UN PROBLEME DE COQUES ELASTIQUES MINCES AVEC PROBLEME LIMITE A ENERGIE NON BORNEE

D. A. CHACHA[1] et I. MERABET[2]
[1]M.C. Université Kasdi Merbah-Ouargla.
[2]M.A. Université Kasdi Merbah-Ouargla

Résumé :
Nous étudions dans ce travail un problème de perturbation singulière dépendant d'un petit paramètre $\varepsilon > 0$, qui caractérise l'équilibre d'une coque linéairement élastique, mince d'épaisseur 2ε et à surface moyenne elliptique, dans le cadre de la théorie de Koiter. Pour $\varepsilon > 0$ ce problème est bien posé dans l'espace des déplacements admissibles. Par contre si $\varepsilon = 0$ le problème limite est mal posé pour un choix de chargements singuliers, i.e., n'appartenant pas au dual de l'espace du problème limite. Ainsi l'énergie de déformation de la coque tend vers l'infini et elle se concentre dans des couches internes. Nous déterminons ensuite la structure de ces couches internes et nous justifions la convergence.

Mots-clés: coque mince, surface elliptique, couche interne, problème limite, perturbation singulière.

Abstract
We study in this work a singular perturbation problem depending on a small parameter $\varepsilon > 0$, which characterizes the balance of a linearly elastic thin shell of thickness 2ε and elliptic middle surface, within the framework of the theory of Koiter. For $\varepsilon > 0$ this problem is well posed in the space of admissible displacements. On the other hand if $\varepsilon = 0$ the limit problem is ill-posed for a choice of singular loadings, i.e., which are not in the dual of the space of the limit problem. Thus the deformation energy of the shell tends towards the infinite one and it concentrates in internal layers. Then we determine the structure of these internal layers and we justify the convergence.

Keywords : Thin shell , elliptic surface , internal layers, limit problem, singular perturbation

1 Introduction

Une coque mince est un corps tridimensionnel caractérisée par sa surface moyenne $S = \phi(\Omega)$ et par son épaisseur 2ε, où Ω est un ouvert borné connexe de R^2 , ϕ est une application suffisamment régulière de $\overline{\Omega}$ dans R^3 et ε un petit paramètre positif. En faisant tendre ε vers zéro, on obtient par l'analyse asymptotique des modèles limites posés sur Ω . Pour plus de détails sur la théorie asymptotique des coques minces nous recommandons les références [2], [7]. Nous allons brièvement rappeler les définitions et les notations classiques de géométrie différentielle de surface qui nous sont nécessaires. Nous utilisons la convention usuelle de sommation sur les indices et exposants répétés, sachant que les indices Grecs prennent leurs valeurs dans l'ensemble {1, 2} à l'exception de ε et δ . On note $y = (y^\alpha)$ un point courant de Ω, $\partial_\alpha = \partial / \partial y^\alpha$ et $\partial_{\alpha\beta} = \partial^2 / \partial y^\alpha \partial y^\beta$. On définit alors la base covariante du plan tangent à la surface moyenne S par $a_\alpha = \partial_\alpha \phi,$ et la base contravariante a^β par la relation $a_\alpha . a^\beta = \delta_\alpha^\beta$, où δ désigne le symbole de Kronecker. Le vecteur normal unitaire est donné par $a_3 = a^3 = \dfrac{a_1 \wedge a_2}{\|a_1 \wedge a_2\|}$. On définit la "première forme fondamentale" de la surface S par $a_{\alpha\beta} = a_\alpha . a_\beta$, et on introduit également $a^{\alpha\beta} = a^\alpha . a^\beta$. La "deuxième forme fondamentale" s'exprime par $b_{\alpha\beta} = a_3 . a_{\alpha\beta} = -a_\alpha . \partial_\beta a_3$ et la troisième forme fondamentale par $c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\tau b_{\tau\beta}$, où $b_\alpha^\tau = a^{\tau\mu} b_{\mu\alpha}$. Les symboles de Christoffel de S sont définis par $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = a^\lambda . \partial_\beta a_\alpha$ et l'élément d'aire est $\sqrt{a}dy$ avec $a = \det(a_{\alpha\beta})$. On remarque les symétries suivantes: $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}$, $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$, $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$.

Le comportement asymptotique des coques élastiques minces dépend de la forme géométrique de la surface moyenne S et les chargements utilisés. En particulier, pour certains chargements des couches limites où internes apparaissent et la partie dominante de l'énergie de déformation se concentre dans ces couches.

Suivant les recherches sur la théorie asymptotique des coques minces linéairement élastiques développées notamment par Sanchez-Palencia [7], le comportement d'une coque mince est très différent suivant que la surface moyenne est ou non géométriquement rigide (coque inhibée ou non inhibée). Rappelons que la rigidité géométrique d'une surface, au sens qui convient en théorie des coques, consite en la non existence des déplacements inextensionnels. Dans ce travail on s'intéresse seulement au cas d'une coque inhibée. Une coque totalement encastrée est une coque inhibée et le problème variationnel caractérisant son équilibre pour des chargements f est :

$$(P(\varepsilon))\begin{cases}\text{Etant donné } f\in V', \text{ trouver } u^{\varepsilon}\in V=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times H_0^2(\Omega) \text{ telque}\\ a_m(u^{\varepsilon},v)+\varepsilon^2 a_f(u^{\varepsilon},v)=\langle f,v\rangle_{V',V}\quad \forall v\in V\end{cases}$$

avec

$$a_m(u^{\varepsilon},v)=\int_{\Omega}A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}(u^{\varepsilon})\gamma_{\alpha\beta}(v)dy^1dy^2 \quad (1)$$

est l'expression de la forme bilinéaire d'énergie de déformation membranaire,

$$a_f(u^{\varepsilon},v)=\int_{\Omega}B^{\alpha\beta\lambda\mu}\rho_{\lambda\mu}(u^{\varepsilon})\rho_{\alpha\beta}(v)dy^1dy^2. \quad (2)$$

est l'expression de la forme bilinéaire d'énergie de déformation en flexion,

$$A^{\alpha\beta\lambda\mu}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu}+a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda}+\frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right), \quad (3)$$

$$B^{\alpha\beta\lambda\mu}=\frac{1}{12}A^{\alpha\beta\lambda\mu}, \quad (4)$$

sont les coefficients élastiques (membranaire et de flexion respectivement) pour un matériau homogène et isotrope, avec E ($E>0$) est le module de Young et ν ($0<\nu<\frac{1}{2}$) est le coefficient de Poisson du matériau. Les coefficients $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$ vérifient les propriétés de symétrie et de positivité classiques. De plus

$$\gamma_{\alpha\beta}(u)=\frac{1}{2}(D_\alpha u_\beta+D_\beta u_\alpha)-b_{\alpha\beta}u_3 \quad (5)$$

désignent les composantes covariantes du tenseur linéarisé des déformations,

$$\rho_{\alpha\beta}(u)=D_\alpha D_\beta u_3-b_\alpha^\eta b_{\eta\beta}u_3+b_\alpha^\eta(D_\beta u_\eta)+D_\alpha(b_\beta^\eta u_\eta) \quad (6)$$

désignent les composantes covariantes du tenseur linéarisé de changement de courbure où le symbole D désigne la dérivée covariante avec $D_\alpha u_\beta=\partial_\alpha u_\beta-\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda$.

Notons par $T^{\alpha\beta}=A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}(u)$ (tenseur des contraintes membranaires) et $M^{\alpha\beta}=B^{\alpha\beta\lambda\mu}\rho_{\lambda\mu}(u)$ (tenseur des moments de flexion).

Il est facile de vérifier que $(a_m(v,v))^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur V . Soit V_m le complété de V pour cette norme, alors $V_m=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$..

Notons par $V_m'=H^{-1}\times H^{-1}\times L^2$ son dual

Définition 1: *On dit que le problème* $P(\varepsilon)$ *est avec problème limite à énergie non bornée si* $f\notin V_m'$. *Dans le cas contraire est dit avec problème limite à énergie bornée.*

2 Le problème modèle

Notons que ce problème a été étudié par Sanchez-Palencia dans [7], mais avec les hypothèses suivantes :

1) $b_{12}=0$ et $b_{11}=b_{22}=1$

2) $T^{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}$.

Dans notre travail on essaye de généraliser. On garde seulement la première hypothèse, puisque pour une coque elliptique (E. Faou [4], p.193), a montré qu'on peut choisir une telle paramètrisation pour une coque mince à surface moyenne elliptique telle que :

$b_{12}=0$ et $b_{11}=b_{22}$.

$\Gamma_{22}^\alpha=\Gamma_{12}^2=0$, $a^{11}=a^{22}=1$ et $a^{12}=0$

Donc dans ce travail on considère dans le plan (y^1,y^2) le domaine $\Omega=]0,\pi[\times]-1,1[$,

$b_{12}=0$ et $b_{11}=b_{22}$.

On prend $f=(0,0,\delta(y^2))$ avec δ est la masse de Dirac, elle génère une singularité suivant la courbe $y^2=0$, il est claire que $f\notin V_m'(\delta\notin L^2)$ donc le problème limite $P(0)$ est à énergie non bornée. On cherche $u^{\varepsilon}=(u_\alpha^{\varepsilon},u_3^{\varepsilon})$ sous la forme:

$$\begin{cases}u_\alpha^{\varepsilon}=\varphi_\alpha(y^1)H(y^2)+.....\\ u_3^{\varepsilon}=\psi(y^1)\delta(y^2)+.......\end{cases} \quad (7)$$

avec H est la mesure de Heaviside.

2.1 Structure des couches internes

Afin d'étudier le comportement asymptotique de u^{ε} quand $\varepsilon\to 0$ on utilise le changement d'échelles suivant : $z^1=y^1$ et $z^2=\dfrac{y^2}{\eta(\varepsilon)}$ tel que $\eta(\varepsilon)\to 0(\text{quand } \varepsilon\to 0)$. Ainsi nous avons :

$$\tilde{\partial}_1=\frac{\partial}{\partial z^1}=\partial_1 \ et\ \tilde{\partial}_2=\frac{\partial}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial z^2}=\eta.\partial_2 \quad (8)$$

et le domaine Ω se transforme en $B^\eta=]0,\pi[\times]\frac{-1}{\eta},+\frac{1}{\eta}[$

De (3) on obtient

$$\begin{cases} A^{1111} = \dfrac{E}{(1+\nu)}\cdot\dfrac{\nu}{1-\nu} = A^{2222} \\ A^{1212} = A^{2121} = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \\ A^{2211} = A^{1122} = \nu.A^{1111} \\ \text{Les autres coefficients sont nuls.} \end{cases} \qquad (9)$$

D'autre part on a:

$$\mathrm{a}_{\mathrm{m}}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \int_\Omega \mathrm{A}^{1111}\gamma_{11}(\mathrm{u})\gamma_{11}(\mathrm{v})\mathrm{dy}^1\mathrm{dy}^2 + 2\int_\Omega \mathrm{A}^{1212}(\mathrm{u})\gamma_{12}\gamma_{12}(\mathrm{v})\mathrm{dy}^1\mathrm{dy}^2$$

$$+\int_\Omega \mathrm{A}^{1122}\gamma_{11}(\mathrm{u})\gamma_{22}(\mathrm{v})\mathrm{dy}^1\mathrm{dy}^2 + \int_\Omega \mathrm{A}^{2211}\gamma_{22}(\mathrm{u})\gamma_{11}(\mathrm{v})\mathrm{dy}^1\mathrm{dy}^2 + \int_\Omega \mathrm{A}^{2222}\gamma_{22}(\mathrm{u})\gamma_{22}(\mathrm{v})\mathrm{dy}^1\mathrm{dy}^2.$$

$$\mathrm{a}_{\mathrm{f}}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \int_\Omega \mathrm{B}^{1111}\,?_{11}(\mathrm{u})?_{11}(\mathrm{v})\mathrm{dy}^1\mathrm{dy}^2 + 2\int_\Omega \mathrm{B}^{1212}\,?_{12}(\mathrm{u})?_{12}(\mathrm{v})\mathrm{dy}^1\mathrm{dy}^2$$

$$+\int_\Omega \mathrm{B}^{1122}\,?_{11}(\mathrm{u})?_{22}(\mathrm{v})\mathrm{dy}^1\mathrm{dy}^2 + \int_\Omega \mathrm{B}^{2211}\,?_{22}(\mathrm{u})?_{11}(\mathrm{v})\mathrm{dy}^1\mathrm{dy}^2 + \int_\Omega \mathrm{B}^{2222}\,?_{22}(\mathrm{u})?_{22}(\mathrm{v})\mathrm{dy}^1\mathrm{dy}^2.$$

On utilise le changement d'inconnues suivant : $u_\alpha^\varepsilon = U_\alpha^\eta(z^1,z^2)$; $u_3^\varepsilon = \eta^{-1}U_3^\eta(z^1,z^2)$,
il s'ensuit que :

$$\widetilde{\gamma}_{11}(\mathrm{U}^\eta) = \gamma_{11}(\mathrm{u}^\varepsilon) = \mathrm{D}_1\mathrm{u}_1^\varepsilon - \mathrm{u}_3^\varepsilon = \mathrm{D}_1\mathrm{U}_1^\eta - \eta^{-1}\mathrm{U}_3^\eta$$

$$\widetilde{\gamma}_{12}(U^\eta) = \gamma_{12}(u^\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\left(\partial_1 U_2^\eta + \eta^{-1}\widetilde{\partial}_2 U_1^\eta\right) - \Gamma_{12}^\lambda U_\lambda^\eta = \tfrac{1}{2}\left(\partial_1 U_2^\eta - 2\Gamma_{12}^\lambda U_\lambda^\eta\right) +$$

$$\tfrac{1}{2}\eta^{-1}\widetilde{\partial}_2 U_1^\eta = \overline{D}_{12}U^\eta + \tfrac{1}{2}\eta^{-1}\widetilde{\partial}_2 U_1^\eta \;\text{ avec } \overline{D}_{\alpha\beta}U = \tfrac{1}{2}\left(\partial_{\alpha\beta}U_2 - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda\right)$$

$$\widetilde{\gamma}_{22}(\mathrm{U}^\eta) = \gamma_{22}(\mathrm{u}^\varepsilon) = \eta^{-1}\left(\widetilde{\partial}_2\mathrm{U}_2^\eta - \mathrm{U}_3^\eta\right)$$

$$\widetilde{\rho}_{11}(\mathrm{U}^\eta) = \rho_{11}(\mathrm{u}^\varepsilon) = \rho_{11}^0(\mathrm{U}^\eta) + \eta^{-1}\rho_{11}^1(\mathrm{U}^\eta) + \eta^{-2}\rho_{11}^2(\mathrm{U}^\eta)$$

$$\widetilde{\rho}_{12}(\mathrm{U}^\eta) = \rho_{12}(\mathrm{u}^\varepsilon) = \rho_{12}^0(\mathrm{U}^\eta) + \eta^{-1}\rho_{12}^1(\mathrm{U}^\eta) + \eta^{-2}\rho_{12}^2(\mathrm{U}^\eta)$$

$$\widetilde{\rho}_{22}(\mathrm{U}^\eta) = \rho_{22}(\mathrm{u}^\varepsilon) = \rho_{22}^0(\mathrm{U}^\eta) + \eta^{-1}\rho_{22}^1(\mathrm{U}^\eta) + \eta^{-3}\rho_{22}^3(\mathrm{U}^\eta)$$

On obtient

$$\gamma_{11}(\mathrm{u}^\varepsilon)\gamma_{11}(\mathrm{v}) = \mathrm{D}_1\mathrm{U}_1^\eta\mathrm{D}_1\mathrm{V}_1 + \eta^{-1}\left[\left(-\mathrm{U}_3^\eta\mathrm{D}_1\mathrm{V}_1\right) + \mathrm{D}_1\mathrm{U}_1^\eta(-\mathrm{V}_3)\right] + \eta^{-2}\mathrm{U}_3^\eta\mathrm{V}_3$$

$$\gamma_{12}(\mathrm{u}^\varepsilon)\gamma_{12}(\mathrm{v}) = \overline{\mathrm{D}}_{12}\mathrm{U}^\eta\overline{\mathrm{D}}_{12}\mathrm{V} + \eta^{-1}\tfrac{1}{2}\left[\overline{\mathrm{D}}_{12}\mathrm{U}^\eta\widetilde{\partial}_2\mathrm{V}_1 + \overline{\mathrm{D}}_{12}\mathrm{V}\widetilde{\partial}_2\mathrm{U}_1^\eta\right] + \frac{\eta^{-2}}{4}\widetilde{\partial}_2\mathrm{U}_1^\eta\widetilde{\partial}_2\mathrm{V}_1$$

$$\gamma_{22}(\mathrm{u}^\varepsilon)\gamma_{11}(\mathrm{v}) = \eta^{-1}\left(\widetilde{\partial}_2\mathrm{U}_2^\eta - \mathrm{U}_3^\eta\right)\mathrm{D}_1\mathrm{V}_1 + \eta^{-2}\left(\widetilde{\partial}_2\mathrm{U}_2^\eta - \mathrm{U}_3^\eta\right)(-\mathrm{V}_3)$$

$$\gamma_{11}(\mathrm{u}^\varepsilon)\gamma_{22}(\mathrm{v}) = \eta^{-1}\mathrm{D}_1\mathrm{U}_1^\eta\left(\widetilde{\partial}_2\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_3\right) + \eta^{-2}\left(-\mathrm{U}_3^\eta\right)\left(\widetilde{\partial}_2\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_3\right)$$

$$\gamma_{22}(\mathrm{u}^\varepsilon)\gamma_{22}(\mathrm{v}) = \eta^{-2}\left(\widetilde{\partial}_2\mathrm{U}_2^\eta - \mathrm{U}_3^\eta\right)\left(\widetilde{\partial}_2\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_3\right)$$

$$\rho_{11}(\mathrm{u}^\varepsilon)\rho_{11}(\mathrm{v}) = \eta^{-4}\rho_{11}^2(\mathrm{U}^\eta)\rho_{11}^2(\mathrm{V}) + \ldots\ldots.$$

$$\rho_{12}(\mathrm{u}^\varepsilon)\rho_{12}(\mathrm{v}) = \eta^{-4}\rho_{12}^2(\mathrm{U}^\eta)\rho_{12}^2(\mathrm{V}) + \ldots\ldots.$$

$$\rho_{11}(\mathrm{u}^\varepsilon)\rho_{22}(\mathrm{v}) = \eta^{-5}\rho_{11}^2(\mathrm{U}^\eta)\rho_{22}^3(\mathrm{V}) + \ldots\ldots.$$

$$\rho_{22}(\mathrm{u}^\varepsilon)\rho_{11}(\mathrm{v}) = \eta^{-5}\rho_{22}^3(\mathrm{U}^\eta)\rho_{11}^2(\mathrm{V}) + \ldots\ldots.$$

$$\rho_{22}(\mathrm{u}^\varepsilon)\rho_{22}(\mathrm{v}) = \eta^{-6}\rho_{22}^3(\mathrm{U}^\eta)\rho_{22}^3(\mathrm{V}) + \ldots\ldots.$$

De l'autre côté on a

$$\int_\Omega f_3 v_3 dy^1 dy^2 = \eta^{-1}\int_0^\pi V_3(z^1,0)dz^1 \qquad (10)$$

On choisit $\eta(\varepsilon)$ tel que le premier terme (dominant) en flexion soit d'ordre η^0 pour obtenir un nouveau problème $P(\eta)$ à énergie b2ornée. Donc il faut choisir $\eta(\varepsilon)$ de telle sorte que :

$$\varepsilon^2\eta^{-6}\eta^2 = 1 \Rightarrow \eta = \varepsilon^{1/2} \qquad (11)$$

2.2 Étude du problème $P(\eta)$:

$$(P(\eta))\ \begin{cases} \text{trouver } U^{\eta} \text{ tel que} \\ \sum_{j=0}^{j=6} \eta^{j} a_{j}\left(U^{\eta}, V\right)=\int_{0}^{\pi} V_{3}\left(z^{1}, 0\right) d z^{1} \end{cases} \tag{12}$$

telles que

$$a_{0}(U, V)=\int_{B^{\eta}}\left[A^{1111} U_{3} V_{3}+\tfrac{1}{2} A^{1212} \widetilde{\partial}_{2} U_{1} \widetilde{\partial}_{2} V_{1}+A^{1122}\left(\ell_{22}(U)\left(-V_{3}\right)+\left(-U_{3}\right) \ell_{22}(V)\right)\right] d z^{1} d z^{2}+$$

$$\int_{B^{\eta}}\left[A^{2222} l_{22}(U) l_{22}(V)+B^{2222} \rho_{22}^{3}(U) \rho_{22}^{3}(V)\right] d z^{1} d z^{2}$$

$$a_{1}(U, V)=\int_{B^{\eta}}\left[A^{1111}\left(-U_{3} . D_{1} V-V_{3} . D_{1} U_{1}\right)+A^{1212}\left(\widetilde{\partial}_{2} U_{1} \overline{D}_{12} V+\overline{D}_{12} U \widetilde{\partial}_{2} V_{1}\right)\right] d z^{1} d z^{2}+$$

$$+\int_{B^{\eta}}\left[A^{1122}\left[\ell_{22}(U) D_{1} V_{1}+D_{1} U_{1} \ell_{22}(V)\right]+B^{1122}\left(\rho_{11}^{2}(U) \rho_{22}^{3}(V)+\rho_{22}^{3}(U) \rho_{11}^{2}(V)\right)\right] d z^{1} d z^{2} .$$

$$a_{2}(U, V)=\int_{B^{\eta}}\left[A^{1111} D_{1} U_{1} D_{1} V+2 A^{1212} \overline{D}_{12} U \overline{D}_{12} V+B^{1111} \rho_{11}^{2}(U) \rho_{11}^{2}(V)\right] d z^{1} d z^{2} .+$$

$$+\int_{B^{\eta}}\left[B^{1122}\left(\rho_{11}^{1}(U) \rho_{22}^{3}(V)+\rho_{22}^{3}(U) \rho_{11}^{1}(V)\right)+2 B^{1122} \rho_{12}^{2}(U) \rho_{12}^{3}(V)\right] d z^{1} d z^{2}$$

$$a_{3}(U, V)=\int_{B^{\eta}}\left[B^{1111}\left(\rho_{11}^{2}(U) \rho_{11}^{1}(V)+\rho_{11}^{1}(U) \rho_{11}^{2}(V)\right)+2 B^{1212}\left(\rho_{12}^{1}(U) \rho_{11}^{0}(V)+\rho_{22}^{1}(U) \rho_{11}^{2}(V)\right)\right] d z^{1} d z^{2}$$

$$+\int_{B^{\eta}}\left[B^{1122}\left(\rho_{11}^{0}(U) \rho_{22}^{3}(V)+\rho_{11}^{2}(U) \rho_{22}^{1}(V)+\rho_{22}^{3}(U) \rho_{11}^{0}(V)+\rho_{22}^{1}(U) \rho_{11}^{2}(V)\right)\right] d z^{1} d z^{2}$$

$$a_{4}(U, V)=\int_{B^{\eta}}\left[B^{1111}\left(\rho_{11}^{1}(U) \rho_{11}^{1}(V)+\rho_{11}^{1}(U) \rho_{11}^{0}(V)+\rho_{11}^{0}(U) \rho_{11}^{2}(V)\right)+B^{1122}\left(\rho_{11}^{1}(U) \rho_{22}^{1}(V)+\rho_{22}^{1}(U) \rho_{11}^{1}(V)\right)\right] d z^{1} d z^{2}+$$

$$+\int_{B^{\eta}}\left[2 B^{1212}\left[\rho_{12}^{0}(U) \rho_{12}^{0}(V)+\rho_{12}^{2}(U) \rho_{12}^{0}(V)+\rho_{12}^{1}(U) \rho_{12}^{1}(V)\right]+B^{2222}\left(\rho_{22}^{1}(U) \rho_{22}^{1}(V)\right)\right] d z^{1} d z^{2}$$

$$a_{6}(U, V)=\int_{B^{\eta}}\left[B^{1111} \rho_{11}^{0}(U) \rho_{11}^{0}(V)+B^{1122} \rho_{22}^{0}(U) \rho_{11}^{0}(V)+2 B^{1212} \rho_{12}^{0}(U) \rho_{12}^{0}(V)\right] d z^{1} d z^{2} .$$

avec $[\ell_{21}(U), \ell_{22}(U), \rho_{22}^{3}(U)]=[\widetilde{\partial}_{2} U_{1},\ \widetilde{\partial}_{2} U_{2}-U_{3},\ \widetilde{\partial}_{2}^{2} U_{3}]$

2.2.1 Existence et unicité de U^{η} :

On définit l'espace $W^{\eta}=\left(H_{0}^{1}\left(B^{\eta}\right)\right)^{2} \times H_{0}^{2}\left(B^{\eta}\right)$.
Alors le problème variationnel $(P(\varepsilon))$ se transforme sur B^{η} au problème variationnel : trouver $U^{\eta} \in W^{\eta}$ tel que pour tout $V \in W^{\eta}$ on :

$$\int_{B^{\eta}} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \widetilde{\gamma}_{\lambda\mu}\left(U^{\eta}\right) \widetilde{\gamma}_{\lambda\mu}(V) d z^{1} d z^{2}+\eta^{4} \int_{B^{\eta}} B^{\alpha\beta\lambda\mu} \widetilde{\rho}_{\lambda\mu}\left(U^{\eta}\right) \widetilde{\rho}_{\alpha\beta}(V) d z^{1} d z^{2}=\eta^{-2} \int_{0}^{\pi} V_{3}\left(z^{1}, 0\right) d z^{1}$$
.

Pour $\varepsilon>0$ fixé ($\eta=\varepsilon^{½}$) il existe une solution unique u^{ε} du problème ($P(\varepsilon)$) .On a

$$\eta\left\|U_{\alpha}^{\eta}\right\|_{H^{1}\left(B^{\eta}\right)}^{2}=\left\|u_{\alpha}^{\varepsilon}\right\|_{H^{1}(\Omega)}^{2} \tag{13}$$

$$\left\|u_{3}^{\varepsilon}\right\|_{H^{2}(\Omega)}^{2}=\eta^{-5}\left\|U_{\alpha}^{\eta}\right\|_{H^{2}\left(B^{\eta}\right)}^{2} \tag{14}$$

donc de la coercivité et la continuité de $a_{m}+a_{f}$, plus la continuité sur W^{η} de la forme linéaire $\int_{0}^{\pi} V_{3}\left(z^{1}, 0\right) d z^{1}$. On déduit (d'après le théorème de Lax- Milgram) que pour η fixé, l'existence et l'unicité de U^{η} dans W^{η}. Mais ce qui nous intéresse est le problème limite ($\eta \to 0$)

$$\begin{cases} \text{trouver } U^{0} \\ a_{0}\left(U^{0}, V\right)=\int_{0}^{\pi} V_{3}\left(z^{1}, 0\right) d z^{1} \end{cases} \tag{15}$$

2.2.2 Étude du problème limite

On pose

$$\ell(u) = [u_3, \ell_{21}(u), \ell_{22}(u), \rho_{22}^3(u)] = [u_3, \widetilde{\partial}_2 u_1, \widetilde{\partial}_2 u_2 - u_3, \widetilde{\partial}_2^2 u_3] \qquad (16)$$

On définit l'espace H sur $B =]0,\pi[\times R$ par :

$$u \in H \Leftrightarrow u(z^1, \infty) = 0 \; et \; \ell(u) \in [L^2(B)]^4 \qquad (17)$$

On considère la forme : $a_0(u,v) = \int_B [A^{1111} u_3 v_3 + \frac{1}{2} A^{1212} \widetilde{\partial}_2 u_1 \widetilde{\partial}_2 v_1 + A^{1122} (\ell_{22}(u)(-v_3) +$
$(-u_3)\ell_{22}(v)) + A^{2222} \ell_{22}(u) \ell_{22}(v) + B^{2222} \rho_{22}^3(u) \rho_{22}^3(v)] dz^1 dz^2$

Lemme1 : $(a_0(u,u))^{1/2}$ *définit une norme sur H*

Lemme2 : *L'application* $V \to \int_0^\pi V_3(z^1, 0) dz^1$ *définit une forme linéaire continue sur* $\widetilde{H}$ *(le complété de H par la norme* $\|u\| = (a_0(u,u))^{1/2}$*.)*

2.3 Étude de la convergence

Lemme3 : *Il existe une constante* Cte *(indépendante de* η*) telle que*

$$\left\| \widetilde{\partial}_2^2 U_3^\eta \right\|_{0, B^\eta} \leq Cte$$

Lemme4 : *Il existe une constante C telle que*

$$\sum_{j=1}^{6} \eta^j a_j(U,U) + C \left\| \widetilde{\partial}_2^2 U_3 \right\|_{0, B^\eta}^2 > 0 \text{ pour tout } U \text{ de } W^\eta$$

Lemme5 : *Il existe une* Cte *(indépendente de* η*) telle que*

$$\|U^\eta\|_{\widetilde{H}} = (a_0(U^\eta, U^\eta))^{\frac{1}{2}} \leq Cte$$

Par conséquent $\exists U^* \in \widetilde{H}$ tel que U^η converge faiblement vers U^* dans $\widetilde{H}$.

Théorème1 : *Soit* U^η *et* U^0 *solution de (12) et (15) respectivement. Alors* U^η *converge faiblement dans* $\widetilde{H}$*, lorsque* $\eta \to 0$*, vers* U^0 *(i.e.* $U^0 = U^*$*).*

Pour simplifier, nous décomposons la démonstration en deux lemmes.

Lemme6 : $\exists C_1 > 0$ *telle que*

$$\left\| \partial_1 U_i^\eta \right\|_{0, B^\eta} \leq \eta^{-1} C_1$$

$$\left\| \widetilde{\partial}_2 U_\alpha^\eta \right\|_{0, B^\eta} \leq C_1$$

$$\left\| \widetilde{\partial}_1^2 U_i^\eta \right\|_{0, B^\eta} \leq \eta^{-1} C_1$$

$$\left\| \widetilde{\partial}_2^2 U_3^\eta \right\|_{0, B^\eta} \leq C_1$$

Lemme7 : *Soit* U^η *solution du problème* $(P(\eta))$*, alors pour tout* V *fixé de* W^η*,*
on a $\sum_{j=1}^{6} \eta^j a_j(U^\eta, V) \to 0$ lorsque $\eta \to 0$.

Remarque : Pour la démonstration du théorème et des lemmes précédents voir [6], [8].

La détermination de U^0 :

Nous postulons le développement asymptotique suivant :

$$U^\eta = U^0 + \eta U^1 + ... \tag{18}$$

Alors U^0 est solution du problème *P(0)* suivant :

$$(P(0))\begin{cases} \text{trouver } U^0 \in \widetilde{H} \text{ tel que} \\ \int_B T_0^{\alpha\beta}(U^0)\gamma_{\alpha\beta}^0(V) + B^{2222}\rho_{22}^3(U^0)\rho_{22}^3(V)dz^1dz^2 = \int_0^\pi V_3(z^1,0)dz^1 \ \forall V \in \widetilde{H} \end{cases} \tag{19}$$

tels que :

$$T_0^{\alpha\beta}(U^0) = A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}^0(U^0) \tag{20}$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}^0(V) = -V_3 \\ \gamma_{12}^0(V) = \frac{1}{2}\widetilde{\partial}_2 V_1 \\ \gamma_{22}^0(V) = \widetilde{\partial}_2 V_2 - V_3 \end{cases} \tag{21}$$

On prend dans (19) un premier choix des fonctions tests $V = (V_1,0,0)$ où V_1 est arbitraire,

on obtient: $\int_B T_0^{12}(U^0)\widetilde{\partial}_2 V_1 = 0$ d'où $-\widetilde{\partial}_2 T_0^{12}(U^0) = 0$ au sens des distributions.

On a $U^0 \in \widetilde{H}$, $\ell_{22}(U^0) \in L^2(B)$ donc $T_0^{12}(U^0) \in L^2(B)$,

$T_0^{12}(U^0)$ est une fonction de la variable z^1 et $T_0^{12}(U^0) = 0$ pour z^2 assez grand d'où $T_0^{12}(U^0) = 0$.

On prend dans (19) un deuxième choix des fonctions tests $V = (0,V_2,0)$ où V_2 est arbitraire,

on obtient : $$\int_B \left[A^{2222}\ell_{22}(U^0)(\widetilde{\partial}_2 V_2) + A^{1122}(-U_3^0)(\widetilde{\partial}_2 V_2)\right]dz^1dz^2 = 0 \tag{22}$$

Or d'après (20) et (9) on a :

$$T_0^{11} = A^{1111}\gamma_{11}^0 + A^{1122}\gamma_{22}^0 \tag{23}$$

$$T_0^{22} = A^{2211}\gamma_{11}^0 + A^{2222}\gamma_{22}^0 \quad , \tag{24}$$

d'où

$$\begin{cases} A^{2222}\gamma_{22}^0 = T_0^{22} - A^{2211}\gamma_{11}^0 \\ A^{1122}\gamma_{22}^0 = T_0^{11} - A^{1111}\gamma_{11}^0 \end{cases} \tag{25}$$

On substitue la première la relation de (25) dans (22) on obtient :

$$\int_B \left[A^{2222}\gamma_{22}^0(U^0) + A^{1122}\gamma_{11}^0(U^0)\right]\widetilde{\partial}_2 V_2 dz^1dz^2 = \int_B T_0^{22}\widetilde{\partial}_2 V_2 dz^1dz^2 = 0 \tag{26}$$

Ainsi $-\widetilde{\partial}_2 T_0^{22} = 0$ au sens des distributions, d'où $T_0^{22} = 0$ (de la même manière que pour le calcul de $T_0^{12}(U^0)$).

Finalement, si on prend dans (19) le troisième choix des fonctions tests $V = (0,0,V_3)$ où V_3 est arbitraire, on obtient :

$$-T_0^{11}(U^0) + B^{2222}\widetilde{\partial}_2^4 U_3^0 = \delta(z^2) \tag{27}$$

Comme $T_0^{22} = 0$ alors à partir de (24) on a $\gamma_{22}^0 = -\frac{A^{2211}}{A^{2222}}\gamma_{11}^0$. Si on remplace cette dernière dans (23) on obtient :

$$T_0^{11}\left(U^0\right) = -\left(A^{1111} - \frac{\left(A^{2211}\right)^2}{A^{2222}}\right)U_3^0 \qquad (28)$$

Ainsi l'équation (27) peut s'écrire sous la forme :

$$A.U_3^0 + B.\widetilde{\partial}_2^4 U_3^0 = \delta\left(z^2\right) \qquad (29)$$

avec $A = A^{1111}\left(1-\nu^2\right) > 0$ et $B = B^{2222} = \frac{1}{12}A^{1111}$ sont des constantes.

Donc la détermination de U_3^0 relève de la résolution de l'équation différentielle (29). En effet U_3^0 est la solution de l'équation homogène correspondante avec une troisième dérivée discontinue en $z^2 = 0$, mais la première et la deuxième sont continues.

Posons $\lambda = \frac{A}{B}$ alors l'équation (29) s'écrit sous la forme :

$$\widetilde{\partial}_2^4 U_3^0 + \lambda U_3^0 = \tfrac{1}{B}\delta\left(z^2\right) \qquad (30)$$

Elle admet comme solution $U_3^0\left(z^1, z^2\right) = \begin{cases} c_1 e^{\alpha_1 z^2} + c_2 e^{\alpha_2 z^2} & si\ \ z^2 > 0 \\ c_3 e^{\alpha_3 z^2} + c_4 e^{\alpha_4 z^2} & si\ \ z^2 < 0 \end{cases}$.

avec $\alpha_k = \lambda^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2ki\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i) \qquad k = \overline{1,2,3,4}$, $i^2 = -1$,

$U_3^0, \widetilde{\partial}_2 U_3^0\ \ et\ \widetilde{\partial}_2^2 U_3^0$ sont continues et $\widetilde{\partial}_2^3 U_3^0$ admet un saut en``0".

Les constantes c_k sont solutions du système :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - c_3 - c_4 = 0 \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 - \alpha_3 c_3 - \alpha_4 c_4 = 0 \\ \alpha_1^2 c_1 + \alpha_2^2 c_2 - \alpha_3^2 c_3 - \alpha_4^2 c_4 = 0 \\ \alpha_1^3 c_1 + \alpha_2^3 c_2 + \alpha_3^3 c_3 + \alpha_4^3 c_4 = 0 \end{cases} \qquad (31)$$

4 Références

[1] H. BREZIS, « Analyse fonctionnelle ». Masson, Paris 1983.

[2] P.G. CIARLET, « Mathematical Elasticity, Vol.III, Theory of Shells », Elsevier, Amsterdam, 2000.

[3] C.A.DE SOUZA. « Techniques de maillage adaptatif pour le calcul des solutions de coques élastiques minces ».Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, 2003.

[4] E. FAOU, « Développement asymptotiques dans les coques minces linéairement élastiques ». Thèse de Doctorat de l'Université Renne 1, 2000.

[5] J. L.LIONS et E. MAGENES, « Problèmes aux limites non homogènes et applications ». Volume I, Dunod, Paris 1968.

[6] I. MERABET, « Quelques problèmes de perturbations singulières rencontrés dans l'analyse asymptotique de coques élastiques minces ». Mémoire de Magister de l'Université de Ouargla, 2006.

[7] J. SANCHEZ-HUBERT et E. SANCHEZ-PALENCIA, « Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques » . Masson, Paris 1997.

[8] E. SANCHEZ-PALENCIA, "On internal and boundary layers with unbounded energy in thin shell theory". Asymptotic analysis 36 (2003), 169-185.