de la constante: alors on cherche une solution de la forme suivant:

$$\widehat{u}(\omega,t) = c(\omega,t) e^{-\omega^2 t} \tag{2.9}$$

On obtien:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\omega,t) = \frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t) e^{-\omega^2 t} - \omega^2 c(\omega,t) e^{-\omega^2 t}$$

On oura:

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\omega,t) + \omega^2 \widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega,t)$$

alors:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t) e^{-\omega^2 t} - \omega^2 c(\omega,t) e^{-\omega^2 t} + \omega^2 \widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega,t)$$

donc:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t) e^{-\omega^2 t} - \omega^2 c(\omega,t) e^{-\omega^2 t} + \omega^2 c(\omega,t) e^{-\omega^2 t} = \widehat{f}(\omega,t)$$

ce qui implique:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)\,e^{-\omega^2 t}=\widehat{f}(\omega,t)$$

c'est à dire:

$$c(\omega,t)=\int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{f}(\omega,s)\,ds \quad ,t\geq 0$$

On a:

$$\widehat{u}(\omega,t)=c(\omega,t)\,e^{-\omega^2 t}$$

alors:

$$\widehat{u}(\omega,t)=\int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{f}(\omega,s)\,e^{-\omega^2 t}ds$$

c'est à dire:

$$\widehat{u}(\omega,t)=\int_0^t \widehat{f}(\omega,s)\,e^{-\omega^2(t-s)}ds$$

On applique la transformation de Fourier inverse sur l'équation suivant:

$$\widehat{u}(\omega,t)=\int_0^t \widehat{f}(\omega,s)\,e^{-\omega^2(t-s)}ds$$

On obtien:

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}(\omega,t))=\int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f}(\omega,s)\,e^{-\omega^2(t-s)}\right)ds$$

alors:

$$u(t,x)=\int_0^t\left[\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f}(\omega,s)\right)*\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2(t-s)}\right)\right]ds$$

telle que:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f}(\omega,s)\right)=f(s,x)$$

avec:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2(t-s)}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}=\phi(t-s,x)$$

On utilise le produit de convolution suivant:

$$(\phi*f)(t-s,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t-s,x-y)\,f(s,y)\,dy$$

d'où on déduit:

$$u(t,x)=\int_0^t\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(s,y)\,\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}}dy\right]ds$$

Finalement:

$$u(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\phi(t-s,x-y)\,f(s,y)\,dyds\cdot$$

■

Théorème 2.3.1 : *Si $f \in C_0^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, alors la fonction suivant:*

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) f(s,y)\, dyds \qquad x \in \mathbb{R}; t > 0.$$

vérifie:

$(i) \quad u(t,x) \in C_0^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

$$(ii) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \\ \lim\limits_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = 0 \qquad\qquad x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2.3.2 Problème non homogène avec donnée initiale non homogène

Proposition 2.3.2 : *Soit le problème non homogène suivant:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \\ u(0,x) \ = g(x) \end{cases} \tag{2.10}$$

Il est facile de voir que la solution $u(x,t)$ de problème (2.10) *est donnée par:*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t, x-y) g(y)\, dy \ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) f(s,y)\, dyds \tag{2.11}$$

Démonstration.

On applique la transformation de Fourier sur le problèeme (2.10)

On obtien:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\omega,t) + \omega^2 \widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega,t) \\ \widehat{u}(0,\omega) = \widehat{g}(\omega) \end{cases}$$

On pose : $\quad y(t) = \widehat{u}(\omega,t)$, alors:

$$\begin{cases} y`(t) + \omega^2 y(t) = \widehat{f}(t) \\ y(0) = \widehat{g}(\omega) \end{cases} \tag{2.12}$$

On cherche la solution de l'équation (2.12) par la méthode de variation des constantes:

$$y`(t) + \omega^2 y(t) = \widehat{f}(t)$$

et on pose: $\ y(t) = X(t)\, V(t)$, c'est à dire:

$$y`(t) = X\frac{dV}{dt} + V\frac{dX}{dt}$$

alors:

$$y`(t) + \omega^2 y(t) = \widehat{f}(t)$$

c'est à dire:

$$\left(X\frac{dV}{dt} + V\frac{dX}{dt}\right) + \omega^2 X(t) V(t) = \widehat{f}(t)$$

donc:

$$X(t)\left(\frac{dV}{dt} + \omega^2 V(t)\right) + V(t)\frac{dX}{dt} - \widehat{f}(t) = 0$$

On obtien:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} + \omega^2 V(t) = 0 \\ V(t)\dfrac{dX}{dt} = \widehat{f}(t) \end{cases}$$

On oura:

$$\frac{dV}{dt} + \omega^2 V(t) = 0$$

alors:

$$\frac{dV}{dt} = -\omega^2 V(t) \qquad \text{implique} \qquad \frac{dV}{V} = -\omega^2 dt$$

Ainsi:

$$V(t) = e^{-\omega^2 t}$$

On a:

$$V(t)\frac{dX}{dt} = \widehat{f}(t)$$

On obtien:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\widehat{f}(t)}{V(t)} \qquad \text{implique} \qquad dX = \frac{\widehat{f}(t)}{V(t)}dt$$

On déduit que :

$$dX = e^{\omega^2 t}\widehat{f}(t)\,dt$$

écrivons:

$$X(t) = c + \int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{f}(s)\,ds$$

On a: $y(t) = X(t)V(t)$, on trouve que:

$$y(t) = e^{-\omega^2 t}\left(c + \int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{f}(s)\,ds\right)$$

avec: $y(0) = c = \widehat{g}(\omega)$, c'est à dire:

$$y(t) = e^{-\omega^2 t}\left(\widehat{g}(\omega) + \int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{f}(s)\,ds\right)$$

donc on peut écrire:

$$y(t) = \widehat{g}(\omega)\,e^{-\omega^2 t} + \int_0^t e^{-\omega^2(t-s)}\widehat{f}(s)\,ds$$

On oura: $y(t) = \widehat{u}(\omega, t)$

alors:

$$\widehat{u}(\omega, t) \;= \widehat{g}(\omega)\,e^{-\omega^2 t} + \int_0^t e^{-\omega^2(t-s)}\widehat{f}(s)\,ds \tag{2.13}$$

On applique la transformation de Fourier inverse sur l'équation (2.13) , on obtien:

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{g}(\omega)\,e^{-\omega^2 t}\right) + \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2(t-s)}\widehat{f}(s)\right)ds$$

c'est à dire:

$$u(t,x) = \left[\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}(\omega)) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2 t}\right)\right] + \int_0^t \left[\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2(t-s)}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f}(s)\right)\right] ds$$

On utilise la produi de convolution , on obtien: :

$$\left[\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}(\omega)) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2 t}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t, x-y)\,g(y)\,dy$$

On déduit que :

$$\int_0^t \left[\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2(t-s)}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f}(s)\right)\right] ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y)\,f(s,y)\,dyds$$

Finalement:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t, x-y)\,g(y)\,dy \;+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y)\,f(s,y)\,dyds$$

■

2.4 Transformée problème de réaction diffusion en equation intégrale

2.4.1 Introduction:

Les équations intégrales ont un caractère fort diférent des équations différentielles

que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes physiques (par exemple de diffusion). La principale source d'équations de ce type est l'étude du transfert d'énergie par radiation. A la diférence du transfert radiatif, les phénomènes de radiation ne peuvent pas être décrits à l'aide d'équations mettant en jeu un simple champ scalaire .
Les lois de conservations deviennent alors plus complexes et ne peuvent s'exprimer que sous formes d'intégrales étendues à toutes la surface considérée .

Proposition 2.4.1 *:*

Soit le problème de réaction diffusion suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u\,(1-u) & , \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \ et\ \lambda > 0 \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) & , \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.14}$$

$$u\,(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\,(t, x-y)\, u_0\,(y)\, dy \ + \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi\,(t-s, x-y)\, u\,(s,y)\,(1-u\,(s,y))\, dyds \tag{2.15}$$

On verifie que l'équation (2.15) *est un équation intégrale du problème* (2.14) .

Démonstration.

On a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) \end{cases} \tag{2.16}$$

$$Hu_0\,(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\,(t, x-y)\, u_0\,(y)\, dy \tag{2.17}$$

l'équation (2.17) solution du problème (2.16) (d'aprés la proposition (2.2.1))
alors , on cherche que la fonction $Ku(x,t)$ solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u\,(1-u) \\ u\,(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

On applique la transformation de Fourier sur le problème (2.18) , on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\widehat{u}\,(\omega,t) + \omega^2 \widehat{u}\,(\omega,t) = \lambda \widehat{u}\,(\omega,t)\,(1-\widehat{u}\,(\omega,t)) \\ \widehat{u}\,(0,\omega) = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

On cherche une solution du problème (2.19) sous la forme:

$$\widehat{u}\,(\omega,t) = c(\omega,t)e^{-\omega^2 t} \tag{2.20}$$

alors:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\omega,t) = \frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)\, e^{-\omega^2 t} - \omega^2 c(\omega,t)\, e^{-\omega^2 t}$$

Ainsi:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)\, e^{-\omega^2 t} - \omega^2 c(\omega,t)\, e^{-\omega^2 t} + \omega^2 \widehat{u}(\omega,t) = \lambda \widehat{u}(\omega,t)\left(1-\widehat{u}(\omega,t)\right)$$

implique:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)\, e^{-\omega^2 t} = \lambda \widehat{u}(\omega,t)\left(1-\widehat{u}(\omega,t)\right)$$

c'est à dire:

$$c(\omega,t) = \lambda \int_0^t e^{\omega^2 s} \widehat{u}(\omega,s)\left(1-\widehat{u}(\omega,s)\right) ds$$

ce qui donne:

$$\widehat{u}(\omega,t) = \lambda \int_0^t e^{\omega^2 s} \widehat{u}(\omega,s)\left(1-\widehat{u}(\omega,s)\right) e^{-\omega^2 t} ds$$

On obtien:

$$\widehat{u}(\omega,t) = \lambda \int_0^t e^{-\omega^2 (t-s)} \widehat{u}(\omega,s)\left(1-\widehat{u}(\omega,s)\right) ds \tag{2.21}$$

On applique la transformation de Fourier inverse sur l'équation (2.21)

ce qui donne:

$$Ku(x,t) = \lambda \int_0^t \left[\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2(t-s)}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{u}(\omega,s)\left(1-\widehat{u}(\omega,s)\right)\right)\right] ds$$

telle que:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2(t-s)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} = \phi(t-s,x)$$

avec:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{u}(\omega,s)\left(1-\widehat{u}(\omega,s)\right)\right) = u(s,x)\left(1-u(s,x)\right)$$

On utilise le produit de convolution suivant :

$$(\phi * f)(t-s,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t-s,x-y)\, f(s,y)\, dy$$

alors:

$$Ku(x,t) = \lambda \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}} u(s,y)\left(1-u(s,y)\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} dy\right] ds$$

On obtien:

$$Ku\left(x,t\right)=\lambda\int_{0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\phi\left(t-s,x-y\right)u\left(s,y\right)\left(1-u\left(s,y\right)\right)dyds \tag{2.22}$$

Donc , l'équation intégrale du problème (2.14) donnée par:

$$u\left(t,x\right)=\int_{\mathbb{R}^{n}}\phi\left(t,x-y\right)u_{0}\left(y\right)dy\ +\lambda\int_{0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\phi\left(t-s,x-y\right)u\left(s,y\right)\left(1-u\left(s,y\right)\right)dyds$$

On a finalement:

$$u\left(t,x\right)=Hu_{0}\left(x,t\right)+Ku\left(x,t\right)\cdot$$

■

Chapitre 3

Existence et unicitè de la solution

3.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$
et soit le cylindre Σ de $R_x \times R_t$ telle que :$\Sigma = \Omega \times]0, T[$
On cherche une fonction $u = u(x,t)$ solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u\,(1-u) & & \text{dans } \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u\,(x,0) = u_0\,(x) & , x \in \Omega \subseteq \mathbb{R} & \text{(condition initialle)} \\ u\,(x,t) \ = 0 \quad on \ \ \Gamma = \partial\Omega & & \text{(condition aux limite)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \qquad on \qquad \Gamma = \partial\Omega & & \text{(condition aux limite)} \end{array}\right. \qquad (P)$$

telle que: $\lambda > 0$ et $f(u) = \lambda u\,(1-u) > 0$
f est une fonction de réaction diffusion non linéaire , continue et bornée.
Ce problème aux dérivée partielle parabolique non linéaire.

3.2 Existence de la solution

3.2.1 L'existence du problème transformé en équation intégrale par la méthode des approximations successives

Théorème 3.2.1 ***(théorème d'existence)***

On suppose que :

$$n \geq 0 \tag{3.1}$$

alors , pour tout $r > 0$ donnée , il existe s telle que si u_0 est une fonction continue vérifiant :

$$0 \leqslant u_0(x) \leq s \exp\left(-\frac{|x|^2}{4r}\right) \tag{3.2}$$

alors , ***il existe une solution*** *globale du problème (P) vérifiant:*

$$0 \leqslant u(t,x) \leqslant c\frac{1}{(t+r)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(t+r)}\right) \tag{3.3}$$

Démonstration. (théorème d'existence)

1) Transformation en équation intégrale:

On a la solution fondamentale de l'équation de la chaleur donnée par:

$$\phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \tag{3.4}$$

telle que:

$$Hu_0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t, x-y)\, u_0(y)\, dy$$

avec:

$$Ku(x,t) = \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y)\, u(s,y)\,(1-u(s,y))\, dyds$$

alors:

$$u(t,x) = Hu_0(x,t) + Ku(x,t) \tag{3.5}$$

d'aprés la proposition (2.4.1) l'équation (3.5) est une équation intégrale du problème (P) .

alors le problème à résoudre équivant à trouver $u(x,t)$ solution de l'équation intégrale non linèaire (3.5) .

On utilise alors la méthode des **approximation successives** , on définit par rècurence:

On pose: $u_1(x,t) = Hu_0(x,t)$

On trouve:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= Hu_0(x,t) \\ u_2(x,t) &= Hu_0(x,t) + Ku_1(x,t) \\ u_3(x,t) &= Hu_0(x,t) + Ku_2(x,t) \\ u_{n+1}(x,t) &= Hu_0(x,t) + Ku_n(x,t) \end{aligned}$$

donc:

$$u_{n+1}(x,t) = Hu_0(x,t) + Ku_n(x,t) \ \ , \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

Le point fondamental consiste en le **choix de la norme**

2) Choix de la norme:

Il est assez natural de comparer toutes les fonctions à l'image par H de : $\exp\left(-\frac{|x|^2}{4r}\right)$.

On pose:

$$\rho(x,t) = H\left(\exp\left(-\frac{|x|^2}{4r}\right)\right) = \phi(t+r,x)$$

alors:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{(4\pi(t+r)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(t+r)}\right) \tag{3.7}$$

telle que :$\rho(x,t)$ est une fonction continue et $\rho(x,t) \geq 0$

On introduit alors la norme :

$$\|\psi(x,t)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\psi(x,t)|}{\rho(x,t)}, \quad t \geq 0 \tag{3.8}$$

3) Propriété de $Ku(x,t)$ dans la muni de la norme $\|\cdot\|$:

Première étape:

On a:

$$Ku(x,t) = \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y)\, u(s,y)\,(1-u(s,y))\, dyds$$

Alors il existe une constante c_1 telle que:

$$\|K(u)\| \leq c_1 \|u\| (1 - \|u\|)$$

Ainsi $\forall\ u(x,t)$ fonction continue : $u(x,t) \geq 0$ et $\|u\| < \infty$

Démonstration première étape :

On a:

$$u(t,x) = Hu_0(x,t) + Ku(x,t)\, et Hu_0(x,t) \geq 0$$

alors:

$$Ku(x,t) \leq\ u(t,x)$$

d'après la définition (3.8) on trouve que:

$$\|u(x,t)\|(1 - \|u(x,t)\|) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|u(x,t)(1-u(x,t))|}{\rho(1-\rho)}$$

Ainsi :

$$|u(x,t)(1-u(x,t))| \leq \|u(x,t)\|(1-\|u(x,t)\|)\,\rho(1-\rho)$$

implique que :

$$|u(x,t)| \leq \|u(x,t)\|(1-\|u(x,t)\|)\,\rho(x,t)(1-\rho(x,t))$$

donc:

$$Ku(x,t) \leq \|u(x,t)\|(1-\|u(x,t)\|)\,\rho(x,t)(1-\rho(x,t))$$

On oura:

$$K(\rho(1-\rho)) \leq \rho(1-\rho)$$

alors:

$$Ku(x,t) \leq \|u(x,t)\|(1-\|u(x,t)\|)\,K(\rho(1-\rho)) \tag{3.9}$$

avec:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{(4\pi(t+r)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(t+r)}\right) = \phi(t+r,x)$$

On pose:

$$c_2 = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(t+r)}\right) \qquad ; c_2 \geq 0$$

alors:

$$\rho(x,s) = c_2 \frac{1}{(r+s)^{\frac{n}{2}}}$$

implique que :

$$1-\rho(x,s) \leq c_2 \frac{1}{(r+s)^{\frac{n}{2}}}$$

donc:

$$\rho(x,s)(1-\rho(x,s)) \leq c_2 \frac{1}{(r+s)^{\frac{n}{2}}} \rho(x,s)$$

On a:

$$K\rho(x,s) = \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y)\, \rho(s,y)\,(1-\rho(s,y))\, dyds$$

c'est à dire:

$$K(\rho(1-\rho)) \leq \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y)\, \rho(s,y)\,(1-\rho(s,y))\, dyds$$

On obtien:

$$K(\rho(1-\rho)) \leq \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_2 \frac{1}{(r+s)^{\frac{n}{2}}} \phi(t-s, x-y)\, \rho(s,y)\, dyds$$

On a:

$$\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_2 \frac{1}{(r+s)^{\frac{n}{2}}} \phi(t-s, x-y)\, \rho(s,y)\, dyds \; = \lambda \int_0^t \frac{1}{(r+s)^{\frac{n}{2}}} \rho(x,t)\, ds$$

d'où on déduit:

$$\lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_2 \frac{1}{(r+s)^{\frac{n}{2}}} \phi(t-s, x-y)\, \rho(s,y)\, dyds \; \leq \lambda \int_0^{\infty} \frac{1}{(r+s)^{\frac{n}{2}}} \rho(x,t)\, ds$$

alors:

$$K(\rho(1-\rho)) \leq \lambda \int_0^{\infty} \frac{1}{(r+s)^{\frac{n}{2}}} \rho(x,t)\, ds = c_3 \rho(x,t)$$

implique que :

$$K(\rho(1-\rho)) \leq c_3 \rho(x,t)$$

On a :

$$Ku(x,t) \leq \|u(x,t)\|\,(1-\|u(x,t)\|)\, K(\rho(1-\rho))$$

alors:

$$Ku(x,t) \leq c_3 \|u(x,t)\|\,(1-\|u(x,t)\|)\, \rho(x,t)$$

c'est à dire:

$$\frac{Ku(x,t)}{\rho(x,t)} \leq c_3 \|u(x,t)\|\,(1-\|u(x,t)\|)$$

d'après la définition (3.8) , on trouve que:

$$\|Ku(x,t)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|Ku(x,t)|}{\rho(x,t)}$$

alors:

$$\|Ku(x,t)\| \leq c_3 \|u(x,t)\| (1 - \|u(x,t)\|)$$

On pose: $c_3 = c_1$, on obtient:

$$Ku(x,t) \leq c_1 \|u(x,t)\| (1 - \|u(x,t)\|) \tag{3.10}$$

On a: $\|K(\rho)\| \leq c_1 \|\rho\|$, comme: $\|\rho\| = 1$

c'est à dire :

$$\|K(\rho)\| \leq c_1$$

Deuxième étape :

Soit $M < 1$ donne , quelques soient : u , v continue

et: $u \geq 0$; $v \geq 0$

avec: $\|u\| \leq M$ et $\|v\| \leq M$

alors:

$$\|K(u) - K(v)\| \leq c_1 (1 - M) \|u - v\| \qquad , \quad \forall M < 1$$

telle que: $c_1 (1 - M)$ constante de lipschitz .

Démonstration deuxième étape :

On a:

$$\|u(s,y) - v(s,y)\| = \sup \frac{|u(s,y) - v(s,y)|}{\rho(s,y)}$$

alors:

$$\frac{|u(s,y) - v(s,y)|}{\rho(s,y)} \leq \|u(s,y) - v(s,y)\|$$

c'est à dire :

$$|u(s,y) - v(s,y)| \leq \|u(s,y) - v(s,y)\| \rho(s,y)$$

On a:

$$\begin{cases} \|u\| \leq M \\ \|v\| \leq M \end{cases} \quad \text{implique que} \quad \begin{cases} \|1 - u\| \leq (1 - M) \\ \|1 - v\| \leq (1 - M) \end{cases}$$

avec:

$$|1-u| \leq \|1-u\|(1-\rho)$$

ce qui implique:

$$\begin{cases} \|1-u\|(1-\rho) \leq (1-M\ )(1-\rho) \\ \|1-v\|(1-\rho) \leq (1-M\ )(1-\rho) \end{cases}$$

alors:

$$\begin{cases} |1-u| \leq (1-M\ )(1-\rho) \\ |1-v| \leq (1-M\ )(1-\rho) \end{cases}$$

On peut écrire :

$$\max\{(1-u(s,y)) ; (1-v(s,y))\} \leq (1-M\ )(1-\rho(s,y))$$

Ainsi:

$$|u(s,y)(1-u(s,y)) - v(s,y)(1-v(s,y))| \leq \max\{(1-u(s,y)) ; (1-v(s,y))\} |u(s,y) - v(s,y)|$$

c'est à dire :

$$|u(s,y)(1-u(s,y)) - v(s,y)(1-v(s,y))| \leq (1-M\ )(1-\rho(s,y)) \|u-v\| \rho(s,y)$$

d'où:

$$|Ku(x,t) - Kv(x,t)| =$$

$$\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) u(s,y)(1-u(s,y)) dyds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) v(s,y)(1-v(s,y)) dyds \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) |u(s,y)(1-u(s,y)) - v(s,y)(1-v(s,y))| dyds \\ &\leq (1-M\ ) \|u-v\| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) \rho(s,y)(1-\rho(s,y)) dyds \\ &\leq (1-M\ ) \|u-v\| K\rho(s,y) \qquad ; \quad \|K\rho(s,y)\| \leq c_1 \\ &\leq c_1(1-M\ ) \|u-v\| \end{aligned}$$

finalement:

$$\|K(u) - K(v)\| \leq c_1(1-M) \|u-v\| \tag{3.11}$$

4) Démonstration de la convergence :

On a :

$$u_{n+1}(x,t) = Hu_0(x,t) + Ku_n(x,t)$$

telle que:

$$Hu_0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t, x-y)\, u_0(y)\, dy$$

avec:

$$Ku(x,t) = \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y)\, u(s,y)\,(1-u(s,y))\, dyds$$

pour tout $r > 0$, alors:

$$u_0(x) \leq s \exp\left(-\frac{|x|^2}{4r}\right), \text{et } u_0(x) \geq 0$$

On a:

$$\phi(r,x) = \frac{1}{(4\pi r)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4r}\right)$$

On pose que : $\delta = s(4\pi r)^{\frac{n}{2}}$

alors:

$$u_0(x) \leq s \exp\left(-\frac{|x|^2}{4r}\right)$$

implique que:

$$u_0(x) \leq \frac{\delta}{(4\pi r)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4r}\right)$$

Il s'agit de montrer la convergence de (3.6) au sens de la norme $\|\cdot\|$ pour:

$$\delta = s(4\pi r)^{\frac{n}{2}} \quad \text{" assez petite"}$$

La démonstration se fait en deux tapes:

Première étape:

On a :

$$u_{n+1}(x,t) = Hu_0(x,t) + Ku_n(x,t)$$

d'où:

$$\|K(u)\| \leq c_1 \|u\|(1 - \|u\|)$$

donc:

$$\|K(u_n)\| \leq c_1 \|u_n\|(1 - \|u_n\|)$$

d'après (3.6) on obtient:

$$u_{n+1} - Ku_n = Hu_0$$

alors:

$$Hu_0\left(x\right) \leq \frac{\delta}{\left(4\pi r\right)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\left|x\right|^2}{4r}\right)$$

c'est à dire :

$$Hu_0\left(x\right) \leq \delta\rho\left(x,t\right)$$

donc:

$$u_{n+1} - Ku_n = Hu_0 \leq \delta\rho\left(x,t\right)$$

implique que:

$$u_{n+1} \leq Ku_n + \delta\rho\left(x,t\right) \leq \delta + Ku_n$$

alors:

$$\left\|u_{n+1}\right\| \leq \delta\left\|Ku_n\right\|$$

Ainsi :

$$\left\|K(u_{n+1})\right\| \leq \delta + c_1\left\|u_n\right\|\left(1 - \left\|u_n\right\|\right)$$

Par consèquent:

$$\left\|u_n\right\| \leq \gamma_n$$

Où:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \left\|u_1\right\| \\ \gamma_{n+1} = \delta + c_1\gamma_n\left(1-\gamma_n\right) \end{cases}$$

Ainsi:

$$\left\|u_n\right\| \leq \gamma_n \quad \text{implique} \qquad \left\|u_n\right\| \leq M\left(\delta\right)$$

telle que:

$$M\left(\delta\right) \longrightarrow 0 \ si: \ \delta \longrightarrow 0$$

Deuxième étape : on dèduit de la définition (1.3) :

$$u_{n+1}\left(x,t\right) = Hu_0\left(x,t\right) + Ku_n\left(x,t\right)$$

On utilise:

$$\|K(u) - K(v)\| \leq c_1 (1 - M) \|u - v\|$$

alors:

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \| (Hu_0 + Ku_n) - (Hu_0 + Ku_{n-1})\|$$

donc:

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \|Ku_n - Ku_{n-1}\|$$

c'est à dire :

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq c_1 (1 - M(\delta)) \|u_n - u_{n-1}\|$$

On chosit:

$$c_1 (1 - M(\delta)) < 1\cdot$$

■

3.3 unicité de la solution

Théorème 3.3.1 : *La solution du problème (P) est unique* $\cdot$

Démonstration.

On a :

$$u^{`} - \Delta u = \lambda u(1 - u)$$

Soient $u_1$et u_2 deux solutions du problème (P)

u_1 solution alors:

$$u_1^{`} - \Delta u_1 = \lambda u_1(1 - u_1) \tag{3.12}$$

u_2 solution alors:

$$u_2^{`} - \Delta u_2 = \lambda u_2(1 - u_2) \tag{3.13}$$

en retranchement (3.12) de (3.13)

il vient:

$$u_1^{`} - u_2^{`} - (\Delta u_1 - \Delta u_2) = \lambda [u_1(1 - u_1) - u_2(1 - u_2)]$$

On pose:

$$u = u_1 - u_2$$

alors:

$$u^{\backprime} - \Delta u = \lambda \left(u_1 - u_1^2\right) - \lambda \left(u_2 - u_2^2\right) \tag{3.14}$$

Multiplions (3.14) par u , on trouve que:

$$u^{\backprime}u - \Delta u u = \lambda u_1 u - \lambda u_1^2 u - \lambda u_2 u + \lambda u_2^2 u$$

implique que:

$$u^{\backprime}u - \Delta u u = \lambda u \left(u_1 - u_2\right) - \lambda u \left(u_1^2 - u_2^2\right)$$

donc:

$$u^{\backprime}u - \Delta u u = \lambda u^2 - \lambda u \left(u_1^2 - u_2^2\right) \tag{3.15}$$

en intégrant l'équation (3.15) sur Ω , on trouve :

$$\int_\Omega u^{\backprime}u dx - \int_\Omega \Delta u u dx = \lambda \int_\Omega u^2 dx - \lambda \int_\Omega u \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx$$

d'où:

$$\int_\Omega u^{\backprime}u dx + \int_\Omega \nabla u \nabla u dx = \lambda \int_\Omega u^2 dx - \lambda \int_\Omega u \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx$$

Alors:

$$u \left(u_1^2 - u_2^2\right) = u \left(u_1 - u_2\right)\left(u_1 + u_2\right) = u^2 \left(u_1 + u_2\right)$$

et comme:

$$u^2 \left(u_1 + u_2\right) \geq 0$$

donc:

$$\int_\Omega u^{\backprime}u dx \leq \lambda \int_\Omega u^2 dx$$

On obtient:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u\right| \leq \left|u\right|^2$$

D'après le lemme de Gronwall , on a :

$$u = 0 \quad \text{implique} \quad u_1 - u_2 = 0$$

alors: $u_1 = u_2$

donc la solution est unique. ■

Chapitre 4

Application numérique

On a le problème de réaction diffusion suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u\left(1-u\right) \quad , \quad \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right) \qquad\qquad , x \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

On pose: $\lambda = \frac{1}{2}$ et $u_0\left(x\right) = x$

alors:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} u\left(1-u\right) \\ u\left(x, 0\right) = u^0 = x \end{cases} \tag{4.1}$$

On a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} u\left(1-u\right) \tag{4.2}$$

L'équation (4.2) implique que:

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\triangle\, t} = \frac{1}{2} u^{n+\frac{1}{2}} \left(1 - u^{n+\frac{1}{2}}\right) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On pose: $\triangle\, t = 1$, alors:

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = \frac{1}{2} u^{n+\frac{1}{2}} \left(1 - u^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

donc on peut écrire:

$$\left(u^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 + u^{n+\frac{1}{2}} - 2u^n = 0 \tag{4.3}$$

telle que:

$$\triangle = 1 + 8u^n$$

donc:

$$\begin{cases} u_1^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{1+8u^n}-1}{2} > 0 \\ u_2^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{-\sqrt{1+8u^n}-1}{2} < 0 \end{cases}$$

On choisi:

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1+8u^n}-1}{2} \quad > 0 \tag{4.4}$$

alors:

$$u^{n+\frac{1}{2}} = f\left(u^n\right)$$

c'est à dire (4.4) solution de l'équation (4.3) .

avec , on a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

alors:

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}}{\triangle\ t} = \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\left(\triangle\ x\right)^2} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On pose: $\triangle\ x = \triangle\ t = 1$, alors:

$$u_i^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}$$

c'est à dire:

$$-u_{i+1}^{n+1} + 3u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} \tag{4.5}$$

On va écrire (4.5) sous forme d'un système matriciel , alors:

$$Au^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} \tag{4.6}$$

telle que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a:

$$Au^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}}$$

On pose : $n = 0,...,2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

alors:

$$u^{n+1} = A^{-1}u^{n+\frac{1}{2}}$$

telle que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{1}{7} & \frac{1}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{7} & \frac{8}{21} \end{pmatrix}$$

ce qui implique:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{1}{7} & \frac{1}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{7} & \frac{8}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1+8u^0}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{1+8u^1}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{1+8u^2}-1}{2} \end{pmatrix}$$

c'est à dire:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{1}{7} & \frac{1}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{7} & \frac{8}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1+8x}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{1+8u^1}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{1+8u^2}-1}{2} \end{pmatrix}$$

alors:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{42}\sqrt{8u^2+1} + \frac{1}{14}\sqrt{8u^1+1} + \frac{4}{21}\sqrt{8x+1} - \frac{2}{7} \\ \frac{1}{14}\sqrt{8u^2+1} + \frac{3}{14}\sqrt{8u^1+1} + \frac{1}{14}\sqrt{8x+1} - \frac{5}{14} \\ \frac{4}{21}\sqrt{8u^2+1} + \frac{1}{14}\sqrt{8u^1+1} + \frac{1}{42}\sqrt{8x+1} - \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

donc on peut écrire:

$$u^1 = \frac{1}{42}\sqrt{8u^2+1} + \frac{1}{14}\sqrt{8u^1+1} + \frac{4}{21}\sqrt{8x+1} - \frac{2}{7} \tag{4.7}$$

$$u^2 = \frac{1}{14}\sqrt{8u^2+1} + \frac{3}{14}\sqrt{8u^1+1} + \frac{1}{14}\sqrt{8x+1} - \frac{5}{14} \tag{4.8}$$

$$u^3 = \frac{4}{21}\sqrt{8u^2+1} + \frac{1}{14}\sqrt{8u^1+1} + \frac{1}{42}\sqrt{8x+1} - \frac{2}{7} \tag{4.9}$$

On utilise (4.7) et (4.8) , On obtient:

$$\begin{cases} -3u^1 = -\frac{3}{42}\sqrt{8u^2+1} - \frac{3}{14}\sqrt{8u^1+1} - \frac{12}{21}\sqrt{8x+1} + \frac{6}{7} \\ u^2 = \frac{1}{14}\sqrt{8u^2+1} + \frac{3}{14}\sqrt{8u^1+1} + \frac{1}{14}\sqrt{8x+1} - \frac{5}{14} \end{cases}$$

alors:

$$u^2 = 3u^1 - \frac{1}{7}\left(1 - \sqrt{8x+1}\right)$$

et on utilise (4.8) et (4.9) , on obtient:

$$\begin{cases} u^2 = \frac{1}{14}\sqrt{8u^2+1} + \frac{3}{14}\sqrt{8u^1+1} + \frac{1}{14}\sqrt{8x+1} - \frac{5}{14} \\ -3u^3 = -\frac{12}{21}\sqrt{8u^2+1} - \frac{3}{14}\sqrt{8u^1+1} - \frac{3}{42}\sqrt{8x+1} + \frac{6}{7} \end{cases}$$

donc:

$$u^3 = \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{6}\sqrt{8u^2+1} - \frac{1}{42}$$

finalement:

$$\begin{cases} u^0 = x \\ u^1 = \frac{1}{42}\sqrt{8\left(3u^1 - \frac{1}{7}\left(1-\sqrt{8x+1}\right)\right)+1} + \frac{1}{14}\sqrt{8u^1+1} + \frac{4}{21}\sqrt{8x+1} - \frac{2}{7} \\ u^2 = 3u^1 - \frac{1}{7}\left(1-\sqrt{8x+1}\right) \\ u^3 = \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{6}\sqrt{8u^2+1} - \frac{1}{42} \end{cases}$$

conclusion générale

Dans ce mémoire , nous avons appliqué la transformation de Fourier pour transformer le problème aux limites de réaction-diffusion non linéaire en équation intégrale .

Nous avous établi un résultat d'existence de la solution du problème transformé en équation intégrale par la méthode des approximations successives pour le cas en dimension un, avec un résultat d'unicité par la méthode classique (Lemme de Gronwall).

Le problème étudié en dimension un est un problème posé par Fisher (1937) [5] et Kolmogorov , Petrovsky et Piskunov (1938) [6] , pour des modèles de génétique des populations . Ce type de modèle a été introduit par Shigesada, Kawasaki et Teramoto [11] pour étudier des phénomènes d'invasion biologique dans des environnements périodiques .

Les équations de réaction-diffusion traitées auront donc des termes de diffusion et de réaction dépendant périodiquement de l'espace.

La méthode des approximations successives est l'usage courant en Analyse Numérique, cette méthode étudiée par J.Lions [2] , est donne de bons résultat de convergence.

Une autre application de la méthode des approximations successives pour Résolution d'un Problème d'Elasticité non Linéaire et Perturbé a été étudiée par Said.M.S[12].

Nous avons terminé notree travail par une application numérique pour valider les résultats théoriques obtenus.

Bibliographie

[1] H. Bresis .Analyse fonctionnelle, théorie et application, Masson (1983).

[2] J.L. LIions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Guautier Villars, Paris, 1969·

[3] Claude Zuilly,Distribution et transformation de Fourier, Dunod 1999.

[4] Ecole Nationale d'Ingénieurs et de Techniciens d'Algérie, Section de mathématique, Module d'analyse 3 La transformation de Fourier, edition 1978.

[5] R.A. Fisher, The advance of advantageous genes, Ann. Eugenics 7 (1937), pp 335-369.

[6] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky, N.S. Piskunov, étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, Bulletin Université d'état à Moscou (Bjul. Moskowskogo Gos. Univ.), Série internationale A 1 (1937), pp 1-26

[7] N. Shigesada, K. Kawasaki, Biological invasions : theory and practice, Oxford Series in Ecology and Evolution, Oxford : Oxford University Press, 1997.

[8] A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri. Méthodes numériques pour le calcul scientifique,2000

[9] A. Reardon et A. Novikov; Front propagation in reaction- diffusion equations (Scond Edition)An Introduction with Mathematica and MAPLE

[10] Aude Rondepierre & Adeline Rouchon, Introduction aux équations aux Dérivées Partielles- étude théorique-(2012-2013)

[11] N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto, Traveling periodic waves in heterogeneous environments,Theor. Population Biol. 30 (1986), pp 143-160.

[12] Said.M.S , Résolution d'un Problème d'Elasticité non Linéaire et Perturbé par la Méthodes des Approximations Succéccives par des Equations Intégrales se Basant sur la Solution du Problème de la Chaleur , Annals de l,u,m, a France (2005).

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions étudie l’existence et l’unicité de la solution d’un Problème de réaction diffusion non linéaire par la méthode des approximations successives par des équations intégrales avec une applications numérique.

Mots clés :

Méthode des approximations successives , transformation de Fourier, équation de Réaction diffusion , équation de la chaleur.

الملخص

نتناول في هذه المذكرة و جود و وحدانية الحل لمشكلة رد فعل نشر غير الخطية بواسطة التقريبات المتعاقبة بعد تحويلها إلى معادلة تكاملية مع تطبيق عددي على هذه المشكلة.

الكلمات المفتاحية:

طريقة التقريبات المتعاقبة , تحويلات فورييه, معادلة رد فعل النشر , معادلة الحرارة

Abstract

In this work, we study the existence and the uniqueness of the solution of a nonlinear reaction diffusion problem by the method of successive approximations of integral equations with a numerical application.

Keys words:

Method of successive approximations , Fourier Transformation , Reaction diffusion equation , heat equation.