



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

N° d'ordre :
N° de série :

MÉMOIRE DE MAGISTER EN MATHÉMATIQUES
OPTION ANALYSE NUMÉRIQUE ET E.D.P

INTITULE

*L'opérateur de Green pour le
potentiel saut de Heaviside :
traitement perturbatif*

PRÉSENTÉ PAR : BEN ALI Brahim

Devant le jury composé de :

D.A. CHACHA.	MC	Université Kasdi Merbah-Ouargla	Président
M.S. SAID	MC	Université Kasdi Merbah-Ouargla	Examineur
L. NISSE	MC	Université Badji Mokhtar-Annaba	Examineur
M.T. MEFTAH	Pr	Université Kasdi Merbah-Ouargla	Encadreur
M. ACILA	MACC	Université Kasdi Merbah-Ouargla	Co-encadreur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2005/2006

إهداء

بحمد من الله و نعمته تم هذا العمل المتواضع الذي
أسأله أن يجعله فاتحة خير و عون على النجاح في هذه الحياة
اهدي هذا العمل المتواضع إلى روح أمي و إلى والدي العزيز
و إلى جميع أفراد أسرتي كل باسمه
كما أتقدم بإهداء هذا العمل إلى أعضاء اللجنة الممتحنة
الدكتور جمال أحمد شاشة
الدكتور محمد السعيد سعيد
الدكتور لمين نيس
الدكتور محمد الطيب مفتاح
الدكتور مصطفى عسيلة

و إلى كل من قدم لي يد العون من قريب أو بعيد

إبراهيم بن علي

Introduction

Le sujet que nous proposons de résoudre concerne l'élaboration d'une équation intégrale pour un problème aux limites, puis construire le noyau de Green correspondant moyennant la théorie des perturbations indépendantes du temps. Concrètement, ce problème entre dans le cadre de la théorie du potentiel très fréquentée par les physiciens de la mécanique quantique. Le potentiel à traiter est bien étudié ultérieurement et nous souhaitons retrouver, par le biais de la théorie des perturbations, le noyau de Green du potentiel saut de Heaviside.

Dans le premier chapitre, nous présentons la solution du problème du potentiel de Heaviside moyennant la méthode standard qui repose d'abord sur la recherche des solutions de l'équation différentielle puis on construit la fonction de Green correspondante.

Au deuxième chapitre, nous avons présenté la méthode de la théorie des perturbations adaptée à la mécanique quantique en interprétant physiquement au mieux les termes de la série de perturbation. Nous avons également présenté le rôle du propagateur de Feynmann et sa relation avec la fonction de Green ainsi qu'avec la fonction d'onde, solution de l'équation de Schrödinger. Et nous avons fini ce chapitre par l'élaboration de l'équation intégrale gouvernant la fonction de Green. Il s'avère que cette équation appartient au problème de Wiener-Hopf du deuxième espèce.

À chapitre 3, nous avons développé la théorie des fonctions sectionnellement analytiques qui a été d'abord appliquée aux problèmes de Hilbert avec succès puis nous l'avons appliquée pour la résolution de notre problème de Wiener-Hopf.

Au chapitre 4, nous avons construit la série de perturbations et calculé ses termes moyennant la théorie développée au chapitre 3. Nous avons trouvé que les termes successifs de la série sont reliés par une formule intégrale que nous avons pu résoudre et sommer la série pour ainsi construire la solution de Green. Nous avons aussi dans ce chapitre vérifié dans chaque étape de calcul de la série de perturbation, la justesse de notre procédure et ceci en se référant à la méthode directe.

Table des matières

1	FONCTION DE GREEN-PROPAGATEUR	7
1.1	Introduction	7
1.2	Définition des fonctions de Green	8
1.2.1	Calcul de $K(2, 1)$ à partir des états propres de H (supposé indépendant du temps)	8
1.2.2	Équation satisfaite par $K(2, 1)$	11
1.2.3	États stationnaires d'une particule dans des potentiels carrés à une dimension (comportement d'une fonction d'onde stationnaire $\psi(t)$)	12
1.2.4	La fonction de Green :	15
2	LA METHODE DE PERTURBATION EN MECANIQUE QUANTIQUE	17
2.0.5	Développement des termes de la série de perturbation	17
2.0.6	Évaluation des termes	19
2.0.7	Interprétation des termes	20
2.0.8	Une équation intégrale pour K_V	22
2.0.9	Développement de la fonction d'onde	23
2.0.10	Théorie des perturbations et diagrammes de Feynman	24
3	METHODE DE RÉOLUTION UTILISANT LES FONCTIONS ANALYTIQUES ET LES FONCTIONS SECTIONNELLEMENT ANALYTIQUES	28
3.0.11	Les fonctions analytiques	29
3.0.12	Les fonctions sectionnellement analytiques	38
3.0.13	Problème de Hilbert	49

4	LA FONCTION DE GREEN POUR LE POTENTIEL HEAVISIDE	65
4.0.14	Solution par la méthode directe :	65
4.0.15	Méthode des perturbations	75
4.1	Region $y < 0$	78
4.2	Region $y > 0$	90
4.3	Conclusion	104
5	APPENDICE	105

Table des figures

1-1	13
2-1	20
2-2	21
3-1	33
3-2	39
3-3	40
3-4	43
4-1	71
4-2	72
5-1	106
5-2	109

Chapitre 1

FONCTION DE GREEN-PROPAGATEUR

1.1 Introduction

Pour décrire l'évolution d'un système quantique au cours du temps, on peut adopter deux points de vue : celui de l'équation de Schrödinger :

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \quad (1.1)$$

où H est l'opérateur auto-adjoint ou opérateur hamiltonien et $|\psi\rangle$ la fonction propre en représentation de Dirac, ou celui de l'équation intégrale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x_2, t_2) = \int dx_1 \langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle \psi(x_1, t_1) \\ \psi(x_2, t_2) = \int dx_1 K(x_2, t_2 | x_1, t_1) \psi(x_1, t_1) \\ t_2 \geq t_1 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Rappelons que le second point de vue est beaucoup plus physique et qu'il traduit en quelque sorte un principe d'Huyghens dans l'espace-temps. Il montre bien l'analogie qui existe entre la mécanique classique et la mécanique quantique. De plus, il est particulièrement bien adapté au cas des champs relativistes et aux problèmes des perturbations.

Cependant, le calcul direct de $\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle$ à partir du postulat de Feynman est assez com-

pliqué. Sur l'exemple de la particule libre, nous avons constaté que le calcul de cette amplitude de probabilité est plus simple à partir de l'équation de Schrödinger (1.1).

Nous sommes donc amenés à adopter le compromis suivant :

- a) nous décrirons l'évolution du système dans le temps par l'équation intégrale (1.2),
- b) nous calculerons $\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle$ à partir de l'équation aux dérivées partielles (1.1).

Le problème b) n'est autre que celui du calcul des fonctions de Green de l'équation de Schrödinger. Ce problème est extrêmement général en physique et on le retrouve dès qu'on traite une équation aux dérivées partielles avec des conditions aux limites : c'est le cas de l'équation de Poisson, des équations de Maxwell, de l'équation de la diffusion, des équations de Schrödinger, Klein-Gordon et Dirac, etc.

Etant donnée son importance, il est intéressant d'étudier ce problème de façon systématique et de dégager ainsi les diverses méthodes possibles de calcul, de l'amplitude, de probabilité $\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle$.

1.2 Définition des fonctions de Green

Nous allons nous placer dans un espace-temps à quatre dimensions et adopter la notion $\langle \vec{r}_2 t_2 | \vec{r}_1 t_1 \rangle$ au lieu de $\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle$. D'autre part, on posera souvent :

$$\langle \vec{r}_2 t_2 | \vec{r}_1 t_1 \rangle = K(\vec{r}_2 t_2, \vec{r}_1 t_1) = K(2, 1). \quad (1.3)$$

1.2.1 Calcul de $K(2, 1)$ à partir des états propres de H (supposé indépendant du temps)

Soit H l'opérateur hamiltonien indépendant du temps, de valeurs propres E_n et de vecteurs propres $|u_n\rangle$, on a les relations :

$$H |u_n\rangle = E_n |u_n\rangle \quad (1.4)$$

$$\langle u_n | u_{n'} \rangle = \delta_{nn'} \quad (1.5)$$

$$\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| = 1. \quad (1.6)$$

Plaçons-nous dans la représentation \vec{r} et posons :

$$\langle \vec{r} | u_n \rangle = u_n(\vec{r}). \quad (1.7)$$

la relation de fermeture conduit à :

$$\sum_n \langle \vec{r} | u_n \rangle \langle u_n | \vec{r}' \rangle = \sum_n u_n(\vec{r}) u_n^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.8)$$

Décomposons la fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$ sur les états $|u_n\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_n |u_n\rangle \langle u_n | \psi(t)\rangle \\ &= \sum_n |u_n\rangle c_n(t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

avec

$$c_n(t) = \langle u_n | \psi(t)\rangle \quad (1.10)$$

vérifiant l'équation :

$$i\dot{c}_n = E_n c_n,$$

soit

$$c_n(t) = c_n \exp(-iE_n t). \quad (1.11)$$

On déduit de (1.9) et (1.11) :

$$\psi(\vec{r}_1, t_1) = \langle \vec{r}_1 | \psi(t_1)\rangle = \sum_n u_n(\vec{r}_1) c_n \exp(-iE_n t_1) \quad (1.12)$$

et de (1.10) et (1.11) :

$$c_n = \int u_n^*(\vec{r}_1) \exp(iE_n t) \psi(\vec{r}_1, t_1) d^3\vec{r}_1. \quad (1.13)$$

D'autre part ;

$$\psi(\vec{r}_2, t_2) = \sum_n u_n(\vec{r}_2) c_n \exp(-iE_n t_2) \quad (1.14)$$

et compte tenu de (1.13) :

$$\psi(\vec{r}_2, t_2) = \int \Sigma_n u_n(\vec{r}_2) u_n^*(\vec{r}_1) \exp(-iE_n(t_2 - t_1)) \psi(\vec{r}_1, t_1) d^3\vec{r}_1 \quad (1.15)$$

on déduit

$$K(2, 1) = \Sigma_n u_n(\vec{r}_2) u_n^*(\vec{r}_1) \exp(-iE_n(t_2 - t_1)). \quad (1.16)$$

Nous avons ainsi défini $K(2, 1)$ en fonction des vecteurs propres et des valeurs propres de H .

$K(2, 1)$ est donc une quantité extrêmement riche en information, car sa connaissance exige la diagonalisation complète de H .

Si on fait dans (1.16) $t_2 = t_1 = t$, on trouve :

$$K(\vec{r}_2, t : \vec{r}_1, t) = \Sigma_n u_n(\vec{r}_2) u_n^*(\vec{r}_1) = \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (1.17)$$

étant donné que l'expression (1.16) de $K(2, 1)$ ne fait pas d'hypothèse sur l'ordre des temps t_1 et t_2 . Cependant, comme l'état du système à l'instant t_2 ne peut dépendre que de son état à des instants antérieurs, on complètera la définition de $K(2, 1)$ par la condition :

$$K(2, 1) = 0, \quad t_2 < t_1. \quad (1.18)$$

Finalement

$$K(\vec{r}_2, t_2 : \vec{r}_1, t_1) = \Sigma_n u_n(\vec{r}_2) u_n^*(\vec{r}_1) \exp(-iE_n(t_2 - t_1)) \theta(t_2 - t_1) \quad (1.19)$$

$\theta(t_2 - t_1)$ étant la fonction échelon unité définie par :

$$\begin{cases} \theta(t_2 - t_1) = 1 & \text{si } t_2 \geq t_1 \\ \theta(t_2 - t_1) = 0 & \text{si } t_2 < t_1. \end{cases} \quad (1.20)$$

Donc la fonction de Green relative à ce propagateur est définie par :

$$G(\vec{r}_2, \vec{r}_1 : E) = i \int_0^{+\infty} dT \exp(-iET) K(\vec{r}_2, \vec{r}_1 : T). \quad (1.21)$$

1.2.2 Équation satisfaite par $K(2, 1)$

Par définition, nous avons

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\vec{r}_2) \right] u_n(\vec{r}_2) \exp(-iE_n t_2) = 0 \quad (1.22)$$

d'autre part ;

$$\frac{d}{dt_2} \theta(t_2 - t_1) = \delta(t_2 - t_1) \quad (1.23)$$

il en résulte que :

$$\begin{aligned} & \left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\vec{r}_2) \right] K(\vec{r}_2, t_2 : \vec{r}_1, t_1) \\ &= i \sum_n u_n(\vec{r}_2) u_n^*(\vec{r}_1) \exp(-iE_n(t_2 - t_1)) \delta(t_2 - t_1) \\ &= i \sum_n u_n(\vec{r}_2) u_n^*(\vec{r}_1) \delta(t_2 - t_1) \\ &= i \sum_n \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \delta(t_2 - t_1) = i \delta(2, 1). \end{aligned} \quad (1.24)$$

En conclusion, $K(2, 1)$ est défini par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\vec{r}_2) \right] K(2, 1) = i \delta(2, 1), \quad \text{si } t_2 \geq t_1 \\ (b) & K = 0 \quad \text{si } t_2 < t_1. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Les équations (1.25-a) et (1.25-b) définissent la fonction de Green retardée $K(2, 1)$ de l'équation de Schrödinger (avec un hamiltonien indépendant du temps) (voir Appendice-1).

Remarque :

L'équation (1.25-b) est indispensable à la définition complète de K . En effet (1.25-a) définit K à l'addition près de n'importe quelle solution de l'équation homogène :

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\vec{r}_2) \right] K(2, 1) = 0. \quad (1.26)$$

(1.25-b) constitue une condition aux limites qui achève la définition de K .

Il résulte clairement des équations (1.25) que $K(2, 1)$ est une distribution.

1.2.3 États stationnaires d'une particule dans des potentiels carrés à une dimension (comportement d'une fonction d'onde stationnaire $\psi(t)$)

Cas où la particule est libre [région où le potentiel est nul]

Soit l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi(x,t) - V(x)\psi(x,t) = 0. \quad (1.27)$$

Donc la séparation des variables de l'équation (1.27), donne :

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) - E\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = 0 \quad (1.28)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + 2m(E - V(x))\varphi(x) = 0. \quad (1.29)$$

Puisque pour la particule libre $V(x)$ est nul, l'équation (1.29) se transforme comme :

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + 2mE\varphi(x) = 0. \quad (1.30)$$

L'équation (1.30) est une équation différentielle homogène du deuxième degré et son équation caractéristique est :

$$\lambda^2 + k_1^2 = 0, \text{ tels que, } k_1^2 = 2mE, \text{ avec } m > 0, E > 0. \quad (1.31)$$

Donc la solution de l'équation (1.30) est de la forme :

$$\varphi(x) = A \exp(ik_1x) + B \exp(-ik_1x) \quad (1.32)$$

où A, B sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann.

Particule de Heaviside [le potentiel est constant par morceaux]

On considère le potentiel :

$$V(x) = V_0\theta(x) ; V_0 \geq 0$$

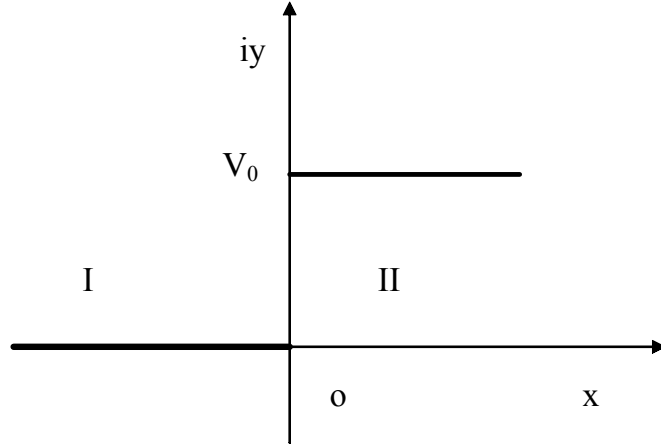


FIG. 1-1:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Principe du calcul

La démarche à suivre pour déterminer les états stationnaires dans un “ potentiel carré ” est la suivante : dans toutes les régions où $V(x)$ est constant, on écrit $\varphi(x)$ sous la forme (1.33) ou (1.36) qui convient ; on « raccorde » ensuite ces fonctions en imposant la continuité de $\varphi(x)$ et de $d\varphi/dx$ aux points où $V(x)$ est discontinu (conditions de Dirichlet-Neumann) voir figure (1.1).

-Le cas où $x < 0$ (i.e $V(x) = 0$) :

on a l'équation (1.30) :

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + 2mE\varphi(x) = 0.$$

De même manière du cas d'une particule libre on obtient :

$$\varphi_I(x) = A \exp(ik_1x) + B \exp(-ik_1x), \quad (1.33)$$

où A, B sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann.

-Le cas où $V(x) = V_0$ (i.e $x \geq 0$) :

L'équation (1.29) s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + 2m(E - V_0)\varphi(x) = 0. \quad (1.34)$$

L'équation caractéristique de (1.34) est :

$$\lambda^2 + k_2^2 = 0, \quad \text{telle que , } k_2^2 = 2m(E - V_0). \quad (1.35)$$

Donc la solution de l'équation (1.34) est :

$$\varphi_{II}(x) = A' \exp(ik_2x) + B' \exp(-ik_2x) \quad (1.36)$$

où A', B' sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann.

Les conditions de continuité de $\varphi(x)$ et $d\varphi(x)/dx$ au point $x = 0$ renforcées par la condition supplémentaire $B' = 0$, traduisant l'absence du retour de la particule de la région $x = +\infty$, permettent d'écrire :

$$\varphi_{II}(x) = A' \exp(ik_2x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \varphi_I(x) = A + B \quad (1.37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{d\varphi_I(x)}{dx} = iAk_1 - iBk_1 \quad (1.38)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \varphi_{II}(x) = A' = \varphi_{II}(0) \quad (1.39)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{d\varphi_{II}(x)}{dx} = iA'k_2. \quad (1.40)$$

D'après les conditions aux limites et de (1.37), (1.38), (1.39), (1.40) on obtient le système :

$$\begin{cases} A + B = A' \\ Ak_1 - Bk_1 = A'k_2 \end{cases} \quad (1.41)$$

On en déduit que :

$$B = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) A \quad (1.42)$$

$$A' = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A \quad (1.43)$$

(A étant un facteur global que j'ai pris égal à 1). Donc

$$\varphi_I(x) = \exp(ik_1x) + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) \exp(-ik_1x) \quad (1.44)$$

et

$$\varphi_{II}(x) = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \exp(ik_2x) \quad (1.45)$$

1.2.4 La fonction de Green :

D'après l'équation (1.25), la représentation en coordonnées de $K(T)$ est :

$$K(x, y, T) = \int_0^{+\infty} \phi_{E'}^*(y) \phi_{E'}(x) \exp(iE'T) dE' \quad (1.46)$$

Dans cette dernière formule, les fonctions $\phi_{E'}(x)$ et $\phi_{E'}^*(y)$ prennent les expressions de $\varphi_I(x)$ ou $\varphi_{II}(x)$ selon l'intervalle. La fonction $\phi_{E'}(x)$ est la fonction propre, et E' la valeur propre de H . La fonction de Green associée au propagateur $K(x, y, T)$ est :

$$\begin{aligned} G(x, y, E) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, T : y, 0) \exp(-iET) dT \\ &\equiv i \int_0^{+\infty} K(x, T : y, 0) \exp(-iET) dT \end{aligned}$$

Puisque $K(x, T : y, 0) = 0$ si $T < 0$, alors :

$$\begin{aligned} G(x, y, E) &= i \int_0^{+\infty} \exp(-iET) dT \int_0^{+\infty} \phi_{E'}^*(y) \phi_{E'}(x) \exp(iE'T) dE' \\ &= i \int_0^{+\infty} dE' \phi_{E'}^*(y) \phi_{E'}(x) \int_0^{+\infty} \exp iT (E - E') dT \\ &= \mathcal{P} \left(\frac{1}{E - E'} \right) + i\pi\delta(E - E'), \end{aligned} \quad (1.47)$$

où $\mathcal{P} \left(\frac{1}{E - E'} \right)$ est la valeur principale de Cauchy de $\left(\frac{1}{E - E'} \right)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 G(x, y, E) &= \int_0^{+\infty} \frac{\phi_{E'}^*(y) \phi_{E'}(x)}{E - E'} dE' \\
 &= \mathcal{P} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\phi_{E'}^*(y) \phi_{E'}(x)}{E - E'} dE' \right) + i\pi \phi_{E'}^*(y) \phi_{E'}(x). \tag{1.48}
 \end{aligned}$$

Ceci est le schéma décrit dans l'article d'Aguiar [1] pour construire la fonction de Green. Dans notre travail nous allons retrouver et corriger le résultat d'Aguiar en adoptant la méthode des perturbations et ce, en résumant exactement la série. Notre résultat est en parfaite concordance avec un grand nombre de résultats obtenus par d'autres méthodes [4].

Chapitre 2

LA METHODE DE PERTURBATION EN MECANIQUE QUANTIQUE

Dans ce chapitre nous allons développer une méthode de traitement des potentiels [9], [14], [2], [10], [3] appelée le développement en séries de perturbation utilisée généralement quand le potentiel est comparativement faible (comparé, par exemple, à l'énergie cinétique du système) [12]. De nos jours, et dans plusieurs travaux (voir références sus-mentionnées), la sommation des séries pour des potentiels non nécessairement faibles converge et reproduit exactement la solution. Dans notre travail, nous nous proposons aussi une telle tâche pour le potentiel particulier à savoir le potentiel de Heaviside. Bien que le développement de perturbation puisse être développé dans un sens strictement mathématique, il s'apprête aussi à une interprétation physique intéressante que nous présentons également. Cette méthode mène à une compréhension plus profonde de la mécanique quantique.

2.0.5 Développement des termes de la série de perturbation

Supposons qu'une particule se déplace dans un potentiel $V(x, t)$. Pour le moment le mouvement sera restreint à une dimension entre les points \mathbf{a} et \mathbf{b} et le noyau de Feynman (souvent dénommé propagateur de Feynman) est représenté par l'intégrale de chemin :

$$K_V(b, a) = \int_a^b (\exp\{i \int_{t_a}^{t_b} [\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, t)] dt\}) D[x(t)] \quad (2.1)$$

L'indice V est employé pour rappeler que la particule est soumise à l'action du potentiel V . Dorénavant la notation K_0 dénotera le noyau pour le mouvement d'une particule libre sans contraintes physiques. A l'heure actuelle, seul pour certains cas de potentiels, le noyau K_V a été déterminé faisant usage à différentes méthodes se trouvant dans la littérature standard. On trouve par exemple, dans le chapitre 3 de la référence [9], le calcul du propagateur pour l'oscillateur harmonique soumis à l'action d'une force extérieure $f(t)$. Dans ce cas le potentiel est de la forme :

$$V(x, t) = \frac{m}{2} \omega x^2 - x f(t) \quad (2.2)$$

En général, nous avons constaté que si le potentiel est quadratique en \mathbf{x} , le noyau peut être déterminé exactement. Cependant il y a d'autres types de potentiels qui peuvent être traités avec succès à l'aide de l'équation des Schrödinger. Ici nous étudions une technique qui est très utilisée si l'effet du potentiel est petit. Supposons que le potentiel est petit ou bien avec plus de précision supposons que l'intégrale sur le temps du potentiel le long d'un chemin est petit comparativement à l'unité. Puisque l'intégrale de l'exponentiel dans (2.1) dépend de $V(x, t)$, alors :

$$\exp \left[-i \int_{t_a}^{t_b} V(x, t) dt \right] = 1 - i \int_{t_a}^{t_b} V(x, t) dt + \frac{1}{2!} (-i)^2 \left[\int_{t_a}^{t_b} V(x, t) dt \right]^2 + \dots \quad (2.3)$$

qui est défini le long de n'importe quel chemin particulier $x(t)$. En utilisant ce développement dans (2.1) on trouve :

$$K_V(b, a) = K_0(b, a) + K^{(1)}(b, a) + K^{(2)}(b, a) + \dots \quad (2.4)$$

où

$$K_0(b, a) = \int_a^b \left[\exp(i \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt) \right] D[x(t)] \quad (2.5)$$

$$K^{(1)}(b, a) = -i \int_a^b D[x(t)] \left[\exp\left(i \int_{t_a}^{t_b} \frac{m \dot{x}^2}{2} dt\right) \right] \int_{t_a}^{t_b} V[x(s), s] ds \quad (2.6)$$

$$K^{(2)}(b, a) = -\frac{1}{2} \int_a^b D[x(t)] \left[\exp\left(i \int_{t_a}^{t_b} \frac{m \dot{x}^2}{2} dt\right) \right] \cdot \int_{t_a}^{t_b} V[x(s), s] ds \int_{t_a}^{t_b} V[x(\dot{s}), \dot{s}] d\dot{s} \quad (2.7)$$

et ainsi de suite...

2.0.6 Évaluation des termes

Considérons d'abord le noyau K , nous souhaitons échanger l'ordre de l'intégration par rapport à la variable \mathbf{x} et le chemin $x(t)$ que nous écrivons :

$$K^{(1)}(b, a) = -i \int_{t_a}^{t_b} F(s) ds \quad (2.8)$$

où

$$F(s) = \int_a^b D[x(t)] \left[\exp\left(i \int_{t_a}^{t_b} \frac{m \dot{x}^2}{2} dt\right) \right] V[x(s), s] \quad (2.9)$$

L'intégrale de chemin $F(s)$ peut être décrite comme suit. Elle est la somme sur tous les chemins des amplitudes de la particule libre pondérées par le potentiel $V[x(s), s]$ évalué alors au temps s . La seule caractéristique du chemin $x(t)$ qui est impliquée dans ce potentiel particulier V est la position du chemin $x(t)$ au moment particulier $\mathbf{t} = \mathbf{s}$. Ce que signifie que avant et après le temps s les chemins impliqués dans le calcul de $F(s)$ sont les chemins d'une particule libre. Ce schéma qu'on vient de décrire est représenté sur la figure (2.1).

En utilisant les mêmes arguments qui ont mené à l'équation (2-31) de la référence [9], nous divisons chaque chemin en deux parties, une avant le temps $\mathbf{t} = \mathbf{s}$ et l'autre après ce temps. Explicitement, nous supposons que chaque chemin passe par le point \mathbf{x}_c à cet instant s . Nous

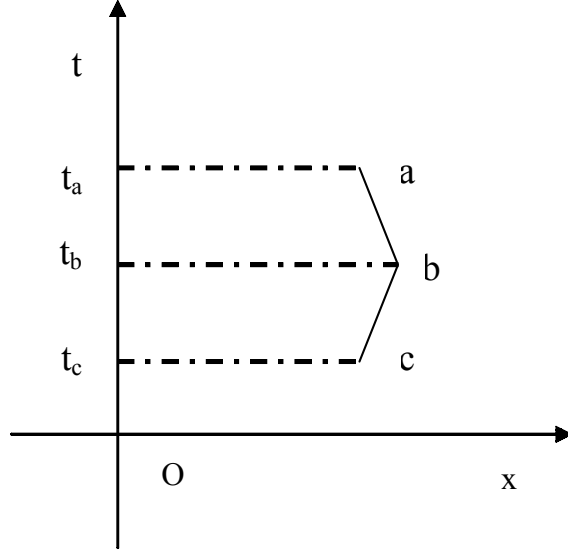


FIG. 2-1:

intégrerons sur toutes les valeurs que peut prendre \mathbf{x}_c et ceci dépend du potentiel en question. Si nous dénotons le point $x_c(s)$ par \mathbf{c} (c'est-à-dire, $\mathbf{s} = \mathbf{t}_c$), donc la somme sur tous des tels chemins peut être écrite comme $K_0(b, c)K_0(c, a)$. Ceci signifie que $F(s) = F(t_c)$ peut être écrite comme suit :

$$F(t_c) = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(b, c)K_0(c, a)dx_c. \quad (2.10)$$

La substitution de ceci dans l'équation (2.8) donne (avec $V(x_c, t_c) \equiv V(c)$)

$$K^{(1)}(b, a) = -i \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(b, c)V(c)K_0(c, a)dx_c dt_c. \quad (2.11)$$

2.0.7 Interprétation des termes

L'équation (2.11) est très, importante, très utile, et possède une interprétation physique. Nous appelons diffusion l'interaction entre le potentiel et la particule; ainsi nous disons que le potentiel disperse ou diffuse la particule et que l'amplitude de diffusion par un potentiel est $-(i)V$ par unité de volume et par unité de temps.

Avec cette interprétation nous pouvons décrire K_V de la façon suivante. K_V peut être vu

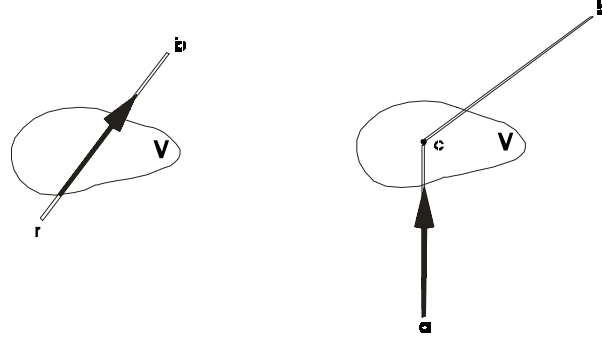


FIG. 2-2:

comme la somme sur différents groupes de chemins commençant tous par le point **a** et finissant par le point **b** (voir la figure (2.2)) :

1. La particule n'est pas dispersée du tout [$K_0(b, a)$].
2. La particule peut être dispersée une seule fois [$K^{(1)}(b, a)$].
3. La particule peut être dispersée deux fois [$K^{(2)}(b, a)$] etc.....

Chaque groupe de chemins est lui même une somme sur différents groupes. Considérons par exemple le noyau à une seule dispersion $K^{(1)}(b; a)$. La particule commence à partir de **a**, se déplace en tant qu'une particule libre au point $\mathbf{x}_c, \mathbf{t}_c = \mathbf{c}$ où elle est dispersée par le potentiel $V(c)$, après quoi elle se déplace comme une particule libre du point **c** à la position finale. L'amplitude pour un tel chemin est :

$$K_0(b, c) [-iV(c)dx_c dt_c] K_0(c, a) \quad (2.12)$$

(on doit se rappeler que dans la convention que nous employons le mouvement de la particule est décrit en lisant les formules vers l'avant, c.-à-d., de droite à gauche)

La construction de cette amplitude suit la règle indiquée dans Sec.2 – 5,[9], à savoir que les événements d'amplitudes se produisant en succession dans le temps, se multiplient. La forme finale pour le noyau $K^{(1)}$ est obtenue en ajoutant toutes les amplitudes élémentaires en intégrant sur \mathbf{x}_c et \mathbf{t}_c comme indiqué dans l'équation (2.11). En utilisant ce raisonnement, nous pouvons noter le noyau $K^{(2)}$ pour la double dispersion immédiatement comme :

$$K^{(2)}(b, a) = (-i)^2 \int \int K_0(b, c)V(c)K_0(c, d)V(d)K_0(d, a)d\tau_c d\tau_d \quad (2.13)$$

où $d\tau = dx.dt$

Ici, la particule se déplace comme une particule libre de \mathbf{a} à \mathbf{d} . En \mathbf{d} la particule est dispersée par le potentiel $V(d)$ puis elle se déplace alors comme une particule libre jusqu'à \mathbf{c} où elle est dispersée par le potentiel $V(c)$. Ensuite, elle se déplace de \mathbf{c} à \mathbf{b} encore comme une particule libre.

Ici nous avons tacitement supposé que $t_c > t_d$ et donc :

$$K(b, a) = 0 \quad \text{pour } t_b < t_a. \quad (2.14)$$

Alors l'équation (2.13) est correcte sans aucune restriction sur l'intervalle de l'intégration sur t_c et t_d .

2.0.8 Une équation intégrale pour K_V

Avant d'appliquer les résultats des paragraphes précédents sur un exemple, nous allons développer quelques relations mathématiques impliquant les noyaux et les fonctions d'onde des systèmes se déplaçant dans un champ potentiel. En utilisant les résultats jusqu'ici obtenus, nous pouvons écrire l'équation (2.4) comme suit :

$$\begin{aligned} K_V(b, a) &= K_0(b, a) - i \int K_0(b, c)V(c)K_0(c, a)d\tau_c \\ &\quad (-i)^2 \int \int K_0(b, c)V(c)K_0(c, d)V(d)K_0(d, a)d\tau_c d\tau_d + \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Alternativement, cette expression peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} K_V(b, a) = K_0(b, a) &\quad -i \int K_0(b, c)V(c) * \\ &\quad \left[K_0(c, a) - i \int K_0(c, d)V(d)K_0(d, a)d\tau_d + \dots \right] d\tau_c \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'expression dans les crochets a la même forme que (2.15). Ceci signifie que K_V peut être écrit comme :

$$K_V(b, a) = K_0(b, a) - i \int K_0(b, c)V(c)K_V(c, a)d\tau_c \quad (2.17)$$

qui est une expression exacte. C'est une équation intégrale déterminant K_V si K_0 est connu. Ainsi le problème de l'intégrale de chemin a été transformé en une équation intégrale.

Ce dernier résultat peut être compris physiquement de la façon suivante : Toute amplitude de transition du système de \mathbf{a} vers \mathbf{b} , peut être exprimée comme somme de deux alternatives. La première alternative est l'amplitude que la transition a lieu sans la dispersion, exprimée par K_0 . La deuxième alternative est l'amplitude que la transition a lieu avec une ou une infinité de dispersions données par le dernier terme de (2.17).

2.0.9 Développement de la fonction d'onde

Dans la section (3-4) [9], est présentée l'idée d'une fonction d'onde et sont discutées quelques relations entre la fonction d'onde et les noyaux. L'équation (3.42) [9] montre comment la fonction d'onde à l'instant t_b peut être obtenue à partir de la fonction d'onde à un temps plus tôt t_a à l'aide du noyau décrivant le mouvement du système entre ces deux instants :

$$\psi(b) = \int K_V(b, a)\psi(a)dx_a \quad (2.18)$$

Si le développement en série de (2.12) pour K_V est substituée dans cette équation, le résultat sera ainsi un développement en série pour $\psi(b)$:

$$\psi(b) = \int K_0(b, a)\psi(a)dx_a - i \int \int K_0(b, c)V(c)K_0(c, a)d\tau_c\psi(a)dx_a + \dots \quad (2.19)$$

Le premier terme de la série donne la fonction d'onde à l'instant t_b en supposant que le système est libre entre les moments t_a et t_b . Dénotons ce terme par ϕ :

$$\phi(b) = \int K_0(b, a)\psi(a)dx_a \quad (2.20)$$

En utilisant cette définition, la série (2.19) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}\psi(b) &= \phi(b) - i \int K_0(b, c) V(c) \phi(c) d\tau_c \\ &\quad + i \int \int K_0(b, c) V(c) K_0(c, d) V(d) \phi(d) d\tau_c d\tau_d + \dots\end{aligned}\quad (2.21)$$

Exemple : En utilisant des arguments semblables à ceux qui mènent à (2.17), on peut prouver que la fonction $\psi(b)$ d'onde satisfaisant l'équation intégrale :

$$\psi(b) = \phi(b) - i \int K(b, c) V(c) \psi(c) d\tau_c \quad (2.22)$$

est équivalente à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - V \psi = 0 \quad (2.23)$$

2.0.10 Théorie des perturbations et diagrammes de Feynman

Les " diagrammes de Feynman " donnent une interprétation graphique intuitive pour exprimer et expliquer les différents termes de la série de perturbation. Ces diagrammes émergent naturellement de l'expression de l'intégrale de chemin pour le propagateur par des techniques semblables à celles employées par Kac dans sa preuve que l'espérance conditionnelle satisfasse à l'équation de diffusion.

Les mathématiques à employer pour obtenir les diagrammes de Feynman sont presque identiques à celles utilisées dans la section précédente, sauf que maintenant nous travaillons dans l'image-intégral de chemin-plutôt que l'image -mesure de Wiener- comme dans (9.17) et (9,18)[9] et nous développons alors le noyau de Green :

$$\begin{aligned}K(x, t; y, 0) &= \int_{y,0}^{x,t} Dx(\tau) \exp \left[i \int_0^t \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) d\tau \right] \\ &= \int_{y,0}^{x,t} Dx(\tau) \exp \left[i \int_0^t \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-i)^j \left(\int V(x(\tau)) d\tau \right)^j\end{aligned}\quad (2.24)$$

Dans (2.24) $\exp[i \int_0^t (m \dot{x}^2) d\tau]$ apparaît en tant que facteur de la fonction à intégrer.

Dans la notation de la section 9[15] (qui est la notation habituelle dans la littérature mathématique) le facteur $\rho(x, t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \exp(-x^2/4Dt)$ a été absorbé dans la mesure et n'est pas explicitement apparu dans l'écriture de l'espérance.

Le premier terme ($j = 0$) dans le développement (2.24) :

$$\begin{aligned} K_0(x, t; y, 0) &\equiv \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[i \int_0^t \frac{1}{2} m \dot{x}^2 d\tau \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i t}} \exp \left[\frac{im}{2t} (x - y)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Est le propagateur de la particule libre. Le terme pour $j = 1$ s'exprime comme

$$K_1(x, t; y, 0) \equiv \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{im}{2} \int_0^t \dot{x}^2 d\tau \right] \int_0^t V(x(\tau)) d\tau. \quad (2.26)$$

Comme dans la preuve de Kac, nous échangeons l'ordre de l'intégration et faisons l'intégration de chemin avant l'intégration sur τ . À ce stade dans la preuve de Kac nous avons discuté le probabilité pour obtenir Éq(9,21) [15], mais maintenant nous employons le raisonnement légèrement différent. Nous faisons appel à la définition de l'intégrale de chemin comme limite d'une intégrale multiple ; notons τ par t_j , et notons $x(\tau)$ par x_j . Ceci donne

$$\begin{aligned} K_j(x, t; y, 0) &= \sum_j (\Delta t) \int \prod_{j=1}^N dx_j \left(\frac{m}{2\pi i \Delta t} \right)^{(N+1)/2} \\ &\quad \times \exp \left[\frac{im}{2\Delta t} \sum_{k=0}^N (x_{k+1} - x_k)^2 \right] V(x_j). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Les intégrales pour $k = 1, \dots, j-1$ et $k = j+1, \dots, N$ sont justes des intégrales de la particule libre. Pour $j = 1$, il à noter que :

$$K_1(x, t; y, 0) = \int_0^t d\tau \int d\xi K_0(x - \xi, t - \tau) V(\xi) K_0(\xi - y, \tau). \quad (2.28)$$

Définissons donc :

$$K_k(x, t; y, 0) \equiv \frac{1}{k!} \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{im}{2} \int_0^t \dot{x}^2 d\tau \right] \left[\int_0^t V(x(\tau)) d\tau \right]^k \quad (2.29)$$

et comme dans la section 9[15], il suit que :

$$\begin{aligned} K_k(x, t; y, 0) &= \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{im}{2} \int_0^t \dot{x}^2 d\tau \right] \\ &\quad * \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \dots \int_0^t d\tau_k V(x(\tau_1)) \dots V(x(\tau_k)) \\ &= \int_0^t d\tau \int d\xi K_0(x, t; \xi, \tau) V(\xi) K_{k-1}(\xi, \tau; y, 0) \end{aligned} \quad (2.30)$$

et

$$K(x, t; y, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} (-i)^j K_j(x, t; y, 0). \quad (2.31)$$

Comme ci-dessus, nous pouvons immédiatement établir que :

$$K(x, t : y, 0) = K_0(x, t; y, 0) - i \int_0^t d\tau \int d\xi K_0(x, t; \xi, \tau) V(\xi) K(\xi, \tau; y, 0) \quad (2.32)$$

La transformation de Fourier sur le temps de $K(x, t : y, 0)$ est

$$G(x, E : y, 0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} dT K(x, T : y, 0) \exp(-iET), \quad (2.33)$$

Donc la transformation de Fourier de l'équation (2,32) est :

$$G(x, E : y, 0) = G_0(x, E : y, 0) - \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta G_0(x, E : \zeta, 0) V(\xi) G(\zeta, E, y, 0) \quad (2.34)$$

Pour

$$V(x) = V_0 \theta(x), \quad \text{où, } \theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (2.35)$$

l'équation (2,34) s'écrit :

$$G(x, E : y, 0) = G_0(x, E : y, 0) - V_0 \int_0^\infty d\zeta G_0(x, E : \zeta, 0) G(\zeta, E, y, 0). \quad (2.36)$$

Cette équation intégrale est nommée équation de Wiener-Hopf du deuxième espèce. Pour la résoudre, nous allons énoncer la théorie des fonctions sectionnellement analytiques [6].

Chapitre 3

METHODE DE RÉOLUTION UTILISANT LES FONCTIONS ANALYTIQUES ET LES FONCTIONS SECTIONNELLEMENT ANALYTIQUES

Ce chapitre présente un ensemble de méthodes diverses de résolution des équations intégrales. Ces méthodes ont toutes pour outil commun, l'utilisation des fonctions analytiques de la variable complexe dans le plan complexe \mathbb{C} [6], [17], [13], [18], [8]. Elles permettent la résolution, explicite dans beaucoup de cas, d'équations intégrales d'une seule variable (réelle ou complexe). Nous obtenons aussi à l'aide de la théorie du problème de Hilbert, des résultats concernant l'existence et l'unicité des solutions de certaines de ces équations intégrales.

3.0.11 Les fonctions analytiques

La méthode de Wiener-Hopf

Introduction : On considère le problème suivant :

Problème(1) : chercher f , nulle pour $t < 0$ vérifiant :

$$\int_0^{+\infty} k(t-t_0)f(t_0)dt_0 = g(t), \quad t \in]0, +\infty[\quad (3.1)$$

où $k(t)$ est une fonction donnée définie sur \mathbb{R} , appelée noyau et $g(t)$ est une fonction donnée définie pour $t > 0$. L'équation (3.1) est appelée équation intégrale de Wiener-Hopf de première espèce.

Problème(2) :

On cherche une fonction f , définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, vérifiant :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} k(t-t_0)f(t_0)dt_0 + g(t) \quad (3.2)$$

où le noyau $k(t)$ et la fonction $g(t)$ sont définis pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'équation (3.2) est appelée équation intégrale de Wiener-Hopf du deuxième espèce.

Méthode de Wiener-Hopf : L'équation (3.1) est une équation de convolution, l'utilisation de la transformation de Laplace bilatérale (ou transformation de Fourier selon **Lions**) est la base de la méthode de Wiener-Hopf que nous allons expliciter pour résoudre l'équation (3.1). Pour cela, nous allons faire les hypothèses suivantes :

Le noyau est borné et vérifie :

$$k(t) = O(\exp(-b|t|)), \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad b > 0, \quad (3.3)$$

et la fonction donnée $g(t)$ est localement bornée et telle que,

$$g(t) = O(\exp(ct)), \quad t \rightarrow +\infty, \quad 0 < c < b. \quad (3.4)$$

Alors on cherche $f(t)$ localement bornée et telle que :

$$f(t) = O(\exp(at)), \quad t \rightarrow +\infty, \quad 0 < a < b. \quad (3.5)$$

Introduisons

$$g_+(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ g(t), & t < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$g_-(t) = \begin{cases} -\int_0^{+\infty} K(t-t_0) f(t_0) dt_0 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$f_-(t) = \begin{cases} -f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

On vérifie alors que :

$$g_+(t) = O(\exp(bt)), \text{ pour } t \rightarrow -\infty \quad (3.9)$$

Considérons formellement les transformées de Laplace bilatérales :

$$F_-(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_-(t) \exp(-st) dt \quad (3.10)$$

$$G_+(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(t) \exp(-st) dt = \int_{-\infty}^0 g(t) \exp(-st) dt \quad (3.11)$$

$$G_-(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_-(t) \exp(-st) dt \quad (3.12)$$

$$K(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t) \exp(-st) dt. \quad (3.13)$$

Le comportement de type exponentiel décroissant du noyau $k(t)$ montre que sa transformée de Laplace bilatérale K est définie pour tout $s \in \mathbb{R}$. Elle se prolonge en outre dans le plan complexe en une fonction analytique pour tout s telle que $-b < \operatorname{Re}(s) < b$. De même, la fonction $G_+(s)$ se prolonge en une fonction analytique dans le plan complexe défini pour $\operatorname{Re}(s) < b$. Les

transformées bilatérales de Laplace $F_-(s)$ et $G_-(s)$ ne sont pas à priori définies pour s réel, on peut les définir pour s complexe vérifiant respectivement, $Re(s) > a$, $Re(s) > c$.

Par la transformation de Laplace bilatérale formelle de (3.1), le problème revient à trouver $F_-(s)$ et $G_+(s)$ vérifiant :

$$K(s)F_-(s) = G_+(s) + G_-(s) \quad (3.14)$$

relation qui vaut pour tout s appartenant à la bande commune d'analyticité des fonctions K, F_-, G_+, G_- , i.e pour s vérifiant :

$$\{s \in \mathbb{C}; \max(a, c) < Re(s) < b\}. \quad (3.15)$$

Alors le type d'équation (3.14) rentre dans le cadre général suivant :

Problème(3) :-

Trouver F_- et F_+ telles que :

$s \rightarrow F_-(s)$ soit analytique pour $Re(s) > a$, et $s \rightarrow F_+(s)$ soit analytique pour $Re(s) < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, vérifiant :

$$A(s)F_-(s) + B(s)F_+(s) = C(s) \quad (3.16)$$

où les fonctions A, B, C de la variable complexe s telles que $a < Re(s) < b$ sont données. La résolution du problème(3) est alors basée sur deux idées qui sont la factorisation et la décomposition d'une fonction analytique définie dans une bande du plan complexe ; plus précisément si nous savons factoriser A/B sous la forme :

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{H_-(s)}{H_+(s)} \quad (3.17)$$

avec $H_-(s)$ analytique dans $Re(s) > a$, $H_-(s) \neq 0$, pour tout s (avec $Re(s) > a$), et $H_+(s)$ analytique dans $Re(s) < b$, $H_+(s) \neq 0$ pour toute s (avec $Re(s) < b$), alors l'équation (3.16) est équivalente à :

$$H_+(s)F_+(s) + H_-(s)F_-(s) = \frac{C(s)H_+(s)}{B(s)}. \quad (3.18)$$

De (3.17) on déduit que :

$$\frac{H_+(s)}{B(s)} = \frac{H_-(s)}{A(s)} \quad (3.19)$$

donc l'équation (3.18) s'écrit :

$$H_+(s)F_+(s) + H_-(s)F_-(s) = \frac{C(s)H_-(s)}{A(s)}. \quad (3.20)$$

Si nous savons alors décomposer $\frac{C(s)H_-(s)}{A(s)}$ sous la forme :

$$\frac{C(s)H_-(s)}{A(s)} = S_+(s) - S_-(s) \quad (3.21)$$

avec $S_-(s)$ analytique dans $Re(s) > a$, et $S_+(s)$ analytique dans $Re(s) < b$, alors l'équation (3.20) s'écrit :

$$H_+(s)F_+(s) - S_+(s) = -H_-(s)F_-(s) - S_-(s) \quad (3.22)$$

Les deux membres de l'équation (3.22) sont deux fonctions analytiques sur la bande $a < Re(s) < b$, où elles sont égales. Elles sont donc toutes les deux égales à une fonction entière $E(s)$ (voir Appendice-4), nous en déduisons finalement toutes les solutions de l'équation (3.16) :

$$F_+(s) = \frac{E(s) + S_+(s)}{H_+(s)}, \text{ et } F_-(s) = \frac{-E(s) - S_-(s)}{H_-(s)}. \quad (3.23)$$

Décomposition d'une fonction analytique définie dans une bande du plan complexe

Théorème(1) : Soit $s \rightarrow G(s)$ une fonction analytique dans la bande $\alpha < Re(s) < \beta$, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < a < b < \beta$. Si G vérifie l'hypothèse du comportement à l'infini :

$$|G(s)| \leq \frac{c}{|s|^\gamma + 1} \quad , \quad \gamma > 0 \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \forall s, \quad a \leq Re(s) \leq b, \quad (3.24)$$

elle admet une décomposition de la forme :

$$G(s) = G_+(s) - G_-(s) \quad (3.25)$$

avec G_- analytique pour $Re(s) > a$, et G_+ analytique pour $Re(s) < b$.

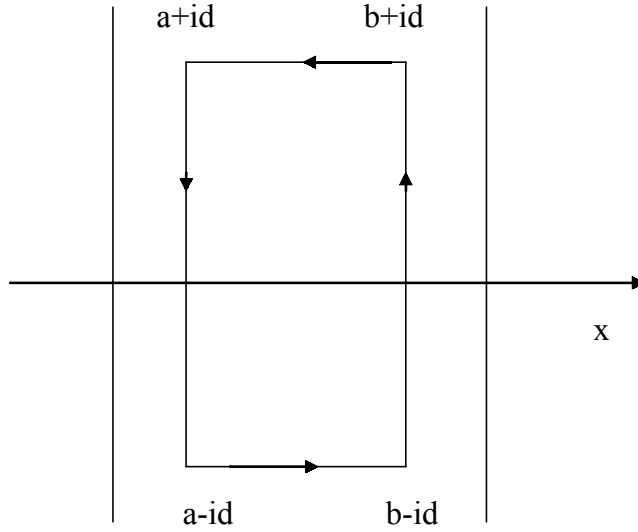


FIG. 3-1:

Preuve : Considérons le contour c_{\nearrow} suivant du plan complexe : d'après la formule de Cauchy, pour tout s appartenant à l'intérieur du domaine du contour c_{\nearrow} , on a :

$$G(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_{\nearrow}} \frac{G(u)}{u-s} du. \quad (3.26)$$

D'après la figure (3.1).

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c_{\nearrow}} \frac{G(u)}{u-s} du \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{a-id}^{b-id} \frac{G(u)}{u-s} du + \int_{b-id}^{b+id} \frac{G(u)}{u-s} du + \int_{b+id}^{a+id} \frac{G(u)}{u-s} du + \int_{a+id}^{a-id} \frac{G(u)}{u-s} du \right] \end{aligned}$$

D'après les lemmes (1) et (2) de Jordan (voir Appendice-3) et puisque G vérifie (3.24), alors pour $d \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{b-i\infty} \frac{G(u)}{u-s} du - \frac{1}{2i\pi} \int_{b+i\infty}^{a+i\infty} \frac{G(u)}{u-s} du \\ &\equiv G_+(s) - G_-(s) \end{aligned} \quad (3.27)$$

où

$$G_+(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{b-i\infty} \frac{G(u)}{u-s} du \quad (3.28)$$

et

$$G_-(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a+i\infty}^{b+i\infty} \frac{G(u)}{u-s} du \quad (3.29)$$

qui sont analytiques d'après (3.24) pour $Re(s) < b$ et $Re(s) > a$ respectivement.

Remarque(1) : La décomposition obtenue au théorème précédent n'est pas unique, en particulier on peut ajouter à G_+ et G_- une même fonction entière.

Factorisation d'une fonction analytique dans une bande du plan complexe

Théorème(1) : Si H est une fonction analytique dans la bande $\alpha < Re(s) < \beta$, qui vérifie ;

(i)

$$H(s) \neq 0, \quad \alpha < Re(s) < \beta \quad (3.30)$$

(ii) Il existe une constante non nulle notée $H(\infty)$ telle que :

$$|H(s) - H(\infty)| \leq \frac{C}{|s|^\gamma}, \quad C > 0, \gamma > 0, \quad \alpha < Re(s) < \beta. \quad (3.31)$$

Alors H se factorise sous la forme :

$$H(s) = \frac{H_+(s)}{H_-(s)} \quad (3.32)$$

où H_- et H_+ sont des fonctions analytiques respectivement pour $Re(s) > a > \alpha$, et $Re(s) < b < \beta$ données par :

$$H_+(s) = \exp(G_+(s)) \quad , \quad H_-(s) = \exp(G_-(s)) \quad (3.33)$$

et ne s'annulent pas dans leurs domaines respectivement d'analyticité (G_- et G_+ sont des fonctions analytiques respectivement dans $Re(s) > a$ et $Re(s) < b$).

Preuve : Nous voulons ainsi factoriser $H(s)$ sous la forme (3.32) avec H_- analytique pour $Re(s) > a$ et H_+ analytique pour $Re(s) < b$, où $\alpha < a < b < \beta$.

Lorsque $H(s)$ est telle que $\ln H(s)$ est bien défini dans la bande $\alpha < Re(s) < \beta$ et vérifie l'hypothèse (3.31), il suffit d'appliquer le théorème(1) à $\ln H(s)$ pour obtenir :

$$\ln H(s) = G_+(s) - G_-(s) \quad (3.34)$$

d'où

$$H(s) = \exp(G_+(s) - G_-(s)) = \exp G_+(s) / \exp G_-(s). \quad (3.35)$$

Or sous les conditions (i) et (ii), il existe un entier relatif p tel que pour :

$$\hat{H}(s) = \frac{H(s)}{H(\infty)} \left(\frac{s - \alpha}{s - \beta} \right)^p \quad (3.36)$$

les fonctions $\ln \hat{H}(s)$ soient définies de manière unique et vérifient (3.24).

Remarque(2) : Si la fonction H ne vérifie pas (i) mais vérifie (ii), la méthode du théorème(2) ne s'applique pas directement. Supposons que H présente des zéros de multiplicité finie dans la bande $\alpha < Re(s) < \beta$ et notons a_1, a_2, \dots, a_m les zéros distincts ou non de H . Introduisons une fonction L telle que :

$$L(s) = \frac{H(s) (s - \beta)^m}{(s - a_1)(s - a_2) \dots (s - a_m)} \quad (3.37)$$

cette fonction vérifie les hypothèses (i), (ii) de théorème(2) et se factorise donc sous la forme :

$$L(s) = \frac{L_+(s)}{L_-(s)} \quad (3.38)$$

avec L_- (resp L_+) étant analytique pour $Re(s) > a$ (resp $Re(s) < b$), on en déduit de (3.37) et (3.38) que :

$$H(s) = \prod_{i=1}^m (s - a_i) \frac{L_+(s)}{(s - \beta)^m L_-(s)}. \quad (3.39)$$

Remarque(3) : La décomposition d'une fonction n'est pas unique, il en est de même de la factorisation, car on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par une même fonction entière n'ayant pas de zéro dans \mathbb{C} . (avec les notations du théorème (2) pour $\hat{H}(s) = \frac{\hat{H}_+(s)}{\hat{H}_-(s)}$) on peut prendre $\hat{H}_\pm(s) = \exp G_\pm(s)$ avec $G_\pm(s)$ la même notation du théorème (2) et le comportement de $\hat{H}_\pm(s)$ (donc de $H_\pm(s)$ à l'infini).

Application à l'équation intégrale de Wiener-Hopf de deuxième espèce :Généralités

Considérons maintenant le problème(2) qui consiste à trouver f vérifiant (3.2). On suppose que le noyau k vérifie (3.3) et on définit cette fois g_+ et g_- par :

$$g_-(t) = \begin{cases} g(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad g_+(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ g(t) & t < 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

On suppose que g_- et g_+ vérifient :

$$\begin{cases} g_-(t) = O(\exp ct) & t \rightarrow +\infty, \quad 0 < c < b \\ g_+(t) = O(\exp bt) & t \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.41)$$

Il résulte de (3.16) et (3.41) que l'on a :

$$f_+(t) = O(\exp bt), \quad t \rightarrow -\infty \quad (3.42)$$

où

$$f_+(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ f(t) & t < 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

et

$$f_-(t) = \begin{cases} -f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

On propose donc de chercher f bornée sur tout borné de \mathbb{R} et telle que :

$$f(t) = O(\exp at), \quad t \rightarrow +\infty, \quad 0 < a < b$$

Soient F_-, G_-, K, F_+, G_+ les transformées de Laplace bilatérales de f_-, g_-, k, f_+, g_+ , on a :

F_- est analytique dans $Re(s) > a$

G_- est analytique dans $Re(s) > c$

F_+ est analytique dans $Re(s) < b$

G_+ est analytique dans $Re(s) < b$

K est analytique dans $-b < Re(s) < b$

Les fonctions F_+, G_+, F_-, G_-, K ont en commun la bande d'analyticité $max(a, c) < Re(s) < b$ et y vérifient (d'après (3.2) par la transformation de Laplace) :

$$F_+(s) = [1 - K(s)]F_-(s) + G_+(s) + G_-(s) \quad (3.45)$$

qui est une équation de type (3.16) pouvant se résoudre par la méthode de factorisation et de décomposition.

Exemple : Soit l'équation intégrale ;

$$f(t) = -4 \int_0^{+\infty} \exp(-|t - u|)f(u)du + \exp(-|t|) \quad (3.46)$$

On cherche $f(t)$ qui est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Désignons par F_-, G_+, K, F_+, G_- les transformées de Laplace bilatérales des fonctions f_-, g_+, k, f_+, g_- de même manière de généralité et la bande commune d'analyticité $max(a, c) < Re(s) < 1, \quad a, c < 1$

$$\begin{aligned} K(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(t) \exp(-st)dt = -4 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|t| - st)dt \\ &= (-4) \frac{2}{1 - s^2} = \frac{8}{s^2 - 1}, \quad -1 < Re(s) < 1 \end{aligned} \quad (3.47)$$

d'où

$$\begin{aligned} 1 - K(s) &= 1 - \frac{8}{s^2 - 1} = \frac{s^2 - 9}{s^2 - 1}, \\ G_+(s) &= \int_{-\infty}^0 \exp(-t) \exp(-ts)dt = \frac{1}{1 - s}, \quad Re(s) < 1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

et

$$G_-(s) = \int_0^{+\infty} \exp(-t(1+s)) dt = \frac{1}{1+s}, \quad \text{Re}(s) < a < 1. \quad (3.49)$$

Une factorisation évidente de $[1 - K(s)]$ consiste à prendre par exemple :

$$H_-(s) = \frac{s+3}{s+1}, \quad H_+(s) = \frac{s-1}{s-3} \quad (3.50)$$

ce qui conduit à décomposer la fonction suivante :

$$\begin{aligned} H_+(s)(G_+(s) + G_-(s)) &= \frac{s-1}{s-3} \left(\frac{2}{1-s^2} \right) = \frac{-2}{(s-3)(s+1)} \\ &= -\frac{1}{2(s-3)} + \frac{1}{2(s+1)}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

on a alors

$$H_+(s)F_+(s) + \frac{1}{2(s-3)} = H_-(s)F_-(s) + \frac{1}{2(s+1)} = E(s) \quad (3.52)$$

d'où

$$F_+(s) = \frac{(s-3)E(s)}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s-1)}, \quad \text{et} \quad F_-(s) = \frac{(s+1)E(s)}{2(s+3)} - \frac{1}{2(s+3)}. \quad (3.53)$$

Lorsque $E(s) = 0$, $f_+(t)$ et $f_-(t)$ sont données par :

$$f_+(t) = \frac{1}{2} \exp t \quad t < 0, \quad \text{et} \quad f_-(t) = -\frac{1}{2} \exp(-3t) \quad t > 0. \quad (3.54)$$

3.0.12 Les fonctions sectionnellement analytiques

Les fonctions sectionnellement analytiques (s.analytiques)

Définition(1) :

Un arc de courbe différentiable est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) ,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t_a \leq t \leq t_b \quad (3.55)$$

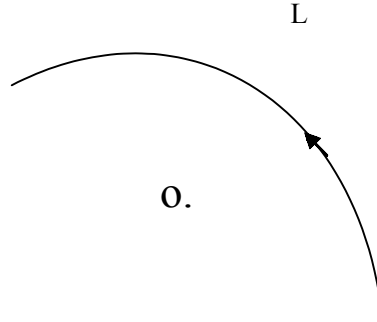


FIG. 3-2:

(t_a et t_b finis, si bien que par la suite, un arc de courbe différentiable sera une partie compacte de \mathbb{R}^2), où les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont différentiables et telles que :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0; \quad \forall t; \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (3.56)$$

Les extrémités, notées \mathbf{a} et \mathbf{b} , sont des images de t_a et t_b . Nous supposons qu'il n'y a pas de point double, ce qui se traduit par la propriété :

$$\begin{cases} x(t_a) = x(t_b) \\ y(t_a) = y(t_b) \end{cases} \Leftrightarrow t_a = t_b, \quad (3.57)$$

Définition(2) :

Nous appellerons contour différentiable un arc différentiable fermé, c'est-à-dire tel que les extrémités \mathbf{a} et \mathbf{b} coïncident ainsi que la tangente en ces deux points. Nous traduisons cette dernière propriété par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t_a + 0)}{dt} = \frac{dx(t_b - 0)}{dt} \\ \frac{dy(t_a + 0)}{dt} = \frac{dy(t_b - 0)}{dt} \end{cases}. \quad (3.58)$$

Remarque(1) :

Les arcs et les contours ont un sens de parcours correspondant aux \mathbf{t} croissants. Nous supposons que les contours sont orientés positivement selon ce sens de parcours, ce qui correspond à la figure ci-contre (figure (3.2)) :

Définition(3) :

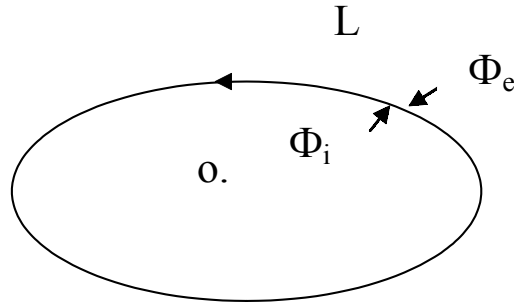


FIG. 3-3:

Nous appelons courbe différentiable une union finie d'arcs ou de contours différentiables, d'intersection vide. Une courbe différentiable par morceaux est une union d'arcs différentiables dont les extrémités peuvent coïncider. Dans ce cas, les tangentes sont en général différentes en ces points.

Définition(4) :

Une fonction Φ du plan \mathbb{R}^2 est dite sectionnellement continue, (s.continue) relativement à un arc ou à un contour L , si elle est continue en tout point \mathbf{z} , $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 - L$, et si elle est continue jusqu'au bord de part et d'autre de l'arc ou du contour L (à l'exception éventuelle des deux extrémités de l'arc).

Remarque(2) :

Une fonction s.continue admet donc des limites éventuellement différentes de part et d'autre du contour L . Nous noterons Φ_e et Φ_i ces limites dans le cas d'un contour, Φ_i étant la limite à l'intérieur du contour et Φ_e la limite à l'extérieur. Les fonctions $\Phi_i(t)$ et $\Phi_e(t)$ sont donc des fonctions continues en l'abscisse \mathbf{t} , figure (3.3).

Définition(5) :

Une fonction $\Phi(s)$ du plan complexe est dite sectionnellement analytique (ou s.analytique) relativement à une courbe différentiable L si :

- 1) elle est analytique en tout point non situé sur la courbe L ,
- 2) elle est s.continue relativement à la courbe L ,

3) elle vérifie au voisinage de toute extrémité \mathbf{a} des arcs de la courbe L

$$|\Phi(s)| \leq \frac{c}{|s-a|^\alpha}; s \notin L \quad 0 \leq \alpha < 1, \text{ où } c \text{ est une consante.} \quad (3.59)$$

Intégrales de Cauchy et formules de Plemelj

Soit L un contour ou un arc. Nous allons examiner les propriétés des intégrales de Cauchy de la forme :

$$\Phi(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z)}{z-s} dz, \quad s \in \mathbb{C} - L \quad (3.60)$$

où $f(z)$ est une fonction définie sur la courbe L .

Lorsque la fonction $f(z)$ est intégrable, la fonction $\Phi(s)$ est définie et analytique en tout point s non situé sur la courbe L . Mais elle n'a pas de sens lorsque le point s est sur la courbe L , car alors la fonction $f(z)/(z-s)$ n'est pas intégrable lorsque \mathbf{z} parcourt la courbe L .

Sous certaines hypothèses concernant la fonction f , nous allons définir, lorsque s est sur la courbe L , une fonction liée à l'intégrale (3.60) que nous appellerons valeur principale de Cauchy.

Définition(6) : Nous appellerons valeur principale de Cauchy que nous noterons :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_L \frac{f(z)}{z-s} dz \quad (3.61)$$

La limite suivante, quand elle existe :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_L \frac{f(z)}{z-s} dz \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{L-(L \cap B(s,\varepsilon))} \frac{f(z)}{z-s} dz, \quad z \in L \quad (3.62)$$

où $B(s, \varepsilon)$ est la boule du plan complexe de centre s et de rayon ε .

Proposition(1) : Soit L un contour ou un arc de classe $C^{1,\beta}$ (voir Appendice-6). Supposons que la fonction $f(z)$ soit höldérienne sur la courbe L , i.e vérifie :

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq |z_1 - z_2|^\beta \quad , 0 < \beta \leq 1 \quad , z_1, z_2 \in L . \quad (3.63)$$

Alors la valeur principale de Cauchy donnée par (3.62) existe en tout point s de la courbe L (sauf aux extrémités s'il s'agit d'un arc) et elle est une fonction continue de s (sauf aux extrémités de l'arc).

Preuve :

I) Considérons d'abord le cas où L est un contour, nous avons :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{L-(L \cap B(s,\varepsilon))} \frac{f(z)}{z-s} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{L-(L \cap B(s,\varepsilon))} \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + \frac{f(s)}{2i\pi} \int_{L-(L \cap B(s,\varepsilon))} \frac{dz}{z-s}. \quad (3.64)$$

L'hypothèse (3.63) montre que le premier terme du second membre admet pour limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz. \quad (3.65)$$

La limite du second terme du second membre est $f(s)/2$ (ici intervient l'orientation positive du parcours du contour), [16]. Nous avons donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_L \frac{f(z)}{z-s} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + \frac{f(s)}{2}. \quad (3.66)$$

La continuité de cette expression de s résulte alors d'après le théorème de Lebesgue.

II) Dans le cas où L est un arc, nous pouvons trouver un contour L' orienté positivement qui contient l'arc L (voir figure(3.4)).

Nous considérons alors la fonction \tilde{f} qui est le prolongement par zéro de la fonction f à tout le contour L' , alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z)}{z-s} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{L'} \frac{\tilde{f}(z)}{z-s} dz \quad (3.67)$$

et nous sommes donc ramenés au cas précédent. La seule différence est que la fonction \tilde{f} est discontinue aux extrémités \mathbf{a} et \mathbf{b} de l'arc (sauf si $f(a) = f(b) = 0$) et donc la valeur principale de Cauchy n'est pas bornée en général aux extrémités de l'arc. Nous avons également la formule analogue à (3.66) :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_L \frac{f(z)}{z-s} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + \frac{f(z)}{2i\pi} \ln \frac{b-s}{s-a} \quad s \in L, \quad s \neq a, b. \quad (3.68)$$

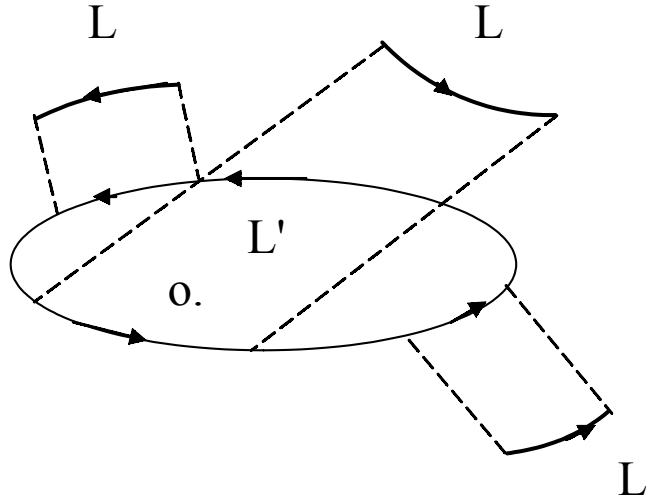


FIG. 3-4:

Remarque(3) : Soit L un arc orienté, nous pouvons le plonger dans un contour L' orienté positivement. Le domaine borné délimité par ce contour est appelé "intérieur". Ceci permet de définir pour les fonctions s.continues sur l'arc L de manière unique la limite intérieure Φ_i et la limite extérieure Φ_e .

Théorème(1) : Soit L un contour ou un arc de classe $C^{1,\beta}$; alors la fonction :

$$\Phi(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z)}{z-s} dz \quad , \quad s \notin L \quad (3.69)$$

Est s.analytique lorsque la fonction f est höldérienne. Dans ce cas les limites non tangentielles Φ_i et Φ_e de cette fonction, de part et d'autre de la courbe L , vérifient les formules de Plemelj suivantes :

$$\begin{cases} \Phi_i(s) - \Phi_e(s) = f(s) & s \in L \\ \Phi_i(s) + \Phi_e(s) = \frac{1}{i\pi} \oint_L \frac{f(z)}{z-s} dz & s \notin L \end{cases} \quad (3.70)$$

(si L est un arc et s différent des extrémités de L) où la valeur principale de Cauchy est donnée par (3.62).

Preuve :

I) Examinons d'abord le cas où L est un contour. Considérons le cas où le point \mathbf{s} extérieur au contour, nous avons :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z)}{z-s} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + \frac{f(s)}{2i\pi} \int_L \frac{dz}{z-s} \quad (3.71)$$

La dernière intégrale du second membre est nulle car la variation de $\ln(z-s)$ quand \mathbf{z} parcourt le contour est nulle. Soit \mathbf{u} un point du contour, lorsque \mathbf{s} tend vers \mathbf{u} en restant extérieur au contour L , la première intégrale du second membre de (3.71) admet une limite d'après le théorème de Lebesgue et nous avons donc :

$$\Phi_e(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z) - f(u)}{z-u} dz \quad , \quad u \in L. \quad (3.72)$$

Lorsque le point \mathbf{s} est intérieur au contour nous obtenons de même :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z)}{z-s} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + f(s), \quad (3.73)$$

et lorsque \mathbf{s} tend vers un point \mathbf{u} du contour L en restant intérieur, nous obtenons :

$$\Phi_i(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z) - f(u)}{z-u} dz + f(u), \quad u \in L. \quad (3.74)$$

Les formules de Plemelj résultent alors de (3.72), (3.74) et (3.66), i.e on obtient (3.70).

II) Dans le cas d'un arc la démonstration des formules de Plemelj est strictement analogue en tout point \mathbf{u} distinct de l'extrémité.

Il nous reste à montrer que dans ce cas la fonction Φ vérifie la condition 3) de la définition(5). Examinons l'origine \mathbf{a} .

La fonction $u \rightarrow f(u)$ admet une limite $f(a)$ en ce point. La fonction :

$$\tilde{g}(u) = \begin{cases} f(u) - f(a) & u \in L \\ 0 & u \in L', \quad u \notin L \end{cases} \quad (3.75)$$

Est höldérienne au voisinage du point \mathbf{a} du contour L' qui contient l'arc L . Nous avons :

$$\Phi(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z) - f(a)}{z - s} dz + \frac{f(a)}{2i\pi} \int_L \frac{dz}{z - s} \quad , s \notin L. \quad (3.76)$$

La première intégrale dans (3.76) est une fonction bornée de \mathbf{s} au voisinage du point \mathbf{a} (d'après les résultats obtenus dans le cas d'un contour). La seconde intégrale est :

$$\frac{f(a)}{2i\pi} \ln\left(\frac{s - b}{s - a}\right) \quad (3.77)$$

qui possède au point \mathbf{a} une singularité logarithmique; ce qui démontre la condition 3) de la définition(5),[16].

Le cas où L est une droite infinie : Nous allons indiquer ce que deviennent les propriétés précédentes des intégrales de Cauchy et des valeurs principales de Cauchy dans le cas où l'intégrale faite est prise sur une droite infinie.

Dans ce cas, l'intégrale de Cauchy est définie par :

$$\Phi(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z)}{z - s} dz; \quad b \in \mathbb{R}; \quad s \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{Re}(s) \neq b. \quad (3.78)$$

Proposition(2) : Soit $f(z)$ höldérienne sur la droite $\operatorname{Re}(z) = b$ et vérifiant la condition à l'infini :

$$f(z) = f(\infty) + O(z^{-\beta}) \quad \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad f(\infty) \in \mathbb{R} \quad (3.79)$$

Alors l'intégrale

$$\Phi(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z)}{z - s} dz \quad ; b \in \mathbb{R} \quad , s \in \mathbb{C} \quad , \operatorname{Re}(s) \neq b \quad (i.e \text{ l'intégrale}(3.78)) \quad (3.80)$$

Existe et est continue en tout point tel que $\operatorname{Re}(s) \neq b$.

La fonction Φ ainsi définie est s.analytique (par extonsion de la définition (5) au cas d'une

droite en éliminant la condition 3). La valeur principale de Cauchy est définie par :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z)}{z-s} dz \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, a \rightarrow \infty} \left(\int_{b-ia}^{s-\varepsilon} \frac{f(z)}{z-s} dz + \int_{s+\varepsilon}^{b+ia} \frac{f(z)}{z-s} dz \right)$$

$$\text{Re}(s) = b, |\text{Im}(s)| < a \quad (3.81)$$

Est telle que nous avons les formules de Plemelj :

$$\begin{cases} \Phi_i(s) - \Phi_e(s) = f(s) & \text{Re}(s) = b \\ \Phi_i(s) + \Phi_e(s) = \frac{1}{i\pi} \oint_L \frac{f(z)}{z-s} dz & \text{Re}(s) < b \end{cases} \quad (3.82)$$

Où $\Phi_i(s)$ est la limite « inférieure » de $\Phi(u)$, $u \rightarrow s$, $\text{Re}(u) < b$; et $\Phi_e(s)$ est la limite « supérieure ».

Preuve

Considérons l'intégrale suivante :

$$\Phi_a(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b-ia}^{b+ia} \frac{f(z)}{z-s} dz \quad \text{Re}(s) \neq b \quad (3.83)$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{b-ia}^{b+ia} \frac{f(z) - f(\infty)}{z-s} dz + \frac{f(\infty)}{2i\pi} \int_{b-ia}^{b+ia} \frac{1}{z-s} dz \quad (3.84)$$

D'après l'hypothèse (3.79) le premier terme du second membre de (3.84) admet pour limite lorsque $a \rightarrow +\infty$, l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z) - f(\infty)}{z-s} dz, \quad (3.85)$$

Le second terme admet pour limite [16] :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}f(\infty) & , & \text{si } \text{Re}(s) > b \\ -\frac{1}{2}f(\infty) & , & \text{si } \text{Re}(s) < b \end{cases} \quad (3.86)$$

Nous avons donc (c'est en fait la définition de $\Phi(s)$) :

$$\Phi(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z) - f(\infty)}{z-s} dz \pm \frac{1}{2}f(\infty); \quad (+, \text{ si } \text{Re}(s) > b \text{ et } -, \text{ si } \text{Re}(s) < b) \quad (3.87)$$

La portion de la droite $Re(s) = b$ définie par $|Im(s)| \leq a$ étant un arc, nous pouvons en utilisant le théorème(1), définir la valeur principale de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{b-ia}^{b+ia} \frac{f(z)}{z-s} dz, Re(s) = b, |Im(s)| < a \quad (3.88)$$

et nous avons $(\Phi_a)_i$ est la limite « inférieure », $(\Phi_a)_e$ est la limite « supérieure » suivant l'orientation de l'arc :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Phi_a)_i(s) - (\Phi_a)_e(s) = f(s) \\ (\Phi_a)_i(s) + (\Phi_a)_e(s) = \frac{1}{i\pi} \oint_{b-ia}^{b+ia} \frac{f(z)}{z-s} dz; \end{array} \right. \quad Re(s) = b, |Im(s)| < a \quad (3.89)$$

Pour obtenir les formules (3.89), il nous suffit de montrer que $(\Phi_a)_i$ (resp $(\Phi_a)_e$) tend vers Φ_i (resp Φ_e) lorsque a tend vers l'infini. De (3.66) on a :

$$\frac{1}{i\pi} \oint_{b-ia}^{b+ia} \frac{f(z)}{z-s} dz = \frac{1}{i\pi} \int_{b-ia}^{b+ia} \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + f(s). \quad (3.90)$$

Lorsque a tend vers l'infini (3.90) s'écrit :

$$\frac{1}{i\pi} \oint_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z)}{z-s} dz = \frac{1}{i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + f(s) \quad (3.91)$$

et de (3.83) et (3.74) on obtient :

$$(\Phi_a)_i(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b-ia}^{b+ia} \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + f(s), \quad Re(s) = b, |Im(s)| < a \quad (3.92)$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} (\Phi_a)_i(s) &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{b-ia}^{b+ia} \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + f(s) \\ Re(s) &= b, |Im(s)| < \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + f(s) = \Phi_i(s), \quad Re(s) = b \end{aligned} \quad (3.93)$$

et de(3.83) et (3.72) on obtient :

$$(\Phi_a)_e(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b-ia}^{b+ia} \frac{f(z) - f(s)}{z - s} dz \quad \text{Re}(s) = b, |Im(s)| < a$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} (\Phi_a)_e(s) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z) - f(s)}{z - s} dz & \text{Re}(s) = b, |Im(s)| < \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ &= \Phi_e(s). \end{aligned} \quad (3.94)$$

De (3.91), (3.93) et (3.94) en on déduit que :

$$\begin{cases} \Phi_i(s) - \Phi_e(s) = f(s) & \text{Re}(s) = b \\ \Phi_i(s) + \Phi_e(s) = \frac{1}{i\pi} \oint_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z)}{z - s} dz & \text{Re}(s) = b \end{cases} \quad (3.95)$$

et de (3.84) et (3.87) on déduit que :

$$\begin{aligned} \Phi(s) - \Phi_a(s) &= \\ \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{b-i\infty}^{b-ia} \frac{f(z) - f(\infty)}{z - s} dz + \int_{b+ia}^{b+i\infty} \frac{f(z) - f(\infty)}{z - s} dz \right) + \frac{1}{2i\pi} f(\infty) \left(\pm i\pi - \int_{b-ia}^{b+ia} \frac{dz}{z - s} \right) \end{aligned} \quad (3.96)$$

le second membre tend uniformément vers zéro (pour $|Im(s)| < \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$) quand \mathbf{a} tend vers l'infini. Le résultat s'en déduit en remarquant que l'égalité (3.96) permet également de définir la valeur principale de Cauchy, [16], comme la limite de :

$$\oint_{-\infty-ia}^{+\infty+ia} \frac{f(z)}{z - s} dz \quad (3.97)$$

$$\oint_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z)}{z - s} dz = \oint_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z) - f(\infty)}{z - s} dz = \lim_{a \rightarrow \infty} \oint_{b-ia}^{b+ia} \frac{f(z) - f(\infty)}{z - s} dz. \quad (3.98)$$

Remarque(4) : La fonction Φ est définie par (3.78) et telle que :

$$\begin{cases} \Phi(s) \rightarrow \frac{1}{2}f(\infty) & si \quad \operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty, \text{ et} \\ \Phi(s) \rightarrow -\frac{1}{2}f(\infty) & si \quad \operatorname{Re}(s) \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.99)$$

3.0.13 Problème de Hilbert

Introduction

Nous étudions dans ce paragraphe un problème général concernant les fonctions s.analytiques appelé généralement problème de Hilbert (ou également problème de Riemann-Hilbert) [6].

Nous donnons, sous certaines hypothèses concernant les données, la solution générale dans le cas d'un contour, puis d'un arc et enfin, dans le cas d'une droite infinie.

Soit L un contour ou un arc (ou un droite infinie). Le problème de Hilbert consiste en la recherche d'une fonction Φ s.analytique relativement à la courbe L (voir définitions (1) à (5), §2). Nous lui imposons en outre d'avoir une croissance au plus polynômiale à l'infini et de vérifier l'équation :

$$\Phi_i(z) = A(z)\Phi_e(z) + B(z), \quad z \in L, \quad (3.100)$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions données sur la courbe L . Rappelons que $\Phi_i(z)$ et $\Phi_e(z)$ sont définies de la même manière qu'au paragraphe précédente. Le problème de Hilbert est dit homogène si $B \equiv 0$. Nous supposons dans tout ce paragraphe que A n'a pas de zéros sur la courbe L .

Le problème de Hilbert dans le cas où L est un contour Nous supposons par commodité que l'origine des coordonnées est intérieure au contour L . Examinons d'abord la résolution du problème homogène. Dans le cas où la fonction $A(z)$ est telle que $\ln A(z)$ admet une définition univoque sur le contour L . L'équation homogène de Hilbert :

$$\Phi_i(z) = A(z)\Phi_e(z) \quad (3.101)$$

est équivalente à

$$\ln \Phi_i(z) - \ln \Phi_e(z) = \ln A(z) \quad (3.102)$$

Pour trouver la solution à cette équation on utilise les formules de Plemelj (si $\ln A(s)$ est höldérienne, et si L est de classe $C^{1,\beta}$), et les formules (3.72) (resp (3.74)) se trouvant dans la preuve du théorème(1) de paragraphe précédente appliquées pour les fonctions $\ln \Phi_e(z)$ (resp $\ln \Phi_i(z)$) c'est à dire :

$$\ln \Phi_e(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln A(s) - \ln A(z)}{s - z} ds, \quad z \in L \quad (3.103)$$

$$\ln \Phi_i(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln A(s) - \ln A(z)}{s - z} ds + \ln A(z), \quad z \in L \quad (3.104)$$

Des formules (3.103) et (3.104) on déduit les formules de Plemelj :

$$\begin{cases} \ln \Phi_i(z) - \ln \Phi_e(z) = \ln A(z), & z \in L \\ \ln \Phi_i(z) + \ln \Phi_e(z) = \frac{1}{i\pi} \oint_L \frac{\ln A(s)}{s - z} ds, & z \in L. \end{cases} \quad (3.105)$$

d'où la solution de l'équation (3.101) :

$$\Phi(z) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln A(s)}{s - z} ds\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \notin L \text{ (théo(1), §2)}. \quad (3.106)$$

Dans le cas général, nous allons suivre la même idée pour trouver toutes les solutions du problème de Hilbert homogène.

Définition : L'index p est un entier relatif égal au rapport à 2π de l'accroissement de l'argument de $A(z)$ lorsque le point z parcourt le contour L :

$$p = \frac{1}{2\pi} [\arg A(z)]_L. \quad (3.107)$$

Proposition(1) : Soit $A(z)$ une fonction définie et höldérienne sur un contour L (L de classe $C^{1,\beta}$) et ne s'annulant pas sur ce contour : si p désigne l'index donné par la définition précédente, le problème de Hilbert homogène (3.101) admet comme solution particulière la

fonction $\Phi(z)$ s.analytique suivante :

$$\Phi(z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L ds \ln(s^{-p}A(s))/s-z\right), & \text{si } z \text{ est int\u00e9rieur au contour} \\ z^{-p} \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L ds \ln(s^{-p}A(s))/s-z\right) & \text{si } z \text{ est ext\u00e9rieur au contour.} \end{cases} \quad (3.108)$$

Toutes les autres solutions du probl\u00e8me de Hilbert homog\u00e8ne sont de la forme :

$$\Theta(z) = \Phi(z)P(z), \quad (3.109)$$

o\u00f9 $P(z)$ est un polyn\u00f4me quelconque.

Preuve :

L'origine \u00e9tant int\u00e9rieure au contour, la fonction :

$$z \rightarrow A_0(z) = z^{-p}A(z) = \frac{A(z)}{z^p} \quad (3.110)$$

a un index nul et ne s'annule pas sur le contour L (i.e $A_0(z)$ ne subit pas d'accroissement lorsque z parcourt L et $\ln A_0(z)$ est une fonction continue sur L). Son logarithme a une d\u00e9termination unique et une solution Ψ du probl\u00e8me de Hilbert homog\u00e8ne correspondant \u00e0 la fonction A_0 , est donn\u00e9e par (3.106) :

$$\Psi(z) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln A_0(s)}{s-z} ds\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \notin L \quad (3.111)$$

et ainsi

$$\Psi_i(z) = A_0(z)\Psi_e(z) \quad z \in L \quad (3.112)$$

Consid\u00e9rons alors la fonction Φ d\u00e9finie par :

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Psi(z), & \text{si } z \text{ est int\u00e9rieur au contour} \\ \frac{\Psi(z)}{z^p}, & \text{si } z \text{ est ext\u00e9rieur au contour.} \end{cases} \quad (3.113)$$

Il est clair que la fonction Φ est une solution du probl\u00e8me homog\u00e8ne de Hilbert relatif \u00e0 la fonction A . Ceci montre la premi\u00e8re partie de notre proposition.

Démontrons enfin (3.109) : soit donc Θ une autre solution de notre problème i.e :

$$\Theta_i(z) = A(z)\Theta_e(z), \quad z \in L \quad (3.114)$$

nous avons donc :

$$\frac{\Theta_i(z)}{\Phi_i(z)} = \frac{\Theta_e(z)}{\Phi_e(z)}, \quad z \in L \quad (3.115)$$

mais la fonction Φ ne s'annulant pas dans le plan complexe, la fonction $\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$ est analytique. Étant d'autre part à croissance polynômiale à l'infini, cette fonction $\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$ est un polynôme d'après le théorème de Liouville (voir appendice-5). Réciproquement, il est clair que toute fonction de la forme $\Phi(z)P(z)$, où \mathbf{P} est un polynôme, est une solution de notre problème

Théorème(1) : Soit A höldérienne d'index p et B höldérienne définie sur le contour L (avec L de classe $C^{1,\beta}$); le problème de Hilbert d'équation (3.100) admet pour seules solutions les fonctions s.analytique φ suivantes :

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z)}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + P(z)\Phi(z) \quad (3.116)$$

où \mathbf{P} est un polynôme quelconque et où Φ est la solution du problème homogène donnée par (3.108), $\Phi_i(z)$ étant la limite intérieure de $\Phi(z)$ sur le contour L :

$$\Phi_i(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\ln A(z)}{z^p} + \frac{1}{2i\pi} \oint_L \frac{\ln(s^{-p}A(s))}{s-z} ds\right) \quad z \in L \quad (3.117)$$

Si nous imposons en outre aux solutions de tendre vers zéro à l'infini, nous aurons selon la valeur de l'index p :

- i) $p = 0$, il y a une seule solution correspondant à $\mathbf{P} \equiv 0$
- ii) $p > 0$, il y a une infinité de solutions correspondant à tout polynôme \mathbf{P} de degré inférieur ou égal à $p - 1$;
- iii) $p < 0$, il y a une seule solution si et seulement si la fonction $B(z)$ vérifie les conditions :

$$\int_L \frac{s^m B(s)}{\Phi_i(s)} ds = 0, \quad 0 \leq m \leq -p - 1 . \quad (3.118)$$

Preuve :

Soit $\Phi(z)$ la solution particulière du problème homogène donnée par(3.108). Les fonctions $\Phi_i(z)$ et $\Phi_e(z)$ correspondantes ne s'annulant pas sur le contour L , nous pouvons remplacer l'équation (3.100) par l'équation :

$$\frac{\varphi_i(z)}{\Phi_i(z)} - \frac{\varphi_e(z)}{\Phi_e(z)} = \frac{B(z)}{\Phi_i(z)}, \quad z \in L. \quad (3.119)$$

D'après les formules de Plemelj (voir théorème(1), §2), une solution particulière est donnée par :

$$\varphi(z) = \Phi(z) \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds, \quad z \notin L, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.120)$$

On obtient toutes les solutions en ajoutant à cette solution particulière toutes les solutions de l'équation homogène correspondantes qui sont données par (3.109) i.e par l'équation :

$$\varphi(z) = \mathbf{P}(z)\Phi(z), \quad (3.121)$$

où $\mathbf{P}(z)$ est un polynôme quelconque. Nous avons obtenu l'expression de la solution générale de notre problème :

$$\varphi(z) = \Phi(z) \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + \Phi(z)\mathbf{P}(z). \quad (3.122)$$

Au lieu de $\Phi(z)$ nous pouvons prendre $\Phi_i(z)$ à l'intérieur de L et $\Phi_e(z)$ à l'extérieur de L i.e :

$$\varphi(z) = \begin{cases} \Phi_i(z) \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + \Phi_i(z)\mathbf{P}(z), & z \text{ intérieur à } L \\ \Phi_e(z) \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + \Phi_e(z)\mathbf{P}(z), & z \text{ extérieur à } L \end{cases} \quad (3.123)$$

Examinons le comportement à l'infini de ces solutions selon la valeur de l'index p . Les fonctions $\Phi_i(z)$ et $\Phi_e(z)$ sont définies par (3.113) ; donc le premier terme du second membre de (3.116) est d'ordre $(-p-1)$ à l'infini, le second terme d'ordre $(m-p)$, m designe le degré du polynôme $\mathbf{P}(z)$.

i) Si $p = 0$, le premier terme sera d'ordre négatif à l'infini, alors que dans le second il faudra prendre $\mathbf{P}(z) \equiv 0$. Notre problème admet de toute évidence une solution unique.

ii) Si $p > 0$, le premier terme du second membre est d'ordre négatif à l'infini, quant au second terme, il sera d'ordre négatif si et seulement si $m < p$ i.e la formule (3.116) s'annule à l'infini si $\mathbf{P}(z)$ est un polynôme de degré inférieur à p . Dans ce cas notre problème admet une infinité de solutions nulles à l'infini.

iii) Si $p < 0$, compte tenu de ce qui a été dit plus haut sur l'ordre des termes du second membre, il est aisé de voir qu'il faut prendre $\mathbf{P}(z) \equiv 0$ et qu'en outre le premier terme ne doit pas contenir de terme s en $z^{-p-1}, z^{-p-2}, \dots, z^0$ i.e le développement de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds = -\frac{z^{-1}}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)} ds - \frac{z^{-2}}{2i\pi} \int_L \frac{sB(s)}{\Phi_i(s)} ds + \dots \quad (3.124)$$

qui a lieu pour $|z|$ suffisamment grand ne doit pas contenir de terme s en $z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-p}$. On est ainsi conduit aux conditions suivante s , et qui sont nécessaires et suffisantes pour que notre problème admette une solution nulle à l'infini :

$$\int_L \frac{s^m B(s)}{\Phi_i(s)} ds = 0, (m = 0, 1, \dots, -p - 1). \quad (3.125)$$

Si ces conditions sont réalisées, notre problème admet une solution unique, nulle à l'infini et définie par la formule (3.116); $\mathbf{P}(z)$ étant identiquement nul.

Le problème de Hilbert dans le cas où L est un arc : Soit L un arc (nous supposons que L est de classe $C^{1,\beta}$) d'extrémités \mathbf{a} et \mathbf{b} (voir def(1), §2). Le problème de Hilbert consiste en la recherche d'une fonction φ s.analytique relativement à cet arc (voir déf (5), §2) et vérifiant :

$$\varphi_i(z) = A(z)\varphi_e(z) + B(z), \quad z \in L \quad (3.126)$$

où A et B sont des fonctions données sur l'arc L . Nous supposons que $A(z)$ ne s'annule pas sur l'arc L , y compris aux extrémités. Alors son logarithme admet une unique détermination sur l'arc (ce qui n'était pas le cas quand L est un contour, rappelons que l'origine est prise à l'intérieur du contour)). Une solution du problème homogène de Hilbert (i.e avec $B \equiv 0$) est

donnée par :

$$\Psi(z) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln A(s)}{s-z} ds\right), \quad (\text{avec } A \text{ höldérienne}). \quad (3.127)$$

Mais cette solution n'est pas en générale s.analytique car elle ne vérifie pas nécessairement la condition 3) de la définition (5), §2, qui précise que le comportement en une extrémité **a** doit être :

$$|\varphi(s)| \leq \frac{c}{|s-a|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (3.128)$$

Considérons donc la fonction (**m** et **n** sont des entiers relatifs)

$$\Phi(z) = (z-a)^m (z-b)^n \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln A(s)}{s-z} ds\right). \quad (3.129)$$

Nous avons vu (formule 3.76) que la singularité de la fonction :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln A(s)}{s-z} ds \quad (3.130)$$

au point **a** est de la forme :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln A(s)}{s-z} ds = -\frac{\ln A(a)}{2i\pi} \ln(z-a) + g(z), \quad (3.131)$$

où g est bornée au voisinage du point **a**. Donc Φ donnée par (3.129) se comporte au point **a** comme :

$$(z-a)^{m-\frac{\ln A(a)}{2i\pi}} \quad (3.132)$$

Pour assurer la condition (3.128), nous choisirons donc l'entier **m** tel que

$$0 < m - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i\pi} \ln A(a)\right) + 1 \leq 1 \quad (3.133)$$

ce qui détermine l'entier m de manière unique. De même, nous assurerons la condition (3.128) au point **b** en choisissant l'entier **n** tel que :

$$0 < n + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i\pi} \ln A(b)\right) + 1 \leq 1. \quad (3.134)$$

Soit Θ une autre solution s.analytique du problème homogène de Hilbert, nous avons :

$$\frac{\Theta_i(z)}{\Phi_i(z)} - \frac{\Theta_e(z)}{\Phi_e(z)} = 0 \quad z \in L, \quad (3.135)$$

donc la fonction

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} \quad (3.136)$$

est analytique partout sauf peut être aux extrémités \mathbf{a} et \mathbf{b} où elle admet des singularités vérifiant (3.128). Elle est donc analytique.

Proposition(2) : Soit A höldérienne et ne s'annulant pas sur l'arc (avec L de classe $C^{1,\beta}$). Alors une solution s.analytique du problème homogène de Hilbert :

$$\Phi_i(z) = A(z)\Phi_e(z), \quad z \in L \quad (3.137)$$

est donnée par :

$$\Phi(z) = (z - a)^m (z - b)^n \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln A(s)}{s - z} ds\right) \quad (3.138)$$

où \mathbf{m} et \mathbf{n} sont fixés par les conditions (3.133) et (3.134). Toutes les solutions s.analytiques de (3.137) sont de la forme

$$\Theta(z) = \mathbf{P}(z)\Phi(z), \quad (3.139)$$

où \mathbf{P} est un polynôme quelconque.

Théorème(2) : Soient A et B höldériennes sur l'arc L (avec L de classe $C^{1,\beta}$), $A(z)$ ne s'annulant pas sur cet arc. Toutes les solutions s.analytiques du problème de Hilbert (3.100) sont de la forme :

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z)}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s - z)} ds + \mathbf{P}(z)\Phi(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \notin L, \quad (3.140)$$

où \mathbf{P} est un polynôme quelconque, et Φ est donnée par (3.138) soit :

$$\Phi(z) = (z - a)^m (z - b)^n \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ln A(s)}{s - z} ds\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \notin L, \quad (3.141)$$

et $\Phi_i(z)$ (pour $z \in L$) par :

$$\Phi_i(z) = (z - a)^m (z - b)^n \exp\left(\frac{1}{2} \ln A(z) + \frac{1}{2i\pi} \oint_L \frac{\ln A(s)}{s - z} ds\right), \quad (3.142)$$

les entiers \mathbf{m} et \mathbf{n} étant choisis de manière unique par (3.133) et (3.134) :

$$0 < m - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i\pi} \ln A(a)\right) + 1 \leq 1 \quad (3.143)$$

$$0 < n + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i\pi} \ln A(b)\right) + 1 \leq 1. \quad (3.144)$$

Soit p l'index du problème défini par :

$$p = -(m + n). \quad (3.145)$$

Alors, selon l'index p , l'existence et l'unicité des solutions tendant vers zéros à l'infini sont données par :

- i) $p = 0$, il y a une seule solution donnée par (3.140) avec $\mathbf{P} = 0$;
- ii) $p > 0$, il y a une infinité de solutions données par (3.140) avec degré $\mathbf{P} \leq p - 1$.
- iii) $p < 0$, il y a une seule solution si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\int_L \frac{s^r B(s)}{\Phi_i(s)} ds = 0, \quad 0 \leq r \leq -(p + 1). \quad (3.146)$$

Preuve

L'équation (3.100) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\varphi_i(z)}{\Phi_i(z)} - \frac{\varphi_e(z)}{\Phi_e(z)} = \frac{B(z)}{\Phi_i(z)}, \quad z \in L. \quad (3.147)$$

Le second membre de (3.147) admet une limite aux extrémités \mathbf{a} et \mathbf{b} . En effet, B est höldérienne et admet donc une limite aux extrémités. La fonction Φ_i a le même comportement que Φ au

point \mathbf{a} comme :

$$\exp\left(\frac{1}{2} \ln A(a)\right)(a-z)^{m-\operatorname{Re}\left(\frac{\ln A(a)}{2i\pi}\right)}. \quad (3.148)$$

Elle tend donc vers l'infini en ce point ou elle est bornée non nulle selon que :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i} \ln A(a)\right) \quad (3.149)$$

est entier ou fractionnaire. Elle ne s'annule pas sur l'arc L . Donc nous pouvons utiliser les formules de Plemelj et le théorème(1) du §2, d'où il résulte que les solutions s.analytiques de (3.147) sont :

$$\frac{\varphi(z)}{\Phi(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + P(z) \quad (3.150)$$

où \mathbf{P} est un polynôme quelconque. La seconde partie du théorème(2) résulte du fait que la fonction Φ se comporte à l'infini comme z^p où p est l'index donné par (3.145).

Remarque(1) : Dans le cas d'un arc, et dans le cas d'un contour considéré comme un arc, nous pouvons construire des solutions, qui ne sont pas s.analytiques, en choisissant les paramètres \mathbf{m} et \mathbf{n} de façon que la fonction Φ ait des singularités d'ordre élevé aux extrémités.

Le problème de Hilbert dans le cas d'une droite Examinons la résolution du problème de Hilbert (3.100) dans le cas de la droite L d'équation $\operatorname{Re}(z) = b$.

Les solutions du problème homogène sont données par la proposition suivante.

Proposition(3) : Soit A höldérienne sur la droite $\operatorname{Re}(z) = b$, ne s'annulant pas sur cette droite et vérifiant :

$$A(z) = 1 + o\left(\frac{1}{|z|^\gamma}\right), \quad \gamma > 0, \quad \text{pour } |z| \rightarrow \infty; \quad (3.151)$$

et soit l'entier p appelé index défini par :

$$p = \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} \arg A(z) - \lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow -\infty} \arg A(z) \right], \quad \text{avec } z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) = b. \quad (3.152)$$

Une solution s.analytique relativement à la droite du problème homogène de Hilbert est donnée par : ($\text{Re}(\alpha) > b$ et $\text{Re}(\beta) < b$).

$$\Phi(z) = \begin{cases} (z - \beta)^{-p} \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \ln\left(A(s) \left(\frac{s-\beta}{s-\alpha}\right)^p\right) (s-z)^{-1} ds\right), & \text{Re}(z) > b \\ (z - \alpha)^{-p} \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \ln\left(A(s) \left(\frac{s-\beta}{s-\alpha}\right)^p\right) (s-z)^{-1} ds\right), & \text{Re}(z) < b. \end{cases} \quad (3.153)$$

Toutes les autres solutions s.analytiques sont de la forme

$$\Theta(z) = \mathbf{P}(z) \Phi(z), \quad (3.154)$$

où \mathbf{P} est un polynôme quelconque.

Preuve :

Soit α et β deux points du plan complexe tels que :

$$\text{Re}(\alpha) > b \quad \text{et} \quad \text{Re}(\beta) < b.$$

Considérons la fonction A_0 définie sur la droite L :

$$A_0(z) = \left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right)^p A(z), \quad z \in L. \quad (3.155)$$

Elle est höldérienne sur cette droite, vérifie l'hypothèse (3.151) et son index est nul. Nous pouvons donc définir $\ln A_0(z)$ de manière univoque sur la droite L . Le problème homogène de Hilbert peut s'écrire de la façon suivante :

$$\ln(\Phi_i(z)(z-\beta)^p) - \ln(\Phi_e(z)(z-\alpha)^p) = \ln A_0(z), \quad z \in L. \quad (3.156)$$

Le second membre de (3.156) vérifie les hypothèses (i.e, hölderienne et (3.79)) de la proposition (2), §2, avec $\log A_0(\infty) = 0$, et nous avons donc, d'après cette proposition, la formule (3.153).

La démonstration de (3.154) est analogue au cas déjà considéré du contour.

Théorème(3) : Soit A höldérienne sur la droite L d'équation $\text{Re}(z) = b$, ne s'y annulant pas et vérifiant :

$$|A(z) - 1| \leq \frac{C}{|z|^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad z \in L, \quad (3.157)$$

et soit B höldérienne sur la droite L et telle que :

$$|B(z) - B(\infty)| \leq \frac{C}{|z|^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad z \in L, \quad (3.158)$$

alors les seules solutions s.analytiques relativement à la droite L du problème de Hilbert (3.100) sont données par :

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z)}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + \mathbf{P}(z)\Phi(z), \quad z \notin L \quad (3.159)$$

où Φ est donnée par (3.153) et Φ_i est donnée (pour $z \in L$) par :

$$\Phi_i(z) = \frac{1}{(z-\beta)^p} \exp \left[\frac{1}{2} \ln A(z) \left(\frac{z-\beta}{z-\alpha} \right)^p + \frac{1}{2\pi i} \oint_{b-i\infty}^{b+i\infty} \ln \left(A(s) \left(\frac{s-\beta}{s-\alpha} \right)^p \right) \frac{ds}{s-z} \right]. \quad (3.160)$$

où \mathbf{P} est un polynôme quelconque, et où α et β sont des nombres complexes tels que $Re(\alpha) > b$ et $Re(\beta) < b$.

Preuve :

Elle découle de la proposition (3) ci-dessus et de la proposition (2), §2, en remarquant que l'équation (3.100) se ramène à :

$$\frac{\varphi_i(z)}{\Phi_i(z)} - \frac{\varphi_e(z)}{\Phi_e(z)} = \frac{B(z)}{\Phi_i(z)}, \quad z \in L, \quad (3.161)$$

$\Phi_i(z)$ et $\Phi_e(z)$ étant les limites intérieures et extérieures de la fonction Φ données par (3.153).

Remarque(2) : Les solutions données par (3.160) du problème de Hilbert dans le cas d'une droite ont à l'infini, dans une direction non parallèle à la droite L , un comportement en $|z|^{-p}$. Ceci nous permet de caractériser, comme aux théorèmes (1) et (2) les solutions qui tendent vers zéros à l'infini dans une direction non parallèle à la droite L selon la valeur de l'index p défini par (3.152).

Remarque(3) : Lorsque la limite à l'infini $A(\infty)$ de la fonction $A(z)$ est différente de 1, la fonction $\ln(A_0(z))$ n'a plus zéro pour limite à l'infini. Le théorème (3) reste cependant valable

à condition d'utiliser la définition (voir formule (3.87)) de l'intégrale de Cauchy sur la droite L .

Equation intégrale de Wiener-Hopf de deuxième espèce Nous avons déjà étudié l'équation intégrale de Wiener-Hopf de deuxième espèce au §1. Nous reprenons ici cette étude par la méthode du problème de Hilbert, ce qui permet d'affaiblir les hypothèses. Rappelons qu'il s'agit de trouver une fonction $f(t)$ solution de

$$f(t) = \int_0^{\infty} k(t-t_0)f(t_0)dt_0 + g(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (3.162)$$

où $g(t)$ et $k(t)$ sont des fonctions données définies pour tout t réel. Nous supposons qu'il existe b réel, $b > 0$, tel que :

$$k(t)\exp(-bt), \text{ et } g(t)\exp(-bt) \text{ sont intégrables sur l'axe réel.} \quad (3.163)$$

Nous cherchons une solution $f(t)$ telle que $f(t)\exp(-bt)$ soit intégrable sur l'axe réel. Pour appliquer le théorème de convolution à la transformation de Laplace bilatérale nous devons avoir pour intervalle d'intégration l'intervalle $-\infty < t < +\infty$. Procédons comme suit. Introduisons les fonctions :

$$f_+(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ f(t) & \text{si } t < 0 \end{cases}, \quad f_-(t) = \begin{cases} -f(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (3.164)$$

et les transformations de Laplace bilatérale

$$F_+(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_+(t) \exp(-st)dt = \int_{-\infty}^0 f(t) \exp(-st)dt, \quad \text{Re}(s) = b \quad (3.165)$$

$$F_-(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_-(t) \exp(-st)dt = \int_0^{+\infty} -f(t) \exp(-st)dt, \quad \text{Re}(s) = b \quad (3.166)$$

$$K(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t) \exp(-st)dt, \quad \text{Re}(s) = b \quad (3.167)$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-st) dt = F_+(s) - F_-(s) \quad \text{Re}(s) = b \quad (3.168)$$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(-st) dt, \quad \text{Re}(s) = b. \quad (3.169)$$

Ces transformations sont définies pour s sur la droite $\text{Re}(s) = b$ d'après l'hypothèse (3.164). De plus F_+ est analytique pour $\text{Re}(s) < b$ et F_- est analytique pour $\text{Re}(s) > b$. Rappelons que l'hypothèse (3.164) entraîne que toutes les transformations de Laplace bilatérale tendent vers zéro à l'infini ; en particulier :

$$K(s) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |\text{Im}(s)| \rightarrow \infty, \quad \text{Re}(s) = b. \quad (3.170)$$

L'équation (3.163) entraîne :

$$F_+(s) = [1 - K(s)]F_-(s) + G(s), \quad \text{Re}(s) = b. \quad (3.171)$$

En considérant la fonction φ s.analytique relativement à la droite L , d'équation $\text{Re}(s) = b$, définie par

$$\begin{cases} F_+(s), & \text{si } \text{Re}(s) < b, \\ F_-(s), & \text{si } \text{Re}(s) > b, \end{cases} \quad (3.172)$$

l'équation (3.171) peut être considérée comme un problème de Hilbert pour cette fonction φ . En posant (compte tenu de l'orientation de la droite L (de gauche à droite)) :

$$\begin{cases} \varphi_i(s) = F_-(s) \\ \varphi_e(s) = F_+(s) \end{cases} \quad s \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(s) = b, \quad (3.173)$$

ce problème s'écrit :

$$\varphi_i(s) = \frac{1}{(1 - K(s))} \varphi_e(s) + \frac{1}{(K(s) - 1)} G(s), \quad \text{Re}(s) = b. \quad (3.174)$$

Toutes les solutions s.analytiques de cette équation sont données par le théorème(3).

proposition(4) : Soient k et g deux fonctions données vérifiant (3.164) et telles que leurs transformations bilatérales de Laplace K et G soient höldériennes sur la droite L d'équation $Re(s) = b$. Supposons de plus que la transformée de Laplace bilatérale vérifie

$$|K(s)| \leq \frac{C}{|s|^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad s \in L, \quad (3.175)$$

et que $(1 - K(s))$ ne s'annule pas sur la droite L . Alors la transformation bilatérale de Laplace F de toute solution $f(t)$ de l'équation (3.162) est donnée par :

$$F(s) = \varphi_i(s) - \varphi_e(s), \quad s \in L, \quad (3.176)$$

où la fonction s.analytique φ est la solution de (3.174) et donnée par :

$$\Phi(z) \begin{cases} \frac{1}{(z - \beta)^p} \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \ln \left(\frac{(s - \beta)^p}{(1 - K(s))(s - \alpha)^p} \right) \frac{ds}{s - z} \right) & \text{Re}(z) > b \\ \frac{1}{(z - \alpha)^p} \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \ln \left(\frac{(s - \beta)^p}{(1 - K(s))(s - \alpha)^p} \right) \frac{ds}{s - z} \right) & \text{Re}(z) < b \end{cases} \quad (3.177)$$

où :

$$p = \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{\text{Im}(s) \rightarrow +\infty} \arg \left(\frac{1}{1 - K(s)} \right) - \lim_{\text{Im}(s) \rightarrow -\infty} \arg \left(\frac{1}{1 - K(s)} \right) \right], \quad (3.178)$$

$$\Phi_i(z) = \frac{1}{(z - \beta)^p} * \exp \left(\begin{aligned} & \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1 - K(z)} \left(\frac{z - \beta}{z - \alpha} \right)^p \right) + \\ & \frac{1}{2i\pi} \oint_{b-i\infty}^{b+i\infty} \ln \left(\left(\frac{s - \beta}{s - \alpha} \right)^p \frac{1}{1 - K(z)} \right) \frac{ds}{s - z}, \end{aligned} \right) \quad z \in L, \quad (3.179)$$

et

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z)}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{G(s) ds}{\Phi_i(s)(1 - K(s))(s - z)} + \mathbf{P}(z)\Phi(z), \quad z \notin L, \quad (3.180)$$

où $\mathbf{P}(z)$ est un polynôme tel que :

- i) si $p > 0$, degré (\mathbf{P}) $\leq p - 1$;
- ii) $p = 0$, $\mathbf{P} \equiv 0$;
- iii) $p < 0$, il n'y pas de solution sauf si

$$\int_L \frac{s^m G(s)}{\Phi_i(s)(1-K(s))} ds = 0, \quad 0 \leq m \leq -(p+1), \quad (3.181)$$

et alors l'unique solution correspond à $\mathbf{P} \equiv 0$.

Chapitre 4

LA FONCTION DE GREEN POUR LE POTENTIEL HEAVISIDE

4.0.14 Solution par la méthode directe :

On considère le problème aux valeurs propres à une dimension (dans \mathbb{R}) suivant :

$$\left(-\frac{\Delta}{2m} + V(x)\right) \Psi = E\Psi \quad (4.1)$$

où $V(x)$ est la fonction de Heaviside c'est à dire égale à V_0 pour $x \geq 0$ et nulle pour $x < 0$. Les conditions aux limites sont celles de Dirichlet-Neumann (continuité de la solution et de sa dérivée aux points frontières). Nous allons démontrer que le noyau de Green relatif à ce problème obéit à une équation intégrale dans \mathbb{C} que nous allons résoudre pour trouver les solutions du problème. Rappelons que la solution $\Psi(x)$ du problème s'obtient par convolution par l'intermédiaire du noyau $K(x, t : y, 0)$ de la solution $\Psi(y)$ (voir le paragraphe : développement de la fonction d'onde formule (2.18)). Ce noyau s'écrit dans la représentation de l'intégrale fonctionnelle de Feynman comme [15] :

$$\begin{aligned} K(x, t : y, 0) &= \int_{y,0}^{x,t} Dx(\tau) \exp \left[i \int_0^t \left(\frac{m \dot{x}^2}{2} - V(x) \right) d\tau \right] \\ &= \int_{y,0}^{x,t} Dx(\tau) \exp \left[i \int_0^t \frac{m \dot{x}^2}{2} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-i)^j \left(\int_0^t V(x(\tau)) d\tau \right)^j \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le premier terme ($j = 0$) du développement précédent est :

$$\begin{aligned} K_0(x, t : y, 0) &\equiv \int_{y,0}^{x,t} Dx(\tau) \exp \left[i \int_0^t \frac{m \dot{x}^2}{2} d\tau \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi t}} \exp \left[\frac{im}{2t} (x - y)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Le deuxième terme ($j = 1$) s'écrit

$$K_1(x, t : y, 0) \equiv \int_{y,0}^{x,t} Dx(\tau) \exp \left[\frac{im}{2} \int_0^t \dot{x}^2 d\tau \right] \int_0^t V(x(\tau)) d\tau \quad (4.4)$$

D'après la définition de l'intégrale, on peut considérer comme limite d'intégrale multiple, on remplace τ par t_j et $x(\tau)$ par x_j , et d'après (4.4) on obtient :

$$K_j(x, t : y, 0) = \sum_j (\Delta t) \int \prod_{j=1}^N Dx_j \left(\frac{m}{2\pi i \Delta t} \right)^{(N+1)/2} \exp \left[\frac{im}{2\Delta t} \sum_{k=0}^N (x_{k+1} - x_k)^2 \right] V(x_j) \quad (4.5)$$

Les intégrales d'ordre $k = 1, \dots, j-1$ et $k = j+1, \dots, N$ sont juste des intégrales de la particule libre, mais x_j s'appelle ξ nous avons, comme en section 9 [15],

$$K_1(x, t : y, 0) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi K_0(x - \xi, t - \tau) V(\xi) K_0(\xi - y, \tau). \quad (4.6)$$

Définissons

$$K_k(x, t : y, 0) \equiv \frac{1}{k!} \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{im}{2} \int_0^t \dot{x}^2 d\tau \right] \left[\int_0^t V(x(\tau)) d\tau \right]^k \quad (4.7)$$

et comme en section 9 [15], il suit :

$$\begin{aligned} K_k(x, t : y, 0) &= \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{im}{2} \int_0^t \dot{x}^2 d\tau \right] * \\ &\quad \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{k-1}} d\tau_k V(x(\tau_1)) \dots V(x(\tau_k)). \\ &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi K_0(x, t : \xi, \tau) V(\xi) K_{k-1}(\xi, \tau : y, 0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nous pouvons immédiatement établir :

$$\begin{aligned} K(x, t : y, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} K_k(x, t : y, 0) \\ &= K_0(x, t : y, 0) - i \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi K_0(x, t : \xi, \tau) V(\xi) K(\xi, \tau : y, 0) \end{aligned} \quad (4.9)$$

On définit la fonction de Green comme suit :

$$g(x, E : y) = i \int_0^{+\infty} dT K(x, T : y, 0) \exp(-iET) \quad (4.10)$$

La transformée de Fourier sur le temps T de (4.9) est :

$$g(x, E : y) = g_0(x, E : y) - \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi g_0(x, E : \xi) V(\xi) g(\xi, E : y) \quad (4.11)$$

Pour

$$V = V_0 \theta(x) \quad (4.12)$$

$$\text{avec } V_0 > 0, \text{ et, } \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

la formule(4.11) s'écrit :

$$g(x, E : y) = g_0(x, E : y) - V_0 \int_0^{+\infty} d\xi g_0(x, E : \xi) g(\xi, E : y) \quad (4.13)$$

ou encore sous forme allégée :

$$g(x, y) = g_0(x, y) - V_0 \int_0^{+\infty} d\xi g_0(x - \xi) g(\xi, y) \quad (4.14)$$

On définit ([17]) :

$$g^+(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0, \\ g(x, y) & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad \text{et, } g^-(x, y) = \begin{cases} -g(x, y) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

L'équation intégrale précédente (4.14) s'écrit :

$$g^+(x, y) - g^-(x, y) = g_0(x, y) + V_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi g_0(x - \xi) g^-(\xi, y) \quad (4.16)$$

où (voir Appendice-7) :

$$\begin{aligned} g_0(x, y) &= i \int_0^{+\infty} dT K_0(x, T : y, 0) \exp(-iET) \\ &= \frac{m}{k} \exp(-k|x - y|), \quad \text{avec } k^2 = 2mE. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Donc (4.16) s'écrit :

$$g^+(x, y) - g^-(x, y) = \frac{m}{k} \exp(-k|x - y|) + \frac{mV_0}{k} \int_0^{+\infty} d\xi \exp(-k|x - \xi|) g^-(\xi, y) \quad (4.18)$$

Donc la transformation de Laplace bilatérale de l'équation précédente (avec $g(s, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp(-sx) dx$) est :

$$g^+(s, y) - g^-(s, y) = B(s) + L(s) g^-(s, y) \quad (4.19)$$

$$g^+(s, y) = B(s) + [1 + L(s)] g^-(s, y) \quad (4.20)$$

et soient

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{m}{k} \exp(-k|x - y|), \\ \text{et } K(x) &= -\frac{mV_0}{k} \exp(-k|x|) \\ \text{avec } \varphi(x) &= g(x, y) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} B(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) \exp(-sx) dx \\ &= \frac{m}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k|x - y|) \exp(-sx) dx \\ &= \frac{m \exp(-sy)}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k|u|) \exp(-su) du, \quad \text{et } u = x - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m \exp(-sy)}{k} \left(\int_{-\infty}^0 \exp((k-s)u) du + \int_0^{+\infty} \exp((-k-s)u) du \right) \\
&= 2m \frac{\exp(-sy)}{k^2 - s^2}, \quad \text{avec } -k < \operatorname{Re}(s) < k
\end{aligned} \tag{4.21}$$

et

$$\begin{aligned}
L(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) \exp(-sx) dx \\
&= \frac{mV_0}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k|x|) \exp(-sx) dx \\
&= \frac{2mV_0}{s^2 - k^2}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$1 + L(s) = \frac{s^2 - (k^2 + 2mV_0)}{s^2 - k^2} = \frac{s^2 - \mu^2}{s^2 - k^2} \tag{4.23}$$

$$= \frac{(s - \mu)(s + \mu)}{(s - k)(s + k)}, \quad \text{où } \mu^2 = k^2 + 2mV_0 \tag{4.24}$$

L'équation précédente (4.20) est du type (3.100) du problème non homogène de Hilbert. Sa solution est donnée par la théorème (3). Le cas où L est une droite (d'équation $\operatorname{Re}(s) = b$), avec $\mathbf{P}(z)$ est un polynôme nul.

$$\varphi(s) = \frac{\Phi(s)}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{B(\tau)}{\Phi_i(\tau)(\tau - s)} d\tau, \quad s \notin L \tag{4.25}$$

Soient $\Phi_i(s)$, $\Phi_e(s)$ les limites gauche et droite de $\Phi(s)$ solution du problème homogène de Hilbert. Notons [17] :

$$\Phi_i(s) = \Phi^+(s), \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) < b, \text{ et } \Phi_e(s) = \Phi^-(s), \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > b.$$

où

$$\frac{\Phi^+(s)}{\Phi^-(s)} = 1 + L(s) = \frac{s^2 - \mu^2}{s^2 - k^2}, \quad \text{telle que } \Phi^+(s) = \frac{s - \mu}{s - k}, \text{ et } \Phi^-(s) = \frac{s + k}{s + \mu}$$

Région $\operatorname{Re}(s) < b$:

Dans cette régions on a :

$$\varphi^+(s) = \frac{\Phi^+(s)}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{B(\tau)}{\Phi^+(\tau)(\tau-s)} d\tau \quad (4.26)$$

Pour la droite imaginaire (d'équation $Re(s) = 0$), la solution est :

$$\begin{aligned} \varphi^+(s) &= \frac{m}{2\pi ik} \frac{s-\mu}{s-k} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{2k \exp(-\tau y)}{(k^2 - \tau^2) \frac{\tau-\mu}{\tau-k} (\tau-s)} d\tau \\ \varphi^+(s) &= -\frac{m}{2i\pi k} \left(\frac{s-\mu}{s-k} \right) \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{2k \exp(-\tau y)}{(k+\tau)(\tau-\mu)(\tau-s)} d\tau \end{aligned} \quad (4.27)$$

Voyons le cas $y < 0$:

Alors le théorème des résidus permet de calculer de l'intégrale (4.27). On prend à gauche de l'axe imaginaire, donc il y a deux pôles simples l'un pour $\tau = -k$ et l'autre pour $\tau = s$ (voir la figure(4.1)) et on trouve :

$$\varphi^+(s) = -\frac{2m(s-\mu) \exp(ky)}{(s-k)(k+\mu)(s+k)} - \frac{2m \exp(-sy)}{(s-k)(s+k)} \quad (4.28)$$

Le cas $x < 0$ la transformée inverse de Laplace de (4.28) est :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \varphi^+(t) \exp(tx) dt \\ \varphi(x) &= \frac{-2m \exp(ky)}{(\mu+k)2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{(t-\mu) \exp(tx)}{(t+k)(t-k)} dt - \frac{2m}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp t(x-y)}{(t-k)(t+k)} dt \end{aligned} \quad (4.29)$$

Donc pour $x < 0$: l'intégrale du premier terme est prise dans le demi-cercle à droite (le résidu est au pôle $t = k$). L'intégrale du deuxième terme pour $x < y$ est prise dans le demi-cercle de droite (le résidu est au pôle $t = k$), pour $x > y$ est prise dans le demi-cercle de gauche (le résidu est au pôle $t = -k$)

$$\varphi(x) = \frac{m(k-\mu) \exp(k(x+y))}{k(k+\mu)} - \frac{m}{k} \begin{cases} -\exp(k(x-y)), & x < y \\ -\exp(-k(x-y)), & x > y \end{cases} \quad (4.30)$$

La solution dans le cas $y < 0$ et $x < 0$ notée $g_{-,-}(x, y)$ est donnée par:

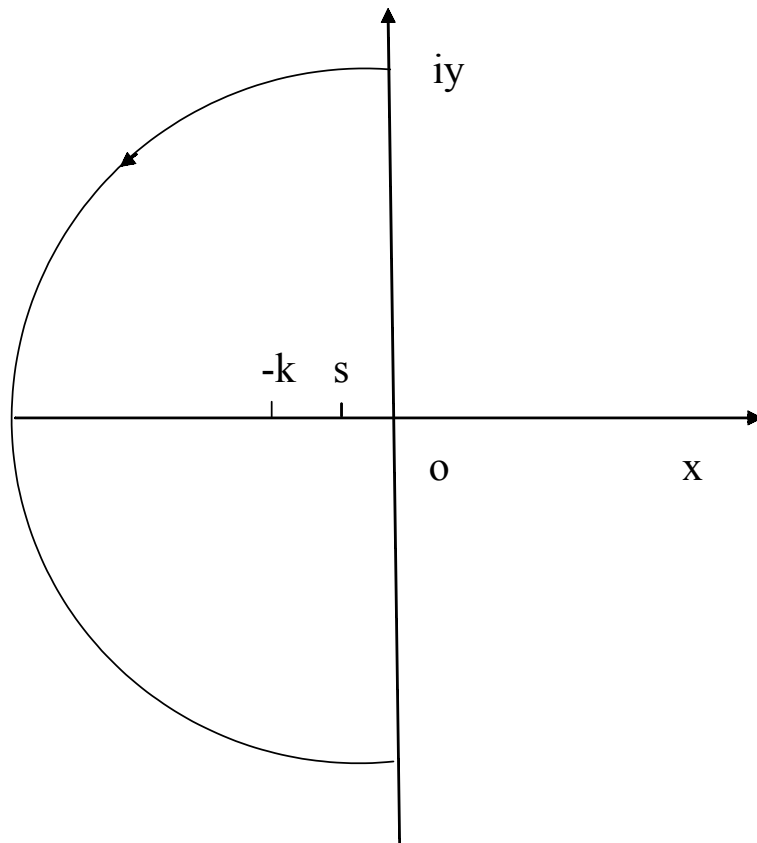


FIG. 4-1:

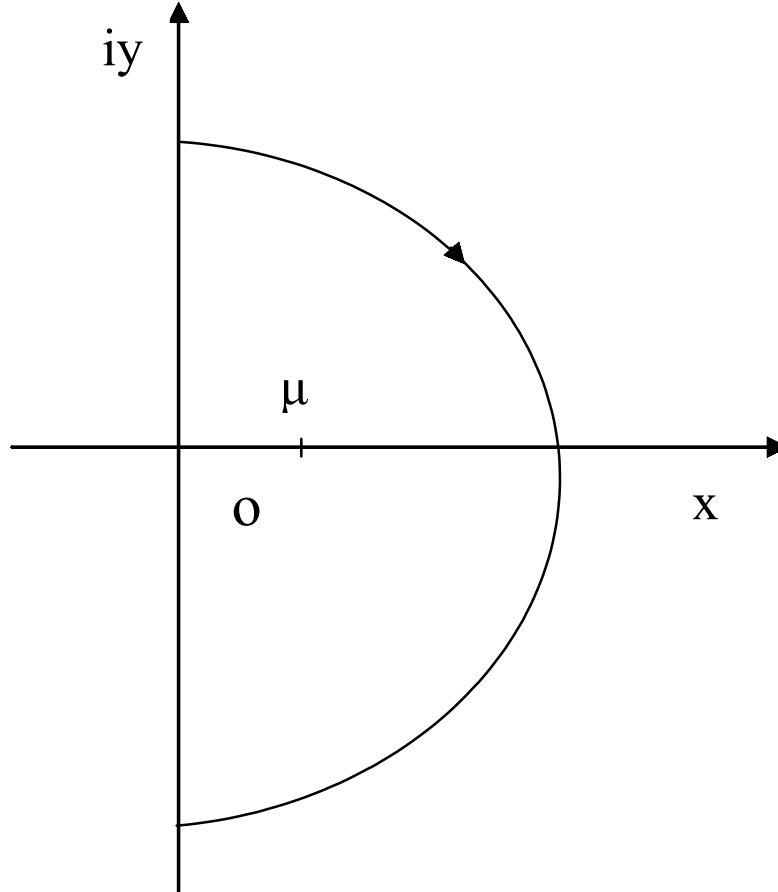


FIG. 4-2:

$$g_{-,-}(x, y) = \frac{m}{k} \left[\exp(-k|x - y|) + \frac{k - \mu}{k + \mu} \exp(k(x + y)) \right] \quad (4.31)$$

Région $y > 0$:

Alors le théorème des résidus donne l'intégrale de la formule (4.27) qui est prise dans le demi-cercle à droite (le résidu est au pôle $\tau = \mu$, voir figure (4.2))

$$\varphi^+(s) = -\frac{m}{k} \left(\frac{s - \mu}{s - k} \right) 2k \left(\frac{\exp(-\mu y)}{(\mu + k)(s - \mu)} \right)$$

$$\varphi^+(s) = \frac{2m \exp(-\mu y)}{(s - k)(\mu + k)}. \quad (4.32)$$

Pour le cas $x < 0$, la transformée inverse de Laplace de (??) est :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \varphi^+(t) \exp(tx) dt \\ &= \frac{2m \exp(-\mu y)}{2i\pi(k+\mu)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp tx}{(t-k)}.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Le résidu donne (le demi-cercle doit être à droite, i.e : le pôle au point $t = k$) :

$$\varphi(x) = -\frac{2m}{k+\mu} \exp(kx - \mu y) \quad (4.34)$$

la solution dans le cas $x < 0$ et $y > 0$ notée $g_{-,+}(x, y)$ est donnée par :

$$g_{-,+}(x, y) = -\frac{2m \exp(kx - \mu y)}{k+\mu}. \quad (4.35)$$

Région $Re(s) > 0$

La formule (4.25) s'écrit sous la forme :

$$\varphi^-(s) = \frac{\Phi^-(s)}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{B(\tau)}{\Phi^+(\tau)(\tau-s)} d\tau \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}\varphi^-(s) &= -\frac{m s + k}{k} \frac{1}{s + \mu} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{2k \exp(-\tau y)}{(k^2 - \tau^2) \frac{\tau - \mu}{\tau - k} (\tau - s)} d\tau \\ &= \frac{m s + k}{k} \frac{2k}{s + \mu} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp(-\tau y)}{(\tau + k)(\tau - \mu)(\tau - s)} d\tau\end{aligned}\quad (4.37)$$

Voyons le cas $y < 0$

Le résidu donne (le demi-cercle à gauche, il y a un seul pôle au point $\tau = -k$) :

$$\varphi^-(s) = \frac{m s + k}{k} \frac{2k \exp ky}{s + \mu} \frac{1}{(k + \mu)(k + s)} \quad (4.38)$$

$$\varphi^-(s) = \frac{m}{k} \left[\frac{2k \exp ky}{(s + \mu)(k + \mu)} \right] \quad (4.39)$$

Pour le cas $x > 0$, la transformée inverse de Laplace de (4.39) est :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \varphi^-(s) \exp(sx) ds \\ \varphi(x) &= -\frac{m}{k} \left[\frac{2k \exp ky}{k + \mu} \right] \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp tx}{(t + \mu)} dt\end{aligned}\quad (4.40)$$

le résidu donne (le demi-cercle à gauche, le pôle au point $t = -\mu$) :

$$\varphi(x) = -\frac{m}{k} \left[\frac{2k \exp(-\mu x + ky)}{k + \mu} \right] \quad (4.41)$$

la solution dans le cas $x > 0$ et $y < 0$, notée $g_{+,-}(x, y)$ est donnée par :

$$g_{+,-}(x, y) = -\frac{2m \exp(-\mu x + ky)}{k + \mu}. \quad (4.42)$$

Voyons le cas $y > 0$:

Le calcul de :

$$\varphi^-(s) = \frac{m}{k} \frac{s + k}{s + \mu} \frac{2k}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp(-\tau y)}{(k + \tau)(\tau - \mu)(\tau - s)} d\tau \quad (4.43)$$

Par la méthode des résidus donne (le demi-cercle doit être à droite, les pôles aux points $\tau = \mu$, et $\tau = s$) :

$$\begin{aligned}\varphi^-(s) &= \frac{m}{k} \frac{s + k}{s + \mu} \left[-\frac{2k \exp(-\mu y)}{(k + \mu)(\mu - s)} + \frac{2k \exp(-sy)}{(s + k)(s - \mu)} \right] \\ \varphi^-(s) &= \frac{m}{k} \left[\frac{2k(s + k) \exp(-\mu y)}{(k + \mu)(s^2 - \mu^2)} \right] + \frac{m}{k} \left[\frac{2k \exp(-sy)}{s^2 - \mu^2} \right]\end{aligned}\quad (4.44)$$

Donc pour le cas $x > 0$, la transformée inverse de Laplace de (4.44) est donnée par :

$$\varphi(x) = -\frac{m}{k} \left[\frac{2k \exp(-\mu y)}{2i\pi(k + \mu)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{(t + k) \exp(tx)}{t^2 - \mu^2} dt \right] - \frac{m}{k} \left[\frac{2k}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp t(x - y)}{t^2 - \mu^2} dt \right]$$

Le résidu du premier terme de la dernière formule se calcule dans le demi-cercle de gauche, le pôle est à $t = -\mu$. Le deuxième terme si $x < y$ le résidu se calcule dans le demi cercle de droite, le pôle est à $t = \mu$, et si $x > y$ le résidu se calcule dans le demi cercle de gauche, le pôle est à

$t = -\mu :$

$$\varphi(x) = \frac{m}{k} \left[\frac{k}{\mu} \frac{k - \mu}{k + \mu} \exp(-\mu(x + y)) - \begin{cases} -\frac{k}{\mu} \exp(\mu(x - y)), & x < y, \\ -\frac{k}{\mu} \exp(-\mu(x - y)), & x > y. \end{cases} \right] \quad (4.45)$$

La solution du problème dans le cas $x > 0$ et $y > 0$, notée $g_{+,+}(x, y)$ est alors donnée par :

$$g_{+,+}(x, y) = \frac{m}{\mu} \left[\exp(-\mu|x - y|) - \frac{\mu - k}{\mu + k} \exp(-\mu(x + y)) \right] \quad (4.46a)$$

4.0.15 Méthode des perturbations

On reprend le problème aux valeurs propres à une dimension (dans \mathbb{R}) :

$$\left(-\frac{\Delta}{2m} + V(x) \right) \Psi = E\Psi \quad (4.47)$$

Où $V(x)$ est la fonction de Heaviside c'est à dire égale à V_0 pour $x \geq 0$ et nulle pour $x < 0$. Les conditions aux limites sont celles de Dirichlet-Neumann. Nous allons maintenant le traiter par la méthode perturbative qui consiste à développer le noyau de Green en série et travailler directement sur les propriétés des termes de la série qui sont aussi des fonctions analytiques par morceau (sectionnellement analytiques). Ceci nous conduit à établir des relations de récurrence entre différents termes du développement perturbatif que nous arrivons par la suite à les resommer et retrouver les différents résultats qu'on vient d'accomplir par la méthode directe dans le paragraphe précédent. Le noyau de Feynman [9] associé à ce problème est défini comme :

$$K(x, T/y, 0) = \int_{x(0)=y}^{x(T)=x} D[x(t)] \exp(i \int_0^T (\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x))dt) \quad (4.48)$$

où $D[x(t)]$ est la mesure formelle de l'espace du chemin. La méthode des perturbations [15], permet d'écrire le noyau $K(x, T/y, 0)$ comme une série infinie :

$$K(x, T/y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x, T/y, 0) \quad (4.49)$$

où :

$$\begin{aligned}
K_n(x, T/y, 0) &= (-i)^n \int_0^T dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 * \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=0}^{+\infty} K_0(x_{j+1}, t_{j+1}/x_j, t_j) \prod_{j=1}^{j=n} V(x_j) dx_j
\end{aligned} \tag{4.50}$$

et $K_0(x_{j+1}, t_{j+1}/x_j, t_j)$ est le noyau de la particule libre donné comme suit :

$$K_0(x_{j+1}, t_{j+1}/x_j, t_j) = \left(\frac{m}{2i\pi(t_{j+1} - t_j)} \right)^{1/2} \exp(im(x_{j+1} - x_j)^2/2(t_{j+1} - t_j)) \tag{4.51}$$

La transformation de Fourier de $K_n(x, T/y, 0)$ en T est :

$$g_n(x, y) = i \int_0^{\infty} K_n(x, T/y, 0) \exp(-iET) dT. \tag{4.52}$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
g_n(x, y) &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=0}^{+\infty} g_0(x_{j+1}, x_j) \prod_{j=1}^{j=n} V(x_j) dx_j \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n g_0(x, x_n) V(x_n) \prod_{j=0}^{j=n-1} g_0(x_{j+1}, x_j) \prod_{j=1}^{j=n-1} V(x_j) dx_j \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n g_0(x, x_n) V(x_n) g_{n-1}(x_n, y)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

où :

$$g_0(x, y) = i \int_0^{\infty} dT. K_0(x, T : y, 0) \exp(-iET) = \frac{m}{k} \exp(-k|x - y|) \tag{4.54}$$

$k^2 = 2mE$ et :

$$V(x) = V_0\theta(x), (V_0 > 0) \quad (4.55)$$

Après la substitution de la dernière expression du potentiel $V(x)$ dans (4.53), on obtient :

$$g_n(x, y) = -\frac{mV_0}{k} \int_0^{+\infty} d\xi \exp(-k|x - \xi|) g_{n-1}(\xi, y) \quad (4.56)$$

Dans les étapes suivantes on utilise les notations de [17], comme suit :

$$g_n^+(x, y) = \begin{cases} 0; & x > 0 \\ g_n(x, y); & x < 0 \end{cases} ; \text{ et } g_n^-(x, y) = \begin{cases} -g_n(x, y); & x > 0 \\ 0; & x < 0. \end{cases} \quad (4.57)$$

Donc l'équation (4.56) s'écrit :

$$g_n^+(x, y) - g_n^-(x, y) = \frac{mV_0}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp(-k|x - \xi|) g_{n-1}^-(\xi, y) \quad (4.58)$$

La transformation de Laplace bilatérale au point x de "l'équation intégrale" (4.58) est :

$$g_n^+(s, y) - g_n^-(s, y) = \frac{mV_0}{k} K(s) g_{n-1}^-(s, y) \quad (4.59)$$

où :

$$g_n^+(s, y) = \int_{-\infty}^0 g_n(x, y) \exp(-sx) dx \quad ; \quad s < 0 \quad (4.60)$$

$$g_n^-(s, y) = -\int_0^{\infty} g_n(x, y) \exp(-sx) dx \quad ; \quad s > 0 \quad (4.61)$$

$$K(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-sx - k|x|) = \frac{2k}{k^2 - s^2} \quad \text{telle que } -k < s < k \quad (4.62)$$

puis on calcule les trois termes successifs de cette série de perturbation :

$$g_n^+(s, y) - g_n^-(s, y) = \frac{-2mV_0}{s^2 - k^2} g_{n-1}^-(s, y) \quad (4.63)$$

La solution de cette équation s'obtient par la discussion sur les régions ($y < 0$ et $y > 0$) qui coïncident avec le problème non homogène de Hilbert section -58- à [17].

4.1 Region $y < 0$

Comme dans le cas des équations différentielles, on utilise les conditions initiales pour générer la solution. D'abord calculons les termes initiaux $g_0^-(s, y)$ et $g_0^+(s, y)$:

$$g_0^-(s, y) = \left(-\frac{m}{k}\right) \int_0^{\infty} dx \exp(-sx - k|x - y|) = \left(-\frac{m}{k}\right) \frac{\exp(ky)}{s + k} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} g_0^+(s, y) &= \left(\frac{m}{k}\right) \int_{-\infty}^0 dx \exp(-sx - k|x - y|) \\ &= \left(-\frac{m}{k}\right) \left(\frac{\exp(ky)}{s + k} + \frac{\exp(-sy)}{s - k} - \frac{\exp(-sy)}{s + k} \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

I) Pour $y < 0, x < 0$, calculons $g_n^+(s, y)$ puis la transformée inverse de Laplace.

Pour $n = 1$ l'équation (4.63) s'écrit :

$$g_1^+(s, y) - g_1^-(s, y) = \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{2mV_0}{s^2 - k^2}\right) \left(\frac{\exp(ky)}{s + k}\right) \equiv f_1(s, y). \quad (4.66)$$

La correspondance entre le problème non homogène de Hilbert et la dernière équation (formule (3.159) du théorème (3) paragraphe (3) chapitre précédent) se fait en posant $\Phi^-(s) = \Phi^+(s) = 1$ comme plus haut et aussi $P(s) = 0$:

$$\begin{aligned} g_1^+(s) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\tau}{\tau - s} f_1(\tau) = -\text{residue} \left(\frac{f_1(\tau)}{\tau - s} \right)_{\tau=k} + (P(s) = 0) \\ g_1^+(s) &= \left(\frac{m}{k}\right) \frac{1}{4} \left(\frac{V_0}{E}\right) \frac{\exp(ky)}{s - k} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Calculons la transformée inverse de Laplace (pour $x < 0$ et $y < 0$)

$$\begin{aligned} g_1^+(x, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_1^+(s, y) \exp(sx) ds \\ &= \frac{m^2 V_0 \exp ky}{2k^3} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp(sx)}{s - k} ds. \end{aligned}$$

Le théorème des résidus donne le calcul de cette intégrale, pour le demi-cercle à droite de l'axe imaginaire, (i.e le pôle au point $s = k$) :

$$g_1^+(x, y) = \frac{mV_0}{2k^3} \exp k(x + y) = \frac{m}{k} \frac{1}{4} \left(\frac{V_0}{E} \right) \exp k(x + y) \quad (4.68)$$

Verifions ce résultat par le calcul direct (pour $x < 0$ et $y < 0$) :

$$\begin{aligned} g_1^+(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \int_0^{+\infty} \exp(-k|x - \xi| - k|\xi - y|) d\xi \\ &= \frac{m^2 V_0}{k^2} \int_0^{+\infty} \exp[(kx - k\xi) + (-k\xi + ky)] d\xi \\ &= \frac{m^2 V_0}{k^2} \exp k(x + y) \int_0^{+\infty} \exp(-2k\xi) d\xi \\ &= \frac{m^2 V_0}{2k^3} \exp k(x + y) = \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E} \right) \exp k(x + y) \end{aligned} \quad (4.69)$$

La formule (4.69) est identique au résultat précédent (4.68). Retournons à l'équation initiale pour $n = 2$.

D'abord calculons $g_1^-(s, y)$

$$g_1^-(s, y) = g_1^+(s, y) - f_1(s, y)$$

$g_1^-(s, y)$ se calcule à partir de la formule :

$$g_1^-(s, y) = g_1^+(s, y) - f_1(s, y) = \left(\frac{m}{k} \right) \frac{1}{4} \left(\frac{V_0}{E} \right) \frac{\exp(ky)}{s - k} \left(1 - \frac{(2k)^2}{(s + k)^2} \right) \quad (4.70)$$

Calculons la transformée inverse de Laplace de $g_1^-(s, y)$ où $x < 0$ et $y < 0$

$$\begin{aligned}
g_1^-(x, y) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_1^-(s, y) \exp(sx) ds \\
&= \frac{m}{k} \frac{1}{4} \left(\frac{V_0}{E} \right) \frac{\exp ky}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(sx) \left[\frac{(2k)^2}{(s-k)(s+k)^2} - \frac{1}{s-k} \right] ds \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E} \right) \frac{1}{4} \frac{\exp ky}{2i\pi} \left[\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp sx}{s+k} ds + \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{2k \exp sx}{(s+k)^2} ds \right]
\end{aligned}$$

Le théorème des résidus appliqué au demi-cercle à gauche de l'axe imaginaire (i.e le pôle au point $s = -k$, il y a pôle double pour le deuxième terme) donne :

$$\begin{aligned}
g_1^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E} \right) \frac{\exp ky}{4} [\exp(-kx) + 2kx \exp(-kx)] \\
g_1^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E} \right) \frac{k}{2} \left[x + \frac{1}{2k} \right] \exp[-k(x-y)] \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Vérifions ce résultat par le calcul direct ($x > 0$ et $y < 0$) :

$$\begin{aligned}
g_1^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \int_0^{+\infty} \exp[-k|x-u| - k|u-y|] du \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \exp ky \int_0^{+\infty} \exp[-k|x-u| - ku] du \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \exp(ky) \left[(\exp(-kx)) \int_0^x du + \exp(kx) \int_x^{+\infty} \exp(-2ku) du \right] \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \exp(ky) \left[x \exp(-kx) + \frac{\exp(-kx)}{2k} \right] \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E} \right) \frac{k}{2} \left[x + \frac{1}{2k} \right] \exp[-k(x-y)] \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Ce résultat (4.72) identique avec le résultat précédent (4.71).

Calculons maintenant $g_2^-(s, y)$ et $g_2^+(s, y)$ obéissant à la formule de récurrence :

$$g_2^+(s, y) - g_2^-(s, y) = -\frac{2mV_0}{s^2 - k^2} g_1^-(s, y) \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2mV_0}{s^2 - k^2} \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{V_0}{E}\right) \frac{1}{4} \frac{\exp ky}{s - k} \left[1 - \frac{(2k)^2}{(s + k)^2}\right] \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{k^2}{4} \exp ky \left[\frac{1}{(s - k)^2 (s + k)} - \frac{(2k)^2}{(s - k)^2 (s + k)^3}\right] \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{k^2}{4} \exp ky * \left[\frac{1}{(2k)^2 (s + k)} - \frac{1}{(2k)^2 (s - k)} + \frac{1}{2k (s - k)^2} - \right. \\
&\quad \left. (2k)^2 \left(\frac{-3}{16k^4 (s - k)} + \frac{1}{8k^3 (s - k)^2} + \frac{3}{16k^4 (s + k)} + \frac{1}{4k^3 (s + k)^2} + \frac{1}{4k^2 (s + k)^3}\right)\right] \\
&= f_2(s, y) \tag{4.74}
\end{aligned}$$

En utilisant la même formule (3.159), nous déduisons que : puisque le pôle au point $\tau = k$ est négatif, il y a quatre termes qui contribuent au facteur $\frac{1}{s - k}$

$$\begin{aligned}
g_2^+(s, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\tau}{\tau - s} f_2(\tau, y) \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{k^2}{4} \exp(ky) \frac{1}{2i\pi} * \left[\frac{1}{(2k)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\tau}{(\tau - k)(\tau - s)} - \frac{1}{2k} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\tau}{(\tau - k)^2 (\tau - s)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{(2k)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\tau}{(\tau - k)(\tau - s)} + \frac{1}{2k} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\tau}{(\tau - k)^2 (\tau - s)}\right] \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{k^2}{4} \exp(ky) * \\
&\quad \left[\frac{1}{(2k)^2 (k - s)} + \frac{1}{(2k)(k - s)^2} - \frac{3}{(2k)^2 (k - s)} - \frac{1}{2k (k - s)^2}\right] \\
g_2^+(s, y) &= -\frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{1}{8} \frac{\exp ky}{s - k} \tag{4.75}
\end{aligned}$$

Calculons la transformée inverse de Laplace de $g_2^+(s, y)$ (pour $x < 0$) :

$$\begin{aligned}
g_2^+(x, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_2^+(s) \exp(sx) ds \\
&= -\frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{1}{8} \frac{\exp(ky)}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp(sx)}{s - k} ds \tag{4.76}
\end{aligned}$$

Le pôle à la droite de l'axe imaginaire (i.e au point $s = k$) :

$$g_2^+(x, y) = \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E} \right)^2 \frac{1}{8} \exp k(x + y) \quad (4.77)$$

Verifions ce résultat par le calcul direct (pour $x < 0$ et $y < 0$) :

$$\begin{aligned} g_2^+(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \int_0^{+\infty} d\xi \exp(-k|x - \xi|) \int_0^{+\infty} du \exp[-k|\xi - u| - k|u - y|] \\ &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \exp(kx) \int_0^{+\infty} d\xi \exp(-k\xi) * \exp(ky) \int_0^{+\infty} du \exp[-k|\xi - u| - ku] \\ &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \exp k(x + y) \int_0^{+\infty} d\xi \exp(-k\xi) * \\ &\quad \left[\exp(-k\xi) \int_0^\xi du + \exp(k\xi) \int_\xi^{+\infty} du \exp(-2ku) \right] \\ &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \exp k(x + y) \left(\int_0^{+\infty} d\xi \exp(-k\xi) \left[\xi \exp(-k\xi) + \frac{\exp(-k\xi)}{2k} \right] \right) \\ &\quad \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \exp k(x + y) \left(\int_0^{+\infty} d\xi \left[\xi + \frac{1}{2k} \right] \exp(-2k\xi) \right) \\ &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \exp k(x + y) \left(\left[\left(\xi + \frac{1}{2k} \right) \frac{\exp(-2k\xi)}{-2k} + \frac{\exp(-2k\xi)}{-4k^2} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \frac{\exp k(x + y)}{2k^2} = \frac{m}{k} \left(\frac{2mV_0}{k^2} \right)^2 \frac{1}{8} \exp k(x + y) \\ g_2^+(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E} \right)^2 \frac{1}{8} \exp k(x + y) \quad (4.78) \end{aligned}$$

Ce résultat (4.78) est identique au résultat précédent (4.77). Calculons maintenant :

$$\begin{aligned} g_2^-(s, y) &= g_2^+(s, y) - f_2(s, y) \\ &= -\left(\frac{m}{k}\right) \frac{1}{8} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{\exp k(y)}{s - k} + \frac{2mV_0}{s^2 - k^2} g_1^-(s, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{m}{k}\right) \frac{1}{8} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{\exp k(y)}{s-k} + \\
&\quad \left(\frac{m}{k}\right) \frac{1}{4} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 k^2 \frac{\exp ky}{s-k} \left[\frac{1}{s^2-k^2} - \frac{(2k)^2}{(s-k)(s+k)^3} \right] \\
g_2^-(s, y) &= \left(\frac{m}{k}\right) \frac{1}{8} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{\exp ky}{s-k} \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{(2k)^2}{s^2-k^2} - \frac{(2k)^4}{2(s-k)(s+k)^3} \right) \quad (4.79)
\end{aligned}$$

Calculons la transformée inverse de Laplace de $g_2^-(s, y)$ (pour $x > 0$ et $y < 0$) :

$$\begin{aligned}
g_2^-(x, y) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_2^-(s, y) \exp(sx) ds \\
&= \left(\frac{m}{k}\right) \frac{1}{8} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{\exp(ky)}{2i\pi} * \\
&\quad \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds \frac{\exp(sx)}{s-k} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(2k)^2}{s^2-k^2} + \frac{(2k)^4}{2(s-k)(s+k)^3} \right] \\
&= \frac{\beta}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left[\frac{\exp(sx)}{s-k} - \frac{\exp(sx)}{2(s+k)} + \frac{\exp(sx)}{2(s-k)} - \frac{k \exp(sx)}{(s-k)^2} \right] ds + \\
&\quad \frac{\beta}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left[\frac{-3 \exp(sx)}{2(s-k)} + \frac{k \exp(sx)}{(s-k)^2} + \frac{3 \exp(sx)}{2(s+k)} + \frac{2k \exp(sx)}{(s+k)^2} + \frac{2k^2 \exp(sx)}{(s+k)^3} \right] ds \quad (4.80)
\end{aligned}$$

où :

$$\beta = \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{\exp(ky)}{8} \quad (4.81)$$

Puisque $x < 0$, les pôles sont à gauche de l'axe imaginaire (i.e aux points $s = -k$ simple, double et triple). Donc il y a un seul terme dans la première somme de $g_2^-(x, y)$ et les trois derniers de la deuxième somme :

$$\begin{aligned}
g_2^-(x, y) &= \beta \left(-\frac{\exp(-kx)}{2} + \frac{3 \exp(-kx)}{2} + \left(2k \frac{\partial}{\partial s} (\exp(sx)) + \frac{2k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\exp(sx)) \right)_{s=-k} \right) \\
&= \beta (\exp(-kx) [1 + 2kx + k^2x^2])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{m}{k}\right) \frac{2k^2}{8} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{k} + \frac{1}{2k^2}\right] \exp(-k(x-y)) \\
&= \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{mV_0}{k}\right)^2 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{k} + \frac{1}{2k^2}\right] \exp(-k(x-y)) \\
&= \gamma \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{k} + \frac{1}{2k^2}\right] \exp(-k(x-y)) \tag{4.82}
\end{aligned}$$

où : $\gamma = \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{mV_0}{k}\right)^2$

Vérifions ce résultat par le calcul direct pour $x > 0$ et $y < 0$:

$$\begin{aligned}
g_2^-(x, y) &= \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{mV_0}{k}\right)^2 \int_0^{+\infty} du \exp(-k|x-u|) \int_0^{+\infty} dv \exp(-k|u-v| - k|v-y|) \\
&= \gamma \exp(-k(x-y)) \int_0^x du \exp(ku) \left(\exp(-ku) \int_0^u dv + \exp(ku) \int_u^{+\infty} dv \exp(-2kv) \right) \\
&\quad + \gamma \exp(k(x+y)) \int_x^{+\infty} du \exp(-ku) \left(\exp(-ku) \int_0^u dv + \exp(ku) \int_u^{+\infty} dv \exp(-2kv) \right) \\
&= \gamma \exp(-k(x-y)) \int_0^x \left(u + \frac{1}{2k}\right) du + \gamma \exp(k(x+y)) \int_x^{+\infty} du \left(u + \frac{1}{2k}\right) \exp(-2ku) \\
g_2^-(x, y) &= \gamma \exp(-k(x-y)) \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2k}\right] + \\
&\quad \gamma \exp(k(x+y)) \left[\left(u + \frac{1}{2k}\right) \frac{\exp(-2ku)}{-2k} + \frac{\exp(-2ku)}{-4k^2}\right]_x^{+\infty} \\
&= \gamma \exp(-k(x-y)) \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{k} + \frac{1}{2k^2}\right] \\
g_2^-(x, y) &= \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{k}{2}\right)^2 \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{k} + \frac{1}{2k^2}\right] \exp(-k(x-y)) \tag{4.83}
\end{aligned}$$

Les résultats (4.82) et (4.83) sont identiques.

Pour $n = 3$ l'équation initiale(4.63) donne :

$$g_3^+(s, y) - g_3^-(s, y) = -\frac{2mV_0}{s^2 - k^2} g_2^-(s, y)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{m}{k}\right) \frac{1}{8} \left(\frac{V_0}{E}\right)^3 \frac{\exp(ky)}{s-k} * \\
& \left[\frac{k^2}{s^2-k^2} - \frac{(2k)^4}{8(s^2-k^2)^2} + \frac{(2k)^6}{8(s-k)^2(s+k)^4} \right] \\
= & \alpha \left[k^2 \left(\frac{1}{(s-k)^2(s+k)} \right) - \frac{(2k)^4}{8} \left(\frac{1}{(s-k)^3(s+k)^2} \right) + \frac{(2k)^6}{8(s-k)^3(s+k)^4} \right] \\
= & \alpha \left(-\frac{1}{4(s-k)} + \frac{1}{4(s+k)} + \frac{k}{2(s-k)^2} \right) - \\
& \alpha \left(\frac{3}{8(s-k)} - \frac{k}{2(s-k)^2} + \frac{k^2}{2(s-k)^3} - \frac{3}{8(s+k)} - \frac{k}{4(s+k)^2} \right) + \\
& \alpha \left(\frac{5}{4(s-k)} - \frac{k}{(s-k)^2} + \frac{k^2}{2(s-k)^3} \right) - \\
& \alpha \left(\frac{5}{4(s+k)} + \frac{3k}{2(s+k)^2} + \frac{3k^2}{2(s+k)^3} + \frac{k^3}{(s+k)^4} \right) \\
= & f_3(s, y) \tag{4.84}
\end{aligned}$$

où :

$$\alpha = \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{V_0}{E}\right)^3 \frac{\exp(ky)}{8}.$$

Retournons au problème non homogène de Hilbert ; de même manière on obtient :

$$\begin{aligned}
g_3^+(s, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau-s} f_3(\tau, y) \\
&= \frac{\alpha}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{1}{4(\tau-k)} + \frac{k}{2(\tau-k)^2} - \frac{3}{8(\tau-k)} + \frac{k}{2(\tau-k)^2} - \frac{k^2}{2(\tau-k)^3} \right] \frac{d\tau}{\tau-s} \\
&+ \frac{\alpha}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{5}{4(\tau-k)} - \frac{k}{(\tau-k)^2} + \frac{k^2}{2(\tau-k)^3} \right] \frac{d\tau}{\tau-s}
\end{aligned}$$

Puisque les pôles sont à droite de l'axe imaginaire, par le théorème des résidus, seulement ces pôles contribuent :

$$g_3^+(s, y) = -\alpha \left(\frac{5}{8(k-s)} \right) + \alpha \left[\frac{k\partial}{\partial\tau} \left(\frac{1}{2(\tau-s)} + \frac{1}{2(\tau-s)} - \frac{1}{(\tau-s)} \right) \right]_{\tau=k} +$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha \left[\frac{k^2 \partial^2}{2\partial \tau^2} \left(\frac{1}{(\tau-s)} - \frac{1}{(\tau-s)} \right) \right]_{\tau=k} \\
& = -\alpha \frac{5}{8(k-s)} \\
g_3^+(s, y) & = \left(\frac{m}{k} \right) \frac{5}{64} \left(\frac{V_0}{E} \right)^3 \frac{\exp(ky)}{s-k}
\end{aligned} \tag{4.85}$$

En suivant le calcul terme à terme on peut remarquer que :

$$g_n^+(s, y) = -\frac{m}{k} a_n(k) \left(\frac{\exp(ky)}{s-k} \right); \text{ pour } n \geq 1 \tag{4.86}$$

où :

$$a_n(k) = -\frac{z^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1 - \sqrt{1-z}}{1 + \sqrt{1-z}} \right)_{z=0}, \text{ avec } z = \frac{-V_0}{E} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
g^+(s, y) & = g_0^+(s, y) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^+(s, y) \\
& = -\frac{m}{k} \left[\frac{\exp(ky)}{s+k} + \frac{\exp(-sy)}{s-k} - \frac{\exp(-sy)}{s+k} \right] \\
& \quad - \frac{m}{k} \left(\frac{\exp(ky)}{s-k} \right) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) \\
& = -\frac{m}{k} \left[\frac{\exp(ky)}{s+k} + \frac{\exp(-sy)}{s-k} - \frac{\exp(-sy)}{s+k} \right] \\
& \quad + \frac{m}{k} \left(\frac{\exp(ky)}{s-k} \right) \frac{(1 - \sqrt{1 + V_0/E})}{(1 + \sqrt{1 + V_0/E})}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Retournons à notre problème de la fonction de Green pour le potentiel de Heaviside. Calculons la transformée inverse de Laplace des deux termes pour ($y < 0$ et $x < 0$). Le calcul de l'intégrale se fait sur les demi-cercles à droite ou à gauche respectivement suivant le signe de $(x - y)$ où x :

$$g_{-, -}(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(sx) g^+(s, y) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{k} \exp(-k(x-y)) + \frac{m}{k} \exp(k(x+y)) \left(\frac{1 - \sqrt{1 + V_0/E}}{1 + \sqrt{1 + V_0/E}} \right) ; x > y \\ \frac{m}{k} \exp(k(x-y)) + \frac{m}{k} \exp(k(x+y)) \left(\frac{1 - \sqrt{1 + V_0/E}}{1 + \sqrt{1 + V_0/E}} \right) ; x < y \end{array} \right\} \\
g_{-,-}(x, y) &= \frac{m}{k} \exp(-k|x-y|) + \frac{m}{k} \exp(k(x+y)) \left(\frac{1 - \sqrt{1 + V_0/E}}{1 + \sqrt{1 + V_0/E}} \right) \quad (4.89)
\end{aligned}$$

II) Pour $y < 0, x > 0$, calculons $g_n^-(s, y)$ puis la transformée inverse de Laplace.

D'après la formule (4.63) on a :

$$g_n^-(s, y) = g_n^+(s, y) + \frac{2mV_0}{s^2 - k^2} g_{n-1}^-(s, y) \quad (4.90)$$

$$g_n^-(s, y) = \alpha_n \frac{\exp(ky)}{s - k} + \frac{2mV_0}{s^2 - k^2} g_{n-1}^-(s, y) \quad (4.91)$$

où :

$$\alpha_n = \frac{m}{k} \frac{z^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - z}}{1 + \sqrt{1 - z}} \right)_{z=0} = -\frac{m}{k} a_n(k) \quad (4.92)$$

Étape par étape nous arrivons à (pour $n \geq 1$) :

$$\begin{aligned}
g_n^-(s, y) &= \alpha_n \frac{\exp(ky)}{s - k} + \frac{2mV_0}{s^2 - k^2} g_{n-1}^-(s, y) \\
&= \alpha_n \frac{\exp(ky)}{s - k} + \frac{2mV_0}{s^2 - k^2} \left(\alpha_{n-1} \frac{\exp(ky)}{s - k} + \frac{2mV_0}{s^2 - k^2} g_{n-2}^-(s, y) \right) \\
&= \alpha_n \frac{\exp(ky)}{s - k} + \alpha_{n-1} \frac{2mV_0}{(s+k)(s-k)^2} \exp(ky) + \frac{(2mV_0)^2}{(s^2 - k^2)^2} g_{n-2}^-(s, y) \\
&= \alpha_n \frac{\exp(ky)}{s - k} + \alpha_{n-1} \frac{2mV_0}{(s+k)(s-k)^2} \exp(ky) \\
&\quad + \frac{(2mV_0)^2}{(s^2 - k^2)^2} \left(\alpha_{n-2} \frac{\exp(ky)}{s - k} + \frac{2mV_0}{s^2 - k^2} g_{n-3}^-(s, y) \right) \\
&= \alpha_n \frac{\exp(ky)}{s - k} + \alpha_{n-1} \frac{2mV_0}{(s+k)(s-k)^2} \exp(ky) + \alpha_{n-2} \frac{(2mV_0)^2}{(s+k)^2(s-k)^3} \exp(ky)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha_{n-3} \frac{(2mV_0)^3}{(s+k)^3(s-k)^4} \exp(ky) + \alpha_{n-4} \frac{(2mV_0)^4}{(s+k)^4(s-k)^5} \exp(ky) + \dots \\
& \dots + \alpha_1 \frac{(2mV_0)^{n-1}}{(s+k)^{n-1}(s-k)^n} \exp(ky) + \frac{(2mV_0)^n}{(s+k)^n(s-k)^n} g_0^-(s, y) \\
& = \exp(ky) \left[\sum_{p=1}^n \alpha_{n-p+1} \frac{(2mV_0)^{p-1}}{(s+k)^{p-1}(s-k)^p} - \frac{m}{k} \frac{(2mV_0)^n}{(s+k)^{n+1}(s-k)^n} \right] \\
g_n^-(s, y) & = -\frac{m}{k} \exp(ky) \left[\sum_{p=1}^n a_{n-p+1} \frac{(2mV_0)^{p-1}}{(s+k)^{p-1}(s-k)^p} + \frac{(2mV_0)^n}{(s+k)^{n+1}(s-k)^n} \right]. \tag{4.93}
\end{aligned}$$

Donc $g^-(s, y)$ s'écrit sous forme de série comme suivant :

$$\begin{aligned}
g^-(s, y) & = g_0^-(s, y) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^-(s, y) \\
& = g_0^-(s, y) - \frac{m}{k} \exp(ky) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{p=1}^n a_{n-p+1} \frac{(2mV_0)^{p-1}}{(s+k)^{p-1}(s-k)^p} + \frac{(2mV_0)^n}{(s+k)^{n+1}(s-k)^n} \right] \\
g^-(s, y) & = -\frac{m}{k} \exp(ky) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^n a_{n-p+1} \frac{(2mV_0)^{p-1}}{(s+k)^{p-1}(s-k)^p} \\
& \quad - \frac{m}{k} \exp(ky) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2mV_0)^n}{(s+k)^{n+1}(s-k)^n} \tag{4.94}
\end{aligned}$$

où $g_0^-(s, y)$ a été incorporée dans la dernière somme par le terme correspondant $n = 0$. La double somme a une structure de convolution qui peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^n a_{n-p+1} \frac{(2mV_0)^{p-1}}{(s+k)^{p-1}(s-k)^p} \\
& = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2mV_0)^{p-1}}{(s+k)^{p-1}(s-k)^p} \right) \tag{4.95}
\end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{aligned}
g^-(s, y) &= -\frac{m}{k} \exp(ky) * \\
&\quad \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \right) \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2mV_0)^{p-1}}{(s+k)^{p-1}(s-k)^p} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2mV_0)^n}{(s+k)^{n+1}(s-k)^n} \right] \\
g^-(s, y) &= -\frac{m}{k} \exp(ky) * \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\frac{1}{(s-k)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2mV_0)^p}{(s+k)^p(s-k)^p} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(s+k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2mV_0)^n}{(s+k)^n(s-k)^n} \right] \tag{4.96}
\end{aligned}$$

La somme des coefficient a_n donne $(1 - \sqrt{1-z})/(1 + \sqrt{1-z})$, et en considérant que la deuxième et la troisième sont des sommes de même série géométrique, alors :

$$\begin{aligned}
g^-(s, y) &= -\frac{m}{k} \exp(ky) * \\
&\quad \left[\frac{(1 - \sqrt{1-z})}{(1 + \sqrt{1-z})} \frac{1}{(s-k)} \frac{1}{1 - \frac{(2mV_0)}{(s^2-k^2)}} + \frac{1}{(s+k)} \frac{1}{1 - \frac{(2mV_0)}{(s^2-k^2)}} \right] \\
g^-(s, y) &= -\frac{m}{k} \exp(ky) * \\
&\quad \left[\frac{(1 - \sqrt{1-z})}{(1 + \sqrt{1-z})} \frac{(s+k)}{(s^2 - (k^2 + 2mV_0))} + \frac{(s-k)}{(s^2 - (k^2 + 2mV_0))} \right] \tag{4.97}
\end{aligned}$$

Inversons selon Laplace le dernière expression (pour $x > 0$); le résidu est pris au point $s = -\mu = -\sqrt{k^2 + 2mV_0}$:

$$\begin{aligned}
g_{+,-}(x, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} g^-(s, y) \exp(sx) ds \\
g_{+,-}(x, y) &= g(x, y) = -\frac{m}{k} \exp(ky - \mu x) \left[\frac{k - \mu}{k + \mu} \frac{-\mu + k}{-2\mu} + \frac{\mu + k}{2\mu} \right] \\
&= \frac{-2m}{k + \mu} \exp(ky - \mu x). \tag{4.98}
\end{aligned}$$

Le résultat pour $y > 0$ et $x < 0$ peut s'écrire immédiatement comme :

$$\begin{aligned}
g_{-,+}(x, y) &= -\frac{m}{k} \exp(kx - \mu y) \left[\frac{k - \mu - \mu + k}{k + \mu} \frac{-2\mu}{-2\mu} + \frac{\mu + k}{2\mu} \right] \\
&= \frac{-2m}{k + \mu} \exp(kx - \mu y).
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Notons à ce stade que le résultat indiqué par [1] est faux puisqu'il confond $g_{+,-}(x, y)$ avec $g_{-,+}(x, y)$ alors que toutes les références, en particulier [4], sont en accord avec notre résultat.

4.2 Region $y > 0$

Comme précédemment on prend le cas $y > 0$, les valeurs initiales $g_0^-(s, y)$ et $g_0^+(s, y)$ sont:

$$\begin{aligned}
g_0^-(s, y) &= -\frac{m}{k} \int_0^\infty \exp(-k|x-y|) \exp(-sx) dx \\
&= -\frac{m}{k} \int_0^y \exp(k(x-y)) \exp(-sx) dx - \frac{m}{k} \int_y^\infty \exp(k(x-y)) \exp(-sx) dx \\
g_0^-(s, y) &= \frac{-m}{k(s-k)} (\exp(-ky) - \exp(-sy)) - \frac{m \exp(-sy)}{k(s+k)}
\end{aligned} \tag{4.100}$$

$$g_0^+(s, y) = \frac{m}{k} \int_{-\infty}^0 \exp(-k|x-y|) \exp(-sx) dx = -\frac{m \exp(-ky)}{k(s-k)} \tag{4.101}$$

telle que :

$$g_1^+(s, y) - g_1^-(s, y) = \frac{-2mV_0}{(s^2 - k^2)} g_0^-(s, y) \equiv h_1(s, y) \tag{4.102}$$

Utilisant le problème non homogène de Hilbert (où $\varphi_0^-(s) = \varphi_0^+(s) = 1$ comme plus haut et aussi $P(s) = 0$) comme dans [17], on obtient :

$$g_1^+(s, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{h_1(u, y) du}{u - s} = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} du \left(\frac{1}{u - s} \right) \frac{2mV_0}{(u^2 - k^2)} g_0^-(u, y) ; s < 0$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m}{k} \frac{2mV_0}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} du \frac{1}{(u-s)} * \\
&\quad \left(\frac{\exp(-ky)}{(u+k)(u-k)^2} - \frac{\exp(-u.y)}{(u+k)(u-k)^2} + \frac{\exp(-u.y)}{(u-k)(u+k)^2} \right) \\
&= \frac{m}{k} \frac{2mV_0 \exp(-ky)}{2i\pi} * \\
&\quad \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left[\frac{1}{(2k)^2 (u+k)} - \frac{1}{(2k)^2 (u-k)} + \frac{1}{2k (u-k)^2} \right] \frac{du}{u-s} \\
&\quad - \frac{m}{k} \frac{2mV_0}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left[\frac{\exp(-yu)}{(2k)^2 (u+k)} - \frac{\exp(-yu)}{(2k)^2 (u-k)} + \frac{\exp(-yu)}{2k (u-k)^2} \right] \frac{du}{u-s} \\
&\quad + \frac{m}{k} \frac{2mV_0}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left[\frac{\exp(-yu)}{(2k)^2 (u-k)} - \frac{\exp(-yu)}{(2k)^2 (s+k)} - \frac{\exp(-yu)}{(2k)(u+k)^2} \right] \frac{du}{u-s} \\
&= \frac{m}{k} \frac{2mV_0}{2k} \exp(-ky) \left[-\frac{1}{2k(k-s)} + \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u-s} \right) \right)_{u=k} \right] \\
&\quad + \frac{m}{k} \frac{2mV_0}{2k} \left[\frac{\exp(-ky)}{2k(k-s)} - \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\exp(-yu)}{u-s} \right) \right)_{u=k} \right] \\
&\quad + \frac{m}{k} \frac{2mV_0 \exp(-ky)}{(2k)^2 (k-s)} \\
&= \frac{m}{k} \frac{2mV_0 \exp(-ky)}{k-s} * \\
&\quad \left[-\frac{1}{(2k)^2} - \frac{1}{2k(k-s)} + \frac{1}{(2k)^2} + \frac{y}{2k} + \frac{1}{(2k)(k-s)} + \frac{1}{(2k)^2} \right] \\
&= \frac{m}{k} 2mV_0 \left(\frac{y}{2k} + \frac{1}{(2k)^2} \right) \frac{\exp(-ky)}{k-s} \\
&= -\frac{m}{k} 2mV_0 \left(\frac{y}{2k} + \frac{1}{(2k)^2} \right) \frac{\exp(-ky)}{s-k}, \text{ le p\^ole au point } u = k.
\end{aligned}$$

Calculons la transformée inverse de Laplace (pour $x < 0$ et $y > 0$)

$$g_1^+(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_1^+(s) \exp(sx) ds$$

$$= -\frac{m}{k} 2mV_0 \frac{\exp(-ky)}{2i\pi} \left[\frac{y}{2k} + \frac{1}{(2k)^2} \right] \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp(sx)}{k-s} ds.$$

Puisque $x < 0$, donc le pôle est au point $s = k$ (i.e à droite de l'axe imaginaire) :

$$g_1^+(x, y) = \frac{m}{k} 2mV_0 \left[\frac{y}{2k} + \frac{1}{(2k)^2} \right] \exp(k(x-y)) \quad (4.103)$$

Vérifions ce résultat par le calcul direct ($x < 0$ et $y > 0$) :

$$\begin{aligned} g_1^+(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \int_0^{+\infty} \exp[-k|x-u| - k|u-y|] du \\ &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \exp(kx) \int_0^{+\infty} \exp[-ku - k|u-y|] du \\ &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \exp(kx) \left[(\exp(-ky)) \int_0^y du + \exp(kx) \int_y^{+\infty} \exp(-2ku) du \right] \\ &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \exp(kx) \left[y \exp(-ky) + \frac{\exp(-ky)}{2k} \right] \\ &= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E} \right) \frac{k}{2} \left[y + \frac{1}{2k} \right] \exp k(x-y) \\ &= \frac{m}{k} 2mV_0 \left[\frac{y}{2k} + \frac{1}{(2k)^2} \right] \exp k(x-y) \end{aligned} \quad (4.104)$$

qui est identique au résultat précédent. Passons maintenant à la formule :

$$\begin{aligned} g_1^-(s, y) &= g_1^+(s, y) - h_1(s, y) = \\ &= -\frac{m}{k} 2mV_0 \left(\frac{y}{2k} + \frac{1}{(2k)^2} \right) \exp(k(x-y)) + \frac{2mV_0}{(s^2 - k^2)} g_0^-(s, y) \end{aligned} \quad (4.105)$$

et calculons :

$$\begin{aligned} g_1^-(s) &= \frac{m}{k} 2mV_0 \left[-\frac{y}{2k} - \frac{1}{(2k)^2} \right] \frac{\exp(-ky)}{s-k} + \\ &\quad \left(\frac{\exp(-ky)}{(s+k)(s-k)^2} - \frac{\exp(-s.y)}{(s+k)(s-k)^2} + \frac{\exp(-s.y)}{(s-k)(s+k)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m}{k} \frac{2mV_0 \exp(-ky)}{2k} \left[-\frac{y}{s-k} - \frac{1}{2k(s-k)} + \frac{1}{2k(s+k)} - \frac{1}{2k(s-k)} + \frac{1}{(s-k)^2} \right] \\
&\quad - \frac{m}{k} \frac{2mV_0}{2k} \left[\frac{\exp(-sy)}{2k(s+k)} - \frac{\exp(-sy)}{2k(s-k)} + \frac{\exp(-sy)}{(s-k)^2} \right] \\
&\quad + \frac{m}{k} 2mV_0 \left[\frac{\exp(-sy)}{(2k)^2(s-k)} - \frac{\exp(-sy)}{(2k)^2(s+k)} - \frac{\exp(-sy)}{(2k)(s+k)^2} \right] \tag{4.106}
\end{aligned}$$

$$g_1^-(x, y) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_1^-(s, y) \exp(sx) ds \tag{4.107}$$

Puisque $y > 0$, $x > 0$ et $x > y$, les pôles sont à droite de l'axe imaginaire ($s = k$) :

$$\begin{aligned}
g_1^-(x, y) &= -\frac{m}{k} 2mV_0 \frac{\exp(-ky)}{2k} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left[\frac{\exp(sx)}{2k(s+k)} ds \right] \\
&\quad + \frac{m}{k} \frac{2mV_0}{2k} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp s(x-y)}{2k(s+k)} ds \\
&\quad + \frac{m}{k} \frac{2mV_0}{2k} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(s(x-y)) \left[\frac{1}{2k(s+k)} + \frac{1}{(s+k)^2} \right] \\
g_1^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \left[\left(x - y + \frac{1}{k} \right) \exp(-k(x-y)) - \frac{1}{2k} \exp(-k(x+y)) \right]. \tag{4.108}
\end{aligned}$$

Vérifions ce résultat par le calcul direct (pour $x > 0$, $y > 0$ et $x > y$) :

$$\begin{aligned}
g_1^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \int_0^{+\infty} du \exp(-k|x-u| - k|u-y|) \\
&= s \exp(-k(y+x)) \int_0^y du \exp(2ku) + s \exp(-k(x-y)) \int_y^x du + \\
&\quad s \exp k(x+y) \int_x^{+\infty} du \exp(-2ku) \\
&= \frac{s}{2k} (\exp k(-x+y) - \exp(-k(x+y))) + s(x-y) \exp k(y-x) \\
&\quad + \frac{s}{2k} \exp(k(y-x)) \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \left[\left(x - y + \frac{1}{k} \right) \exp(-(kx-y)) - \frac{1}{2k} \exp(-k(x+y)) \right] \tag{4.109}
\end{aligned}$$

Les deux résultats sont équivalents.

Calculons $g_1^-(x, y)$ dans le cas ($x > 0, y > 0$ et $x < y$). D'après l'expression de $g_1^-(s, y)$ la transformée inverse de Laplace donne :

$$\begin{aligned}
g_1^-(x, y) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_1^-(s, y) \exp(sx) ds \\
&= -\frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \frac{\exp(-ky)}{2k} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp(sx)}{2k(s+k)} ds - \\
&\quad \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left[\frac{\exp(s(x-y))}{k(s-k)} - \frac{\exp(s(x-y))}{(s-k)^2} \right] ds \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \left[\left(y - x + \frac{1}{k} \right) \exp(k(x-y)) - \frac{1}{2k} \exp(-k(x+y)) \right].
\end{aligned}$$

Vérifions ce résultat par le calcul direct (pour $x > 0, y > 0$ et $x < y$)

$$\begin{aligned}
g_1^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \int_0^{+\infty} du \exp(-k|x-u| - k|u-y|) \\
&= b \exp(-k(x+y)) \int_0^x du \exp(2ku) + b \exp(k(x-y)) \int_x^y du + \\
&\quad b \exp k(x+y) \int_y^{+\infty} du \exp(-2ku) \\
&= \frac{b}{2k} (\exp k(x-y) - \frac{1}{2k} \exp(-k(x+y)) + b(y-x) \exp k(x-y) \\
&\quad + \frac{b}{2k} \exp(k(x-y))) \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \left[\left(y - x + \frac{1}{k} \right) \exp(k(x-y)) - \frac{1}{2k} \exp(-k(x+y)) \right] \quad (4.110)
\end{aligned}$$

Les deux résultats sont identiques.

Envisageons maintenant le deuxième terme de la série :

$$g_2^+(s, y) - g_2^-(s, y) = -\frac{2mV_0}{(s^2 - k^2)} g_1^-(s, y) \equiv h_2(s, y) \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{m}{k} (2mV_0)^2 \frac{\exp(-ky)}{2k} \left[\frac{-y}{(s-k)^2(s+k)} - \frac{1}{2k(s-k)^2(s+k)} \right] + \\
&\quad \frac{m}{k} (2mV_0)^2 * \left[\frac{\exp(-ky)}{(s-k)^3(s+k)^2} - \frac{\exp(-sy)}{(s-k)^3(s+k)^2} + \frac{\exp(-sy)}{(s-k)^2(s+k)^3} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{k} (2mV_0)^2 \frac{\exp(-ky)}{2k} * \left[\left(y + \frac{1}{2k} \right) \left(\frac{1}{(2k)^2 (s+k)} - \frac{1}{(2k)^2 (s-k)} + \frac{1}{2k (s-k)^2} \right) \right] \\
& + \frac{m}{k} (2mV_0)^2 (\exp(-ky) - \exp(-sy)) * \left[\frac{3}{16k^4 (s-k)} - \frac{1}{4k^3 (s-k)^2} + \frac{1}{4k^2 (s-k)^3} \right. \\
& \left. \frac{3}{16k^4 (s+k)} - \frac{1}{8k^3 (s+k)^2} \right] + i \frac{m}{k} (2imV_0) \exp(-sy) * \left[\frac{-3}{16k^4 (s-k)} + \frac{1}{8k^3 (s-k)^2} \right. \\
& \left. + \frac{3}{16k^4 (s+k)} + \frac{1}{4k^3 (s+k)^2} + \frac{1}{4k^2 (s+k)^3} \right]. \tag{4.112}
\end{aligned}$$

Comme avant on peut écrire :

$$\begin{aligned}
g_2^+(s, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{h_2(u, y) du}{u-s} = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{du}{u-s} \left(\frac{2imV_0}{(u^2 - k^2)} g_1^-(u, y) \right) \\
&= -\frac{m}{k} (2mV_0) \frac{\exp(-ky)}{2k} \left[\left[y + \frac{1}{2k} \right] \left(\frac{1}{(2k)^2 (s-k)} - \frac{1}{2k (s-k)^2} \right) + \right. \\
&\quad \frac{1}{(s-k)} \left[\frac{y^2}{8k^2} + \frac{3y}{8k^3} + \frac{3}{16k^4} \right] - \frac{1}{(s-k)^2} \left[\frac{1}{8k^3} + \frac{y}{4k^2} \right] + \\
&\quad \left. \frac{1}{s-k} \left[\frac{y^2}{8k^2} + \frac{y}{4k^3} + \frac{1}{8k^4} \right] \right] \\
&= \frac{-1}{(2k)^2} \frac{\exp(-ky)}{s+k} \left(\frac{y}{2k} + \frac{1}{(2k)^2} \right) + \frac{\exp(-ky)}{s+k} \left(\frac{y}{2k} + \frac{1}{(2k)^2} \right) \frac{1}{(s-k)^2} \\
&\quad + \frac{\exp(-ky)}{s-k} \left(\frac{y^2}{2(2k)^2} + \frac{3y}{(2k)^3} + \frac{3}{(2k)^4} \right) - \frac{\exp(-ky)}{(s-k)^2} \left(\frac{y}{(2k)^2} + \frac{1}{(2k)^3} \right) \tag{4.113}
\end{aligned}$$

Calculons la transformée inverse de Laplace (pour $x < 0$), le pôle étant au point $s = k$:

$$\begin{aligned}
g_2^+(x, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_2^+(s, y) \exp(sx) ds \\
&= \frac{m}{k} (2mV_0)^2 \frac{\exp(-ky)}{(2k)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp(sx)}{s-k} \left[\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{k} + \frac{1}{2k^2} \right) \right] ds \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y}{k} + \frac{1}{2k^2} \right] \exp(k(x-y)). \tag{4.114}
\end{aligned}$$

Vérifions ce résultat par le calcul direct (pour $x < 0$ et $y > 0$) :

$$\begin{aligned}
g_2^+(x, y) &= \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{mV_0}{k}\right)^2 \int_0^{+\infty} du \exp(-k|x-u|) \int_0^{+\infty} dv \exp(-k|u-v| - k|v-y|) \\
&= C \exp(-k(y-x)) * \\
&\quad \int_0^y du \exp(ku) \left(\exp(-ku) \int_0^u dv + \exp(ku) \int_u^{+\infty} dv \exp(-2kv) \right) \\
&\quad + C \exp(k(x+y)) * \\
&\quad \int_y^{+\infty} du \exp(-ku) \left(\exp(-ku) \int_0^u dv + \exp(ku) \int_u^{+\infty} dv \exp(-2kv) \right) \\
&= C \exp(-k(y-x)) \int_0^y \left(u + \frac{1}{2k}\right) du + \\
&\quad C \exp(k(x+y)) \int_y^{+\infty} du \left(u + \frac{1}{2k}\right) \exp(-2ku) \\
\text{où : } C &= \frac{m}{k} \left(\frac{2mV_0}{k}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2^{++}(x, y) &= C \exp(-k(y-x)) \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2k} \right] + \\
&\quad C \exp(k(x+y)) \left[\left(u + \frac{1}{2k}\right) \frac{\exp(-2ku)}{-2k} + \frac{\exp(-2ku)}{-4k^2} \right]_y^{+\infty} \\
&= C \exp(-k(y-x)) \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y}{k} + \frac{1}{2k^2} \right] \\
g_2^+(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{2mV_0}{k}\right)^2 \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y}{k} + \frac{1}{2k^2} \right] \exp(k(x-y)) \tag{4.115}
\end{aligned}$$

qui est identique au résultat précédent.

Calculons $g_2^-(x, y)$, (pour $x > 0$, $y > 0$ et $x > y$). Retournons à l'équation de récurrence :

$$g_2^-(s, y) = g_2^+(s, y) - h_2(s, y) \tag{4.116}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \frac{\exp((-ky))}{s-k} \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y}{k} + \frac{1}{2k^2} \right] - \frac{m}{k} (2mV_0)^2 \frac{\exp(-ky)}{2k} * \\
&\quad \left[\left(-y - \frac{1}{2k} \right) \left(\frac{1}{(2k)^2(s+k)} - \frac{1}{(2k)^2(s-k)} + \frac{1}{2k(s-k)^2} + \frac{3}{16k^4(s-k)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4k^3(s-k)^2} + \frac{1}{4k^2(s-k)^3} - \frac{3}{16k^4(s+k)} - \frac{1}{8k^3(s+k)^2} \right] + \\
&\quad \frac{m}{k} (2mV_0) \exp(-sy) \left[\frac{-3}{8k^4(s-k)} + \frac{3}{8k^3(s-k)^2} + \frac{1}{4k^3(s-k)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8k^4(s+k)} + \frac{3}{8k^3(s+k)^2} + \frac{1}{4k^2(s+k)^3} \right]. \tag{4.117}
\end{aligned}$$

Calculons la transformée inverse de Laplace de $g_2^-(s, y)$ dans le cas $x > 0$, $y > 0$ et $x > y$.
D'après théorème des résidus où le pôle ($s = -k$) est à droite de l'axe imaginaire on obtient :

$$\begin{aligned}
g_2^-(x, y) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_2^-(s, y) \exp(sx) ds \\
&= -\frac{m}{k} (2mV_0)^2 \exp(-k(x+y)) \left[\left(\frac{y}{2k} + \frac{1}{4k^2} \right) \left(\frac{1}{4k^2} \right) + \frac{3}{16k^4} + \frac{x}{8k^2} \right] \\
&\quad - \frac{m}{k} (2mV_0)^2 \exp(-k(x-y)) \left[-\frac{3}{16k^4} - \frac{x-y}{8k^3} - \frac{3}{16k^4} - \frac{x-y}{4k^3} - \frac{(x-y)^2}{8k^2} \right] \\
g_2^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \left[\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{3(x-y)}{2k} + \frac{3}{2k^2} \right] \exp(-k(x-y)) \\
&\quad - \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \left(\frac{(x-y)}{2k} + \frac{1}{2k^2} \right) \exp(-k(x+y)) \tag{4.118}
\end{aligned}$$

Vérifions ce résultat par le calcul direct (pour $x > 0$, $y > 0$ et $x > y$) :

$$\begin{aligned}
g_2^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \int_0^{+\infty} du \exp(-k|x-u|) \int_0^{+\infty} dv \exp(-k|u-v| - k|v-y|) \\
&= C(I_1 + I_2 + I_3) \quad \text{tels que}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \exp(-kx) \int_0^y du \exp(ku) * \\
&\quad \left[\exp(-ky) \int_0^y dv \exp(kv - k|u-v|) + \exp(ky) \int_y^{+\infty} dv \exp(ku - 2kv) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(-k(x+y)) \int_0^y du \exp(ku) \left[\exp(-ku) \int_0^u dv \exp(2kv) + \exp(ku) \int_u^y dv \right] + \\
&\quad \exp(-k(x+y)) \int_0^y du \frac{\exp(2ku)}{2k} \\
&= \exp(-k(x+y)) \int_0^y \left[\frac{\exp(2ku) - 1}{2k} \right] du + \exp(-k(x+y)) \int_0^y (u-y) \exp(2ku) du \\
&\quad + \frac{\exp(-k(x-y))}{4k^2} - \frac{\exp(-k(x+y))}{4k^2} \\
&= \frac{\exp(-k(x-y))}{4k^2} - \frac{\exp(-k(x+y))}{4k^2} - \frac{y \exp(-k(x+y))}{2k} + \frac{\exp(-k(x-y))}{4k^2} \\
&\quad - \frac{y \exp(-k(x+y))}{2k} - \frac{\exp(-k(x+y))}{4k^2} + \frac{\exp(-k(x-y))}{4k^2} - \frac{\exp(-k(x+y))}{4k^2} \quad (4.119)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \exp(-kx) \int_y^x du \exp(ku) * \left[\exp(-ky) \int_0^y dv \exp(-ku + 2kv) + \right. \\
&\quad \left. \exp(-k(x+y)) \int_0^y du \frac{\exp(2ku)}{2k} \exp(ky) \int_y^{+\infty} dv \exp(-kv - k|u-v|) \right] \\
&= \exp(-k(x+y)) \left[\frac{\exp(2ky) - 1}{2k} \right] \int_y^x du + \\
&\quad \exp(-k(x-y)) \left[\int_y^x du \int_y^u dv + \exp(2ku) \int_u^{+\infty} \exp(-2kv) dv \right] \\
&= \frac{(x-y) \exp(-k(x-y))}{2k} - \frac{(x-y) \exp(-k(x+y))}{2k} + \\
&\quad \left[\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} \right] \exp(-k(x-y)) + \frac{x-y}{2k} \exp(-k(x-y)) \quad (4.120)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \exp k(x) \int_x^{+\infty} du \exp(-ku) * \\
&\quad \left[\exp(-ky) \int_0^y dv \exp(2kv - ku) + \exp(ky) \int_y^{+\infty} dv \exp(-kv - k|u-v|) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\exp(k(x+y)) - \exp(k(x-y))}{2k} \int_x^{+\infty} \exp(-2ku) du + \\
&\quad \exp(k(x+y)) \int_x^{+\infty} du \exp(-ku) \left[\exp(-ku) \int_y^u dv + \exp(ku) \int_u^{+\infty} dv \exp(-2kv) \right] \\
&= \frac{\exp(-k(x-y))}{4k^2} - \frac{\exp(-k(x+y))}{4k^2} + \left(\frac{x-y}{2k} + \frac{1}{2k^2} \right) \exp(-k(x-y)) \quad (4.121)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2^-(x, y) &= C \left[\left(\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{3(x-y)}{2k} + \frac{3}{2k^2} \right) \exp(-k(x-y)) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x+y}{2k} + \frac{1}{k^2} \right) \exp(-k(x+y)) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \left[\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{3(x-y)}{2k} + \frac{3}{2k^2} \right] \exp(-k(x-y)) - \\
&\quad \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \left(\frac{x+y}{2k} + \frac{1}{k^2} \right) \exp(-k(x+y)). \quad (4.122)
\end{aligned}$$

Ce résultat est identique au résultat précédent.

Calculons la transformée inverse de Laplace de $g_2^-(s, y)$ dans le cas $(x > 0, y > 0$ et $x < y)$:

$$\begin{aligned}
g_2^-(x, y) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_2^-(s, y) \exp(sx) ds \\
&= -\frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \frac{\exp(-ky)}{2k} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(sx) \left[\left(y + \frac{1}{k^2} \right) \frac{1}{s+k} + \frac{1}{(s+k)^2} \right] - \\
&\quad \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(s(x-y)) \left[\frac{3}{2k^2(s-k)} - \frac{3}{2k(s-k)^2} + \frac{1}{(s-k)^3} \right] \\
&= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \left[\frac{(x-y)^2}{2} - \frac{3(x-y)}{2k} + \frac{3}{2k^2} \right] \exp(k(x-y)) - \\
&\quad \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \left[\frac{x+y}{2k} + \frac{1}{k^2} \right] \exp(-k(x+y)) \quad (4.123)
\end{aligned}$$

Vérifions ce résultat par le calcul direct (pour $x > 0$, $y > 0$ et $x < y$) :

$$\begin{aligned} g_2^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \int_0^{+\infty} du \exp(-k|x-u|) \int_0^{+\infty} dv \exp(-k|u-v| - k|v-y|) \\ &= a(I_1 + I_2 + I_3) \quad \text{telle que} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \exp(-kx) \int_0^x du \exp(ku) * \\ &\quad \left[\exp(-ky) \int_0^y dv \exp(kv - k|u-v|) + \exp(ky) \int_y^{+\infty} dv \exp(ku - 2kv) \right] \\ &= \exp(-k(x+y)) \int_0^x \left[\frac{\exp(2ku) - 1}{2k} \right] du + \exp(-k(x+y)) \int_0^x (y-u) \exp(2ku) du \\ &\quad + \frac{\exp(k(x-y))}{4k^2} - \frac{\exp(-k(x+y))}{4k^2} \\ &= \frac{\exp(k(x-y))}{4k^2} - \frac{\exp(-k(x+y))}{4k^2} - \frac{x \exp(-k(x+y))}{2k} + \frac{(y-x) \exp(k(x-y))}{2k} \\ &\quad + \frac{\exp(k(x-y))}{4k^2} - \frac{y \exp(-k(x+y))}{2k} - \frac{\exp(-k(x+y))}{4k^2} + \\ &\quad \frac{\exp(k(x-y))}{4k^2} - \frac{\exp(-k(x+y))}{4k^2} \end{aligned} \tag{4.124}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \exp(kx) \int_x^y du \exp(-ku) * \\ &\quad \left[\begin{aligned} &\exp(-ky) \int_0^u dv \exp(-ku + 2kv) + \\ &\exp(-ky) \int_u^y dv \exp(ku) + \exp(ky) \int_y^{+\infty} dv \exp(ku - 2kv) \end{aligned} \right] \\ &= \exp(k(x-y)) \int_x^y \left[\frac{1 - \exp(-2ku)}{2k} \right] du + \exp(k(x-y)) \left[\int_x^y du \int_y^u dv + \int_x^y \frac{du}{2k} \right] \\ &= \frac{(y-x) \exp(k(x-y))}{2k} + \frac{\exp(k(x-3y))}{4k^2} - \frac{\exp(-k(x+y))}{4k^2} \\ &\quad + \left[\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} \right] \exp(k(x-y)) + \frac{y-x}{2k} \exp(k(x-y)) \end{aligned} \tag{4.125}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \exp(kx) \int_y^{+\infty} du \exp(-ku) * \\
&\quad \left[\exp(-ky) \int_0^y dv \exp(2kv - ku) + \exp(ky) \int_y^{+\infty} dv \exp(-kv - k|u - v|) \right] \\
&= \frac{\exp(k(x+y)) - \exp(k(x-y))}{2k} \int_y^{+\infty} \exp(-2ku) du + \\
&\quad \exp(k(x+y)) \int_y^{+\infty} du \exp(-ku) \left[\exp(-ku) \int_y^u dv + \exp(ku) \int_u^{+\infty} dv \exp(-2kv) \right] \\
&= \frac{\exp(k(x-y))}{4k^2} - \frac{\exp(k(x-3y))}{4k^2} + \frac{1}{2k^2} \exp(k(x-y)) \tag{4.126}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2^-(x, y) &= a \left[\left(\frac{(x-y)^2}{2} - \frac{3(x-y)}{2k} + \frac{3}{2k^2} \right) \exp(k(x-y)) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x+y}{2k} + \frac{1}{k^2} \right) \exp(-k(x+y)) \right] \tag{4.127}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2^-(x, y) &= \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right)^2 \left[\frac{(x-y)^2}{2} - \frac{3(x-y)}{2k} + \frac{3}{2k^2} \right] \exp(k(x-y)) \\
&\quad - \frac{m}{k} \left(\frac{mV_0}{k} \right) \left(\frac{x+y}{2k} + \frac{1}{k^2} \right) \exp(-k(x+y)). \tag{4.128}
\end{aligned}$$

En généralisant nous remarquons qu'il y a des termes (proportionnel à $\frac{1}{s-k}$) contribuant à l'intégrale :

$$g_n(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g_n^+(s, y) \exp(sx) ds \tag{4.129}$$

et d'autres termes dont la contribution peut être réduite à des intégrales sur des termes aussi proportionnels à $\left(\frac{1}{s-k}\right)$. Les termes restant ne contribuent pas à l'intégrale. Ces remarques nous conduisent à séparer $g_n^+(s, y)$ en deux parties : une relevante $g_n^+(s, y)$ et proportionnelle à $\left(\frac{1}{s-k}\right)$ et l'autre non relevante ne contribuant pas à l'intégrale.

Donc $g_n^+(s, y)$ s'écrit comme suit :

$$g_n^+(s, y) = -\frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E}\right)^n \frac{\exp(-ky)}{s-k} \sum_{p=0}^n a_n(p) y^p$$

$$g^+(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^+(s, y) = -\frac{m}{k} \exp(-ky) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{V_0}{E}\right)^n \sum_{p=0}^n a_n(p) y^p. \quad (4.130)$$

On cherche $a_n(p)$ comme suit ; comme nous avons (pour $y > 0$ et $x < 0$) :

$$g(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g^+(s, y) \exp(sx) ds = -\frac{m}{k} \frac{2k}{k+\mu} \exp(kx - \mu y) \quad (4.131)$$

$$g(x, y) = - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{V_0}{E}\right)^n \sum_{p=0}^n a_n(p) y^p \right) \frac{m}{k} \exp(k(x-y)), \quad (4.132)$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{V_0}{E}\right)^n \sum_{p=0}^n a_n(p) y^p = \frac{2k \exp y(k-\mu)}{k+\mu}. \quad (4.133)$$

Revenons à l'équation de récurrence :

$$g_n^+(s, y) - g_n^-(s, y) = b(s) g_{n-1}^-(s, y) \quad (4.134)$$

où :

$$b(s) = \frac{-2mV_0}{s^2 - k^2}. \quad (4.135)$$

Procédant pas à pas on trouve :

$$\begin{aligned} g_n^-(s, y) &= g_n^+(s, y) + (-b(s)) g_{n-1}^-(s, y) \\ &= g_n^+(s, y) + (-b(s)) [g_{n-1}^+(s, y) + (-b(s)) g_{n-2}^-(s, y)] \quad \text{etc....} \end{aligned} \quad (4.136)$$

et finalement :

$$g_n^-(s, y) = \sum_{m=2}^n (-b(s))^{n-m} g_m^+(s, y) + (-b(s))^{n-1} g_1^-(s, y). \quad (4.137)$$

Donc la série s'écrit comme

$$\begin{aligned} g^-(s, y) &= g_0^-(s, y) + g_1^-(s, y) + \sum_{n=2}^{\infty} g_n^-(s, y) \\ &= g_0^-(s, y) + \frac{g_1^-(s, y)}{1+b(s)} + \frac{\sum_{n=2}^{\infty} g_n^+(s, y)}{1+b(s)} \\ &= g_0^-(s, y) + \frac{g_1^-(s, y)}{1+b(s)} - \frac{g_0^+(s, y) + g_1^+(s, y)}{1+b(s)} + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} g_n^+(s, y)}{1+b(s)} \\ &= g_0^-(s, y) + \frac{g_1^-(s, y)}{1+b(s)} - \frac{g_0^+(s, y) + g_1^+(s, y)}{1+b(s)} - \\ &\quad \frac{1}{1+b(s)} \frac{m \exp(-ky)}{k} \frac{1}{s-k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{V_0}{E} \right)^n \sum_{p=0}^n a_n(p) y^p \right) \\ &= g_0^-(s, y) + \frac{g_1^-(s, y)}{1+b(s)} - \frac{g_0^+(s, y) + g_1^+(s, y)}{1+b(s)} - \\ &\quad \frac{1}{1+b(s)} \frac{m \exp(-ky)}{k} \frac{1}{s-k} \left(\frac{2k \exp y(k-\mu)}{k+\mu} \right). \end{aligned}$$

Après quelques simplifications on arrive à :

$$g^-(s, y) = -\frac{m}{k} 2k \left(\frac{s+k}{s+\mu} \right) \left(\frac{\exp(-\mu y)}{(k+\mu)(\mu-s)} + \frac{\exp(-s y)}{(s+k)(s-\mu)} \right). \quad (4.138)$$

Inversons la dernière expression de $g^-(s, y)$, on trouve pour $x > y > 0$:

$$g_{+,+}(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g^-(s, y) \exp(sx) ds$$

$$\begin{aligned}
&= -2m \exp(-\mu y) \frac{(k - \mu) \exp(-\mu x)}{2\mu(k + \mu)} - 2m \frac{\exp(-\mu(x - y))}{-2\mu} \\
&= -\frac{m}{\mu} \left(\frac{k - \mu}{k + \mu} \exp(-\mu(x + y)) - \exp(-\mu|x - y|) \right) \tag{4.139}
\end{aligned}$$

qui est conforme avec [1] et [4].

4.3 Conclusion

Nous avons calculé la fonction de Green pour le potentiel de Heaviside en suivant la démarche originale de la théorie de sommation de la série de perturbation dans le cadre de l'intégrale fonctionnelle de Feynman. Par ce travail nous avons critiqué un travail dû à Grosche dans lequel prétend résoudre le problème par la méthode des perturbations, et aussi corrigé un résultat faux d'Aguiar. Nous estimons que ce travail acquiert de l'originalité puisque aucun travail dans ce sens, au moins pour le cas de Heaviside, n'a été effectué et trouvé dans la littérature. Nous projetons d'élargir cette méthode à d'autres problèmes aux limites avec potentiel.

Chapitre 5

APPENDICE

1) Théorème de Green

Théorème :-1)

Si le problème aux limites (1.25) n'a pas de solution autre que la solution triviale $y(x) \equiv 0$, l'opérateur H admet une fonction de Green $G(\vec{r}_2, \vec{r}_1, E)$ et une seule, [13].

2) Proposition (théorème de résidus)

Soit L un contour associé à un domaine D ; soit $\{z_1, \dots, z_n\} = \Omega$ un ensemble fini contenu dans D ; si f holomorphe dans une partie ouverte contenant $\overline{D} \setminus \Omega$, alors, [5] :

$$\oint_L f(z) dz = 2i\pi \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} f(z_j)$$

3) Lemmes de Jordan

Lemme 1 : Désignons les arcs de cercle

$$|s - \sigma| = R, -\frac{\pi}{2} \leq \arg(s - \sigma) \leq \frac{\pi}{2}, \text{ et } \frac{\pi}{2} \leq \arg(s - \sigma) \leq \frac{3\pi}{2}$$

respectivement par c_n , et \tilde{c}_n . Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = +\infty$, si une fonction $f(s)$ d'une variable complexe s tend vers zéro uniformément en $\arg(s)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ sur c_n et \tilde{c}_n alors :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{c_n} f(s) \exp(st) ds = 0 \quad \text{si } t < 0 \quad (5.1)$$

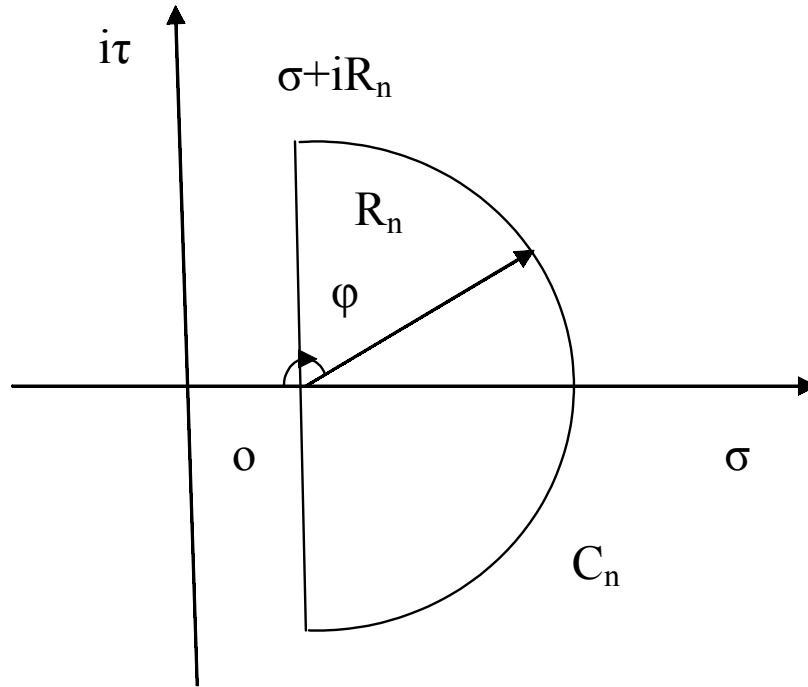


FIG. 5-1:

$$2) \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_{c_n} f(s) \exp(st) ds \quad \text{si } t > 0 \quad (5.2)$$

Preuve : La fonction $f(s)$ tend vers zéro uniformément en $\arg s$ sur c_n et \tilde{c}_n , il existe un nombre $N(\varepsilon)$ suffisamment grand (dépendant de ε et non de s) tel que l'on a $|f(s)| < \varepsilon$, pour $n > N(\varepsilon)$ sur c_n et \tilde{c}_n . (en tout point $s = \sigma + R_n \exp(i\varphi)$) sur ces arcs (voir figure (5.1)). On aura, en égard

$$|i| = 1, \quad \text{et } |\exp(i\varphi)| = 1, \quad |ds| = |iR_n \exp(i\varphi) d\varphi| = R_n d\varphi, \quad |\exp(st)| = \exp(\sigma t) \exp(tR_n \cos \varphi)$$

De l'inégalité :

$$\left| \int_{c_n} f(s) ds \right| \leq \int_{c_n} |f(s)| |ds|$$

on déduit la majoration

$$\left| \int_{c_n} f(s) \exp(st) ds \right| < \varepsilon R_n \exp(\sigma t) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(tR_n \cos \varphi) d\varphi = 2\varepsilon R_n \exp(\sigma t) \int_0^{\pi/2} \exp(tR_n \cos \varphi) d\varphi \quad (5.3)$$

telle que

$$\cos \varphi = \cos(-\varphi), \quad \varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

et aussi

$$\left| \int_{\tilde{c}_n} f(s) \exp(st) ds \right| < \varepsilon R_n \exp(\sigma t) \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \exp(tR_n \cos \varphi) d\varphi = 2\varepsilon R_n \exp(\sigma t) \int_{\pi/2}^{\pi} \exp(tR_n \cos \varphi) d\varphi. \quad (5.4)$$

Pour estimer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \exp(tR_n \cos \varphi) d\varphi \quad (t < 0), \text{ posons } \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

il vient alors que :

$$\int_0^{\pi/2} \exp(tR_n \cos \varphi) d\varphi = \int_{\pi/2}^0 \exp(tR_n \sin \psi) (-d\psi) = \int_0^{\pi/2} \exp(tR_n \sin \psi) d\psi \quad (t < 0), \quad (5.5)$$

comme

$$\sin \psi > \frac{2}{\pi} \psi, \quad \psi \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

on obtient la majoration suivante :

$$\int_0^{\pi/2} \exp(tR_n \cos \varphi) d\varphi < \int_0^{\pi/2} \exp\left(\frac{2tR_n}{\pi} \psi\right) d\psi = \frac{\pi}{2tR_n} (\exp(tR_n) - 1). \quad (5.6)$$

Donc de (5.3) on en déduit que

$$\left| \int_0^{\pi/2} f(s) \exp(st) ds \right| < \frac{\varepsilon \pi}{t} \exp(\sigma t) (\exp(tR_n) - 1) < \frac{\varepsilon \pi}{|t|} \exp(\sigma t) < \frac{\varepsilon \pi}{|t|};$$

et comme ε est arbitraire cette expression entraîne (5.1).

$$\psi = -\frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \cos \varphi = -\sin \psi$$

alors :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \exp(tR_n \cos \varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \exp(tR_n \sin \psi) d\psi. \quad (5.7)$$

Comme $t > 0$ de même manière de (5.5), et (5.6) on peut estimer (5.4) et de celle-ci on déduit que :

$$\left| \int_{\tilde{c}_n} f(s) \exp(st) ds \right| < \frac{\varepsilon \pi}{t},$$

ce qui entraîne (5.2) puisque ε est arbitraire, [7].

Lemme(2) :-

Supposons qu'une fonction $f(s)$ d'une variable complexe s vérifie sur les arcs de cercle (voir figure(5.2)) :

$$\Gamma_R : |s| = R ; \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arg(s) < \frac{3\pi}{2} + \varepsilon , \quad |f(s)| < MR^{-k}$$

où $R > R_0$, M et $k > 0$ sont des constantes et

$$\varepsilon = \arcsin \frac{\sigma}{R},$$

alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(s) \exp(st) ds = 0, \quad (t > 0)$$

preuve :

Ce lemme découlera du précédent si l'on prouve que :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{c'} f(s) \exp(st) ds + \int_{c''} f(s) \exp(st) ds \right) = 0 \quad (t > 0) \quad (5.8)$$

où c' et c'' sont les arcs AB et DE du cercle $|s| = R$ (voir figure (5.2)),

De l'inégalité

$$\left| \int_{c'} f(s) \exp(st) ds \right| \leq \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} |f(s)| \exp(t \operatorname{Re}(s)) R d\varphi \quad (5.9)$$

où

$$|f(s)| \leq MR^{-k} \quad \text{et,} \quad \operatorname{Re}(s) \leq \sigma,$$

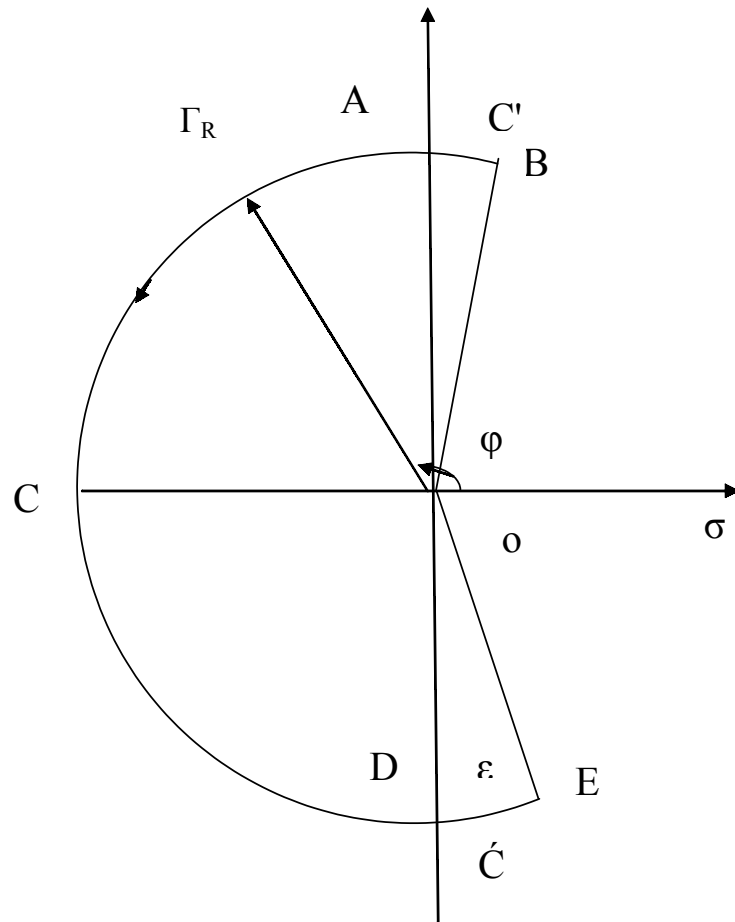


FIG. 5-2:

il vient

$$\left| \int_{\mathcal{C}'} f(s) \exp(st) ds \right| \leq \frac{M}{R^k} \exp(\sigma t) R \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} d\varphi = \frac{M}{R^k} \exp(\sigma t) R \varepsilon = \frac{M}{R^k} \exp(\sigma t) R \arcsin \frac{\sigma}{R}. \quad (5.10)$$

On pose :

$$\arcsin \frac{\sigma}{R} = y \implies \frac{\sigma}{R} = \sin y, \text{ si } R \rightarrow +\infty, \sin y \rightarrow 0, \text{ d'où, } y \rightarrow 0$$

aussi

$$R \arcsin \frac{\sigma}{R} = y \frac{\sigma}{\sin y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \sigma$$

donc

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{M}{R^k} \sigma \exp(\sigma t) = 0$$

d'où (5.8) est nulle.

De la même façon on prouve que, [7] :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}''} f(s) \exp(st) ds = 0 \quad (t > 0).$$

4) Fonction entière

Définition

Une fonction holomorphe dans \mathbb{C} tout entier s'appelle fonction entière, [5].

5) Théorème de Liouville généralisé

Proposition

Soit $f \in H(\mathcal{C})$ ($H(\mathcal{C})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{C}), et supposons qu'il existe $M > 0$, $\alpha \geq 0$, $r > 0$ tels que :

$$|f(z)| < M|z|^\alpha, \quad |z| > r$$

($|z| > r$ un voisinage ouvert du point \mathbf{z} à l'infini, $V(\infty) \not\subseteq \mathbb{C}$). Alors f est un polynôme de degré $N \leq \alpha$, [5].

6) Rappel

Un ouvert régulier Ω est de bord Γ de classe $C^{1,\beta}$, $0 < \beta \leq 1$ si au voisinage de toute point $z \in \Gamma$, il existe une paramétrique normale α telle que, [6], :

$$|\text{grad } \alpha(x) - \text{grad } \alpha(x')| \leq c|x - x'|^\beta, \quad \forall x, x' \in O, \quad O \text{ un ouvert} \quad (5.11)$$

7) Calcul du terme $g_0(x, y)$:

Soit

$$g_0(x, y) = i \frac{m}{k} \int_0^{+\infty} dt \sqrt{\frac{m}{2i\pi t}} \exp \left[i \left(-Et + \frac{m(x-y)^2}{2t} \right) \right] \quad (5.12)$$

posons

$$u^2 = \frac{2mt}{i\pi} \quad (5.13)$$

$$du = \sqrt{\frac{m}{2i\pi t}} dt \quad (5.14)$$

donc (5.12) s'écrit

$$g_0(x, y) = \int_0^{+\infty} du \exp \left[\frac{E\pi}{2m} u^2 + \frac{m^2(x-y)^2}{\pi u^2} \right] \quad (5.15)$$

posons

$$b = \frac{\pi E}{2m}, \quad \text{et} \quad a = \frac{-m^2}{\pi} (x-y)^2 \quad (5.16)$$

$$ab = \frac{Eu}{2} (x-y)^2 = \frac{k}{2} |x-y|, \quad \text{où } k = \sqrt{2Em} \quad (5.17)$$

d'où (5.15) s'écrit comme :

$$g_0(x, y) = \int_0^{+\infty} du \exp \left(\frac{-a}{u^2} - bu^2 \right) \quad (5.18)$$

aussi on pose

$$y = u\sqrt{b}, \quad c^2 = ab, \quad \text{donc } \frac{-a}{u^2} = \frac{-c}{y^2} \quad (5.19)$$

on écrit (5.18) sous la forme :

$$g_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{b}} \int_0^{+\infty} dy \exp \left(-y^2 - \frac{c^2}{y^2} \right) = f(c) \quad (5.20)$$

on dérive $f(c)$ par rapport à c on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int_0^{+\infty} dy \left(\frac{-2c}{y^2} \right) \exp \left(-y^2 - \frac{c^2}{y^2} \right) \quad (5.21)$$

posons

$$z = \frac{c}{y} \quad (5.22)$$

donc (5.21) s'écrit comme :

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{-2}{\sqrt{b}} \int_0^{+\infty} dz \exp \left(-z^2 - \frac{c^2}{z^2} \right) = -2f(c) \quad (5.23)$$

et la résolution de l'équation différentielle donne :

$$f(c) = f(0) \exp(-2c) \quad (5.24)$$

où

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{b}} \int_0^{+\infty} dy \exp(-y^2) = \frac{1}{2\sqrt{b}} \sqrt{\pi}, \quad (5.25)$$

et enfin

$$f(c) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{-\pi E}{2m}}} \exp(-k|x-y|) \quad (5.26)$$

donc

$$g_0(x, y) = -i \frac{m}{k} \exp(-k|x-y|)$$

Bibliographie

- [1] M. A. M. Aguiar Phys. Rev. A. 48 (1993) 2567-2573
- [2] K.V. Bhagwat and S.V. Lawande ; Phys.Letters.A Vol 135 Issues 8-9 (1989) pp 417-420
- [3] K.V. Bhagwat and S.V. Lawande ; Phys.Letters.A Vol 141 Issue 7 (1989) , pp 321-325
- [4] R. E. Crandall, J. Phys .A : Math. Gen. (1993) 3627-3648
- [5] Srishti D.Chatterji : cours d'Analyse (2 analyse complexe), imprimé en suisse par schüler SA. Bienne ©1997 Presses Polytechnique Universitaires Romandne (ChapII-2.5.2, ChapIV-2.4.2)
- [6] R. Dautray ; J. Louis Lions, Michel Artola, Philippe Benilan, Michel Bernadou, Michel Cessinat, Jean-Claude Nedecel, J.Planchard : Analyse mathématique et calcul numérique (pour les sciences et les techniques), Masson 1984 et 1985 (Vol. 6 chapI, Sec.1-3)
- [7] V. Ditkine, A.Proudnikov : Calcul operationnel, Edition Mir Moscou (1975), (chapI, section11)
- [8] J. Dupraz : La théorie des distributiond et ses applications, Ensta.Cepadues-Editions Toulouse (1977)
- [9] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw Hill, N.Y. 1965)
- [10] C. Grosche ; J. Phys. A : Math. Gen. 23 No 22 (21 November 1990) 5205-5234 ; and Phys. A Math. Gen. 28 (1995), L99-L105.
- [11] C. Grosche ; Phys. Rev. Lett. 71, Number 1, pp 1-4 (1993)
- [12] T. Kato :Perturbation Theory For Linear Operators, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg ,N.Y. 1980)

- [13] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, Equations intégrales; Edition Mir (1976)
- [14] S.V. Lawande and K.V. Bhagwat; Phys.Letters A Vol.131 Issue 1 (1988) ,pp 8-10
- [15] L.S. Schulman, Techniques and Applications of The path Integration (Wiley NY 1981)
- [16] V.Smirnov : Cours de Mathématique Supérieures; Edition Mir Moscou (1975) , (Vol.III Part.2 ChapI : Sec.25-29).
- [17] V. Smirnov : Cours de Mathématique Supérieures; Edition Mir Moscou (1975) , (Vol.IV Part.1 ChapI : Sec.58-67).
- [18] V. Vladimirov, V.Mikhailov, M. Chabounine, KH. Karimova, Y. Sidorov, A. Vacharine : Recueil de problèmes d'équations de Phys. Math. Edition Mir Moscou (1977), (chapII-section5, chapIII-section6)

ملخص :

في هذه المذكرة عالجتنا مسألة تتدرج في إطار المسائل التي تهتم بالمعادلات التفاضلية الجزئية (E.D.P) وبشروط حدية (conditions aux limites). بالتحديد سوف نقوم بحل معادلة شرودنغر (Schrödinger) المستقلة عن الزمن ومن أجل جهد (potentiel) ثابت و متقطع و المستعمل برواج في الميكانيك الكمي. للمسألة حلول في هذا الاتجاه (E.D.P) أنظر مقالات Aguiar- Grosche. في هذا العمل استعملنا طريقة تستخدم نظريات المعادلات التكاملية للدوال المستمرة بنقطع (s.continues). البحث عن دالة قرين بواسطة التكاملات الدالية لفينمان (Feynman) يعني البحث عن حل معادلة شرودنغر. الأهم في هذا العمل هو البحث عن دالة قرين بواسطة طريقة الاضطراب (Perturbation) ثم تشكيل السلسلة و الربط بين حدودها بواسطة علاقة تراجعية و بعد الجمع نستنتج دالة قرين. بهذا العمل ننتقد بحث لقروش (Grosche) والذي ادعى فيه الحل لهذه المسألة بطريقة الاضطراب و كذلك تصحيح نتيجة خاطئة لأقيار (Aguiar). نقيم هذا العمل على أنه يقدم طريقة لم يسبق لها أن نشرت وخاصة بالنسبة إلى جهد هيفسد (Heaviside) يمكننا إسقاط هذا الطريقة على مسائل حدية أخرى مع جهد.

Résumé :

Nous avons calculé la fonction de Green pour le potentiel de Heaviside en suivant la démarche originale de la théorie de sommation de la série de perturbation dans le cadre de l'intégrale fonctionnelle de Feynman. Nous avons ainsi critiqué un travail dû à Grosche dans lequel prétend résoudre le problème par la méthode des perturbations, et aussi corriger un résultat faux d'Aguiar. Nous estimons que ce travail acquiert de l'originalité puisque aucun travail dans ce sens, au moins pour le cas de Heaviside, n'a été effectué et trouvé dans la littérature. Cette méthode peut être élargie pour résoudre autres problèmes aux limites avec potentiel.