Un Modèle Quantique d'un Accélérateur de Fermi dans un champ Gravitationnel

Mohamed Abdelwahab BENBITOUR* et Mohammed Tayeb MEFTAH
Univ Ouargla, Fac. des Mathématiques et des Sciences de la Matière,
Lab. Rayonnement et Plasmas et Physique des Surfaces, Ouargla 30 000 (Algérie)
* Email : benbitour.mo@univ-ourargla.dz

RÉSUMÉ : Dans cet article, nous présentons une solution du problème d'un accélérateur de Fermi quantifié, où l'un des bords (piston) est soumis à un champ gravitationnel. Nous présentons notre solution sous une forme de série de fonctions de Meijer. Dans cet article, nous utilisons une nouvelle méthode pour construire une solution de l'équation de Schrödinger avec un potentiel linéaire central.

MOTS-CLÉS : Accélérateur de Fermi, potentiel linéaire, Fonction de Meijer

ABSTRACT: In this paper we present a closed solution of a quantized Fermi accelerator, where the large mass particle (piston) is subject to a gravitational field. We present our solution in a form using Meijer's functions. In this paper we use a new method to construct a solution to the Schrödinger equation with a central linear potential. We derive the solution by solving it iteratively as a series sum of Meijer's functions.

KEYWORDS: Fermi Accelerator, Linear potential, Meijer's functions

1. Introduction

La dynamique des atomes dans une cavité gravitationnelle est un phénomène très intéressant qui a suscité plusieurs travaux théoriques [1] et expérimentaux [2]. Dans une cavité gravitationnelle atomique un nuage d'atomes est refroidi, jusqu'à quelque micro- Kelvin et est piégé par des forces magnéto-optique. Le piège est placé à une certaine hauteur au -dessus d'une plaque diélectrique. Sous l'influence du champ gravitationnel ces atomes à deux niveaux tombent vers un miroir atomique constitué d'un champ d'ondes évanescentes. Au début, les atomes quittent le piège magnéto-optiques, et commencent leurs chutes à partir d'une hauteur initiale connue, près de la surface du miroir l'effet du champ d'ondes évanescentes est dominant et les atomes ressentent un potentiel optique répulsif. Cette onde évanescente est créée par la réflexion interne totale d'un faisceau laser incident sur la surface plane d'un diélectrique. Le cumul des deux potentiels fait le puits gravitationnel. Après une incidence normale sur le miroir atomique, l'atome rebondit et se déplace dans le champ de gravitation. Ce genre de dispositif expérimental est une réalisation de l'accélérateur de Fermi.

Dans cet article, nous discutons un modèle simple de cavité gravitationnelle, nous considérons une particule quantique enfermée dans une cavité cylindrique hermétique fermée en haut par un piston d'une certaine masse. Le piston est en chute libre, sans friction, sous l'influence de la gravitation et subit les chocs de la particule enfermée, considérée. Nous soulignons que le problème que nous étudions ici implique un système de particule dans un puits de potentiel infini mais dont l'un des bords est en mouvement sous l'influence de la gravitation. La question d'un système isolé constitué d'une particule dans un puits infini mais dont l'un des bords étant libre a été considérée plus tôt dans la littérature [3]. Le problème où le bord est soumis à des forces du type harmonique a été considéré dans [4], dans le cadre de l'élaboration de la notion de pression dans le cadre quantique.

Dans cet article, nous présentons une nouvelle méthode pour construire une solution de l'équation de Schrödinger avec un potentiel linéaire central, qui a fait l'objet de notre travail dans [5]. Nous obtenons la solution de l'équation de Schrödinger par une méthode itérative en utilisant

des séries de fonctions de Meijer. Dans un premier temps nous considérons l'aspect classique du problème, afin d'apprécier les traits généraux de la dynamique.

2. Traitement semi classique

Si nous traitons le système dans un cadre semi-classique, le mouvement de la particule (masse m) est quantique et celui du piston (le mur) de masse M est considéré comme classique. L'hamiltonien classique de M est donnée par :

$$H_{cl} = \frac{P^2}{2m} + E_n(L) + Mg, \tag{1}$$

où P et L sont le moment généralisé et coordonnée du piston M et $E_n(L) = n^2 \frac{\mathrm{h}^2\pi^2}{2mL^2}$, avec n entier non nul, est l'énergie de la particule piégée. Nous obtenons alors les équations de mouvement suivantes pour le piston :

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial E_n}{\partial L} - Mg, \\ \dot{L} &= \frac{P}{M} \end{aligned} \tag{2}$$

Alors l'équation du mouvement du piston s'écrit :

$$\ddot{L} - \frac{n^2}{L^3}\frac{\mathrm{h}^2\pi^2}{mM} = -g \tag{3}$$

Après une première intégration, cette équation différentielle non linéaire devient :

$$\left(\dot{L}\right)^2 + \frac{E_n(L_0)}{ML^2} L_0{}^2 - 2g(L - L_0) + \frac{E_n(L_0)}{M} = 0\,, \tag{3}$$

où L_0 est la position initiale du piston.

Le mouvement du piston est manifestement oscillatoire, d'après les équations du mouvement on peut calculer la période d'oscillation T. Alors, si on définit les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} L_- &= \frac{E_n(L_0)}{2Mg}\left(1 - \sqrt{1 + 8\frac{ML_0 g}{E_n(L_0)}}\right) \\ L_+ &= \frac{E_n(L_0)}{2Mg}\left(1 + \sqrt{1 + 8\frac{ML_0 g}{E_n(L_0)}}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

la période d'oscillation est donnée par l'intégrale elliptique suivante :

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} \int_{L_+}^{L_0} \frac{LdL}{\sqrt{(L_0 - L)(L - L_+)(L - L_-)}} \tag{5.a}$$

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}}\left[\frac{L_-}{\sqrt{L_0 - L_-}} K\left(\sqrt{\frac{L_0 - L_+}{L_0 - L_-}}\right) + \sqrt{L_0 - L_-}\, E\left(\sqrt{\frac{L_0 - L_+}{L_0 - L_-}}\right)\right] \tag{5.b}$$

où K(.) et E(.) sont les intégrales elliptiques complets du premier et second type respectivement.

Le traitement semi-classique reste valable lorsque la vitesse du mouvement est beaucoup plus petite que celle de la particule piégée.

3. Traitement quantique

Nous supposons que le paramètre de Born-Openheimer $\lambda = \sqrt{\frac{m}{M}} << 1$ est très petit. Alors l'hamiltonien quantique du system est :

$$H = -\frac{\eta^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Mg\xi - \frac{\eta^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \tag{6}$$

ici ξ est la position du piston et η est celle de la petite particule avec les conditions $0 \le \eta \le \xi$, qui sont traduites par les conditions sur la fonction d'onde du système par :

$$\Psi(\eta \le 0, \xi) = \Psi(\eta \ge \xi, \xi) = 0. \tag{7}$$

Les énergies et les états quantiques stationnaires du système peuvent être calculés en résolvant l'équation de Schrödinger :

$$\left[-\frac{\eta^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Mg\xi - \frac{\eta^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]\Psi(\eta,\xi) = E\Psi(\eta,\xi), \tag{8}$$

dont le domaine de validité est $\Omega = \{(\eta,\xi)/ \quad 0 \le \eta \le \xi\}$. Pour résoudre cette équation, nous faisons le changement de variable suivant :

$$z = \left(\frac{2g}{\eta^2}M^2\right)^{\frac{1}{3}}\xi, \quad y = \frac{\eta}{\xi}, \quad \varepsilon = \left(\eta g\sqrt{\frac{M}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} E, \tag{9}$$

Ainsi le domaine devient $\Omega_0 = \{(z,y)/ \quad 0 \le z, \quad 0 \le y \le 1\}$, par ce changement de variables l'équation (8) devient :

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\lambda^2 z^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + z - \frac{y^2}{z^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{y}{z}\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} - 2\frac{y}{z^2}\frac{\partial}{\partial y} \right]\Psi(z,y) = \varepsilon\Psi(z,y). \tag{10}$$

Vue que la coordonnées y est restreinte à l'intervalle [0,1], nous pouvons décomposer la fonction d'onde sur la base complète $\left\{\sqrt{2}\sin(k\pi y), \quad k = 1,2,3,\mathrm{K}\right\}$

$$\Psi(z,y) = \sum_{k=1} \sqrt{2}u_k(z)\sin(k\pi y). \tag{11}$$

L'équation (10) devient alors, en tenant compte de (11) et en faisant tendre λ vers zéro

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{k^2\pi^2}{\lambda^2 z^2} + z - \varepsilon \right)u_k^{(0)}(z) = 0. \tag{12}$$

Cette équation est similaire à l'équation de Schrödinger radiale réduite d'une particule dans un potentiel sphérique radial. Nous avons résolu une telle situation dans un travail récent [5] ; ici nous appliquons cette méthode mais pour calculer la fonction d'onde $u_k(z)$ du piston.

Définissons les nouvelles variables $\rho = \varepsilon\frac{z^2}{4}$ et réécrivons l'équation (12) en terme d'opérateurs : $\hat{\theta} = \rho\frac{d}{d\rho}$ et $D^{(q)} \equiv \rho + \left(\hat{\theta} - \frac{l+1}{2} + q\right)\left(\hat{\theta} + \frac{l}{2} + q\right), \quad q = 0,1,2,\Lambda$

$$D^{(0)}u_l(\rho) = 2\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} u_l(\rho), \tag{13}$$

où nous avons défini $l(l+1) = \frac{\pi^2 k^2}{\lambda^2}$. On cherche, maintenant une solution de (13) comme une série:

$$u_l(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}n} u_l^{(n)}(\rho). \tag{14}$$

Sachant que $D^{(0)}\rho^q \equiv \rho^q D^{(q)}$, si on compare les termes de même ordre en $2\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}$ on obtient :

$$D^{(0)}u_l^{(0)}(\rho) = 0, \tag{15.a}$$

$$D^{\left(\frac{3}{2}\right)}u_l^{(1)}(\rho) = -u_l^{(0)}(\rho), \tag{15.b}$$

et en générale :

$$D^{\left(\frac{3}{2}m\right)}D^{\left(\frac{3}{2}(m-1)\right)}\ldots D^{\left(\frac{3}{2}\right)}u_l^{(1)}(\rho) = (-1)^m u_l^{(0)}(\rho). \tag{15.c}$$

A l'ordre zéro Eq (15.a), la solution est immédiate, elle est donnée par :

$$u_l^{(0)}(\rho) = A_l G_{0,2}^{1,0}\left(\rho; \frac{l+1}{2}, -\frac{l}{2}\right), \tag{16}$$

où $G_{0,2}^{1,0}\left(\rho; \frac{l+1}{2}, -\frac{l}{2}\right)$ est une fonction de Meijer et A_l est une constante de normalisation. Afin de résoudre l'équation (5.b), nous prenons la transformée de Mellin de celle-ci :

$$M\left(D^{(\frac{3}{2})} u_l^{(1)}(\rho)\right)(s) = -A_l \varepsilon^{-s} \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 - s\right)}, \tag{17}$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Mellin on obtient :

$$\varepsilon \tilde{u}_l^{(1)}(s+1) + \left(\frac{3}{2} + \frac{l}{2} - s\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{l+1}{2} - s\right)\tilde{u}_l^{(1)}(s) - A_l \varepsilon^{-s} \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 - s\right)} = 0. \tag{17.a}$$

Une solution a été trouvée comme une somme de fonctions gamma :

$$\tilde{u}_l^{(1)}(s+1) = A_l \varepsilon^{-s} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2} + i + s\right)\Gamma\left(1 - \frac{l}{2} - i - s\right)\Gamma\left(1 + \frac{l+1}{2} - i - s\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{l}{2} + 1 - s\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{l+1}{2} + 1 - s\right)\Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 - i - s\right)}. \tag{18}$$

La transformée inverse de Mellin donne alors :

$$u_l^{(1)}(\rho) = A_l \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i G_{2,4}^{1,2}\left(\rho; \begin{matrix} \frac{l}{2} + i, i - \frac{l+1}{2} \\ \frac{l+1}{2} + i, -\frac{3}{2} - \frac{l}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{l+1}{2}, -\frac{l}{2} + i \end{matrix}\right). \tag{18}$$

La solution $u_l^{(0)}(\rho)$ est manifestement la solution adiabatique, où le piston est considéré comme immobile, mais la solution $u_l^{(1)}(\rho)$ est la correction dite Born-Openheimer dans le cas d'un piston en chute libre.

3. Conclusion

Dans ce travail nous avons considéré le problème physique d'une particule quantique contrainte à évoluer entre deux parois impénétrables, l'un fixe et l'autre en chute libre. Nous avons donné une solution approchée pour la fonction d'onde. Ce même système, mais sans la pesanteur ce qui simplifie considérablement le problème, a été considéré dans [3]. Notre contribution a été d'ajouter la gravitation ce qui rend ce modèle plus proche de l'accélérateur de Fermi réel.

Références

[1] Wallis H., Dalibard J. et Cohen-Tannoudji C. ; *Appl. Phys.* B**54** 407- (1992)
[2] Raab E.L. et al. ; *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631- (1987)
[3] Hussein M. S. ; *Ann. Phys.* **250**, 3522-366 (1996)
[4] Borowski P., Gemmer J. et Mahler G., *Europhys. Lett.* **62**, 629- (2003)
[6] Kleber M. ; *Phys. Rep.* **236** , 331 (1994)
[5] Benbitour M. A. et Meftah M. T. ; *Rep. Math. Phys.* **72**, 93-101 (2013)