



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

N° Serie  
N° Classe

# UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
ET SCIENCES DE LA MATIÈRE

DEPARTEMENT DE :  
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

**MAGISTER**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Analyse numérique et E. D. P**

**Par : Kouidri Mohammed**

**Thème**

Décomposition Asymptotique Partielle et éléments finis  
<<Application à quelques problèmes de perturbation  
singulières sensitifs>>

**Soutenu publiquement le :27/06/2010**

Devant le jury composé de :

Mr.N. Settou	Professeur	univ. K.MERBAH – Ouargla –Président
Mr.M S. Said	M C (A)	univ. K.MERBAH – Ouargla –Examineur
Mr. A.GUERFI	M C (A)	univ. K.MERBAH – Ouargla –Examineur
Mr.D A. Chacha	M C (A)	univ. K.MERBAH – Ouargla –Rapporteur

# *Remerciements*

Ce travail a été réalisé à l'université de KASDI MERBAH OUARGLA, Sous la direction de Monsieur Djamel Ahmed Chacha, qui a rendu possible la réalisation de ce mémoire, par le soutien constant qu'il m'a apporté. Je lui en suis d'autant plus reconnaissant qu'il m'a laissé une très grande liberté de travail aussi bien dans la conception que dans l'orientation de ma réflexion tout en me conseillant en veillant ce que je ne me disperse pas trop. Sa rigueur et son honnêteté me serviront toujours d'exemple et j'ai normément apprécié sa disponibilité.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux examinateurs, Monsieur M S. Said et Monsieur A. GUERFI pour avoir accepté d'examiner ce travail. Leur participation au jury est une marque à laquelle je suis très fier.

Je voudrais également remercier Monsieur N. Settou qui me fait l'honneur d'être président de mon jury.

Je tiens à remercier les membres du département de mathématiques et informatique Messieurs M. Assila, M. Mefleh, K. Guerbati, A. Bensayeh A. Meche, T. Benmoussa ; Bousaïde el-hadje,

Je voudrais remercier tous mes amis.

Je ne pourrais pas terminer sans rendre hommage à mes parents et à mes frères et mes soeurs Je ne saurais pas témoigner suffisamment toute ma gratitude pour m'avoir toujours soutenu.

# Table des matières

<b>Notations et conventions</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction aux problèmes de perturbations singulières sensitifs</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction Théorique . . . . .	13
1.2 Cadre abstrait . . . . .	14
1.3 Problème limite -Théorie variationnelle . . . . .	16
1.4 Version au sens de l'énergie . . . . .	19
1.5 Problème limite-Théorie non variationnelle . . . . .	21
1.6 Exemple de problème sensitif . . . . .	23
1.7 Conclusion . . . . .	25
<b>2 Traitement analytique au sens de Fourier des problèmes sensitifs</b>	<b>26</b>
2.1 Transformée de Fourier des distributions . . . . .	26
2.1.1 Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide . . . . .	27
2.1.2 Transformée de Fourier des fonctions $C^\infty$ à support compact . . . . .	28
2.1.3 Transformée de Fourier des distributions tempérées . . . . .	29
2.1.4 Espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	32
2.1.5 Transformé de Fourier des distributions à croissance rapide . . . . .	32
2.2 Un problème elliptique avec des conditions aux limites non classiques. . . . .	34

2.3	Problème de perturbation singulière avec conditions aux limites non classiques	
	dans le problème limite : . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Méthode de décomposition asymptotique partielle du domaine</b>	<b>43</b>
3.1	Description de la méthode . . . . .	43
3.1.1	Problème décomposé . . . . .	44
3.2	Traitement numérique d'un problème de perturbation singulière unidimensionnel :	46
3.2.1	Problème décomposé . . . . .	47
3.2.2	Approximation du problème ( $P^\varepsilon$ ) par le problème ( $P_{dec}^\varepsilon$ ) . . . . .	49
3.2.3	Notion de développement asymptotique : . . . . .	50
3.2.4	Justification asymptotique du problème décomposé . . . . .	50
3.2.5	<b>Traitement des couches limites</b> . . . . .	53
3.2.6	<b>Forme finale du développement asymptotique</b> . . . . .	58
3.2.7	Etude classique . . . . .	63
3.2.8	Formulation variationnelle élémentaire . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Traitement numérique d'un problème de perturbation singulière bidi-</b>	
	<b>mensionnel</b>	<b>72</b>
4.1	le problème . . . . .	72
4.2	<b>Décomposition du domaine <math>\Omega</math> :</b> . . . . .	74
4.3	Problème décomposé . . . . .	74
4.3.1	l'espace décomposé, problème décomposé . . . . .	74
4.4	Formulation variationnelle élémentaire . . . . .	76
4.4.1	Passage à l'élément de référence . . . . .	78
4.4.2	fonctions du bases . . . . .	82
4.5	Fonctions de "super-éléments" . . . . .	84
4.6	Revisitation du projecteur . . . . .	85
4.7	Indexation des noeuds . . . . .	85

4.8	Hypothèses sur la triangulation . . . . .	86
4.9	Éléments finis . . . . .	87
4.10	Espace d'approximation . . . . .	88
4.11	Estimation d'erreur a priori . . . . .	89
<b>Annexe 1</b>		<b>92</b>
<b>Annexe 2</b>		<b>93</b>

# Notations et conventions

Dans toute la suite de ce mémoire, nous utiliserons les conventions suivantes :

- pour les dérivations par rapport à une variable nous utiliserons  $\frac{\partial u}{\partial y^\alpha} = u_{,\alpha} = \partial_\alpha u$
- $\Omega$  désigne un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$ .
- $\Gamma_0$  désigne une partie de la frontière de mesure non nulle.
- $H$  désigne la fonction (ou la distribution) de Heaviside .
- $\delta$  désigne la distribution de Dirac à l'origine .
- $C(\Omega)$  espace des fonctions continues définies sur  $\Omega$ .
- $C_k(\Omega)$ ,  $k > 0$  : espace des fonctions continues définies sur  $\Omega$ , dont les dérivées partielles d'ordres  $\leq k$  sont continues
- $C_\infty(\Omega)$  espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\Omega$
- $D(\Omega)$  espace des fonctions de  $C_\infty(\Omega)$  à support compact.
- $Z(\Omega)$  l'espace des fonctions entières
- $S(\Omega)$  l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide
- $D'(\Omega)$  espace des distributions
- $S'(\Omega)$  espace des distributions tempérées
- $H^s(\Omega)$  espace de Sobolev d'ordre  $s$  .
- $a_f(u, v)$  la forme bilinéaire d'énergie de déformation en flexion.
- $a_m(u, v)$  : la forme bilinéaire d'énergie de déformation membranaire..
- $[[u]]$  : le saut de  $u$  au passage de la discontinuité.
- $\epsilon$  : l'épaisseur ou le rapport de l'épaisseur à une autre dimension de la coque
- $\Delta$  le laplacien et  $\Delta^2$  le bilaplacien .  $\Delta^2 u(x_1; x_2) = (\vartheta_1^4 + 2\vartheta_1^2\vartheta_2^2 + \vartheta_2^4)u(x_1, x_2)$
- $Z$  ou  $A$  : espace des fonctions analytiques .

# Introduction

On s'intéresse dans ce mémoire de résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP), dans le cadre de la "méthode de décomposition asymptotique partielle" (MAPDD). et d'obtenir des estimations d'erreur par la méthode des éléments finis .

La méthode des éléments finis est une méthode numérique parmi d'autres. La littérature concernant cette méthode est extrêmement abondante. Elle est connue depuis maintenant près de 50 ans par les ingénieurs et la théorie mathématique a plus de 30 ans. On renvoie le lecteur à plusieurs références parmi d'autres [28], [29], où les méthodes standard d'éléments finis sont clairement exposées. Sans vouloir être exhaustif, on peut renvoyer aussi et par ordre chronologique à [27], [17], [32], [1].

Situons nous dans le contexte suivant, Dans différents domaines des sciences tels que la physique, la mécanique ou la biologie, mais aussi encore dans l'économie ou la météorologie pour ne citer que ces exemples, on est amené à représenter les phénomènes via un modèle mathématique. Les raisons qui poussent à faire ces modélisations peuvent être très diverses. En particulier, la motivation peut être purement scientifique pour mieux comprendre les phénomènes en jeu (exemple : dynamique terrestre), ce peut être dans le but de se donner des outils prédictifs (exemple : météorologie), ou également dans le but d'épargner des expériences coûteuses ou irréalisables (exemples : réacteurs nucléaires, médecine, pollutions industrielles). Ces modèles mettent souvent à contribution des équations qui peuvent par exemple relier des variations de quantités, telles la vitesse en fonction du déplacement. Dans le cas où les solutions ont plusieurs variables, on peut avoir à faire à des problèmes de type équations aux dérivées partielles. Plusieurs difficultés mathématiques peuvent apparaître lorsqu'on tente de résoudre explicitement ces problèmes. En effet, dans les cas pratiques intéressants, il est extrêmement rare que

l'on puisse donner une expression analytique explicite des solutions, que ce soit par insuffisance (si elle existe) par une solution approchée, et si possible d'évaluer la proximité, ou erreur (dans un sens à définir) entre la solution exacte et la solution approchée. Ce que nous appelons de manière générale méthode numérique est donc une méthode permettant de traiter des problèmes continus des mathématiques (par exemple d'équations aux dérivées partielles) en vue de fournir un algorithme (qui pourra éventuellement être implémenté sur ordinateur) pour

obtenir une solution approchée au problème continu. Une définition de l'analyse numérique est l'étude de ces algorithmes [24]. Un problème de l'ordinateur est lié à la puissance de calcul et au stockage des informations en mémoire. Toute méthode permettant de réduire ces coûts sans que cela ne se fasse au détriment de la bonne approximation de la solution est la bienvenue. Une façon entre autres de faire, que nous avons adoptée pour ce travail, est d'intégrer l'information du comportement particulier des solutions pour simplifier le calcul numérique.

Introduisons maintenant de manière un peu plus précise, mais encore vague, ce qu'est une méthode (numérique) d'éléments finis.

Définissons ce qu'on appelle une méthode de Galerkin. On considère un espace de Hilbert  $V$ , et une forme bilinéaire  $a(.,.)$  que l'on suppose et continue, on considère également une forme linéaire et continue  $L(.)$  sur  $V$

On considère l'équation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, v) = L(v) \quad v \in V \end{cases} \quad (1)$$

Une méthode de Galerkin consiste à chercher  $u_m \in V_m$  où  $V_m$  est un sous- espace de dimension finie de  $V$  telle que :

$$a(u_m, v_m) = L(v_m) \quad v_m \in V_m \quad (2)$$

Si on choisit une base  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_m$  de  $V_m$ , et qu'on écrit

$$u_m = \sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i w_i$$

le problème (2) se ramène à résoudre le système linéaire

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_{ij} \alpha_i = b_{ij}, (1 \leq j \leq m)$$

où on définit

$$a_{ij} = a(w_i, w_j), b_j = L(w_j)$$



" On remarquera en particulier qu'un problème du type (2) a une unique solution si la forme  $a$  est coercive, c'est-à-dire qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $u \in V$

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Pour résumer de manière très schématique,

**la méthode des éléments finis est une technique générale pour construire des sous-espaces de dimension finie d'un espace de Hilbert  $V$  dans le but d'appliquer la méthode de Galerkin pour traiter un problème variationnel.**

Introduisons maintenant la notion de problèmes de "décomposition asymptotique partielle". Ces problèmes, où intervient un petit paramètre fixé  $\epsilon$  (dans l'équation où le domaine par exemple) vérifient une contrainte  $C$  sur une partie  $P$  du domaine, d'où l'acception "partielle". Cette contrainte peut prendre diverses formes. A titre d'exemple, on peut vouloir que la solution  $u$  du problème d'EDP soit explicitement analytique sur une partie du domaine (polynomiale par morceaux par exemple), ou bien on peut vouloir que la solution ne dépende que d'une composante sur  $P$  (par exemple la première composante dans un domaine bi-dimensionnel).

La dénomination "asymptotique" tire son origine du fait qu'initialement la contrainte était liée au petit paramètre  $\epsilon$ . A titre d'exemple, on peut penser à un phénomène de perturbation singulière ; s'il apparaît des couches limites, ces dernières vont être localisées en certaines parties du domaine, et en dehors de ces zones il se peut que la solution soit régulière. On fait alors une hypothèse sur son comportement : la contrainte  $C$ . Des problèmes où de telles considérations existent sont nombreux, citons le problème de l'équation de la chaleur dans une barre, l'écoulement d'un fluide dans un tube, la déformation d'une poutre, et en particulier dans le cas où le déplacement n'est pas dans l'espace d'énergie finie, [9], des atmosphères célestes [16], de modélisation de l'extrusion biva [6]. On remarquera qu'un raisonnement analogue pourrait être tenu pour traiter les singularités, dans ce cas, la contrainte  $C$  est une hypothèse sur la solution qui tient compte du comportement des singularités.

Venons-en à l'approximation numérique d'un problème de "décomposition asymptotique partielle". Comme entendu plus haut, il s'agit d'intégrer l'information du comportement particulier des solutions pour simplifier le calcul numérique.

Dans le cadre d'une résolution numérique par éléments finis, la solution approchée du problème d'EDP s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions de base peuvent être par exemple polynomiales par morceaux.

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i w_i$$

$\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq N_h$ ) étant des scalaires.

Le paramètre  $h$  est lié à l'approximation numérique. En général, il s'agit d'un paramètre mesurant la densité du maillage.

Ce qui nous intéresse, c'est d'intégrer la forme de la contrainte  $C$  sur les fonctions de bases utilisée pour la résolution numérique dont le support est connecté à  $P$  ou contenu dans  $P$ . A supposer que ces dernières fonctions soient dénotées  $w_i$ ,  $p \leq i \leq q$ . On utilise à la place de celles-ci sur  $P$  une famille  $v_i$   $1 \leq i \leq r$ . Ainsi, la solution  $u_h$  est cherchée sous la forme :

$$u_h = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i w_i + \sum_{i=q+1}^{N_h} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^r \beta_i w_i$$

les  $\beta_i$  étant des scalaires.

L'intérêt numérique en est tout particulier si  $r$  est beaucoup plus petit que  $q-p$  relativement à  $N_h$ ; le système linéaire étant plus petit, on réalise une économie de temps de calcul et de stockage des données en mémoire de l'ordinateur. D'autres considérations peuvent aussi intervenir comme l'organisation des données pour optimiser le calcul.

Décrivons maintenant le plan de ce travail.

Dans un premier chapitre : on fait un rapel théorique concernant les problèmes de perturbations singulières sensitifs

Dans un deuxième chapitre on procède au traitement analytique au sens de Fourier des problèmes sensitifs

Dans un troisième chapitre, on présente la MAPDD, Méthode de Décomposition Asymptotique Partielle de Domaine (Method of Asymptotic Partial Domain Decomposition en anglais) proposée par G. Panasenko en 1996 qui est basée sur l'approximation d'un problème continu

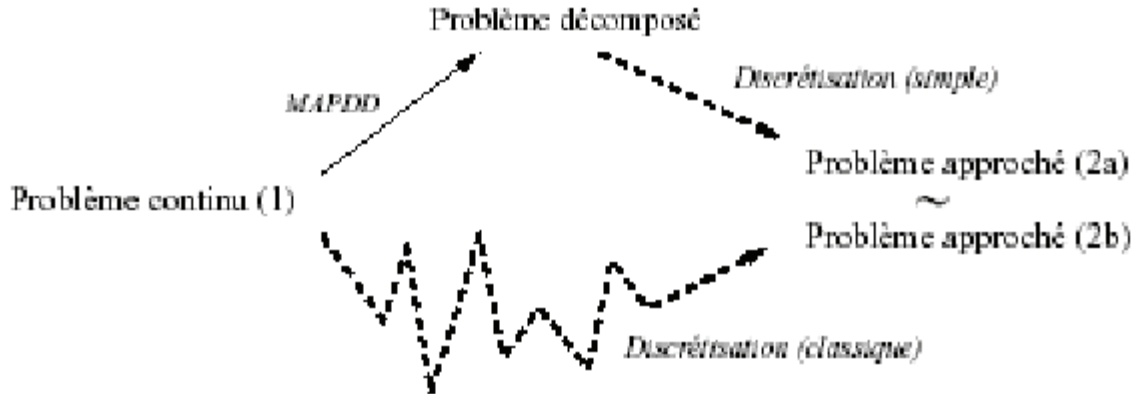


FIG. 0-1 – MAPDD

par un autre problème continu (dit problème décomposé) via des considérations asymptotiques, et dont la discrétisation apparaît plus simple que celle du problème continu initial (figure 0.1).

Et, on s'attache à considérer que le problème de perturbation singulière monodimensionnel est originaire de la théorie des coques où il trouve sa place comme problème modèle dans l'appréhension du phénomène de sensibilité. Il s'agit de résoudre l'équation

$$\begin{cases} -u^{(2)} + \epsilon^2 u^{(4)} = \delta'_{\frac{1}{2}} & \text{sur } (0, 1) \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

où  $\delta'_{\frac{1}{2}}$  est la dérivée de la distribution de Dirac centrée en  $1/2$ ; dans ce problème apparaissent des couches limites aux bords ainsi que des couches limites intérieures. Les couches limites sont localisées. La décomposition asymptotique suivante est réalisée : en dehors des zones où se trouvent les couches limites on résout l'équation  $u^{(2)} = 0$ . Dans la résolution numérique par éléments finis, nous faisons la jonction entre les couches limites par une seule fonction de base vérifiant  $u^{(2)} = 0$ . Des estimations d'erreur et des courbes de convergence sont obtenues.

Dans un Quatrième chapitre, on a étudié numériquement le problème de perturbation singulière bidimensionnel suivant :

$$(-\Delta + \varepsilon^2 \Delta^2) u^\varepsilon = f \quad \text{sur } \Omega \quad (3)$$

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad x = (x_1, x_2)$$

$$u = 0 \quad \text{pour } x_1 = 0, x_1 = 1 \quad (4)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) = 0 \quad \text{pour } x_1 = 0, x_2 = 0, x_2 = 1 \quad (5)$$

sur un rectangle mince  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Cette justification faite, on propose une méthode d'éléments finis efficace pour résoudre le problème 2D-1D. La partie 2D et la partie 1D sont discrétisées classiquement par éléments finis et la jonction entre la partie 2D et la partie 1D est supportée par une fonction de base hybride, en partie 2D, en partie 1D. Cette fonction est appelée fonction de "super-élément".

Dans les deux cas, on fait une estimation d'erreur de qualité identique à la méthode par éléments finis classique utilisée dans le domaine non-décomposé, tout en notant une certaine économie de noeuds dans les deux cas .

# Chapitre 1

## Introduction aux problèmes de perturbations singulières sensitifs

### 1.1 Introduction Théorique

On s'intéresse dans ce chapitre à des problèmes de perturbation singulières sensitifs, c'est-à-dire à des problèmes aux limites ( $P^\varepsilon$ ) dépendant d'un petit paramètre  $\varepsilon$  qui sont classiques pour  $\varepsilon > 0$ , de sorte que lorsque  $\varepsilon = 0$  des termes d'ordres supérieurs s'annulent et les problèmes limites ( $P^0$ ) deviennent fortement mal posés, il apparaît un certain type d'instabilité qui se nomme "*la sensitivité*".

Les problèmes sensitifs ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche depuis 1994 surtout par J. L. Lions et E. Sanchez-Palencia [19], [20] et [21]. La motivation essentielle de ces travaux est la théorie asymptotique des coques élastiques minces [20], [21], [23] et [30]. Ils sont à ce titre des problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles dont l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions fait intervenir des espaces fonctionnels inhabituels, notamment non contenus dans l'espace des distributions, ayant la propriété suivante :

La solution peut cesser d'exister si le second membre  $f$  est remplacé par  $f + \delta f$  où  $\delta f$  peut être une fonction  $C^\infty$  à support compact arbitrairement petit ainsi que chacune de ses dérivées.

Dans le cas des problèmes elliptiques, la sensitivité peut se présenter lorsque les conditions aux limites ne satisfont pas à la condition de Chapiro-Lopatinskii (voir annexe1).

## 1.2 Cadre abstrait

Désignons par  $V$  un espace de Hilbert, par  $a$  et  $b$  deux formes bilinéaires continues et symétriques satisfaisants :

$$\begin{cases} a(v, v) \geq 0 \\ a(v, v) = 0 \implies v = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$b(v, v) \geq 0 \quad (1.2)$$

La norme de  $V$  est définie par :

$$\|v\|_V = [a(v, v) + b(v, v)]^{\frac{1}{2}} . \quad (1.3)$$

Nous considérons alors pour un  $f$  donné de  $V'$  (le dual de  $V$ ) le problème variationnel suivant :

$$(P^\varepsilon) \begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle_{V', V} \quad \forall v \in V \\ \langle, \rangle \text{ est le crochet de dualité entre } V' \text{ et } V \text{ qui dépend de } \varepsilon. \end{cases} \quad (1.4)$$

Il est facile de vérifier que, pour chaque  $\varepsilon > 0$ ,  $a + \varepsilon^2 b$  est une forme bilinéaire continue et coercive sur  $V$ . Ainsi pour toute  $f \in V'$  le problème (1.4) admet une solution unique  $u^\varepsilon \in V$  d'après le théorème de Lax-Migran.

D'autre part, pour tout élément  $v \in V$  fixé, l'application  $w \mapsto a(v, w)$  est une forme linéaire continue sur  $V$ , et grâce au théorème de représentation de Riesz-Fréchet il existe un élément de  $V'$ , noté  $Av$  ( $A$  est un opérateur linéaire continue de  $V \rightarrow V'$ ), tel que :

$$a(v, w) = \langle Av, w \rangle_{V', V} \quad \forall w \in V. \quad (1.5)$$

De façon analogue :

$$b(v, w) = \langle Bv, w \rangle_{V', V} \quad \forall w \in V. \quad (1.6)$$

Définissons à présent les normes suivantes :

$$\|v\|_a = a(v, v)^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

$$\|v\|_A = \|Av\|_{V'} \quad (1.8)$$

Nous désignons par :

$$\begin{cases} V_a \text{ le complété de } V \text{ pour la norme } \|\cdot\|_a \\ V_A \text{ le complété de } V \text{ pour la norme } \|\cdot\|_A \end{cases}. \quad (1.9)$$

Alors  $V \subset V_a \iff V'_a \subset V'$  et de même  $V \subset V_A$ .

**Proposition 1.1** *L'opérateur  $A$  admet les propriétés suivantes :*

- 1-  $A$  est borné.
- 2-  $A$  est injectif.
- 3-  $A$  est bijectif de  $V$  sur  $R(A)$  (l'image de  $A$ ).
- 4-  $R(A)$  est dense dans  $V'$ .
- 5- L'opérateur  $A \in \mathcal{L}(V, V')$  se prolonge en un isomorphisme  $\tilde{A} : V_A \longrightarrow V'$ .

**Preuve.** : 1- Considérons une suite  $(v_n)$  de  $V$  telle que  $\|v_n\|_V = 1$ . Alors nous avons :

$$|\langle Av_n, w \rangle| = |a(v_n, w)| \leq C \|w\|_V.$$

Ainsi  $(Av_n)$  est bornée dans  $V'$ , il s'ensuit que  $A$  est borné d'après le théorème de Banach-Steinhaus.

2- Soit  $Av = 0$  alors  $0 = \langle Av, v \rangle_{V', V} = a(v, v) \implies v = 0$  d'après l'hypothèse (1.1) d'où  $A$  est injectif.

3- On sait déjà (propriété 2) que  $A : V \longrightarrow V'$  est injectif, pour la surjection de  $A : V \longrightarrow R(A) \subset V'$  c'est grâce à la définition de  $R(A)$ .

4- Supposons le contraire. Alors il existe  $f (\neq 0) \in V'$  tel que  $(f, Av)_{V'} = 0 \forall v \in V$ . Le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{V'}$  est une fonctionnelle continue sur  $V$  qui peut être exprimé comme un produit de dualité d'un élément  $v^f$  de  $V$  avec  $Av \in V'$  :  $(f, Av)_{V'} = \langle v^f, Av \rangle_{V, V'}$ . En prenant  $v = v^f$  et en utilisant (1.5), on obtient :

$$0 = \langle v^f, Av^f \rangle_{V, V'} = a(v^f, v^f) \implies v^f = 0 \implies f = 0 \text{ d'où la densité de } R(A) \text{ dans } V'.$$

5- On sait que  $R(A)$  est dense dans  $V'$  (propriété 4) et que  $V'$  est le complété de  $R(A)$  équipé de sa norme. Les suites de Cauchy dans  $V'$  sont de la forme  $Av_n$  ou  $(v_n)$  sont des suites de Cauchy dans  $V_A$  d'où le résultat. ■

### 1.3 Problème limite -Théorie variationnelle

Etant donné  $f \in V'_a$ , la formulation variationnelle du problème limite ( $\varepsilon = 0$ ) est la suivante :

$$(P^{(0)}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^0 \in V_a \text{ tel que} \\ a(u^0, v) = \langle f, v \rangle_{V'_a, V_a} \forall v \in V_a \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Ce problème est bien posé, il rentre dans le cadre du théorème du Lax-Milgram, d'où l'existence et l'unicité de  $u^0 \in V_a$  qui est aussi solution du problème classique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^0 \in V_a \text{ tel que} \\ \mathcal{A}u^0 = f \quad \text{dans } V'_a \end{array} \right. \quad (1.11)$$

où  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V_a, V'_a)$ .

Etant donné  $f \in V'$ , nous considérons le problème :

$$\tilde{\mathcal{A}}u^0 = f \quad \text{dans } V'. \quad (1.12)$$

Comme  $\tilde{\mathcal{A}}$  est un isomorphisme de  $V_A$  sur  $V'$  ce problème admet une solution unique dans  $V_A$ .



**Théorème 1.1** Soient  $f$  un élément de  $V'_a$ ,  $u^\varepsilon$  la solution du problème  $(P^\varepsilon)$  et  $u^0$  la solution du problème  $(P^0)$ . Alors

$$u^\varepsilon \longrightarrow u^0 \text{ fortement dans } V_a \text{ (lorsque } \varepsilon \downarrow 0) \quad (1.13)$$

**Preuve.** : En prenant  $v = u^\varepsilon$  dans (1.4) nous avons alors

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \langle f, u^\varepsilon \rangle_{V'_a, V_a} . \quad (1.14)$$

D'après (1.1) et (1.2) nous obtenons

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \langle f, u^\varepsilon \rangle_{V'_a, V_a} \quad (1.15)$$

et

$$\varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \langle f, u^\varepsilon \rangle_{V'_a, V_a} . \quad (1.16)$$

De (1.15) nous avons l'estimation suivante :

$$\|u^\varepsilon\|_{V_a} \equiv \|u^\varepsilon\|_a \leq \|f\|_{V'_a} . \quad (1.17)$$

Il s'ensuit d'après la compacité faible des suites bornées que :

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^* \text{ faiblement dans } V_a \text{ (quand } \varepsilon \downarrow 0). \quad (1.18)$$

Alors à partir de (1.15), (1.16) et (1.17) on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|u^\varepsilon\|^2 &= \varepsilon^2 [a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + b(u^\varepsilon, u^\varepsilon)] \leq (1 + \varepsilon^2) \|f\|_{V'_a} \|u^\varepsilon\|_{V_a} \leq C_\varepsilon, \\ \text{avec } C_\varepsilon &= (1 + \varepsilon^2) \|f\|_{V'_a}^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

d'où :

$$\|u^\varepsilon\|_V \leq \frac{\sqrt{C_\varepsilon}}{\varepsilon}. \quad (1.20)$$

Maintenant fixons  $v$  et faisons tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (1.4), nous obtenons, en utilisant (1.18) :

$$a(u^\varepsilon, v) \rightarrow a(u^*, v). \quad (1.21)$$

Or nous avons

$$|\varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v)| \leq \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} b(v, v)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$b(u^\varepsilon, u^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \leq \|u^\varepsilon\|_V \leq \frac{\sqrt{C_\varepsilon}}{\varepsilon},$$

d'où nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v)| &\leq \varepsilon^2 \frac{\sqrt{C_\varepsilon}}{\varepsilon} b(v, v)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0, \\ \text{car } \sqrt{C_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} C &= \|f\|_{V'_a}^2 \end{aligned} \quad (1.22)$$

de sorte qu'en passant à la limite dans (1.4), nous obtenons

$$a(u^*, v) = \langle f, v \rangle_{V', V} \quad \forall v \in V \iff \forall v \in V_a.$$

D'après l'unicité de la solution du problème limite, nous avons  $u^* = u^0$  et en plus

$$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} u^0 \text{ faiblement dans } V_a \quad (1.23)$$

Montrons maintenant que la convergence précédente (1.23) est forte :

$$\begin{aligned}
& a(u^\varepsilon - u^0, u^\varepsilon - u^0) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \\
& a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + a(u^0, u^0) - 2a(u^0, u^\varepsilon) = \\
& \langle f, u^\varepsilon \rangle + \langle f, u^0 \rangle - 2a(u^0, u^\varepsilon) = -\langle f, u^\varepsilon \rangle + \langle f, u^0 \rangle = \\
& \langle f, u^0 - u^\varepsilon \rangle \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$a(u^\varepsilon - u^0, u^\varepsilon - u^0) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0, \text{ c'est à dire } u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} u^0 \text{ fortement dans } V_a$$

■

## 1.4 Version au sens de l'énergie

Définissons l'énergie de  $u^\varepsilon \in V$  solution du problème  $(P^\varepsilon)$  (1.4) par

$$E(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} [a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon)].$$

L'énergie associée au problème limite  $(P^{(0)})$  (1.10) est définie par

$$E(u^0) = \frac{1}{2} a(u^0, u^0).$$

Alors on peut traduire le problème  $(P^\varepsilon)$  (1.4) sous forme d'un problème d'optimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ E(u^\varepsilon) - \langle f, u^\varepsilon \rangle_{V', V} = \min_{v \in V} \{ E(v) - \langle f, v \rangle_{V', V} \} \end{array} \right.$$

**Théorème 1.2** Soit  $f \in V'$  ( $V'_a \subset V'$ ). Une condition nécessaire et suffisante pour que l'énergie  $E(u^\varepsilon)$  demeure bornée quand  $\varepsilon \downarrow 0$  est que  $f \in V'_a$ . Si  $f \notin V'_a$ , alors  $E(u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \infty$ .

**Preuve.** Montrons que la condition est suffisante. Soit alors  $f \in V'_a$ , nous avons d'après (1.4) :

$$E(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \langle f, u^\varepsilon \rangle_{V'_a, V_a} \leq C_1 \|u^\varepsilon\|_a \leq C_2$$

ce qui montre que  $E(u^\varepsilon)$  est bornée.

Montrons maintenant que la condition est nécessaire, supposons que  $E^\varepsilon$  est bornée c'est à dire que

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq C$$

alors nous avons

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \|u^\varepsilon\|_a^2 \leq C \tag{1.24}$$

et

$$b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^2}.$$

La relation (1.24) implique

$$u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} u^* \text{ faiblement dans } V_a$$

Fixons  $v \in V$  dans (1.4) et faisons  $\varepsilon \downarrow 0$  (en suivant la même démarche que dans la démonstration du théorème précédent), nous obtenons

$$\begin{aligned} a(u^\varepsilon, v) &\xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} a(u^*, v) \\ \text{et } \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v) &\xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} 0 \end{aligned}$$

d'où

$$a(u^*, v) = \langle f, v \rangle_{V', V}, \forall v \in V$$

On remarque que le membre de gauche est une forme (en fonction de  $v$ ) linéaire continue dans  $V_a$ , ainsi le membre de droite l'est aussi d'où  $f \in V'_a$ . ■

## 1.5 Problème limite-Théorie non variationnelle

**Théorème 1.3** : Soient  $f \in V'$ ,  $u^\varepsilon$  et  $u^0$  les solutions de (1.4) et (1.10) respectivement. Alors  $u^\varepsilon \rightarrow u^0$  fortement dans  $V_A$ .

*Preuve.* : On prend  $v = u^\varepsilon$  dans (1.4) on obtient

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \langle f, u^\varepsilon \rangle_{V', V} ,$$

qui s'écrit sous la forme

$$(1 - \varepsilon^2) a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \langle f, u^\varepsilon \rangle_{V', V} ,$$

d'où (en utilisant le fait que  $0 < \varepsilon \leq 1$ )

$$\varepsilon^2 a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \langle f, u^\varepsilon \rangle_{V', V} ,$$

il résulte que

$$\varepsilon^2 \|u^\varepsilon\|_V \leq C$$

et

$$\varepsilon^2 u^\varepsilon \rightharpoonup u^* \text{ faiblement dans } V. \tag{1.25}$$

■

Montrons maintenant que  $u^* = 0$  et que la convergence (1.25) est forte. Ecrivons (1.4) sous la forme

$$Au^\varepsilon + \varepsilon^2 Bu^\varepsilon = f \text{ dans } V'. \tag{1.26}$$

Après multiplication par  $\varepsilon^2$  nous avons

$$A\varepsilon^2 u^\varepsilon + \varepsilon^2 B\varepsilon^2 u^\varepsilon = \varepsilon^2 f \text{ dans } V'.$$

Faisons tendre  $\varepsilon$  vers zéro, nous obtenons :

$$A\varepsilon^2 u^\varepsilon \rightharpoonup Au^* \text{ faiblement dans } V$$

et

$$B\varepsilon^2 u^\varepsilon \longrightarrow Bu^*,$$

nous avons alors

$$Au^* = 0 \text{ dans } V'$$

d'où

$$0 = \langle Au^*, u^* \rangle_{V', V} = a(u^*, u^*) \implies u^* = 0$$

Ainsi la relation (1.25) devient

$$\varepsilon^2 u^\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ faiblement dans } V.$$

Reste à montrer que cette convergence est forte. Prenons dans (1.4)  $v = \varepsilon^2 u^\varepsilon$ , il suit que

$$\varepsilon^2 a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + b(\varepsilon^2 u^\varepsilon, \varepsilon^2 u^\varepsilon) \leq \langle f, \varepsilon^2 u^\varepsilon \rangle_{V', V}$$

et comme

$$\langle f, \varepsilon^2 u^\varepsilon \rangle_{V', V} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$$

alors

$$\varepsilon^2 a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + b(\varepsilon^2 u^\varepsilon, \varepsilon^2 u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$$

ou ce qui équivaut à :

$$(\varepsilon^2 - \varepsilon^4) a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + a(\varepsilon^2 u^\varepsilon, \varepsilon^2 u^\varepsilon) + b(\varepsilon^2 u^\varepsilon, \varepsilon^2 u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$$

ceci implique

$$\varepsilon^2 u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0 \text{ fortement dans } V$$

et

$$B\varepsilon^2 u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0 \text{ fortement dans } V'.$$

Ensuite on passe à la limite dans (1.26) on obtient

$$Au^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} f \quad \text{fortement dans } V'$$

qui peut s'écrire

$$\tilde{A}u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} f \quad \text{fortement dans } V',$$

comme  $\tilde{A}$  est un isomorphisme de  $V_A$  sur  $V'$  (Proposition 1.1) alors

$$u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} \tilde{A}^{-1}f \quad \text{fortement sur } V_A$$

Or  $\tilde{A}^{-1}f = u^0$  où  $u^0$  est la solution de (1.12) et par conséquent  $u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} u^0$  fortement dans  $V_A$ .

## 1.6 Exemple de problème sensitif

**Exemple 1.1** On considère un exemple unidimensionnel modèle de problème de perturbation singulière sensitif, qui a fait l'objet du travail réalisé par Leguillon et al. [5], et qui rentre dans le cadre du problème  $(P^\varepsilon)$  (1.4) avec les données :

$$a(u, v) = \int_0^1 u' v' dx, \quad b(u, v) = \int_0^1 u'' v'' dx \quad (1.27)$$

et

$$V = H_0^2(0, 1), \quad V' = H^{-2}(0, 1), \quad V_a = H_0^1(0, 1) \quad \text{et} \quad V'_a = H^{-1}(0, 1) \quad (1.28)$$

On suppose que

$$f = \delta'_{1/2} \quad (\delta_{1/2} \text{ est la masse de Dirac en } x = 1/2). \quad (1.29)$$

Alors on a les problèmes suivants :

$$(P^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H_0^2(0, 1) \text{ tel que} \\ \int_0^1 u' v' dx + \varepsilon^2 \int_0^1 u'' v'' dx = \langle \delta'_{1/2}, v \rangle_{H^{-2}, H_0^2} = -v'(1/2), \quad \forall v \in H_0^2(0, 1) \end{array} \right. \quad (1.30)$$

$$(P^0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^0 \in H_0^1(0,1) \text{ tel que} \\ \int_0^1 u' v' dx = \langle \delta'_{1/2}, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = -v'(1/2), \forall v \in H_0^1(0,1) \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Les problèmes aux limites associés sont respectivement

$$(Q^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \text{ tel que :} \\ \left( -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon^2 \frac{d^4}{dx^4} \right) u^\varepsilon = \delta'_{1/2} \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = \frac{du^\varepsilon}{dx}(0) = \frac{du^\varepsilon}{dx}(1) = 0 \end{array} \right. \quad (1.32)$$

$$(Q^0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^0 \text{ tel que :} \\ -\frac{d^2 u^0}{dx^2} = \delta'_{1/2} \\ u^0(0) = u^0(1) = 0 \end{array} \right. \quad (1.33)$$

**Remarque 1.1**  $(Q^\varepsilon)$  est un problème d'ordre 4 si  $\varepsilon > 0$  et d'ordre 2 si  $\varepsilon = 0$ .

**Remarque 1.2**  $\delta'_{1/2} \in H^{-2}(0,1)$  par contre  $\delta'_{1/2} \notin H^{-1}(0,1)$

**Remarque 1.3** On est donc dans le cadre du théorème (1.2). Alors le problème  $(P^\varepsilon)$  est bien posé dans  $H_0^2(0,1)$  puisque l'inégalité de Poincaré permet de montrer la  $H_0^2(0,1)$ -coercivité de la forme  $a + \varepsilon^2 b$ . Par contre le problème limite  $(P^0)$  est mal posé dans  $H_0^1(0,1)$ . En plus,  $u^\varepsilon$  ne converge pas fortement vers  $u^0$  dans  $H_0^1(0,1)$  et l'énergie  $E(u^\varepsilon)$  converge vers  $\infty$ . Cependant,

comme  $\delta'_{1/2}$  est régulière au voisinage du bord, elle appartient à l'espace  $\Xi^{-2}$  (voir [18]) et le problème  $(Q^0)$  n'a pas de sens comme un problème variationnel mais c'est un problème bien posé au sens de Lions-Magenes [18] dont la solution est :

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 < x < 1/2 \\ x - 1 & \text{pour } 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

qui représente la fonction de Heaviside en  $x = 1/2$ .



## 1.7 Conclusion

L'étude effectuée dans ce chapitre concerne un type de problèmes de perturbation singulière sensitif est purement théorique. Nous avons pu constater que dans ce cadre le problème limite est bien posé seulement si  $f \in V'_a$ . Dans le cas contraire,  $f \notin V'_a$ , le problème limite est mal posé et sort du cadre variationnel, aussi l'énergie  $E^\varepsilon$  associée au problème  $(P^\varepsilon)$  explose ( $\uparrow \infty$ ) quand  $\varepsilon \uparrow 0$ .

L'approximation par la méthode des éléments finis des problèmes aux limites est liée à la formulation variationnelle des problèmes associés. Ainsi le processus de passage à la limite se comporte bien seulement dans le cas où  $f \in V'_a$ , ce qui représente un inconvénient majeur dans certains cas. En effet,  $V'_a$  est un espace tellement très petit qu'il ne contient pas l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  des fonctions test des distributions, et les problèmes rencontrés sont souvent en dehors de ce cadre. Ainsi,  $V_a \not\subseteq \mathcal{D}'$ , c'est-à-dire que  $V_a$  est assez large qu'il contient des éléments qui ne sont pas des distributions.

## Chapitre 2

# Traitement analytique au sens de Fourier des problèmes sensitifs

Dans les travaux [2], [3] Sanchez-Palencia et De Souza ont montré que les techniques de la transformé de Fourier dans la direction tangente au bord, permettent dans certains cas, de comprendre pourquoi et comment les solutions des problèmes sensitifs sortent en dehors de l'espace des distributions. En appliquant la transformé de Fourier au problème (1.4) pour des formes  $a$  et  $b$  spéciales, on obtient le comportement asymptotique en utilisant le fait que la transformé de Fourier des distributions (non tempérées) sont des fonctionnelles analytiques (non des distributions), ce qui permet de manipuler le problème limite et le processus asymptotique pour des chargements quelconques. La propriété la plus saisissante de ce problème est le phénomène de complexification (voir [2], [3]).

### 2.1 Transformée de Fourier des distributions

On présente dans ce paragraphe un bref rappel de l'essentiel des résultats (sans démonstrations) sur la transformée de Fourier des distributions (pour plus de détails voir [34], p. 149-163)

### 2.1.1 Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide

**Définition 2.1** : L'espace de Schwartz  $S = S(\mathbb{R}^n)$  des fonctions à décroissance rapide consiste en l'espace des fonctions  $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  à valeurs complexes tel que :

$$|\phi|_{\alpha, N} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^N) |\partial_x^\alpha \phi(x)| < +\infty, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ et } \forall N > 0.$$

On note par  $S'(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctionnelles linéairement continues sur  $S(\mathbb{R}^n)$ . C'est l'espace des distributions tempérées.

On a  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^n)$  avec injection continue et dense. Ainsi  $S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , on peut même montrer que  $S(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ .

Enfin, on a :  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

**Exemple 2.1** : 1-  $\delta(x) \in S'$  et  $\delta^{(\alpha)}(x) = \partial_x^\alpha \delta(x) \in S' \quad \forall \alpha$  (multi-indices). Mais  $e^x \notin S'$  bien que  $e^x \cos e^x = (\sin e^x)' \in S'$ .

2- Si  $u(x) \in C(\mathbb{R}^n)$  ou  $u(x) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , et si

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|)^p, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

pour certains  $C$  et  $p$ , alors  $u(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$ .

3- Si  $u(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{(1 + |x|)^N} dx < \infty$$

pour certain  $N > 0$ , alors  $u(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$ .

Il existe plusieurs définitions de la transformée de Fourier qui sont toutes équivalentes, on prend l'une d'elles.

On définit la transformée de Fourier d'une fonction  $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$  par

$$F(\phi) := \widehat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \phi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

et la transformée de Fourier inverse par

$$F^{-1}(\phi) := \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \widehat{\phi}(\xi) d\xi \quad (2.2)$$

**Propriétés :**

1- Formule de différentiation

$$\forall \phi \in S : \widehat{\partial_x^\alpha \phi(x)} = (-i\xi)^\alpha \widehat{\phi}(\xi), \quad \widehat{x^\alpha \phi(x)} = (-i\partial_\xi)^\alpha \widehat{\phi}(\xi) \quad (2.3)$$

2- Formule de translation

$$\forall \phi \in S \text{ et } \forall a \in \mathbb{R}^n : \widehat{\phi(x+a)} = e^{-ia\xi} \widehat{\phi}(\xi), \quad e^{iax} \phi(x) = \widehat{\phi}(\xi+a) \quad (2.4)$$

3- Formule de changement d'échelle

$$\forall \phi \in S \text{ et } \forall a \in \mathbb{R} - \{0\} : \widehat{\phi(ax)} = \frac{1}{|a|} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{a}\right) \quad (2.5)$$

4-  $F$  est un isomorphisme de  $S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$

5-

$$\forall \phi, \psi \in S : \widehat{\phi * \psi}(\xi) = \widehat{\phi}(\xi) \cdot \widehat{\psi}(\xi), \quad (2.6)$$

$$\widehat{\phi \cdot \psi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \left( \widehat{\phi * \psi} \right) (\xi), \quad * : \text{désigne le produit de convolution} \quad (2.7)$$

### 2.1.2 Transformée de Fourier des fonctions $C^\infty$ à support compact

Si  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  la formule (2.1) montre que  $\widehat{\phi}(\xi)$  est une fonction entière sur  $\mathbb{C}^n$ , et

$$\left| \widehat{\phi}(\xi) \right| \leq ce^{A|\text{Im}\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{C}^n \quad (2.8)$$

à condition que  $\phi(x) \equiv 0$  pour  $|x| > A$ . Posons  $\mathcal{D}_A = \{\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n); \phi(x) \equiv 0 \text{ si } |x| > A\}$ . Si  $\phi \in \mathcal{D}_A$  alors  $x^\alpha \phi(x) \in \mathcal{D}_A$  et  $\partial_x^\alpha \phi(x) \in \mathcal{D}_A$ . Grâce à (2.3) les fonctions  $\partial_\xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$  et  $\xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$  vérifient aussi l'estimation (2.8).

**Théorème 2.1** (Paley-Wiener) : Si  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  alors  $\widehat{\phi}(\xi)$  est une fonction entière sur  $\mathbb{C}^n$ . En plus,

$$\forall \alpha, \forall N > 0 : (1 + |\xi|)^N \left| \partial_\xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi) \right| \leq c_{\alpha, N} e^{A|\operatorname{Im} \xi|}, \xi \in \mathbb{C}^n \quad (2.9)$$

pour certains  $A$  et  $c_{\alpha, N} \geq 0$  qui dépendent de  $\phi$ . Inversement, si  $\widehat{\phi}(\xi)$  est une fonction entière sur  $\mathbb{C}^n$  vérifiant l'estimation (2.9) pour tout  $\alpha$  et  $N$ , alors  $\phi(x) \equiv F^{-1} \left( \widehat{\phi}(\xi) \right) \in \mathcal{D}_A$ .

**Définition 2.2** : Notons par  $Z = Z(\mathbb{C}^n)$  l'espace des fonctions entières  $\widehat{\phi}$  dans  $\mathbb{C}^n$  qui vérifient l'estimation (2.9) pour tout  $\alpha$  et  $N$ .

Par définition la suite  $\psi_k \in Z$  converge vers  $0 \in Z$ , et on écrit  $\psi_k \xrightarrow{Z} 0$ , si

$$|\psi_k|_{\alpha, N} = \sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} e^{-A|\operatorname{Im} \xi|} (1 + |\xi|)^N \left| \partial_\xi^\alpha \psi_k(\xi) \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \alpha, \forall N$$

pour certain  $A > 0$ .

**Théorème 2.2** : L'opérateur  $F : \mathcal{D} \longrightarrow Z$  est continu et son inverse  $F^{-1} : Z \longrightarrow \mathcal{D}$  l'est aussi.

Pour  $\phi \in \mathcal{D}$  les propriétés (2.3), (2.4) et (2.5) de la transformée de Fourier sont valides et la deuxième relation de (2.4) est valable pour tout  $a \in \mathbb{C}^n$ .

### 2.1.3 Transformée de Fourier des distributions tempérées

La transformée de Fourier  $F : S \longrightarrow S$  se prolonge par continuité à  $S'(\mathbb{R}^n)$ . En effet, il suffit d'utiliser l'identité de Parseval :

$$\forall u \in S : \langle \widehat{u}(\xi), \phi(\xi) \rangle = \langle u(x), \widehat{\phi}(x) \rangle, \quad \forall \phi \in S \quad (2.10)$$

**Définition 2.3** : Pour  $u(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$  la fonctionnelle  $Fu = \widehat{u}(\xi)$  est définie par l'identité (2.10).

**Proposition 2.1** : L'opérateur  $F : u \longrightarrow \widehat{u}$  est un isomorphisme de  $S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ .

**Exemple 2.2** : Prenons  $u(x) = \delta(x) \in S'(\mathbb{R}^n) : \langle \widehat{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \widehat{\phi} \rangle = \widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) d\xi = \langle 1, \phi \rangle \implies \widehat{\delta}(\xi) \equiv 1$ . Inversement, pour  $u(x) \equiv 1 : \langle \widehat{1}, \phi \rangle = \langle 1, \widehat{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x) dx = (2\pi)^n \phi(0) = (2\pi)^n \langle \delta, \phi \rangle \implies \widehat{1} = (2\pi)^n \delta(x)$

**Remarque 2.1** : Les propriétés de la transformée de Fourier des fonctions  $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$  sont valable aussi pour les distributions tempérées  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$  (par densité).

**Exemple 2.3** : 1-  $\forall a \in \mathbb{R}^n, \widehat{\delta}_a(\xi) = e^{ia\xi}$  ce qui montre que la transformée de Fourier de  $\delta_a$  est une fonction  $C^\infty$ .

2-  $\widehat{\partial_x^\alpha \delta(x)} = (-i\xi)^\alpha, \widehat{x^\alpha} = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \delta(\xi) \quad \forall \alpha$ . La dernière relation montre que la transformée de Fourier d'un polynôme (qui ne peut pas se calculer par intégration car  $x^\alpha \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ ) est une combinaison linéaire des dérivées de la distribution de Dirac à l'origine.

Transformée de Fourier des distributions à support compact

**Définition 2.4** On appelle  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  le sous espace de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  des distributions à support compact.

**Exemple 2.4** :  $\partial_x^\alpha \delta_a(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha$  et  $a \in \mathbb{R}^n$ .

**Lemme 2.1** : Si  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\text{supp} u = K$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\exists c > 0 \text{ et } m \in \mathbb{N} : |\langle u, \phi \rangle| \leq c \|\phi\|_{C^m(K_\varepsilon)}, \quad \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (2.11)$$

$K_\varepsilon$  : est un  $\varepsilon$ -voisinage de  $K$

L'entier  $m$  dans (2.11) est connu comme l'ordre (de la singularité) de la distribution  $u$ , et le plus petit entier  $m$  est l'ordre exacte.

**Exemple 2.5** : 1-  $\delta(x)$  est d'ordre  $m = 0$ , alors que  $\partial_x^\alpha \delta(x)$  est d'ordre  $m = |\alpha|$ .

2- La série  $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \partial_x^j \delta(x - j), x \in \mathbb{R}$ , son support est non compact et l'ordre de  $u$  est  $\infty$ .

**Corollaire 2.3** : Si  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\text{supp} u = \{a\}$ , avec  $a \in \mathbb{R}^n$ , alors

$$\exists m < +\infty, c_\alpha \in \mathbb{C} : u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial_x^\alpha \delta(x - a)$$

$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  est un sous espace de  $S'(\mathbb{R}^n)$  ainsi la transformée de Fourier d'une distribution tempérée est bien définie, elle s'exprime plus simplement comme suivant :

**Lemme 2.2** : Soit  $u(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $\widehat{u}(\xi)$  est une fonction  $C^\infty$  qui se calcul par la formule :

$$\widehat{u}(\xi) = \langle u(x), e^{ix\xi} \rangle, \xi \in \mathbb{R}^n$$

**Exemple 2.6** : 1-  $\widehat{\partial_x^\alpha \delta(x)}(\xi) = \langle \partial_x^\alpha \delta(x), e^{ix\xi} \rangle = (-i\xi)^\alpha$

2-  $\widehat{\delta(x-h)}(\xi) = \langle \delta(x-h), e^{ix\xi} \rangle = e^{ih\xi}$

On note que la transformée de Fourier des distributions  $\delta(x)$  et  $\partial_x^\alpha \delta(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  sont des polynômes. Il s'avère aussi que (théorème suivant) que la transformée de Fourier  $\widehat{u}(\xi)$  de toute distribution  $u(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  est une fonction entière sur  $\mathbb{C}^n$ .

**Théorème 2.4** (Paley Wiener) : Si  $u(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\widehat{u}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\widehat{u}$  est prolongeable à une fonction entière de  $\mathbb{C}^n$  donnée par :

$$\widehat{u}(z) = \langle u(x), e^{ixz} \rangle, z \in \mathbb{C}^n \tag{2.12}$$

En plus, il existe des constantes  $c, A$  et  $\mu \geq 0$  tel que :

$$|\widehat{u}(z)| \leq ce^{A|\text{Im} z|} (1 + |z|)^\mu, z \in \mathbb{C}^n \tag{2.13}$$

Inversement, si  $\widehat{u}(z)$  est une fonction entière sur  $\mathbb{C}^n$  vérifiant (2.13) pour certains  $c, A$  et  $\mu$ , alors  $\widehat{u}(z)|_{\mathbb{R}^n} = \widehat{u}(\xi) \in S'(\mathbb{R}^n)$  et  $u = F^{-1}\widehat{u} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ; de plus  $u(x) = 0$  pour  $|x| > A$ .

### 2.1.4 Espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

On peut définir les espaces de Sobolev d'ordre réels à partir de la transformée de Fourier comme suivant.

Pour  $s \in \mathbb{R}$  on note par  $H^s(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions généralisées  $u(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\widehat{u}(\xi) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad (2.14)$$

**Exemple 2.7** : 1-  $u(x) = \delta(x) \in S'(\mathbb{R})$ , on sait que  $\widehat{u}(\xi) = 1$  alors  $\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} d\xi$ . Ainsi afin que  $u \in H^s(\mathbb{R})$  il faut que  $s < -1/2$ .

2-  $u(x) = \delta^k(x) \in S'(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , on sait que  $\widehat{u}(\xi) = (-i\xi)^k$  alors  $\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\xi|^{2k} d\xi$ . Ainsi afin que  $u \in H^s(\mathbb{R})$  il faut que  $s < -1/2 - k$ .

On a la relation suivante : si  $s_1 \geq s_2$  alors  $H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ .

### 2.1.5 Transformé de Fourier des distributions à croissance rapide

#### Fonctionnelles sur l'espace $Z'(\mathbb{C}^n)$

**Définition 2.5** On note par  $Z' = Z'(\mathbb{C}^n)$  l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur  $Z(\mathbb{C}^n)$ .

Par exemple, si  $w(\xi) \in S'(\mathbb{R}^n)$  alors le produit scalaire  $\langle w(\xi), \phi_{|\mathbb{R}^n} \rangle$  est défini pour  $\phi \in Z(\mathbb{C}^n)$  car  $\phi_{|\mathbb{R}^n} \in S(\mathbb{R}^n)$ . On écrit

$$\langle v(z), \phi(z) \rangle = \langle w(\xi), \phi_{|\mathbb{R}^n} \rangle, \phi \in Z(\mathbb{C}^n) \quad (2.15)$$

Ainsi  $v(z) \in Z'(\mathbb{C}^n)$  car l'application  $\phi \longrightarrow \phi_{|\mathbb{R}^n}$  est une injection continue,  $Z(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ . Nous avons aussi  $Z(\mathbb{C}^n)$  est partout dense dans  $S(\mathbb{R}^n)$ , puisque  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est partout dense dans  $S(\mathbb{R}^n)$  et  $F : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$  est un isomorphisme et en plus  $F : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow Z(\mathbb{C}^n)$  est un isomorphisme. Par conséquent, l'application duale de  $S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow Z'(\mathbb{C}^n)$  qui applique  $w$  dans  $v$  par la formule (2.15) est aussi une injection. Ainsi  $S'(\mathbb{R}^n)$  est un sous espace de  $Z'(\mathbb{C}^n)$ .



### Opérations sur l'espace $Z'(\mathbb{C}^n)$

Comme  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  et  $F : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow Z'(\mathbb{C}^n)$  est isomorphisme, il s'ensuit que  $Z = F(\mathcal{D})$  est dense dans  $Z'$ . Ainsi les opérations définies sur l'espace  $Z$  se prolongent à l'espace  $Z'$ . Pour  $v \in Z'(\mathbb{C}^n)$  et  $\phi \in Z(\mathbb{C}^n)$  on les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \partial_z^\alpha v(z), \phi(z) \rangle &= \langle v(z), (-\partial_z)^\alpha \phi(z) \rangle, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \langle z^\alpha v(z), \phi(z) \rangle &= \langle v(z), z^\alpha \phi(z) \rangle \\ \langle e^{iaz} v(z), \phi(z) \rangle &= \langle v(z), e^{iaz} \phi(z) \rangle, \quad a \in \mathbb{R}^n \\ \langle v(z+a), \phi(z) \rangle &= \langle v(\xi), \phi(\xi-a) \rangle, \quad a \in \mathbb{C}^n \\ \langle v(Cz), \phi(z) \rangle &= \left\langle v(\xi), \frac{1}{|\det C|} \phi(C^{-1}\xi) \right\rangle, \quad C \in GL_{\mathbb{R}^n}(n) \end{aligned}$$

### Transformée de Fourier des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

**Proposition 2.2** : L'opérateur  $F : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$  défini par (2.10) est prolongeable en une application continue  $F : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow Z'(\mathbb{C}^n)$  de telle sorte que le diagramme suivant devient commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S'(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{F} & S'(\mathbb{R}^n) \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{F} & Z'(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

Ici l'injection  $S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow Z'(\mathbb{C}^n)$  est définie par (2.15).

**Proposition 2.3** : Les opérateurs  $F : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow Z'(\mathbb{C}^n)$  et  $F^{-1} : Z'(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  sont continus.

**Propriétés :** Pour tout  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} F(\partial_x^\alpha u) &= (-iz)^\alpha \hat{u}(z) \\ F(x^\alpha u) &= (-i\partial_z)^\alpha \hat{u}(z), \forall \alpha \\ F(u(x+a)) &= e^{-iaz} \hat{u}(z), a \in \mathbb{R}^n \\ F(e^{iax}u(x)) &= \hat{u}(z+a), a \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

## 2.2 Un problème elliptique avec des conditions aux limites non classiques.

Soit  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$  une bande infinie dans  $\mathbb{R}^2$  de la variable  $x = (x_1, x_2)$  et soit la forme bilinéaire définie par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx. \quad (2.16)$$

Considérons le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V_a \text{ tel que, } \forall v \in V_a \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle \end{array} \right. \quad (2.17)$$

où l'espace  $V_a$  est l'espace d'énergie, avec les conditions limites essentielles :

$$v(x, 0) = \partial_2 v(x_1, 0) = 0, \quad (2.18)$$

qui est défini comme le complété pour la norme  $\|v\|_a = a(v, v)^{1/2}$  de l'ensemble des fonctions de  $H^2(\Omega)$  vérifiant (2.18), tandis que  $f$  est un élément de  $V_a'$ .

**Remarque 2.2 :** En appliquant une intégration par parties sur le problème (2.17) on obtient

la formulation classique associée suivante :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ sur } \Omega \\ u(x_1, 0) = \partial_2 u(x_1, 0) = 0, \forall x_1 \in \mathbb{R} \\ \Delta u(x_1, 1) = \partial_2 \Delta u(x_1, 1) = 0, \forall x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.19)$$

**Remarque 2.3** : Nous remarquons que sous la forme classique (2.19), le problème a un sens pour des chargements  $f$  plus générales, non nécessairement contenues dans  $V'_a$ . Nous prendrons dans la suite :

$$f(x_1, x_2) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2 - c) \quad (2.20)$$

avec  $0 < c < 1$ .

**Remarque 2.4** : Le problème aux limites (2.19) n'est pas classique, il implique de nouvelles conditions aux limites naturelle en  $x_2 = 1$  mais elles ne satisfont pas la condition Shapiro - Lopatinskii.

En effet, considérons le demi plan supérieur  $(x_1, x_2)$ ,  $x_2 \geq 0$ , et l'équation

$$\Delta^2 u(x_1, x_2) = (\partial_1^4 + 2\partial_1^2 \partial_2^2 + \partial_2^4)u(x_1, x_2) = 0 \quad (2.21)$$

avec les condition aux limites

$$\Delta u(x_1, 1) = \partial_2 \Delta u(x_1, 1) = 0 \quad (2.22)$$

En prenant la transformée de Fourier de (2.21) et (2.22) dans la direction  $x_1$ , on obtient le problème :

$$\begin{cases} (\xi^4 - 2\xi^2 \partial_2^2 + \partial_2^4) \hat{u}(\xi, x_2) = 0 \\ (\xi^2 - \partial_2^2) \hat{u}(\xi, 1) = \partial_2 (\xi^2 - \partial_2^2) \hat{u}(\xi, 1) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Il apparaît alors que le problème (2.23) admet des solutions non nulles dans le demi plan, telle que  $\widehat{u} = Ae^{-|\xi|x_2}$ . Ceci signifie que la condition de Shapiro - Lopatinskii n'est pas satisfaite. Par conséquent le problème aux limites (2.19) n'est pas un problème classique et il n'admet pas de solutions en général.

Afin d'éviter les problèmes expliqués dans la remarque précédente, nous considérerons d'abord la transformée de Fourier en  $x_1$  du problème aux limites (2.19) avec les chargements donnés par (2.20). Le nouveau problème obtenu est une équation différentielle ordinaire qui dépend du paramètre  $\xi$  et qui admet des solutions pour n'importe quelle valeur du paramètre  $\xi$ . Ensuite, en prenant la transformée de Fourier inverse, nous obtiendrons les solutions de (2.19) dans l'espace des fonctions analytiques  $Z'$ .

Dans ce cas, en utilisant la transformée de Fourier de (2.19) relative à  $x_1$  et en notant la transformée de Fourier de  $u(x_1, x_2)$  par  $\widehat{u}(\xi, x_2)$ , nous obtenons, pour  $x_2 \in (0, 1)$ , le problème aux limites suivant qui dépend du paramètre  $\xi \in \mathbb{R}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_2^2 - \xi^2)(\partial_2^2 - \xi^2)\widehat{u}(\xi, x_2) = \delta(x_2 - c), \forall x_2 \in (0, 1) \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \partial_2 \widehat{u}(\xi, 0) = 0 \\ (\partial_2^2 - \xi^2)\widehat{u}(\xi, 1) = \partial_2(\partial_2^2 - \xi^2)\widehat{u}(\xi, 1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Comme les solutions de  $(\partial_2^2 - \xi^2)(\partial_2^2 - \xi^2)\widehat{u}(\xi, x_2) = 0$  sont des combinaisons linéaires de

$$e^{|\xi|x_2}, e^{-|\xi|x_2}, x_2 e^{|\xi|x_2}, x_2 e^{-|\xi|x_2} \quad (2.25)$$

alors les solutions de (2.24) sont

$$\widehat{u}(\xi, x_2) = \begin{cases} \widehat{u}^-(\xi, x_2) & si \quad x_2 \in (0, c) \\ \widehat{u}^+(\xi, x_2) & si \quad x_2 \in (c, 1) \end{cases} \quad (2.26)$$

où

$$\widehat{u}^-(\xi, x_2) = \frac{1}{2|\xi|^3} \cosh(|\xi|c) \sinh(|\xi|x_2) - \frac{x_2}{2\xi^2} \cosh(|\xi|(x_2 - c)) \quad (2.27)$$

$$\widehat{u}^+(\xi, x_2) = \widehat{u}^-(\xi, x_2) + \frac{(x_2 - c)}{2\xi^2} \cosh(|\xi|(x_2 - c)) - \frac{1}{2|\xi|^3} \sinh(|\xi|(x_2 - c)). \quad (2.28)$$

Nous remarquons que pour tout  $x_2 \in ]0, 1[$ , avec  $x_2 \neq c$ , et pour  $|\xi| \rightarrow +\infty$  nous avons

$$\widehat{u}(\xi, x_2) \approx \frac{1}{8|\xi|^3} \exp(|\xi|(c + x_2)). \quad (2.29)$$

Evidemment cette expression est obtenue pour des chargements de type (2.20). Mais même pour des cas plutôt généraux, le comportement asymptotique pour  $|\xi| \rightarrow +\infty$  est exponentiel (voir [25])

## 2.3 Problème de perturbation singulière avec conditions aux limites non classiques dans le problème limite :

Considérons maintenant le problème variationnel ( $P^\varepsilon$ ) de type (1.4) pour une forme  $a$  donnée par (2.16) et la forme  $b$  défini par :

$$b(u, v) = \int_{\Omega} (\partial_1^3 u \partial_1^3 v + \partial_2^3 u \partial_2^3 v) dx \quad (2.30)$$

$$(P^\varepsilon) \begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon b(u^\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (2.31)$$

avec l'espace d'énergie  $V$  est le complété de l'espace des fonctions  $v \in H^3(\Omega)$  satisfaisants aux conditions aux limites

$$v(x_1, 0) = \partial_2 v(x_1, 0) = \partial_2^2 v(x_1, 0) = 0 \quad (2.32)$$

muni de la norme  $\|v\|_V^2 = a(v, v) + b(v, v)$  avec la forme

$$f(x_1, x_2) = \delta(x_1)F(x_2), \quad F \in L^2(0, 1) \quad (2.33)$$

On définit maintenant les espaces  $H_{\Gamma_0}^3(0, 1)$  et  $H_{\Gamma_0}^2(0, 1)$  par :

$$H_{\Gamma_0}^3(0; 1) = \{v \in H^3(0, 1); v(0) = \partial_2 v(0) = \partial_2^2 v(0) = 0\} \quad (2.34)$$

$$H_{\Gamma_0}^2(0; 1) = \{v \in H^2(0, 1); v(0) = \partial_2 v(0) = 0\} \quad (2.35)$$

Afin de résoudre le problème  $(P^\varepsilon)$  à l'aide de la transformée de Fourier dans la direction  $x_1$ , on commence d'abord, comme pour le problème (2.17), par chercher la formulation classique associée par une intégration par parties en  $(x_1, x_2)$ . On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u^\varepsilon - \varepsilon^2 (\partial_1^6 + \partial_2^6) u^\varepsilon = \delta(x_1)F(x_2) \quad \text{sur } \Omega \\ u^\varepsilon(x_1, 0) = \partial_2 u^\varepsilon(x_1, 0) = \partial_2^2 u^\varepsilon(x_1, 0) = 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \\ \varepsilon^2 \partial_2^3 u^\varepsilon(x_1, 1) = (\Delta - \varepsilon^2 \partial_2^4) u^\varepsilon(x_1, 1) = -\partial_2 (\Delta - \varepsilon^2 \partial_2^4) u^\varepsilon(x_1, 1) = 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

**Remarque 2.5** *Le problème (2.36) est un problème de perturbation singulière de type elliptique. Il est d'ordre 6 si  $\varepsilon > 0$  et d'ordre 4 si  $\varepsilon = 0$ .*

Ensuite on prend la transformée de Fourier en  $x_1$  de (2.36), on obtient pour  $x_2 \in (0, 1)$  l'équation différentielle ordinaire dépendant du paramètre  $\xi$  suivante :

$$[(\partial_2^2 - \xi^2)(\partial_2^2 - \xi^2) - \varepsilon^2(-\xi^6 + \partial_2^6)] \widehat{u}^\varepsilon(\xi, x_2) = F(x_2), \quad \forall x_2 \in (0, 1) \quad (2.37)$$

avec les conditions aux limites :

$$\widehat{u}^\varepsilon(\xi, 0) = \partial_2 \widehat{u}^\varepsilon(\xi, 0) = \partial_2^2 \widehat{u}^\varepsilon(\xi, 0) = 0 \quad (2.38)$$

$$\varepsilon^2 \partial_2^3 \widehat{u}^\varepsilon(\xi, 1) = ((\partial_2^2 - \xi^2) - \varepsilon^2 \partial_2^4) \widehat{u}^\varepsilon(\xi, 1) = -\partial_2 ((\partial_2^2 - \xi^2) - \varepsilon^2 \partial_2^4) \widehat{u}^\varepsilon(\xi, 1) = 0 \quad (2.39)$$

Introduisons maintenant les notations suivantes :

$$\text{Pour } u, v \in H^2(0, 1) : \widehat{a}(u, v) = \langle (\partial_2^2 - \xi^2)u, (\partial_2^2 - \xi^2)v \rangle.$$

$$\text{Pour } u, v \in H^3(0, 1) : \widehat{b}(u, v) = |\xi|^6 \langle u, v \rangle + \langle \partial_2^3 u, \partial_2^3 v \rangle,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire usuel dans  $L^2(0, 1)$ .

Alors la formulation variationnelle du problème aux limites (2.37)-(2.39) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \widehat{u}^\varepsilon(\xi) \in H_{\Gamma_0}^3(0, 1) \text{ telle que} \\ \widehat{a}(\widehat{u}^\varepsilon(\xi), v) + \varepsilon^2 \widehat{b}(\widehat{u}^\varepsilon(\xi), v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^3(0, 1) \end{array} \right\} \quad (2.40)$$

Notre objectif dans la suite est le suivant : Premièrement, montrer l'existence et l'unicité du problème (2.40) pour  $\xi$  fixé et de valeur finie. Ensuite, nous allons prouver la convergence de la suite  $(\widehat{u}^\varepsilon(\xi))_\varepsilon$  des solutions de (2.40) vers  $\widehat{u}(\xi)$  solution de (2.24) quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, pour  $\xi$  fixé. Puis, nous prouverons la même convergence en termes de distributions sur  $\mathbb{R}_\xi$ , et nous déduirons la convergence de  $u^\varepsilon$  vers la solution  $u$  du problème limite pour  $\varepsilon = 0$  en termes de fonctionnelles analytiques sur  $\mathbb{R}_x$ .

**1-Etude de l'existence et l'unicité :** L'existence et l'unicité de  $\widehat{u}^\varepsilon(\xi)$  solution du problème variationnel classique (2.40) pour  $\varepsilon = 0$  ( $\widehat{u}(\xi)$ ) et pour  $\varepsilon > 0$  découlent du théorème de Lax-Milgram, grâce aux deux lemmes suivants (voir [33] pour la démonstration) :

**Lemme 2.3 :** *Il existe une constante  $C > 0$  tel que pour tout  $u$  dans  $H_{\Gamma_0}^2(0, 1)$ , on a*

$$\widehat{a}(u, u) = \|(\partial_2^2 - \xi^2)u\|_{L^2}^2 \geq C \|u\|_{H^2}^2,$$

**Lemme 2.4** où  $C$  peut être choisi indépendamment de  $\xi$  dans des intervalles bornés de  $\mathbb{R}_\xi$ .

**Lemme 2.5** : Pour  $\varepsilon > 0$  il existe une constante  $C > 0$  tel que pour tout  $u$  dans  $H_{\Gamma_0}^3(0, 1)$ , on a

$$\widehat{a}(u, u) + \varepsilon^2 \widehat{b}(u, u) \geq C \|u\|_{H^3}^2,$$

où  $C$  peut être choisi indépendamment de  $\xi$  dans des intervalles bornés de  $\mathbb{R}_\xi$ .

**2-Etude de la convergence** : Pour  $\xi$  fixé, on s'intéresse à la convergence de  $\widehat{u}^\varepsilon(\xi)$  solution de (2.40) quand  $\varepsilon \downarrow 0$ .

**Lemme 2.6** : Soit  $\xi$  fixé et  $\widehat{u}^\varepsilon(\xi)$ ,  $\widehat{u}(\xi)$  les solutions de (2.40) et (2.24) respectivement pour des chargements  $f(x_1, x_2) = \delta(x_1)F(x_2)$ ,  $F \in L^2(0, 1)$ , alors on a :

$$\widehat{u}^\varepsilon(\xi) \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} \widehat{u}(\xi) \text{ dans } H_{\Gamma_0}^2(0, 1) \text{ fortement}$$

**Preuve.** : Commençons par montrer la convergence faible. On prend dans (2.40) la fonction test  $v = \widehat{u}^\varepsilon(\xi)$ , on obtient :

$$\|(\partial_2^2 - \xi^2)\widehat{u}^\varepsilon(\xi)\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2 \left( \xi^6 \|\widehat{u}^\varepsilon(\xi)\|_{L^2}^2 + \|\partial_2^3 \widehat{u}^\varepsilon(\xi)\|_{L^2}^2 \right) = \langle F, \widehat{u}^\varepsilon(\xi) \rangle, \quad (2.41)$$

ainsi,

$$\|(\partial_2^2 - \xi^2)\widehat{u}^\varepsilon(\xi)\|_{L^2}^2 \leq \langle F, \widehat{u}^\varepsilon(\xi) \rangle, \quad (2.42)$$

on applique ensuite le lemme ( ) et l'inégalité de Cauchy à la relation (2.42), on obtient :

$$\|\widehat{u}^\varepsilon(\xi)\|_{H^2} \leq C \|F\|_{L^2}, \quad (2.43)$$

ce qui montre qu'il existe  $\widehat{u}^*(\xi) \in H_{\Gamma_0}^2(0, 1)$  tel que :

$$\widehat{u}^\varepsilon(\xi) \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} \widehat{u}^*(\xi) \text{ faiblement dans } H_{\Gamma_0}^2(0, 1) \quad (2.44)$$



Considérons maintenant la formulation variationnelle du problème (2.24) (pour  $f = \delta(x_1)F(x_2)$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \widehat{u}(\xi) \in H_{\Gamma_0}^2(0,1) \text{ tel que} \\ \langle \partial_2^2 - \xi^2 \widehat{u}(\xi), \partial_2^2 - \xi^2 v \rangle = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^2(0,1) \end{array} \right. \quad (2.45)$$

On sait déjà que ce problème admet une solution unique. On va montrer que  $\widehat{u}^*(\xi)$  vérifie le problème (2.45) et ainsi aboutir à l'égalité  $\widehat{u}^*(\xi) = \widehat{u}(\xi)$ . La relation (2.43) implique que  $\|\widehat{u}^\varepsilon(\xi)\|_{L^2} \leq C$ , ainsi d'après (2.41) on a l'estimation suivante :

$$\|\partial_2^3 \widehat{u}^\varepsilon(\xi)\|_{L^2} \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad (2.46)$$

Revenons maintenant à la formulation variationnelle (2.40), fixons la fonction test  $v \in H_{\Gamma_0}^3(0,1)$ , nous remarquons qu'en utilisant (2.46) nous avons l'estimation :

$$\left| \varepsilon^2 \int_0^1 \partial_2^3 \widehat{u}^\varepsilon(\xi)(x_2) \partial_2^3 v(x_2) dx_2 \right| \leq \varepsilon^2 \|\partial_2^3 \widehat{u}^\varepsilon(\xi)\|_{L^2} \|\partial_2^3 v\|_{L^2} \leq \varepsilon C' \quad (2.47)$$

Faisons ensuite tendre  $\varepsilon$  vers zéro dans (2.40) et utilisons (2.44) , nous obtenons :

$$\widehat{a}(\widehat{u}^\varepsilon(\xi), v) + \varepsilon^2 \widehat{b}(\widehat{u}^\varepsilon(\xi), v) \longrightarrow \widehat{a}(\widehat{u}^*(\xi), v) \quad (2.48)$$

Grâce à la densité de  $H_{\Gamma_0}^3(0,1)$  dans  $H_{\Gamma_0}^2(0,1)$ , nous déduisons que  $\widehat{u}^*(\xi)$  est solution du problème (2.45), ainsi  $\widehat{u}^*(\xi) = \widehat{u}(\xi)$ .

Montrons maintenant que la convergence (2.44) est forte. D'après la coercivité de la forme  $\widehat{a}$  sur  $H_{\Gamma_0}^2(0,1)$  nous obtenons

$$C \|\widehat{u}^\varepsilon(\xi) - \widehat{u}(\xi)\|_{H^2}^2 \leq \widehat{a}(\widehat{u}^\varepsilon(\xi) - \widehat{u}(\xi), \widehat{u}^\varepsilon(\xi) - \widehat{u}(\xi)) + \varepsilon^2 \widehat{b}(\widehat{u}^\varepsilon(\xi), \widehat{u}^\varepsilon(\xi)) \quad (2.49)$$

Le membre de droite dans (2.49) s'écrit sous la forme

$$\left[ \widehat{a}(\widehat{u}^\varepsilon(\xi), \widehat{u}^\varepsilon(\xi)) + \varepsilon^2 \widehat{b}(\widehat{u}^\varepsilon(\xi), \widehat{u}^\varepsilon(\xi)) \right] + \widehat{a}(\widehat{u}(\xi), \widehat{u}(\xi)) - 2\widehat{a}(\widehat{u}(\xi), \widehat{u}^\varepsilon(\xi)) \quad (2.50)$$

Le premier terme (entre [ ]) dans (2.50) ce n'est autre que le membre de gauche dans (2.40) pour  $v = \widehat{u}^\varepsilon(\xi)$ , donc il vaut  $\langle F, \widehat{u}^\varepsilon(\xi) \rangle$ , le second terme représente le membre de gauche de

(2.45) pour  $v = \widehat{u}(\xi)$ , donc il vaut  $\langle F, \widehat{u}(\xi) \rangle$  et enfin le troisième terme représente le membre de gauche de (2.45) (multiplié par -2) pour  $v = \widehat{u}^\varepsilon(\xi)$ , donc il vaut  $\langle F, \widehat{u}^\varepsilon(\xi) \rangle$  (multiplié par -2). Ainsi (2.49) se simplifie à

$$C \|\widehat{u}^\varepsilon(\xi) - \widehat{u}(\xi)\|_{H^2}^2 \leq \langle F, \widehat{u}(\xi) \rangle - \langle F, \widehat{u}^\varepsilon(\xi) \rangle \quad (2.51)$$

En appliquant la relation (2.44) dans (2.51) nous obtenons la convergence forte demandée.

■

### 3-Etude de la convergence au sens des distributions

Le théorème suivant donne la convergence de  $\widehat{u}^\varepsilon$  au sens du distribution relativement à  $\xi$ , sa transformée de Fourier inverse donne la convergence de  $u^\varepsilon$ .

**Théorème 2.5** *Soient  $\widehat{u}^\varepsilon$  et  $\widehat{u}$  les solutions de (2.40) et (2.45) respectivement. Alors,*

$$\widehat{u}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \widehat{u} \text{ dans } D'(R_\xi; H_{\Gamma_0}^2(0, 1)) \quad (2.52)$$

*De plus, pour  $x_2$  fixé, nous avons :*

$$\widehat{u}^\varepsilon(., x_2) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \widehat{u}(., x_2) \text{ dans } D'(R_\xi) \quad (2.53)$$

$$u^\varepsilon(., x_2) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} u(., x_2) \text{ dans } Z'(R_\xi) \quad (2.54)$$

*où  $u$  et  $u^\varepsilon$  sont les solutions de (2.16) et (2.31) respectivement.*

## Chapitre 3

# Méthode de décomposition asymptotique partielle du domaine

### 3.1 Description de la méthode

La méthode de décomposition asymptotique partielle du domaine (**MAPDD** : **M**ethod of **A**symptotic **P**artial **D**ecomposition of **D**omain) est une méthode proposée pour la première fois en 1996 par G. P. Panasenko dans [11] et développée ensuite en 1998 par le même auteur dans [12], dont le but initial est de permettre de traiter des problèmes posés dans des domaines fins et dont on connaît un développement asymptotique. L'idée principale est de remplacer le problème 3D ou 2D par un problème hybride combiné 3D-1D, 3D-2D ou 2D-1D, i.e. on réduit la dimension dans les sous-domaines où la solution a un comportement régulier, et l'on garde la dimension d'origine là où elle a un comportement singulier (type couche limite). Les principes de construction des conditions d'interface entre les parties multi-D et les parties 1D ont été formulés dans la référence [12]. Cette approche permet essentiellement de réduire le maillage du domaine lors du traitement numérique.

Dans sa forme la plus récente (version variationnelle [13]), la MAPDD se propose non pas forcément de réduire la dimension sur des parties du domaine, mais de chercher la solution dépendant d'un petit paramètre  $\varepsilon$  dans un espace plus petit qui contient sur les parties régulières une solution (connue) du problème pour  $\varepsilon = 0$  (ce qui contient le cas de la "décomposition du domaine"). Aussi, l'utilisation de la MAPDD permet de ne traiter de manière classique (par

éléments finis volumes finis ou différences finies) en fait quasiment que les parties qui présentent des singularités, comblant les vides sur les parties régulières par des "super-éléments", éléments dont la taille du support n'est pas destinée à tendre vers 0.

### 3.1.1 Problème décomposé

On considère  $H^\varepsilon$  une famille d'espaces de Hilbert dépendant d'un petit paramètre  $\varepsilon$  (destiné à tendre vers 0). On considère également une forme bilinéaire  $B$ , symétrique, continue et coercive, et une fonctionnelle linéaire, continue et bornée  $f$ . On considère le problème variationnel suivant :

$$(P^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^\varepsilon \text{ tel que} \\ B(u^\varepsilon, w) = (f, w) \quad \forall w \in H^\varepsilon \end{array} \right. , \quad (3.1)$$

avec l'hypothèse suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists c_1 > 0 \text{ et } r \geq 0 \text{ ne dépendant de } \varepsilon \text{ tel que :} \\ B(w, w) \geq c_1 \varepsilon^r \|w\|^2, \forall w \in H^\varepsilon \end{array} \right. \quad (3.2)$$

**Définition 3.1** On appelle **espace décomposé** un sous-espace  $H_{dec}^\varepsilon$  de  $H^\varepsilon$  qui vérifie :

il existe  $u_a^\varepsilon$  telle que :

1.  $u_a^\varepsilon \in H_{dec}^\varepsilon$

et il existe  $\psi^\varepsilon \in H^\varepsilon$  telle que

2.  $\|\psi^\varepsilon\| \leq c_2$  ( $c_2$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ ), et

3.  $\forall w \in H^\varepsilon, B(u_a^\varepsilon, w) = (f, w) + \varepsilon^K (\psi^\varepsilon, w)$  où  $K > r$

**Définition 3.2** On appelle **problème décomposé** associé au problème (3.1), le problème suivant :

$$(P_{dec}^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{dec}^\varepsilon \in H_{dec}^\varepsilon \text{ tel que} \\ B(u_{dec}^\varepsilon, w) = (f, w) \quad \forall w \in H_{dec}^\varepsilon \end{array} \right. , \quad (3.3)$$

**Remarque 3.1** La fonction  $u_a^\varepsilon$  est dite solution asymptotique du problème (3.3).

**Remarque 3.2** Si  $H_{dec}^\varepsilon$  est un sous espace fermé de  $H^\varepsilon$  alors le problème (3.3) admet une solution unique d'après le théorème de Lax-Milgram.

**Définition 3.3** La méthode de décomposition asymptotique consiste à approcher le problème  $(P^\varepsilon)$  par le problème  $(P_{dec}^\varepsilon)$ .

○ On donne maintenant un résultat de base de la MAPDD concernant l'estimation de l'erreur

d'approximation de la solution  $u^\varepsilon$  par la solution décomposée  $u_{dec}^\varepsilon$  dû à Panasenko (voir [12])

**Proposition 3.1** Considérons  $u^\varepsilon$  et  $u_{dec}^\varepsilon$  solutions des problèmes  $(P^\varepsilon)$  et  $(P_{dec}^\varepsilon)$  respectivement. Alors

$$\|u^\varepsilon - u_{dec}^\varepsilon\| \leq O(\varepsilon^{K-r}) \quad (3.4)$$

**Preuve.** On sait que la solution asymptotique  $u_a^\varepsilon$  vérifie :

$$\forall w \in H^\varepsilon, B(u_a^\varepsilon, w) = (f, w) + \varepsilon^K (\psi^\varepsilon, w) \text{ où } K > r \quad (3.5)$$

En soustrayant l'équation (3.1) de l'équation (3.5) on obtient

$$\forall w \in H^\varepsilon : B(u_a^\varepsilon - u^\varepsilon, w) = \varepsilon^K (\psi^\varepsilon, w) \quad (3.6)$$

En prenant  $w = u_a^\varepsilon - u^\varepsilon$  et en utilisant l'hypothèse 3.2 on obtient

$$c_1 \varepsilon^r \|u_a^\varepsilon - u^\varepsilon\|^2 \leq B(u_a^\varepsilon - u^\varepsilon, u_a^\varepsilon - u^\varepsilon) = \varepsilon^K (\psi^\varepsilon, u_a^\varepsilon - u^\varepsilon) \leq c_2 \varepsilon^K \|u_a^\varepsilon - u^\varepsilon\|$$

d'où le résultat suivant :

$$\|u_a^\varepsilon - u^\varepsilon\| \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \varepsilon^{K-r} \quad (3.7)$$

Prenons maintenant dans (3.5)  $w \in H_{dec}^\varepsilon$  et effectuons la soustraction avec (3.3) nous obtenons

$$\forall w \in H_{dec}^\varepsilon : B(u_a^\varepsilon - u_{dec}^\varepsilon, w) = \varepsilon^K (\psi^\varepsilon, w) \quad (3.8)$$

Ensuite prenons dans (3.8)  $w = u_a^\varepsilon - u_{dec}^\varepsilon \in H_{dec}^\varepsilon$  et utilisons l'hypothèse (3.2) nous obtenons

$$\|u_a^\varepsilon - u_{dec}^\varepsilon\| \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \varepsilon^{K-r} \quad (3.9)$$

Enfin, grâce à l'inégalité triangulaire de la norme et d'après (3.7) et (3.9) nous obtenons

$$\|u^\varepsilon - u_{dec}^\varepsilon\| \leq \|u^\varepsilon - u_a^\varepsilon\| + \|u_a^\varepsilon - u_{dec}^\varepsilon\| \leq 2 \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \varepsilon^{K-r} \text{ avec } K > r$$

d'où

$$\|u^\varepsilon - u_{dec}^\varepsilon\| = 0(\varepsilon^{K-r})$$

■

### 3.2 Traitement numérique d'un problème de perturbation singulière unidimensionnel :

Afin d'expliquer le principe et les avantages de la méthode MAPDD on va considérer un problème modèle de perturbation singulière sensitif qui a fait l'objet de l'exemple 1 (chapitre I). On signale que ce problème a été déjà traité par Fontvielle dans [7] et [10]. Dans ce cas l'application de la MAPDD ne réduit pas le domaine car notre problème modèle est de dimension un. Toutefois il existe une autre réduction du problème de la manière suivante :

dans les zones de couches limites on résoud l'équation initiale, et hors de ces zones, on résoud l'équation pour  $\varepsilon = 0$ . Ces dernière zones sont plus larges que les zones où sont localisées les couches limites. En terme de résolution numérique par éléments finis, on n'utilisera sur ces

zones qu'une seule fonction de base, de type "super-élément". La mesure de ces zones en dehors des couches limites est grande par rapport au support normal d'une fonction de base utilisée classiquement en éléments finis.

La démarche à suivre dans ce problème est la suivante :

On remplace le problème posé dans un espace de Hilbert  $H$  par un problème posé dans un sous-espace plus simple  $H_{dec}$ , qui contient une solution asymptotique du problème initial. Lors de la discrétisation par éléments finis, l'espace  $H_{dec}$  permet de définir certaines fonctions de base sur des supports de mesure comparable à celle du domaine tout entier. Au moyen d'un développement asymptotique, on justifie la pertinence de la résolution dans  $H_{dec}$  plutôt que dans  $H$  pour ce problème, la qualité de l'approximation pouvant être choisie de manière arbitraire.

On donne des estimations d'erreur pour l'approximation par éléments finis dans  $H_{dec}$  et on expose des essais numériques. On obtient le même ordre de convergence que pour la méthode classique d'Hermite.

### 3.2.1 Problème décomposé

Nous proposons ci-dessous la méthode de décomposition asymptotique partielle de domaine pour la résolution du problème  $(P^\varepsilon)$  1.30. L'étude asymptotique de ce problème (voir Leguillon et al. [5]) montre que la solution est très proche d'une fonction affine par morceaux en dehors d'un petit voisinage des points singuliers 0, 1, et  $\frac{1}{2}$ . En conséquence, on passe de  $(P^\varepsilon)$  1.30 au problème décomposé comme suivant :

#### Définition du domaine décomposé

Soit  $\delta > 0$ , un petit paramètre  $\varepsilon < \delta < 1$ .

On décompose l'intervalle  $I = ]0, 1[$  en les sous intervalles

$$I_\delta^1 = \left] \delta, \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} \right[ , I_\delta^2 = \left] \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}, 1 - \delta \right[ ,$$

$$I_\delta^3 = ]0, \delta[, I_\delta^4 = \left] \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \right[, I_\delta^5 = ]1 - \delta, 1[$$

On pose

$$I_\delta = I_\delta^1 \cup I_\delta^2 \quad \text{et} \quad I'_\delta = I_\delta^3 \cup I_\delta^4 \cup I_\delta^5$$

Pour notre problème ( $P^\varepsilon$ ),  $I_\delta$  représente la partie régulière tandis que  $I'_\delta$  représente la partie singulière (les voisinages des singularités  $0, \frac{1}{2}, 1$ ).

### Définition de l'espace décomposé $H_{dec}$

Désignons par  $P_n(I)$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  sur  $I$ . Alors l'espace décomposé est défini par

$$H_{dec} = \left\{ \varphi : \varphi \in H_0^2(0, 1) \text{ et } \varphi|_{I_\delta^k} \in P_1(\overline{I_\delta^k}), \forall k \in \{1, 2\} \right\}, \quad (3.10)$$

c'est un sous fermé de  $H_0^2(0, 1)$  donc c'est un espace de Hilbert.

### Définition du problème décomposé

On appelle problème décomposé associé au problème ( $P^\varepsilon$ ) 1.30 le problème suivant :

$$(P_{dec}^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{dec}^\varepsilon \in H_{dec} \text{ tel que} \\ B(u_{dec}^\varepsilon, v) = a(u_{dec}^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u_{dec}^\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_{dec} \end{array} \right. . \quad (3.11)$$

**Lemme 3.1** *Pour tout  $f \in H^{-2}(0, 1)$ , le problème décomposé 3.11 admet une solution unique  $u_{dec}^\varepsilon$  dans  $H_{dec}$ .*

Dans la deuxième partie, on justifie que moyennant un bon choix de  $\delta$  ( $\delta = \varepsilon n K_L \varepsilon |\ln \varepsilon|$ ) et on peut estimer  $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon, dec}\|$  en  $O(\varepsilon^L)$  avec la précision  $L$  désirée. Ensuite il est établi des estimations d'erreur pour la méthode numérique envisagée. Enfin nous présentons des résultats numériques.



### 3.2.2 Approximation du problème $(P^\varepsilon)$ par le problème $(P_{dec}^\varepsilon)$

#### Lemme préliminaire

**Lemme 3.2** (i) Pour  $f \in L^2(0,1)$  le problème  $(P^\varepsilon)$  admet une solution unique dans  $H^2(0,1)$ .

(ii) De plus, on a l'estimation suivante

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^2(0,1)} \leq 3\varepsilon^{-2} \|f\|_{L^2(0,1)}$$

**Preuve.** (i) C'est évident par l'application du théorème de Lax-Milgram car  $f \in L^2(0,1) \subset H^{-2}(0,1)$ .

(ii) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au problème  $(P^\varepsilon)$  ( $v = u^\varepsilon$ ) on obtient

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \langle f, u^\varepsilon \rangle \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(0,1)}$$

d'où

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \left\| \frac{du^\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(0,1)}$$

$$b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \left\| \frac{d^2u^\varepsilon}{dx^2} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \varepsilon^{-2} \|f\|_{L^2(0,1)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(0,1)}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs a deux reprises, on obtient :

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \left\| \frac{du^\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \left\| \frac{d^2u^\varepsilon}{dx^2} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \varepsilon^{-2} \|f\|_{L^2(0,1)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(0,1)}$$

Or la norme  $\|u^\varepsilon\|_{H^2(0,1)}$  est définie par

$$\|u^\varepsilon\|_{H^2(0,1)}^2 = \|u^\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2 + \left\| \frac{du^\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2(0,1)}^2 + \left\| \frac{d^2u^\varepsilon}{dx^2} \right\|_{L^2(0,1)}^2$$

d'où l'estimation

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^2(0,1)} \leq 3\varepsilon^{-2} \|f\|_{L^2(0,1)}$$

■

**Remarque 3.3** Cette estimation est valable même si  $u^\varepsilon(1) \neq 0$  et  $\frac{du^\varepsilon}{dx}(1) \neq 0$  car seule  $u^\varepsilon(0) = \frac{du^\varepsilon}{dx}(0) = 0$  est nécessaire pour établir l'inégalité de Poincaré.

### 3.2.3 Notion de développement asymptotique :

Soit une  $(f_l(\varepsilon))_{\substack{l \in Z \\ l \geq l_0}}$  suite d'éléments d'un espace vectoriel normé  $B$  pour chaque  $\varepsilon$  fixé. On considère une série formelle :

$$\sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^l f_l(\varepsilon)$$

On suppose que l'application  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^l f_l(\varepsilon)$  appartient à  $B$ .

**Définition 3.4** La série formelle  $\sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^l f_l(\varepsilon)$  s'appelle un **développement asymptotique** dans  $B$  si et seulement si :

$$\forall K > 0, \exists N \in Z, N \geq l_0, \text{ tels que : } \forall l \geq N, \left\| \varepsilon^l f_l(\varepsilon) \right\|_B = O(\varepsilon^K)$$

**Remarque 3.4** Une série asymptotique n'est pas forcément convergente.

**Définition 3.5** On dit que deux développements asymptotiques sont **équivalents**, et on note  $\sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^l f_l(\varepsilon) \sim \sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^l g_l(\varepsilon)$  si et seulement si :

$$\forall K > 0, \exists N \in Z, N \geq l_0, \text{ tels que : } \left\| \sum_{l=l_0}^N (\varepsilon^l [f_l(\varepsilon) - g_l(\varepsilon)]) \right\|_B = O(\varepsilon^K)$$

### 3.2.4 Justification asymptotique du problème décomposé

Le résultat clef de cette section est le théorème suivant :

**Théorème 3.1** Pour tout  $L \geq 0$ , il existe  $K > 0$  tel que, si  $\delta = K\varepsilon |\ln \varepsilon|$ , alors,

$$\|u^\varepsilon - u_{dec}^\varepsilon\|_{H^2(0,1)} = O(\varepsilon^L)$$

Afin d'établir la preuve de ce théorème, on va construire en premier lieu un développement asymptotique formel  $U_\infty^\varepsilon$  de  $u^\varepsilon$  que l'on modifiera pour obtenir une solution asymptotique de  $u^\varepsilon$  dans  $H_{dec}$ .

**Lemme 3.3** *Un développement asymptotique formel de la solution du problème  $(P^\varepsilon)$  s'écrit :*

$$U_\varepsilon^{(\infty)}(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \left[ u_j(x) + u_j^{cl_0}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + u_j^{cl_{1/2}}\left(\frac{x-1/2}{\varepsilon}\right) + u_j^{cl_1}\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right) \right]$$

$$\begin{cases} -u_0'' = \delta'_{1/2} \\ u_j'' = u_{j-2}''' \end{cases}$$

avec la convention que  $u_j = 0$  si  $j < 0$ .

Les conditions aux bords, et de saut en  $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} u_j(0) = -u'_{j-1}(0) \\ u_j(1) = u'_{j-1}(1) \end{cases}, \begin{cases} [u_0] = -1 & [u'_0] = 0 \\ [u_1] = 0 & [u'_1] = 0 \\ [u_j] = [u''_{j-2}] \\ [u'_j] = [u'''_{j-2}] \text{ pour } j > 0 \end{cases},$$

Les correcteurs pour les couches limites sont donnés par :

$$\begin{cases} u_j^{cl_0}(\xi) = +u'_{j-1}(0)e^{-\xi} \\ u_j^{cl_1}(\xi) = -u'_{j-1}(1)e^{+\xi} \end{cases}, u_j^{cl_{1/2}}(\xi) = \begin{cases} \frac{[u'_{j-1}] + [u_j]}{2} e^\xi & \text{si } \xi < 0 \\ \frac{[u'_{j-1}] + [u_j]}{2} e^{-\xi} & \text{si } \xi > 0 \end{cases}$$

- On note que  $u_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

**Remarque 3.5** - *Sur la largeur des couches limites. L'origine du " $\delta = K\varepsilon |\ln \varepsilon|$ ", que l'on dit être un choix habituel pour la largeur de la couche limite vient du fait que les couches limites sont de type "exponentiellement décroissantes". Par exemple, si on a un terme correcteur de couche limite en 0 qui est de la forme*

$$|u^{cl_0}(x/\varepsilon)| \leq c_1 e^{-c_2 x/\varepsilon} \quad \text{sur } [0, 1]$$

on a alors

$$\|u^{cl_0}\|_{]_{\delta,1[},0] \leq Ce^{-c_2\delta/\varepsilon}$$

Donc, avec  $0 < \varepsilon < 1$  en prenant  $\delta = K\varepsilon |\ln \varepsilon|$  on a  $\|u^{cl_0}\|_{]_{\delta,1[},0] = O(\varepsilon^L)$

### Démonstration du lemme 3.3

#### Construction du développement asymptotique

Corps du développement asymptotique On postule que  $u^\varepsilon$  admet le développement asymptotique (loin des couches limites) suivant :

$$U_\varepsilon^{(\infty)} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l u_j \quad (3.12)$$

On injecte formellement (3.12) dans l'équation  $(u^\varepsilon)'' + \varepsilon^2 (u^\varepsilon)'''' = \delta'_{1/2}$  du problème  $Q^\varepsilon$  (1.32), on obtient :

$$U_\varepsilon^{(\infty)''} + \varepsilon^2 U_\varepsilon^{(\infty)''''} = -u_0'' - \varepsilon u_1'' + \sum_{l=2}^{\infty} \varepsilon^l (u_{j-2}'''' - u_j'') = \delta'_{1/2} \quad (3.13)$$

On force donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_0'' = \delta'_{1/2} \\ u_1'' = 0 \\ u_{j-2}'''' - u_j'' = 0, \quad j \geq 2 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

**Remarque 3.6** On vérifie facilement par récurrence, d'après (3.14), que  $u_{2k+1}'' = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ , i.e. la fonction  $u_{2k+1}$  est affine en  $x$  et grâce aux conditions aux limites on a  $u_{2k+1} = 0$ .

On a donc la chaîne de problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_0'' = \delta'_{1/2} \\ u_{2k}'' = u_{2k-2}''', \quad k \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \quad (3.15)$$

#### Conditions aux bords et couches limites

$u^\varepsilon$  est dans  $H_0^2(0,1)$ , on aimerait que :

$$U_\varepsilon^{(\infty)}(0) = U_\varepsilon^{(\infty)}(1) = U_\varepsilon^{(\infty)'}(0) = U_\varepsilon^{(\infty)'}(1) = 0.$$

On serait alors tenté de forcer les conditions :

$$u_j(0) = u_j(1) = u'_j(0) = u'_j(1) = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Mais cela ne peut pas être fait, car  $u_j$  est déterminé à chaque pas  $j$  par un problème du second ordre (3.15), et dans ce cas, on impose trop de conditions. Il faut donc relier ces dernières entre elles, et forcer les conditions aux bords au moyen de l'ajout de termes négligeables loin des extrémités. De plus, il faut corriger la discontinuité en  $1/2$  qui apparaît du fait de la distribution de Dirac. On ajoute donc trois éléments au développement asymptotique (3.12) :

$$u^{cl_0}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l u_j^{cl_0} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) : \text{terme de couche limite en } 0,$$

$$u^{cl_{1/2}}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l u_j^{cl_{1/2}} \left( \frac{x - 1/2}{\varepsilon} \right) : \text{terme de couche limite en } 1/2,$$

$$u^{cl_1}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l u_j^{cl_1} \left( \frac{x - 1}{\varepsilon} \right) : \text{terme de couche limite en } 1.$$

### 3.2.5 Traitement des couches limites

Pour que les couches limites n'influent pas sur l'équation, on demande que :

$$(-u_{\xi\xi}^{cl_0} + \varepsilon^2 u_{\xi\xi\xi\xi}^{cl_0}) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} = 0$$

$$(-u_{\xi\xi}^{cl_{1/2}} + \varepsilon^2 u_{\xi\xi\xi\xi}^{cl_{1/2}}) \Big|_{\xi=\frac{x-1/2}{\varepsilon}} = 0$$

$$(-u_{\xi\xi}^{cl_1} + \varepsilon^2 u_{\xi\xi\xi\xi}^{cl_1}) \Big|_{\xi=\frac{x-1}{\varepsilon}} = 0$$

où  $u_\xi$  représente la dérivée par rapport à la variable  $\xi$ .

Pour abrégé l'écriture, on note de manière générique  $u^{cl_a}$  ( $a = 0, 1/2, \text{ ou } 1$ ) pour  $u^{cl_0}, u^{cl_{1/2}},$

$u^{cl_1}$ . La solution générale d'un problème du type çï dessus est :

$$u(\xi) = c_1 e^\xi + c_2 e^{-\xi} + \alpha \xi + \beta \quad (3.16)$$

### Couches limites externes

On va d'abord traiter les couches limites externes qui sont localisées en 0 et en 1. Afin que ces couches soient concentrées en "a", on impose dans (3.16) :

$$\text{Pour } cl_0 : c_1 = \alpha = \beta = 0$$

$$\text{Pour } cl_1 : c_2 = \alpha = \beta = 0$$

Ainsi,

$$u_j^{cl_0}(\xi) = u_j^{cl_0}(0) e^{-\xi}, \quad (3.17)$$

$$u_j^{cl_1}(\xi) = u_j^{cl_1}(0) e^\xi \quad (3.18)$$

Les couches limites externes doivent permettre au développement asymptotique de respecter les conditions aux limites. On calcule de manière formelle :

$$U_\varepsilon^{(\infty)(n)}(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \left[ u_j(x)^{(n)} + \left( u_j^{cl_0}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right)^{(n)} + \left( u_j^{cl_{1/2}}\left(\frac{x-1/2}{\varepsilon}\right) \right)^{(n)} + \left( u_j^{cl_1}\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right) \right)^{(n)} \right]$$

où

$\Psi^{(n)}(x)$  désigne la dérivée d'ordre  $n$  de  $\Psi$  par rapport à  $x$ ,

$$u_j^{cl_0^{(n)}}(\xi) = (-1)^n u_j^{cl_0}(0) e^{-\xi} \quad (3.19)$$

et

$$u_j^{cl_1^{(n)}}(\xi) = u_j^{cl_1}(0) e^\xi \quad (3.20)$$

Pour que  $U_\varepsilon^{(\infty)'}(0) \sim 0$ , on impose :

$$\begin{cases} u_0^{cl_0'}(0) = 0 \\ u_j^{cl_0'}(0) = -u'_{j-1}(0), \forall j \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (3.21)$$

Pour que  $U_\varepsilon^{(\infty)'}(1) \sim 0$ , on impose :

$$\begin{cases} u_0^{cl_1'}(0) = 0 \\ u_j^{cl_1'}(0) = -u'_{j-1}(1), \forall j \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (3.22)$$

Ceci est motivé par le fait que  $u_j^{cl_0'}(\frac{1}{\varepsilon}) = O(\varepsilon^K)$ , et que de même,  $u_j^{cl_1'}(-\frac{1}{\varepsilon}) = O(\varepsilon^K), \forall K \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 3.7** *D'après (3.19)-(3.22), il est facile de vérifier que*

$$u_0^{cl_0}(\xi) = u_0^{cl_1}(\xi) = 0$$

Comme on veut aussi que  $U_\varepsilon^{(\infty)}(0) \sim 0$  et  $U_\varepsilon^{(\infty)}(1) \sim 0$ , on impose pour cela :

$$u_j^{cl_0}(0) = -u_j(0), \forall j \in \mathbb{N} \quad (3.23)$$

et

$$u_j^{cl_1}(0) = -u_j(1), \forall j \in \mathbb{N} \quad (3.24)$$

toujours car  $u_j^{cl_0}(\frac{1}{\varepsilon}) = O(\varepsilon^K) \forall K \in \mathbb{N}, u_j^{cl_1}(-\frac{1}{\varepsilon}) = O(\varepsilon^K) \forall K \in \mathbb{N}$

Or d'après (3.17) et (3.18) on :

$$\begin{cases} u_j^{cl_0'}(0) = -u_j^{cl_0}(0) \\ u_j^{cl_1'}(0) = +u_j^{cl_1}(0) \end{cases} \quad (3.25)$$

Enfin en combinant les relations (3.21), (3.22) avec (3.23)-(3.25) on obtient

$$\begin{cases} u_j(0) = -u'_{j-1}(0) \\ u_j(1) = u'_{j-1}(1) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} u_j^{cl_0}(\xi) = +u'_{j-1}(0)e^{-\xi} \\ u_j^{cl_1}(\xi) = -u'_{j-1}(1)e^{+\xi} \end{cases}$$

### Couche limite interne (au voisinage de $x = 1/2$ )

La solution  $u^\varepsilon$  de l'équation vérifie les conditions :

$$[u^\varepsilon] = [u^{\varepsilon'}] = 0, \quad [u^{\varepsilon''}] = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad [u^{\varepsilon'''}] = 0 \quad (3.26)$$

où  $[\varphi]$  désigne le saut de  $\varphi$  en  $1/2$  :  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (\varphi) - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} (\varphi)$ , quand ceci a un sens.

Pour stabiliser la couche limite aux bords, il faut tenir compte de la singularité en  $1/2$ , et respecter la condition

$$-u_{\xi\xi}^{cl_{1/2}} + \varepsilon^2 u_{\xi\xi\xi\xi}^{cl_{1/2}} \big|_{\xi=x-1/2} = 0,$$

on prend donc :

$$\begin{cases} u_j^{cl_{1/2}}(\xi) = c_1^j e^{-\xi} & \text{si } \xi < 0 \\ u_j^{cl_{1/2}}(\xi) = c_2^j e^{+\xi} & \text{si } \xi > 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

On injecte formellement (3.27) dans  $U_\varepsilon^{(\infty)(n)}$  on obtient :

$$\begin{cases} [U_\varepsilon^{(\infty)}] \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j ([u_j] + [u_j^{cl_{1/2}}]) \\ [U_\varepsilon^{(\infty)'}] \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j ([u'_j] + \frac{1}{\varepsilon} [u_j^{cl_{1/2}}]) \\ [U_\varepsilon^{(\infty)''}] \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j ([u''_j] + \frac{1}{\varepsilon^2} [u_j^{cl_{1/2}}]) \\ [U_\varepsilon^{(\infty)'''}] \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j ([u'''_j] + \frac{1}{\varepsilon^3} [u_j^{cl_{1/2}}]) \end{cases}$$



On veut que comme dans (3.26) :

$$\left[ U_\varepsilon^{(\infty)} \right] \sim 0, \left[ U_\varepsilon^{(\infty)'} \right] \sim 0, \left[ U_\varepsilon^{(\infty)''} \right] \sim \frac{1}{\varepsilon^2}, \left[ U_\varepsilon^{(\infty)'''} \right] \sim 0$$

On impose alors :

- $\left[ u_j \right] = - \left[ u_j^{cl_{1/2}} \right]$
- $\left[ u'_{j-1} \right] = - \left[ u_{j\xi}^{cl_{1/2}} \right]$  pour  $j \geq 1$
- $\left[ u''_{j-2} \right] = - \left[ u_{j\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right]$  pour  $j \geq 2$
- $\left[ u'''_{j-3} \right] = - \left[ u_{j\xi\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right]$  pour  $j \geq 3$

Et :

- $\left[ u_{0\xi}^{cl_{1/2}} \right] = 0$
- $\left[ u_{0\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right] = 1$  ,  $\left[ u_{1\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right] = 0$
- $\left[ u_{0\xi\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right] = \left[ u_{1\xi\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right] = \left[ u_{2\xi\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right] = 0$

De plus :

$$\begin{aligned} \left[ u_j^{cl_{1/2}} \right] &= \left[ u_{j\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right] = c_2^j - c_1^j \\ \left[ u_{j\xi}^{cl_{1/2}} \right] &= \left[ u_{j\xi\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right] = -c_2^j - c_1^j \end{aligned}$$

$$\text{Donc :} \left[ u_j \right] = \left[ u''_{j-2} \right] = c_1^j - c_2^j$$

$$\left[ u'_j \right] = \left[ u'''_{j-2} \right] = c_1^j + c_2^j$$

d'où

$$\begin{cases} c_1^j = \frac{\left[ u'_{j-1} \right] + \left[ u_j \right]}{2} \\ c_2^j = \frac{\left[ u'_{j-1} \right] - \left[ u_j \right]}{2} \end{cases}$$

Déterminons maintenant l'initialisation des conditions sur le saut. On a :

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ u_{1\xi\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right] = \left[ u_{1\xi}^{cl_{1/2}} \right] = - \left[ u'_0 \right] \\ 1 &= \left[ u_{0\xi\xi}^{cl_{1/2}} \right] = \left[ u_0^{cl_{1/2}} \right] = - \left[ u_0 \right] \end{aligned}$$

D'où

$$\left[ u_0 \right] = -1 \quad \text{Et} \quad \left[ u'_0 \right] = 0$$

**Remarque 3.8** - On retrouve bien ce que l'on savait, 'a savoir que, puisque :

$$\begin{cases} -u_0'' = \delta'_{1/2} \\ u_0(0) = u_0(1) = 0 \end{cases}$$

On a donc :  $u_0' = 1 - \delta_{1/2}$  et

$$\begin{cases} u_0(x) = x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ u_0(x) = x - 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

De même, pour compléter l'initialisation des conditions de saut, il nous faut déterminer  $[u_1]$

et  $[u_1']$ . On a :

$$0 = \begin{bmatrix} u_{2\xi\xi\xi}^{cl_{1/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{2\xi}^{cl_{1/2}} \end{bmatrix} = -[u_1']$$

$$0 = \begin{bmatrix} u_{1\xi\xi}^{cl_{1/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{cl_{1/2}} \end{bmatrix} = -[u_1]$$

Ainsi :  $[u_1] = 0$

Et,  $[u_1'] = 0$

### 3.2.6 Forme finale du développement asymptotique

Le développement asymptotique a pour forme :

$$U_\varepsilon^{(\infty)}(x) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \left[ u_j(x) + u_j^{cl_0}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + u_j^{cl_{1/2}}\left(\frac{x-1/2}{\varepsilon}\right) + u_j^{cl_1}\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right) \right]$$

où

$$\begin{cases} -u_0'' = \delta'_{1/2} \\ u_j'' = u_{j-2}''' \end{cases}$$

Avec les conditions aux bords :

$$\begin{cases} u_j(0) = -u_{j-1}'(0) \\ u_j(1) = u_{j-1}'(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [u_0] = -1 & [u'_0] = 0 \\ [u_1] = 0 & [u'_1] = 0 \\ [u_j] = [u''_{j-2}] & \text{pour } j \geq 2 \\ [u'_j] = [u'''_{j-2}] & \text{pour } j \geq 2 \end{cases}$$

Avec la convention que  $u_j = 0$  si  $j < 0$ .

Les couches limites sont données par :

$$\begin{cases} u_j^{cl_0}(\xi) = +u'_{j-1}(0)e^{-\xi} \\ u_j^{cl_1}(\xi) = -u'_{j-1}(1)e^{+\xi} \end{cases}$$

$$u_j^{cl_{1/2}}(\xi) = \begin{cases} \frac{[u'_{j-1}] + [u_j]}{2} e^{\xi} & \text{si } \xi < 0 \\ \frac{[u'_{j-1}] - [u_j]}{2} e^{-\xi} & \text{si } \xi > 0 \end{cases}$$

**Justification de l'analyse asymptotique présentée.** On tronque le développement asymptotique

$U_\varepsilon^\infty$  à l'ordre  $N$ . On note  $U_\varepsilon^{(N)}$  cette troncature.

L'équation  $(u^\varepsilon)'' + \varepsilon^2 (u^\varepsilon)'''' = \delta'_{1/2}$  devient

$$-U_\varepsilon^{(N)''} + \varepsilon^2 U_\varepsilon^{(N)''''} = \delta'_{1/2} + \varepsilon^{N+1} u_{N-1}'''' + \varepsilon^{N+2} u_N''''$$

Les quantités  $U_\varepsilon^{(N)}(0), U_\varepsilon^{(N)'}(0),$  et  $U_\varepsilon^{(N)'}(1),$  sont en  $O(\varepsilon^K), \forall K \in \mathbb{N}$

On a également  $[u_\varepsilon^{(N)}] = 0,$  et  $[u_\varepsilon^{(N)'}] = \varepsilon^N [u'_\varepsilon]$

On remarque que

$u_\varepsilon^{(N)} \notin H_0^2([0, 1])$  car les conditions aux limites ne sont pas exactement vérifiées et parce que les termes du développement ne sont pas suffisamment réguliers au voisinage de  $1/2$  on définit un opérateur  $\mathcal{L}$  de la manière suivante:  $\mathcal{L}w = -w'' + \varepsilon w''''$

Afin de justifier le développement asymptotique, on a besoin d'avoir des estimations d'erreur.

On utilise le lemme 3.2.1. On construit donc pour cela  $\tilde{u}_\varepsilon^{(N)}$  telle que

○  $\tilde{u}_\varepsilon^{(N)} - u_\varepsilon^{(N)} \in H_0^2([0, 1]);$

○  $\psi$  définie par  $\psi = \mathcal{L}(\tilde{u}_\varepsilon^{(N)} - u_\varepsilon^{(N)})$  est dans  $L^2(0, 1)$

○  $\|\psi\|_{L^2(0, 1)} = O(\varepsilon^{N+2})$

Ainsi, on sera dans le cadre du lemme 3.2.1 et on obtiendra :

$$\left\| \tilde{u}_\varepsilon^{(N)} - u_\varepsilon^{(N)} \right\|_{H^2(0,1)} \leq c\varepsilon^N$$

On pose

$$\theta = \tilde{u}_\varepsilon^{(N)} - u_\varepsilon^{(N)}$$

On est donc ramené à résoudre l'équation en  $\theta$  :

$$-\varepsilon^2 \theta'''' + \theta'' = \varepsilon^{N+1} u_{N-1}'''' + \varepsilon^{N+2} u_N'''' + \psi$$

En définissant  $\theta$  à un polynôme du premier ordre près (pour que les conditions aux bords soient bien vérifiées), on peut chercher alors à résoudre l'équation

$$-\varepsilon^2 \theta'' + \theta = \varepsilon^{N+1} u_{N-1}'' + \varepsilon^{N+2} u_N'' + \phi \quad \text{ou } \phi \in H^2(0,1) \quad \text{verifie } \phi'' = \psi$$

Ce qui donne,

$$\begin{aligned} \theta(x) &= c_1 \exp(x/\varepsilon) + c_2 \exp(-x/\varepsilon) + c_3 x + c_4 \\ &- \frac{1}{2\varepsilon} \exp(x/\varepsilon) \left( \int_0^x \exp(-t/\varepsilon) \left[ \varepsilon^{N+1} u_{N-1}''(t) + \varepsilon^{N+2} u_N''(t) - \phi(t) \right] dt \right) \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon} \exp(-x/\varepsilon) \left( \int_0^x \exp(t/\varepsilon) \left[ \varepsilon^{N+1} u_{N-1}''(t) + \varepsilon^{N+2} u_N''(t) - \phi(t) \right] dt \right) \\ &= c_1 \exp(x/\varepsilon) + c_2 \exp(-x/\varepsilon) + c_3 x + c_4 \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \sinh(t-x) \left[ \varepsilon^{N+1} u_{N-1}''(t) + \varepsilon^{N+2} u_N''(t) - \phi(t) \right] dt \end{aligned}$$

On note  $H_{1/2}$  la fonction de Heaviside centrée en  $1/2$ . On remarque, en intégrant par parties deux fois et en en déduisant une relation de récurrence les égalités suivantes.

Si  $N$  est pair :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{N+1} \int_0^x \exp(t/\varepsilon) u_N''(t) dt &= \varepsilon \int_0^x \exp(t/\varepsilon) u_0''(t) dt \\ \varepsilon^{N+1} \int_0^x \exp(-t/\varepsilon) u_N''(t) dt &= \varepsilon \int_0^x \exp(-t/\varepsilon) u_0''(t) dt \end{aligned}$$

Si  $N$  est impair :

$$\begin{aligned} \varepsilon^N \int_0^x \exp(t/\varepsilon) u_{N-1}''(t) dt &= \varepsilon \int_0^x \exp(t/\varepsilon) u_0''(t) dt \\ \varepsilon^N \int_0^x \exp(-t/\varepsilon) u_{N-1}''(t) dt &= \varepsilon \int_0^x \exp(-t/\varepsilon) u_0''(t) dt \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^x \exp(t/\varepsilon) u_0''(t) dt &= -\varepsilon \int_0^x \exp(t/\varepsilon) \delta'_{1/2}(t) dt = -\exp\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) (\varepsilon \delta_{1/2} - H_{1/2}) \\ \varepsilon \int_0^x \exp(-t/\varepsilon) u_0''(t) dt &= -\varepsilon \int_0^x \exp(-t/\varepsilon) \delta'_{1/2}(t) dt = -\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\right) (\varepsilon \delta_{1/2} + H_{1/2}) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut prendre  $\theta$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= c_1 \exp(x/\varepsilon) + c_2 \exp(-x/\varepsilon) + c_3 x + c_4 \\ &+ \varepsilon \sinh\left(\frac{x-1/2}{\varepsilon}\right) \delta_{1/2}(x) - \cosh\left(\frac{x-1/2}{\varepsilon}\right) H_{1/2}(x) - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \sinh(t-x) \phi(t) dt \end{aligned}$$

prend  $\psi(x) = \varepsilon^{N+2} x^2 \forall x \in [0, 1]$ , on a donc  $\|\phi\|_{L^2(0,1)} = \|\psi''\|_{L^2(0,1)} = O(\varepsilon^{N+2})$

avec  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , sont définies par  $\theta(0) = \theta'(0) = \theta(1) = \theta'(1) = 0$

### Eléments de démonstration du théorème 3.1

tronque à nouveau le développement asymptotique  $u_\varepsilon^{(\infty)}$  à l'ordre  $N$  que l'on note  $u_\varepsilon^{(N)}$ . On ajoute la fonction  $\theta$  définie dans la démonstration du lemme précédent. On a :

$$\tilde{u}_\varepsilon^{(N)} = u_\varepsilon^{(N)} + \theta$$

Les correcteurs  $u_j^{cl_0}, u_j^{cl_{1/2}}, u_j^{cl_1}$ . des couches limites font que  $u_\varepsilon^{(N)}$  n'appartient pas à  $H_{dec}$  aussi faut-il tous les localiser dans les couches limites en les multipliant par des fonctions de troncature régulière en espace (resp.  $\Phi_0, \Phi_{1/2}, \Phi_1$ ). On pose :

$$u_{j,d}^{cl_0} = u_j^{cl_0} \times \Phi_0$$

$$u_{j,d}^{cl_{1/2}} = u_j^{cl_{1/2}} \times \Phi_{1/2}$$

$$u_{j,d}^{cl_1} = u_j^{cl_1} \times \Phi_1$$

et

$$U_{\varepsilon,dec}^{(\infty)}(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} (\varepsilon^j \left[ u_j(x) + u_{j,d}^{cl_0}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + u_{j,d}^{cl_{1/2}}\left(\frac{x-1/2}{\varepsilon}\right) + u_{j,d}^{cl_1}\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right) \right])$$

Nous déduisons de mme de  $u_\varepsilon^{(N)}$  un développement asymptotique tronqué  $U_{\varepsilon,dec}^{(\infty)}$  dans  $H_{dec}$

. On a donc :

$$\left\| u_{j,d}^{cl_a} - u_j^{cl_a} \right\|_{L^2(0,1)} \leq O\varepsilon^{-\frac{\delta}{2\varepsilon}} \quad a \in \{0, 1/2, 1\}$$

Ainsi, pour tout  $L \in \mathbb{N}$ , il existe  $K \in \mathbb{R}$ , tel que, en choisissant  $\delta = K |\ln(\varepsilon)|$ , on obtienne :  $\left\| u_{j,d}^{cl_a} - u_j^{cl_a} \right\|_{L^2(0,1)} = O(\varepsilon^L)$

$$a \in \{0, 1/2, 1\}$$

On pose alors

$$\tilde{u}_{\varepsilon,dec}^{(N)} = u_{\varepsilon,dec}^{(N)} + \theta \quad \text{pour avoir les estimations d'erreur dans } H_0^2(0,1).$$

On alors :

$$\left\| u - \tilde{u}_{dec}^{(N)} \right\|_{H_0^2(0,1)} \leq \left\| u - \tilde{u}^{(N)} \right\|_{H_0^2(0,1)} + \left\| \tilde{u}^{(N)} - \tilde{u}_{dec}^{(N)} \right\|_{H_0^2(0,1)}$$

or

$$\left\| u - \tilde{u}^{(N)} \right\|_{H_0^2(0,1)} = O(\varepsilon^N),$$

et

$$\tilde{u}^{(N)} - \tilde{u}_{dec}^{(N)} = u^{(N)} - u_{dec}^{(N)} = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \left[ \sum_{a \in \{0, 1/2, 1\}} (u_j - u_{j,d}^{cl_a}) \right]$$

Donc

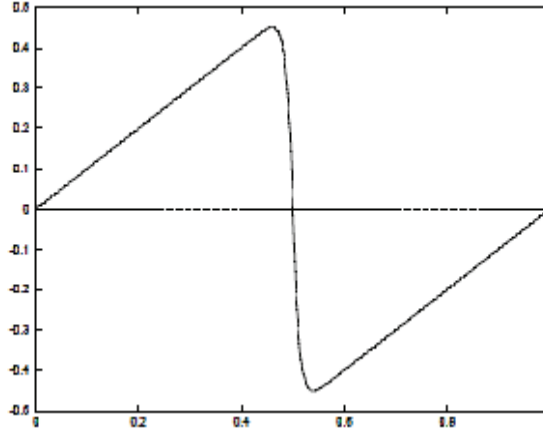


FIG. 3-1 – Terme principal  $u_\varepsilon^{(0)}$  ( $\varepsilon = 0.01$ )

$$\left\| u - \tilde{u}_{dec}^{(N)} \right\|_{H_0^2(0,1)} = O(\varepsilon^N)$$

### Analyse du terme principal

$$u_\varepsilon^{(0)} = u_0(x) + 0 + \begin{cases} \frac{[u_0]}{2} e^{\frac{x-1/2}{\varepsilon}} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ -\frac{[u_0]}{2} e^{-\frac{x-1/2}{\varepsilon}} & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$u_\varepsilon^{(0)} = \begin{cases} x - \frac{1}{2} e^{\frac{x-1/2}{\varepsilon}} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x - 1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{x-1/2}{\varepsilon}} & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{0.01}\right) & \text{if } x < \frac{1}{2} \\ x - 1 + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\frac{1}{2}}{0.01}\right) & \text{if } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le terme tronqué à l'ordre zéro ne tient pas compte des corrections apportées par les couches limites externes, aussi, la pente de la courbe en 0 et en 1 n'est-elle pas nulle. Pour le graphique joint, on a  $\varepsilon = 10^{-2}$ . On présente également le développement au premier ordre

$$u_\varepsilon^{(1)} = u_\varepsilon^{(0)}(x) + \varepsilon \left( u_1(x) + u'_0(0) e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - u'_0(1) e^{-\frac{x-1}{\varepsilon}} \right).$$

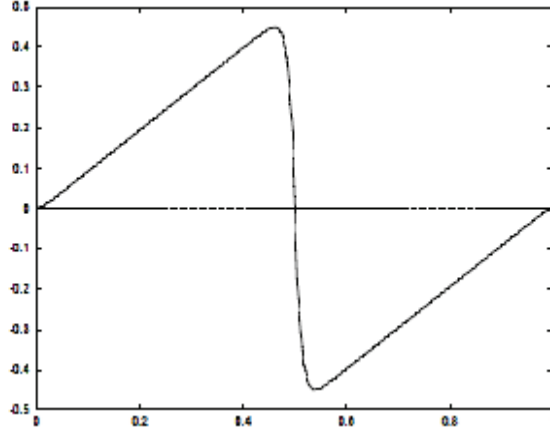


FIG. 3-2 – Terme principal  $u_\varepsilon^{(0)}$  ( $\varepsilon = 0.001$ )

$$+ \begin{cases} \frac{[u'_0] + [u_1]}{2} e^{\frac{x-1/2}{\varepsilon}} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ -\frac{[u'_0] - [u_1]}{2} e^{-\frac{x-1/2}{\varepsilon}} & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

soit :

$$u_\varepsilon^{(1)} = \varepsilon \left( 2x - 1 + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{x-1}{\varepsilon}} \right).$$

$$+ \begin{cases} x - \frac{1}{2} e^{\frac{x-1/2}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{2} e^{\frac{x-1/2}{\varepsilon}} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x - 1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{x-1/2}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-\frac{x-1/2}{\varepsilon}} & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$0.01 \left( 2x - 1 + \exp\left(-\frac{x}{0.01}\right) - \exp\left(-\frac{x-1}{0.01}\right) \right) + \begin{cases} x - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x-0.5}{0.01}\right) + \frac{0.01}{2} \exp\left(\frac{x-0.5}{0.01}\right) & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x - 1 + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-0.5}{0.01}\right) + \frac{0.01}{2} \exp\left(-\frac{x-0.5}{0.01}\right) & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dans cette situation encore, le graphique est donné pour la solution est proche de celui obtenue par éléments finis (cf. figure 3.1). On remarque que les conditions aux bords sont respectées, notamment au sujet de l'annulation des premières dérivées en 0 et en 1, qui ne permet pas l'approximation d'ordre 0.

### 3.2.7 Etude classique

$$\text{Soit le problème } \begin{cases} -u_\varepsilon'' + \varepsilon^2 u_\varepsilon'''' = f \\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

$$H = L^2(0;1), V = H_0^2(0;1), V_a = H_0^1(0;1), V' = H^{-2}(0;1), V'_a = H^{-1}(0;1)$$

### 3.2.8 Formulation variationnelle élémentaire

Cette étape consiste à obtenir une formulation variationnelle sur un élément quelconque  $K$   
On

intègre sur un élément  $K = [x_1^K, x_2^K]$  plutôt que sur le domaine  $\Omega$  au complet ,On a alors  
après intégrations par parties

$$\int_{x_1^k}^{x_2^k} (-u_\varepsilon'' w + \varepsilon^2 u'''' w) dx = (f, w) \quad , \quad \forall w \in H_0^1(0; 1)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{x_1^k}^{x_2^k} (u_\varepsilon' w' + \varepsilon^2 u'' w'') dx &= (f, w) + [(u_\varepsilon' - \varepsilon^2 u''') w]_{x_2^k} + [\varepsilon^2 u_\varepsilon'' w']_{x_2^k} + [(-u_\varepsilon' + \varepsilon^2 u''') w]_{x_1^k} + \\ &+ [-\varepsilon^2 u_\varepsilon'' w']_{x_1^k} \\ \int_{x_1^k}^{x_2^k} (u_\varepsilon' w' + \varepsilon^2 u'' w'') dx &= (f, w) + s_{12}^k w(x_2^k) + s_{11}^k w(x_1^k) + s_{22}^k \frac{dw}{dx}(x_2^k) + s_{21}^k \frac{dw}{dx}(x_1^k) \end{aligned}$$

où on a introduit les variables secondaires :

$$s_{11}^{k,\varepsilon} = [(-u_\varepsilon' + \varepsilon^2 u''') w]_{x_1^k} \quad , \quad s_{12}^{k,\varepsilon} = [(u_\varepsilon' - \varepsilon^2 u''') w]_{x_2^k} \quad , \quad s_{21}^{k,\varepsilon} = [-\varepsilon^2 u_\varepsilon'' w']_{x_1^k} \quad , \quad s_{22}^{k,\varepsilon} = [\varepsilon^2 u_\varepsilon'' w']_{x_2^k}$$

on applique la méthode de Galerkin

$$\text{on pose } u_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^n u_j^k \psi_j^k(x)$$

on obtient

$$\sum_{j=1}^n u_j^k \int_{x_1^k}^{x_2^k} (\psi_j^k w' + \varepsilon^2 \psi_j^k w'') dx = (f, w) + s_{12}^{k,\varepsilon} w(x_2^k) + s_{11}^{k,\varepsilon} w(x_1^k) + s_{22}^{k,\varepsilon} \frac{dw}{dx}(x_2^k) + s_{21}^{k,\varepsilon} \frac{dw}{dx}(x_1^k)$$

et on choisit ensuite successivement  $w(x) = \psi_i^k(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_d^k$

pour obtenir le système élémentaire :

$$A^{k,\varepsilon} U^k = F^k + S^k$$

$$A^{k,\varepsilon} = \left( a_\varepsilon^{k,\varepsilon} \right) \text{ tel que}$$

$$a_{ij}^{k,\varepsilon} = \int_{x_1^k}^{x_2^k} \left( \frac{d\psi_i^k}{dx} \frac{d\psi_j^k}{dx} + \varepsilon^2 \frac{d^2 \psi_i^k}{dx^2} \frac{d^2 \psi_j^k}{dx^2} \right) dx$$

$$f_i^k = (f, \psi_i^k(x))$$

$$s_i^{k,\varepsilon} = s_{12}^{k,\varepsilon} \psi_i^k(x_2^k) + s_{11}^{k,\varepsilon} \psi_i^k(x_1^k) + s_{22}^{k,\varepsilon} \frac{d\psi_i^k}{dx}(x_2^k) + s_{21}^{k,\varepsilon} \frac{d\psi_i^k}{dx}(x_1^k)$$

Passage à l'élément de référence :

Effectuons maintenant le changement de variables

$$\widehat{k} = [0, 1]$$



$$T^k : \widehat{k} \rightarrow k$$

$$[0, 1] \rightarrow [x_1^k, x_2^k]$$

$\xi \mapsto x = h^k \xi + x_1^k$ ,  $h^k$  est le pas de discrétisation

$$\frac{d\psi_j^k}{dx} = \frac{d\widehat{\psi}_j^k}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{h^k} \cdot \frac{d\widehat{\psi}_j^k}{d\xi}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d\psi_j^k}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{h^k} \cdot \frac{d\widehat{\psi}_j^k}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{h^k} \cdot \frac{d\widehat{\psi}_j^k}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \left( \frac{1}{h^k} \right)^2 \frac{d^2 \widehat{\psi}_j^k}{d\xi^2}$$

$$a_{ij}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 \frac{d\widehat{\psi}_i^k}{d\xi} \frac{d\widehat{\psi}_j^k}{d\xi} d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 \frac{d^2 \widehat{\psi}_i^k}{d\xi^2} \frac{d^2 \widehat{\psi}_j^k}{d\xi^2} d\xi$$

$$s_i^{k,\varepsilon} = s_{12}^{k,\varepsilon} \widehat{\psi}_i^k(1) + s_{11}^{k,\varepsilon} \widehat{\psi}_i^k(0) + s_{22}^{k,\varepsilon} \frac{d\widehat{\psi}_i^k}{d\xi}(1) + s_{21}^{k,\varepsilon} \frac{d\widehat{\psi}_i^k}{d\xi}(0)$$

$$f_i^k = \left( \delta'_{\frac{1}{2}}, \psi_i^k(x) \right) = -\widehat{\psi}'_i\left(\frac{1}{2}\right)$$

Construction des fonctions d'interpolation  $\widehat{\psi}_i^k(\xi)$

$$u^K(x) = \sum_{j=1}^{j=4} u_j^K \psi_j^k(x)$$

Les valeurs des inconnues  $u_j^K$  sont définies par :

$$u^K(x_1^k) = \sum_{j=1}^{j=4} u_j^K \psi_j^k(x_1^k) = \sum_{j=1}^{j=4} u_j^K \widehat{\psi}_j^k(0) = u_1^k$$

$$\frac{du^K(x_1^k)}{dx} = \sum_{j=1}^{j=4} u_j^K \frac{d\psi_j^k(x_1^k)}{dx} = \frac{1}{h^k} \sum_{j=1}^{j=4} u_j^K \frac{d\widehat{\psi}_j^k(0)}{d\xi} = u_2^k$$

$$u^K(x_2^k) = \sum_{j=1}^{j=4} u_j^K \psi_j^k(x_2^k) = \sum_{j=1}^{j=4} u_j^K \widehat{\psi}_j^k(1) = u_3^k$$

$$\frac{du^K(x_2^k)}{dx} = \sum_{j=1}^{j=4} u_j^K \frac{d\psi_j^k(x_2^k)}{dx} = \frac{1}{h^k} \sum_{j=1}^{j=4} u_j^K \frac{d\widehat{\psi}_j^k(1)}{d\xi} = u_4^k$$

Les fonctions d'interpolation  $\widehat{\psi}^k(\xi)$  doivent donc vérifier les conditions suivantes :

$$\widehat{\psi}_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad \widehat{\psi}_i(0) = 0 \quad \text{pour } i \neq 1$$

$$\frac{d\widehat{\psi}_2}{d\xi}(0) = \frac{h^k}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d\widehat{\psi}_i}{d\xi}(0) = 0 \quad \text{pour } i \neq 2$$

$$\widehat{\psi}_3(1) = 1 \quad \text{et} \quad \widehat{\psi}_i(1) = 0 \quad \text{pour } i \neq 3$$

$$\frac{d\widehat{\psi}_4}{d\xi}(1) = \frac{h^k}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d\widehat{\psi}_i}{d\xi}(1) = 0 \quad \text{pour } i \neq 4$$

$$\psi_1(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^3$$

$$\psi_2(\xi, h) = h(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$\psi_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$\psi_4(\xi, h) = h(-\xi^2 + \xi^3)$$

$\widehat{\psi}_1(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^3$
$\frac{d(1-3\xi+2\xi^3)}{d\xi} = (6\xi^2 - 3)$
$\frac{d^2(1-3\xi+2\xi^3)}{d\xi^2} = (12\xi)$

$\widehat{\psi}_2(\xi) = h^k(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$
$\frac{d(h^k(\xi-2\xi^2+\xi^3))}{d\xi} = (h^k(3\xi^2 - 4\xi + 1))$
$\frac{d^2(h^k(\xi-2\xi^2+\xi^3))}{d\xi^2} = (h^k(6\xi - 4))$

$\widehat{\psi}_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$
$\frac{d(3\xi^2-2\xi^3)}{d\xi} = 6\xi - 6\xi^2$
$\frac{d^2(3\xi^2-2\xi^3)}{d\xi^2} = 6 - 12\xi$

$\widehat{\psi}_4(\xi) = h^k(-\xi^2 + \xi^3)$
$\frac{d(h^k(-\xi^2+\xi^3))}{d\xi} = (h^k(3\xi^2 - 2\xi))$
$\frac{d^2(h^k(-\xi^2+\xi^3))}{d\xi^2} = (h^k(6\xi - 2))$

Évaluation du système élémentaire :

$$a_{ij}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 \frac{d\widehat{\psi}_i^k}{d\xi} \frac{d\widehat{\psi}_j^k}{d\xi} d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 \frac{d^2\widehat{\psi}_i^k}{d\xi^2} \frac{d^2\widehat{\psi}_j^k}{d\xi^2} d\xi$$

$$A^K = \frac{1}{h^k} C + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} D$$

$$C_{ij} = \int_0^1 \frac{d\widehat{\psi}_i^k}{d\xi} \frac{d\widehat{\psi}_j^k}{d\xi} d\xi \quad D_{ij} = \int_0^1 \frac{d^2\widehat{\psi}_i^k}{d\xi^2} \frac{d^2\widehat{\psi}_j^k}{d\xi^2} d\xi$$

$\frac{21}{5h^k} + 48 \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$	$-\frac{2}{5} \frac{h^k}{h^k} + \frac{21}{5h^k} + 48 \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$	$\frac{6}{5h^k} + 12 \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$	$\frac{3}{5} \frac{h^k}{h^k} + 12h^k \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$
$-\frac{2}{5} \frac{h^k}{h^k} + \frac{21}{5h^k} + 48 \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$	$\frac{2}{15h^k} h^{2k} + 4\varepsilon^2 \frac{h^{2k}}{h^{3k}}$	$-\frac{1}{10} \frac{h^k}{h^k} - 6h^k \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$	$2\varepsilon^2 \frac{h^{2k}}{h^{3k}} - \frac{1}{30h^k} h^{2k}$
$\frac{6}{5h^k} + 12 \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$	$-\frac{1}{10} \frac{h^k}{h^k} - 6h^k \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$	$\frac{6}{5h^k} + 12 \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$	$-\frac{1}{10} \frac{h^k}{h^k} - 6h^k \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$
$\frac{3}{5} \frac{h^k}{h^k} + 12h^k \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$	$2\varepsilon^2 \frac{h^{2k}}{h^{3k}} - \frac{1}{30h^k} h^{2k}$	$-\frac{1}{10} \frac{h^k}{h^k} - 6h^k \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$	$\frac{2}{15h^k} h^{2k} + 4\varepsilon^2 \frac{h^{2k}}{h^{3k}}$

$$\circ a_{11}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 \frac{d\widehat{\psi}_1^k}{d\xi} \frac{d\widehat{\psi}_1^k}{d\xi} d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 \frac{d^2\widehat{\psi}_1^k}{d\xi^2} \frac{d^2\widehat{\psi}_1^k}{d\xi^2} d\xi$$

$$\widehat{\psi}_1^k(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^3 \text{ Solution : } \frac{d\widehat{\psi}_1^k}{d\xi}(\xi) = 6\xi^2 - 3 \text{ Solution : } \frac{d^2\widehat{\psi}_1^k}{d\xi^2}(\xi) = 12\xi$$

$$a_{11}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 (6\xi^2 - 3)^2 d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 (12\xi)^2 d\xi = \frac{21}{5h^k} + 48 \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$$

$$\circ a_{12}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 \frac{d\widehat{\psi}_1^k}{d\xi} \frac{d\widehat{\psi}_2^k}{d\xi} d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 \frac{d^2\widehat{\psi}_1^k}{d\xi^2} \frac{d^2\widehat{\psi}_2^k}{d\xi^2} d\xi$$

$$a_{12}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 (6\xi^2 - 3)(h^k - 4h^k\xi + 3h^k\xi^2) d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 (12\xi)(6h^k\xi - 4h^k) d\xi$$

$$= \frac{1}{h^k} \int_0^1 (6\xi^2 - 3)(h^k - 4h^k\xi + 3h^k\xi^2) d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^{\frac{2}{3}} (12\xi)(6h^k\xi - 4h^k) d\xi$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_{\frac{2}{3}}^1 (12\xi) (6h^k\xi - 4h^k) d\xi \\
& = -\frac{2}{5} \frac{h^k}{h^k} - \frac{64}{9} h^k \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}
\end{aligned}$$

$$\circ a_{13}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 (6\xi^2 - 3) (6\xi - 6\xi^2) d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 (12\xi) (6 - 12\xi) d\xi = -\frac{6}{5h^k} - 12 \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$$

$$\circ a_{14}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 (6\xi^2 - 3) (h^k (3\xi^2 - 2\xi)) d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 (12\xi) (h^k (6\xi - 2)) d\xi = \frac{3}{5} \frac{h^k}{h^k} + 12h^k \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$$

$$\circ a_{12}^{k,\varepsilon} = a_{21}^{k,\varepsilon}$$

$$\circ a_{22}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 ((h^k (3\xi^2 - 2\xi)))^2 d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 (h^k (6\xi - 4))^2 d\xi = \frac{2}{15h^k} h^{2k} + 4\varepsilon^2 \frac{h^{2k}}{h^{3k}}$$

$$\circ a_{23}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 (h^k (3\xi^2 - 2\xi)) (6\xi - 6\xi^2) d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 (h^k (6\xi - 4)) (6 - 12\xi) d\xi = -\frac{1}{10} \frac{h^k}{h^k} - 6h^k \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$$

$$\begin{aligned}
\circ a_{24}^{k,\varepsilon} & = \frac{1}{h^k} \int_0^1 ((h^k (3\xi^2 - 4\xi + 1))) ((h^k (3\xi^2 - 2\xi))) d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 (h^k (6\xi - 4)) ((h^k (6\xi - 2))) d\xi \\
& = 2\varepsilon^2 \frac{h^{2k}}{h^{3k}} - \frac{1}{30h^k} h^{2k}
\end{aligned}$$

$$\circ a_{31}^{k,\varepsilon} = a_{13}^{k,\varepsilon}, a_{32}^{k,\varepsilon} = a_{23}^{k,\varepsilon}, a_{41}^{k,\varepsilon} = a_{14}^{k,\varepsilon}, a_{42}^{k,\varepsilon} = a_{24}^{k,\varepsilon}, a_{43}^{k,\varepsilon} = a_{34}^{k,\varepsilon}$$

$$\circ a_{33}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 (6\xi - 6\xi^2)^2 d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 (6 - 12\xi)^2 d\xi = \frac{6}{5h^k} + 12 \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$$

$$\circ a_{34}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 (6\xi - 6\xi^2) ((h^k (3\xi^2 - 2\xi))) d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 (6 - 12\xi) ((h^k (6\xi - 2))) d\xi = -\frac{1}{10} \frac{h^k}{h^k} - 6h^k \frac{\varepsilon^2}{h^{3k}}$$

$$\circ a_{44}^{k,\varepsilon} = \frac{1}{h^k} \int_0^1 ((h^k (3\xi^2 - 2\xi)))^2 d\xi + \frac{\varepsilon^2}{(h^k)^3} \int_0^1 ((h^k (6\xi - 2)))^2 d\xi = \frac{2}{15h^k} h^{2k} + 4\varepsilon^2 \frac{h^{2k}}{h^{3k}}$$

Le maillage :

Numéros des noeuds de calcul		
Table connec		
Élément	Noeud #1	Noeud #2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
.	.	.
.	.	.
.	.	.
100	100	101

Numérotation		
Table numer		
Noeud	Ddl #1 (u(x))	Ddl #2 ( $\frac{du}{dx}$ )
1	?	?
2	2	3
3	4	5
.	.	.
.	.	.
100	197	198
101	?	?

Numérotation		
Table numer		
Noeud	Ddl #1 (u(x))	Ddl #2 ( $\frac{du}{dx}$ )
1	199	200
2	2	3
3	4	5
.	.	.
.	.	.
100	197	198
101	201	202

Numéros des ddls				
Table adres				
Élément	Ddl #1	Ddl #2	Ddl #3	Ddl #4
1	199	200	1	2
2	1	2	3	4
3	3	4	5	6
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
99	195	196	197	198
100	197	198	201	202

Rappelons que pour un élément K quelconque :

$$\text{adres}(K, 1) = \text{numer}(\text{conec}(K, 1), 1)$$

$$\text{adres}(K, 2) = \text{numer}(\text{conec}(K, 1), 2)$$

$$\text{adres}(K, 3) = \text{numer}(\text{conec}(K, 2), 1)$$

$$\text{adres}(K, 4) = \text{numer}(\text{conec}(K, 2), 2)$$

et ainsi, si on choisit l'élément  $K = K_1$  on trouve :

$$\text{adres}(1, 1) = \text{numer}(\text{conec}(K_1, 1), 1) = 199$$

$$\text{adres}(1, 2) = \text{numer}(\text{conec}(K_1, 1), 2) = 200$$

$$\text{adres}(1, 3) = \text{numer}(\text{conec}(K_1, 2), 1) = 1$$

$$\text{adres}(1, 4) = \text{numer}(\text{conec}(K_1, 2), 2) = 2$$

L'assemblage le cas  $\varepsilon = h = 0.01$  ie  $n = 100$

nous permet d'écrire pour le premier élément :

$$\begin{pmatrix} k_1 & 199 & 200 & 1 & 2 \\ 199 & 5220 & 5219.6 & 1320 & 12.6 \\ 200 & 5219.6 & 4.1333 \times 10^{-2} & -6.1 & 1.9667 \times 10^{-2} \\ 1 & 1320 & -6.1 & 13200 & -6.1 \\ 2 & 12.6 & 1.9667 \times 10^{-2} & -6.1 & 4.1333 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{K_1} \\ u_2^{K_1} \\ u_3^{K_1} \\ u_4^{K_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1.25 \times 10^{-4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1.25 \times 10^{-4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11}^{K_1} \\ s_{21}^{K_1} \\ s_{12}^{K_1} \\ s_{11}^{K_1} \end{pmatrix}$$

tandis que sur le deuxième élément, on a :

$$\begin{pmatrix} k_2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5220 & 5219.6 & 1320 & 12.6 \\ 2 & 5219.6 & 4.1333 \times 10^{-2} & -6.1 & 1.9667 \times 10^{-2} \\ 3 & 1320 & -6.1 & 1320 & -6.1 \\ 4 & 12.6 & 1.9667 \times 10^{-2} & -6.1 & 4.1333 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{K_2} \\ u_2^{K_2} \\ u_3^{K_2} \\ u_4^{K_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1.25 \times 10^{-3} \\ -\frac{1}{2} \\ 1.25 \times 10^{-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11}^{K_2} \\ s_{21}^{K_2} \\ s_{12}^{K_2} \\ s_{22}^{K_2} \end{pmatrix}$$

$K_3 \dots \dots \dots K_{100}$

$$\begin{pmatrix} 52200 & 5220 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1320 & -6.1 \\ 52200 & 4.1333 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.6 & 1.9667 \times 10^{-2} \\ 0 & 0 & 52200 & 5219.6 & 1320 & 12.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5219.6 & 4.1333 \times 10^{-2} & -6.1 & 1.9667 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1320 & -6.1 & 1320 & -6.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12.6 & 1.9667 \times 10^{-2} & -6.1 & 4.1333 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 13200 & 12.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5220 & 5220 \\ -6.1 & 1.9667 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5220 & 4.1333 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

Le vecteur d'adressage du premier élément  $K_1$  est [199, 200, 1, 2]. Cela signifie que les inconnues

élémentaires  $u_i^{K_1}$  correspondent aux degrés de liberté  $u_{199}, u_{200}, u_1$  et  $u_2$  du système global qui

est de dimension 200 sur 200 dans ce cas. Le système élémentaire est donc équivalent à :

Les conditions aux limites

Quatres conditions essentielles sont imposées :  $u_{199} = u_{200} = u_{201} = u_{202} = 0$

Résolution du système linéaire

Le système élémentaire

$$a(h, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{21}{5h} + 48 \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} & -\frac{2}{5} \frac{h}{h} + \frac{21}{5h} + 48 \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} & \frac{6}{5h} + 12 \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} & \frac{3}{5} \frac{h}{h} + 12h \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} \\ -\frac{2}{5} \frac{h}{h} + \frac{21}{5h} + 48 \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} & \frac{2}{15h} (h)^2 + 4\varepsilon^2 \frac{(h)^2}{(h)^3} & -\frac{1}{10} \frac{h}{h} - 6h \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} & 2\varepsilon^2 \frac{(h)^2}{(h)^3} - \frac{1}{30h} (h)^2 \\ \frac{6}{5h} + 12 \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} & -\frac{1}{10} \frac{h}{h} - 6h \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} & \frac{6}{5h} + 12 \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} & -\frac{1}{10} \frac{h}{h} - 6h \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} \\ \frac{3}{5} \frac{h}{h} + 12h \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} & 2\varepsilon^2 \frac{(h)^2}{h^3} - \frac{1}{30h} (h)^2 & -\frac{1}{10} \frac{h}{h} - 6h \frac{\varepsilon^2}{(h)^3} & \frac{2}{15h} h^2 + 4\varepsilon^2 \frac{(h)^2}{(h)^3} \end{pmatrix}$$

$$f_i^k = (f, \widehat{\psi}_i^k(\xi)) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$f_i^k = (\delta_{\frac{1}{2}}, \widehat{\psi}_i^k(\xi)) = -\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

le cas  $\varepsilon = h = 0.001$  ie  $n = 100$

Le système élémentaire

$$a(0.01, 0.01) = : \begin{pmatrix} 5220.0 & 5219.6 & 1320.0 & 12.6 \\ 5219.6 & 4.1333 \times 10^{-2} & -6.1 & 1.9667 \times 10^{-2} \\ 1320.0 & -6.1 & 1320.0 & -6.1 \\ 12.6 & 1.9667 \times 10^{-2} & -6.1 & 4.1333 \times 10^{-2} \end{pmatrix} :$$

$$f_1^k = (\delta_{\frac{1}{2}}, \psi_1'(\xi)) = -\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f_2^k = (\delta_{\frac{1}{2}}, \psi_2'(\xi)) = -\psi_2\left(\frac{1}{2}, 0.01\right) = -0.00125 = -1.25 \times 10^{-3}$$

$$f_3^k = (\delta_{\frac{1}{2}}, \psi_3'(\xi)) = -\psi_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f_4^k = (\delta_{\frac{1}{2}}, \psi_4'(\xi)) = -\psi_4\left(\frac{1}{2}, 0.01\right) = 0.00125 = 1.25 \times 10^{-3}$$

L'assemblage

$k_1$ (Premiere élément)

$$\begin{pmatrix} 101 \\ 102 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 101 & 102 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 52200 & 52200 & 13200 & 12.6 \\ 52200 & 4.1333 \times 10^{-3} & -6.1 & 1.9667 \times 10^{-3} \\ 13200 & -6.1 & 13200 & -6.1 \\ 12.6 & 1.9667 \times 10^{-3} & -6.1 & 4.1333 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1.25 \times 10^{-3} \\ -\frac{1}{2} \\ 1.25 \times 10^{-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \\ s_{41} \end{pmatrix}$$

$$s_1 = \psi_1(1) s_{12} + \psi_1(0) s_{11} + \frac{d\psi_1(1)}{d\xi} s_{22} + \frac{d\psi_1(0)}{d\xi} s_{21} = s_{11}$$

$$s_2 = \psi_2(1, 0.001) s_{12} + \psi_2(0, 0.001) s_{11} + \frac{d\psi_2(1, 0.001)}{d\xi} s_{22} + \frac{d\psi_2(0, 0.001)}{d\xi} s_{21} = 0$$

$$s_3 = \psi_3(1) s_{12} + \psi_3(0) s_{11} + \frac{d\psi_3(1)}{d\xi} s_{22} + \frac{d\psi_3(0)}{d\xi} s_{21} = s_{12}$$

$$s_4 = \psi_4(1, 0.001) s_{12} + \psi_4(0, 0.001) s_{11} + \frac{d\psi_4(1, 0.001)}{d\xi} s_{22} + \frac{d\psi_4(0, 0.001)}{d\xi} s_{21} = 0$$

Les conditions aux limites : pour deteminer les valeurs secondaires puis résoudre le système

linéaire. et écrire la solutions sous la forme : N est le nombres des éléments

$$u(x) = \sum_{h=1}^{h=N} u^{kh}(x) \quad \text{et} \quad u^{kh}(x) = \sum_{j=1}^{j=4} u_j^{kh}(x) \Psi_j^{kh}(x)$$

## Chapitre 4

# Traitement numérique d'un problème de perturbation singulière bidimensionnel

### 4.1 le problème

On considère le problème aux limites

$$(-\Delta + \varepsilon^2 \Delta^2) u^\varepsilon(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \quad \text{sur } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad (4.1)$$

$$u = 0 \quad \text{pour } x_1 = 0, x_1 = 1 \quad (4.2)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) = 0 \quad \text{pour } x_1 = 0, x_2 = 0, x_2 = 1 \quad (4.3)$$

Le problème variationnel associé est

$$(P^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (4.4)$$

avec

$$V = \{v \in H^2(\Omega), \text{ avec } v \text{ vérifiant (4.2), (4.3)}\} \quad (4.5)$$



$$a(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon \nabla v dx_1 dx_2 \quad (4.6)$$

$$b(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega} [\nu (\partial_{ij} u^\varepsilon \partial_{ij} v) + (1 - \nu) (\partial_{ii} u^\varepsilon \partial_{jj} v)] dx_1 dx_2 \quad (4.7)$$

$$\langle f, v \rangle = \langle \frac{\partial \delta(C)}{\partial n}, v \rangle = - \int_C \frac{\partial v}{\partial n} ds \quad (4.8)$$

où  $C$  désigne une courbe régulière de  $\Omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial n}$  la dérivée normale à  $C$  et  $\delta(C)$  la distribution de Dirac à travers la courbe  $C$ . Ce choix de  $f$  représente en physique "un potentiel de double couche" à travers  $C$ .

**Remarque 4.1** *La forme bilinéaire  $b(u^\varepsilon, v)$  (correspond au bilaplacien) contient le paramètre  $\nu$  par analogie avec la théorie classique des plaques, on prend dans toute la suite  $\nu = 1/2$ .*

Si  $\varepsilon = 0$  l'espace de l'énergie correspondant est

$$V_a = \{v \in H^1(\Omega) \text{ avec } v \text{ vérifiant 4.2}\}$$

qui est le complété de l'espace  $V$  pour la norme  $a(v, v)^{1/2}$  et le problème variationnel correspondant est

$$(P^0) \begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V_a \text{ tel que} \\ a(u^0, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_a \end{cases}$$

**Remarque 4.2** *On doit signaler que  $f \in V'$  mais  $f \notin V'_a$  et ceci grâce à (4.8) qui représente l'intégrale de la trace de la dérivée normale à travers  $C$ , qui a un sens dans  $H^2$  et non dans  $H^1$ . Par conséquent le problème  $(P^0)$  est mal posé et ainsi  $(P^\varepsilon)$  est un problème de perturbation singulière sensitif.*

Dans toute la suite on prend le choix de la courbe  $C$

$$C = \left\{ (x_1, x_2) \in \Omega; x_1 = \frac{1}{2} \right\}$$

Ainsi

$$f(x_1, x_2) = \delta' \left( x_1 - \frac{1}{2} \right)$$

## 4.2 Décomposition du domaine $\Omega$ :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_5$$

$$\Omega_1 = ]0, \delta[ \times ]0, 1[$$

$$\Omega_2 = ]\delta, \frac{1-\delta}{2}[ \times ]0, 1[$$

$$\Omega_3 = ]\frac{1-\delta}{2}, \frac{1+\delta}{2}[ \times ]0, 1[$$

$$\Omega_4 = ]\frac{1+\delta}{2}, 1-\delta[ \times ]0, 1[$$

$$\Omega_5 = ]1-\delta, 1[ \times ]0, 1[$$

$$\gamma_1 = \{0\} \times ]0, 1[$$

$$\gamma_2 = \{1\} \times ]0, 1[$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

$$\Gamma_1 = \{\delta\} \times ]0, 1[$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \frac{1-\delta}{2} \right\} \times ]0, 1[$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \frac{1+\delta}{2} \right\} \times ]0, 1[$$

$$\Gamma_4 = \{1-\delta\} \times ]0, 1[$$

soit

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega), v \text{ satisfait } v|_{\gamma} = 0, \varepsilon \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right) = 0 \right\}$$

les deux formes bilinéaires sont continues et coercives sur  $V \times V$

$\langle f, v \rangle$  est une forme linéaire continue sur  $V$

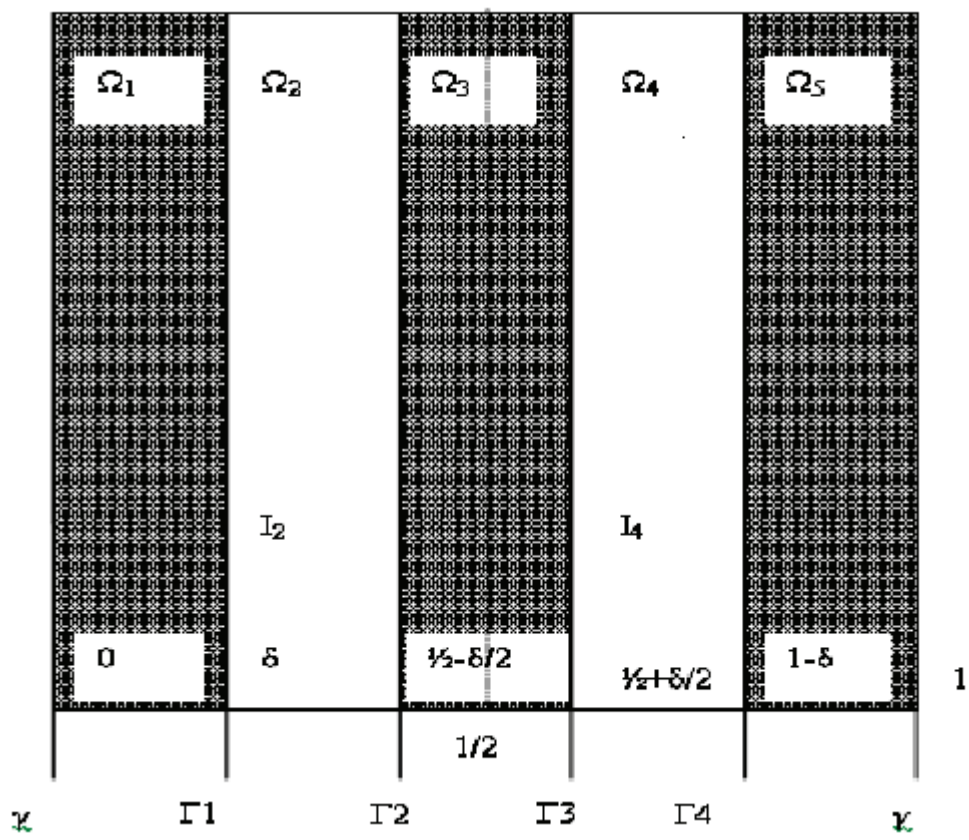
## 4.3 Problème décomposé

Dans cette section nous présentons l'approximation continue du problème hybrid 2D\_1D

### 4.3.1 l'espace décomposé, problème décomposé

On définit comme dans le chapitre précédent

**Définition 4.1** Soit  $\delta > 0$  un paramètre  $\varepsilon < \delta < 1$  on appelle espace décomposé et on note par  $H_{dec}$  de  $V$  l'espace défini par



$$H_{dec} = \{w \in V : w(x_1, x_2) = \tilde{w}(x_1), \tilde{w} \in H^2(I_2 \cup I_4)\} \quad (4.9)$$

**Définition 4.2** On appelle problème décomposé associé au problème (4,1) le problème continu suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{dec}^\varepsilon \in H_{dec} \text{ telque} \\ a(u_{dec}^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u_{dec}^\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_{dec} \end{array} \right.$$

$$a(u_{dec}, v) = \int_{\Omega} \nabla u_{dec} \nabla v dx$$

$$b(u_{dec}, v) = \int_{\Omega} \Delta u_{dec} \Delta v dx$$

$$\langle f, v \rangle = - \int_c \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

**Proposition 4.1** si  $f \in V'$ , le problème décomposé admet une solution unique, (on applique pour cela le théorème de Lax-Milgram) grace au résultat

**Lemme 4.1**  $H_{dec}$  est un espace de Hilbert.

**Proposition 4.2** sous l'hypothèse que  $f(x_1, x_2) = f(x_1)$  pour toute  $(x_1, x_2)$  alors pour tout  $K$ , il existe  $K_1$  telque si  $\delta = K_1 \varepsilon \ln |\varepsilon|$  nous avons  $\|u - u_{dec}\|_{2,\Omega} = O(\varepsilon^k)$

## 4.4 Formulation variationnelle élémentaire

La formulation variationnelle élémentaire s'obtient à partir de l'équation aux dérivées partielles de départ mais en intégrant cette fois sur un élément  $K$ . On obtient ainsi à l'aide de la relation.

$$\int_K (-\Delta + \varepsilon^2 \Delta^2) u(x)v(x)dx = \langle f, v \rangle \quad v \in H^2(\Omega)$$

$$\int_K -\Delta u(x)v(x)dx + \varepsilon^2 \int_K \Delta^2 u(x)v(x)dx = \langle f, v \rangle$$

on a

$$\int_K -\Delta u(x)v(x)dx = \int_K \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial K} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) (\sigma) v(\sigma) d\sigma$$

$$\int_K \Delta^2 u(x)v(x)dx = - \int_K \text{grad}(\Delta u)(x) \cdot \text{grad}(v(x))dx + \int_{\partial K} \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right) (\sigma) v(\sigma) d\sigma$$

et

$$-\int_K \text{grad}(\Delta u)(x) \cdot \text{grad}(v(x)) dx + \int_{\partial K} \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right) (\sigma) v(\sigma) d\sigma = a_K(u, v) - \int_{\partial K} R_K(u, v) d\sigma$$

telle que

$$R_K(u, v) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) (n_x) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) (n_y) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x \right)$$

Si on note  $n_x$  et  $n_y$  les composantes de  $\tau$ , les composantes du vecteur unitaire directement orthogonal à  $n$  sont  $-n_y$  et  $n_x$ . On a les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial n} &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_y \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= -\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x \\ \vec{n} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} & \quad \vec{\tau} \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \end{pmatrix} & \quad \vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0 \quad (i.e. \vec{n} \perp \vec{\tau}) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial n} n_x - \frac{\partial v}{\partial \tau} n_y \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial n} n_y + \frac{\partial v}{\partial \tau} n_x \end{aligned}$$

Dans la définition de  $R_K$ , on remplace  $\frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\frac{\partial v}{\partial y}$  par leur expression en fonction de  $\frac{\partial v}{\partial n}$  et  $\frac{\partial v}{\partial \tau}$  figurant dans la ligne précédente et on obtient le résultat désiré, avec

$$D_1 u = \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} \quad , \quad D_2 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n} \quad , \quad D_3 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$$

$$\begin{aligned} \int_K \Delta^2 u(x) v(x) dx &= a_K(u, v) + \int_{\partial K} \left( (D_1 u) v + (D_2 u) \left( \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) + (D_3 u) \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right) \right) (\tau) d\tau \\ a_k(u, v) &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-y} \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} v \right) + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} v \right) \right) dx \right) dy \\ b_k(u, v) &= \int_k \nabla u \nabla v dx = \int_0^1 \int_0^{1-y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^1 \int_0^{1-y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \right) dy + \varepsilon^2 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{1-y} \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} v \right) + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} v \right) \right) dx \right) dy \right) \\ &= \langle f, v \rangle - \int_{\partial k} \left( (D_1 u) v + (D_2 u) \left( \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) + (D_3 u) \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right) \right) (\tau) d\tau + \int_{\partial k} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) (\sigma) v(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

On a ainsi introduit la variable secondaire :

$$s^K(x) = - \int_{\partial k} \left( (D_1 u) v + (D_2 u) \left( \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) + (D_3 u) \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right) \right) (\tau) d\tau + \int_{\partial k} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) (\sigma) v(\sigma) d\sigma$$

où  $n^K$  est le vecteur normal extérieur à la frontière  $\partial K$  de  $K$ . La variable  $s_K(x)$  est la condition

naturelle de ce problème. On applique la méthode de Ritz sur chaque élément  $K$  en posant :

$$u(x)|_K \simeq u^K(x) = \sum_{j=1}^{n_d^k} u_j^K \psi_j^k(x)$$

Remplaçant dans la formulation variationnelle, on trouve :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_d^k} u_j^K \left( \int_0^1 \int_0^{1-y} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \right) \\ & + \varepsilon^2 \left( \int_0^1 \int_0^{1-y} \left( \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right) dx dy \right) \\ & = \langle f, v \rangle + \int_{\partial k} s^K(x) v(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

Pour obtenir le système élémentaire, on prend successivement  $v(x) = u_i^K(x)$ , pour  $i$  allant de 1 jusqu'à  $n_d^K$

On obtient ainsi le système :

$$A^K U^K = F^K + S^K$$

où :

$$\begin{aligned} a_{ij}^k(\psi_i, \psi_j) &= \int_K \left( \left( \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 \psi_j(x)}{dx^2} \right) + 2 \left( \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx dy} \right) \left( \frac{d^2 \psi_j(x)}{dx dy} \right) + \left( \frac{d^2 \psi_i(x)}{dy^2} \right) \left( \frac{d^2 \psi_j(x)}{dy^2} \right) \right) dx dy \\ f_i^K = \langle f, \psi_i \rangle &= - \int_{\partial k} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} ds, \quad f = \frac{\partial}{\partial n} (\delta(x_1 - c)) \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial n} (\text{Dirac}(x_1 - c)), \psi_i \right\rangle &= - \frac{\partial \psi_i(x_1, y_1)}{\partial n} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} s_i^K &= \int_{\partial k} (D_1 u) \psi_i + (D_2 u) \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau} \right) + (D_3 u) \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right) (\tau) d\tau + \int_{\partial k} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) (\tau) \psi_i d\tau \\ D_1 u &= \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}, \quad D_2 u = - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n}, \quad D_3 u = - \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \end{aligned}$$

#### 4.4.1 Passage à l'élément de référence

C'est ici que le choix de la forme de l'élément et le choix des noeuds géométriques prennent beaucoup d'importance. Tout comme en dimension 1, l'élément de référence  $\widehat{K}$  est un élément sur lequel on effectue tous les calculs nécessaires à l'obtention du système élémentaire. Ceci n'est possible qu'après un changement de variables. Plusieurs choix sont envisageables et certains sont illustrés aux figures à . Il reste à déterminer la transformation. Pour éviter une lourdeur

excessive de la notation, nous choisissons de prendre comme vecteur position  $x = (x, y)$  au lieu de  $(x_1, x_2)$ . De même sur l'élément de référence, on prendra  $\xi = (\xi, \eta)$ . À chaque noeud géométrique  $x_i^K = (x_i^K, y_i^K)$  de l'élément  $K$  doit correspondre un noeud géométrique  $\xi_i = (\xi_i, \eta_i)$  sur l'élément de référence  $\widehat{K}$ . La transformation  $T^K$  vérifie donc :

$$T^K(\xi_i) = x_i^K \quad \text{ou inversement} \quad (T^K)^{-1}(x_i^K) = \xi_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_g^K$$

$$T : \widehat{k} \rightarrow k$$

$$\xi = (\xi, \eta) \mapsto x = (x, y)$$

$$T(\xi, \eta) = (x, y) \iff \begin{cases} x = x_1^k + (x_2^k - x_1^k) \xi + (x_3^k - x_1^k) \eta \\ y = y_1^k + (y_2^k - y_1^k) \xi + (y_3^k - y_1^k) \eta \end{cases}$$

$$\iff T^{-1}(x, y) = (\xi, \eta) \iff \begin{cases} \xi = (1 - \xi - \eta) x_1^k + \xi x_2^k + \eta x_3^k \\ \eta = (1 - \xi - \eta) y_1^k + \xi y_2^k + \eta y_3^k \end{cases}$$

vérifie les propriétés désirées. Il faudra ensuite transformer les dérivées des fonctions d'interpolation. C'est la technique classique de la dérivation en chaîne. Pour ce faire, il est utile d'introduire la matrice jacobienne  $DT^K$  associée et que l'on définit par :

$$DT^K(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1^k + (x_2^k - x_1^k)\xi + (x_3^k - x_1^k)\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial(x_1^k + (x_2^k - x_1^k)\xi + (x_3^k - x_1^k)\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial(y_1^k + (y_2^k - y_1^k)\xi + (y_3^k - y_1^k)\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial(y_1^k + (y_2^k - y_1^k)\xi + (y_3^k - y_1^k)\eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix},$$

inverse :

$$\begin{bmatrix} \frac{y_1^k - y_3^k}{-x_1^k y_2^k + x_2^k y_1^k + x_1^k y_3^k - y_1^k x_3^k - x_2^k y_3^k + x_3^k y_2^k} & \frac{-x_1^k + x_3^k}{-x_1^k y_2^k + x_2^k y_1^k + x_1^k y_3^k - y_1^k x_3^k - x_2^k y_3^k + x_3^k y_2^k} \\ \frac{-y_1^k + y_2^k}{-x_1^k y_2^k + x_2^k y_1^k + x_1^k y_3^k - y_1^k x_3^k - x_2^k y_3^k + x_3^k y_2^k} & \frac{x_1^k - x_2^k}{-x_1^k y_2^k + x_2^k y_1^k + x_1^k y_3^k - y_1^k x_3^k - x_2^k y_3^k + x_3^k y_2^k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^k + x_2^k & -x_1^k + x_3^k \\ -y_1^k + y_2^k & -y_1^k + y_3^k \end{bmatrix}$$

$$-x_1^k y_2^k + x_2^k y_1^k + x_1^k y_3^k - y_1^k x_3^k - x_2^k y_3^k + x_3^k y_2^k$$

Le jacobien  $J^K$  de cette transformation n'est nul que si les points  $x_i^K$  sont colinéaires et donc si le triangle est dégénéré. Notons de plus que :

$$\psi^k(x, y) = \psi^k(T(\xi, \eta)) = \widehat{\psi}^k(\xi, \eta)$$

Pour transformer les dérivées partielles, la dérivation en chaîne nous donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi^k(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi^k(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{\psi}^k(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \widehat{\psi}^k(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\text{ou encore sous forme compacte : } [\nabla_x \psi^k(x, y)] = B^K [\nabla_\xi \widehat{\psi}^k(\xi, \eta)]$$

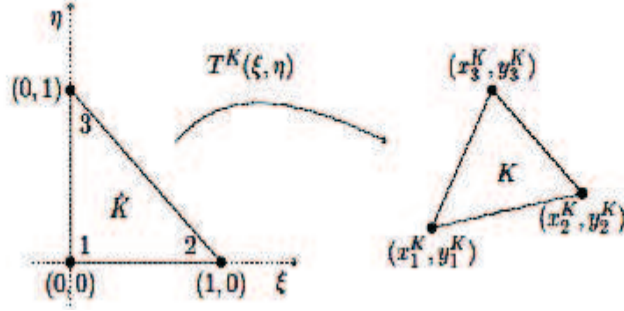


FIG. 4-1 – Transformation linéaire sur un triangle  $n_g^K = 3$

La matrice  $B^K$  est essentielle pour l'évaluation du système élémentaire. On l'obtient en constatant que :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}^k(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}^k(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi^k(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi^k(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\text{qui s'écrit également : } [\nabla_{\xi} \hat{\psi}^k(\xi, \eta)] = (DT^K)^t [\nabla_x \psi^k(x, y)]$$

En combinant les relations et , on conclut que la matrice de passage  $B^K$  n'est autre que  $(DT^K)^{-t}$  c'est-à-dire la transposée de l'inverse de la matrice jacobienne. On a ainsi :

$$[\nabla_x \psi^k(x, y)] = (DT^K)^{-t} [\nabla_{\xi} \hat{\psi}^k(\xi, \eta)]$$

Le système élémentaire devient ensuite :

$$a_{ij}^k(\psi_i, \psi_j) = \int_K \left( \left( \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} \right) ((x)) \left( \frac{d^2 \psi_j(x)}{dx^2} \right) ((x)) + 2 \left( \frac{d^2 \psi_i(x)}{dxdy} \right) ((x)) \left( \frac{d^2 \psi_j(x)}{dxdy} \right) ((x)) + \left( \frac{d^2 \psi_i(x)}{dy^2} \right) ((x)) \left( \frac{d^2 \psi_j(x)}{dy^2} \right) ((x)) \right) dx dy$$

Transformation à domaines référence :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi^2} &= \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} J_{11} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} J_{21} \right) J_{11} + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} J_{11} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} J_{21} \right) J_{21} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} &= \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} J_{12} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} J_{22} \right) J_{11} + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} J_{12} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} J_{22} \right) J_{21} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \eta^2} &= \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} J_{12} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} J_{22} \right) J_{12} + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} J_{12} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} J_{22} \right) J_{22} \end{aligned}$$

où  $J_{ij}$  est l'entrée du  $ij$  de la matrice Jacobi  $J_K$  . Donc les dérivées secondes de  $\psi$

dépende linéairement des dérivées secondes de  $\psi$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \eta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11}^2 & 2J_{11}J_{21} & J_{21}^2 \\ J_{11}J_{12} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} & J_{21}J_{22} \\ J_{12}^2 & 2J_{12}J_{22} & J_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$



Cette matrice est invertible depuis  $\det(A) = \det^3(J_K)$ , et son inverse a la forme

$$\begin{pmatrix} J_{11}^2 & 2J_{11}J_{21} & J_{21}^2 \\ J_{11}J_{12} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} & J_{21}J_{22} \\ J_{12}^2 & 2J_{12}J_{22} & J_{22}^2 \end{pmatrix},$$

inverse :

$$\begin{pmatrix} \frac{J_{22}^2}{-2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{11}^2J_{22}^2 + J_{12}^2J_{21}^2} & -2J_{21} \frac{J_{22}}{-2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{11}^2J_{22}^2 + J_{12}^2J_{21}^2} & \frac{J_{21}^2}{-2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{11}^2J_{22}^2 + J_{12}^2J_{21}^2} \\ -J_{12} \frac{J_{22}}{-2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{11}^2J_{22}^2 + J_{12}^2J_{21}^2} & \frac{J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21}}{-2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{11}^2J_{22}^2 + J_{12}^2J_{21}^2} & -J_{11} \frac{J_{21}}{-2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{11}^2J_{22}^2 + J_{12}^2J_{21}^2} \\ \frac{J_{12}^2}{-2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{11}^2J_{22}^2 + J_{12}^2J_{21}^2} & -2J_{11} \frac{J_{12}}{-2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{11}^2J_{22}^2 + J_{12}^2J_{21}^2} & \frac{J_{11}^2}{-2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{11}^2J_{22}^2 + J_{12}^2J_{21}^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{11}^2J_{22}^2 + J_{12}^2J_{21}^2)} \begin{pmatrix} J_{22}^2 & -2J_{21}J_{22} & J_{21}^2 \\ -J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} & -J_{11}J_{21} \\ J_{12}^2 & -2J_{11}J_{12} & J_{11}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21})^2} \begin{pmatrix} J_{22}^2 & -2J_{21}J_{22} & J_{21}^2 \\ -J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} & -J_{11}J_{21} \\ J_{12}^2 & -2J_{11}J_{12} & J_{11}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix},$$

$$\text{determinant} := J_{11}^2J_{22}^2 - 2J_{11}J_{12}J_{21}J_{22} + J_{12}^2J_{21}^2$$

D'où, il tient pour les deuxièmes dérivations partielles de  $\psi$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \eta^2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21})^2} \begin{pmatrix} J_{22}^2 & -2J_{21}J_{22} & J_{21}^2 \\ -J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} & -J_{11}J_{21} \\ J_{12}^2 & -2J_{11}J_{12} & J_{11}^2 \end{pmatrix}$$

Cela nous permet de remplacer les deuxièmes dérivations partielles de  $\psi$  dans ( ) avec termes contenant les deuxièmes dérivations partielles de  $\tilde{\psi}$ , et les entrées de la matrice Jacobien  $J_K$  comme nous voulions. Une multiplication supplémentaire avec  $\det(J_K)$  a dicté par le Théorème de la Substitution accomplit la transformation des intégrales au domaine de la référence  $\hat{k}$ .

$$\begin{pmatrix} J_{11}^2 & 2J_{11}J_{21} & J_{21}^2 \\ J_{11}J_{12} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} & J_{21}J_{22} \\ J_{12}^2 & 2J_{12}J_{22} & J_{22}^2 \end{pmatrix},$$

determinant :  $J_{11}^3 J_{22}^3 - J_{12}^3 J_{21}^3 + 3J_{11}J_{12}^2 J_{21}^2 J_{22} - 3J_{11}^2 J_{12}J_{21}J_{22}^2$

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix},$$

determinant :  $(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21})^3 = J_{11}^3 J_{22}^3 - J_{12}^3 J_{21}^3 + 3J_{11}J_{12}^2 J_{21}^2 J_{22} - 3J_{11}^2 J_{12}J_{21}J_{22}^2$

#### 4.4.2 fonctions du bases

$$l_1(g) = g(0, 0)$$

$$l_2(g) = g(0, 1)$$

$$l_3(g) = g(1, 0)$$

$$l_4(g) = g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$l_5(g) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} g(0, 0)$$

$$l_6(g) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} g(0, 1)$$

$$l_7(g) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} g(1, 0)$$

$$l_8(g) = \frac{\partial}{\partial \xi_2} g(0, 0)$$

$$l_9(g) = \frac{\partial}{\partial \xi_2} g(0, 1)$$

$$l_{10}(g) = \frac{\partial}{\partial \xi_2} g(1, 0)$$

avec

$$g \in \{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1^2, \xi_1\xi_2, \xi_2^2, \xi_1^3, \xi_1^2\xi_2, \xi_1\xi_2^2, \xi_2^3\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*inverse :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & -15 & -1 & 27 & -7 & -1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 15 & -5 & -27 & 11 & 1 & 2 & -2 & -6 & 2 \\ 11 & 15 & 1 & -27 & 6 & 2 & 0 & -1 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1^2, \xi_1\xi_2, \xi_2^2, \xi_1^3, \xi_1^2\xi_2, \xi_1\xi_2^2, \xi_2^3\}$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-11 & -15 & -1 & 27 & -7 & -1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
17 & 15 & -5 & -27 & 11 & 1 & 2 & -2 & -6 & 2 \\
11 & 15 & 1 & -27 & 6 & 2 & 0 & -1 & -6 & 1 \\
-2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 \\
\xi_1 \\
\xi_2 \\
\xi_1^2 \\
\xi_1\xi_2 \\
\xi_2^2 \\
\xi_1^3 \\
\xi_1^2\xi_2 \\
\xi_1\xi_2^2 \\
\xi_2^3
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 \\
\xi_1\xi_2 \\
\xi_1^2\xi_2 \\
3\xi_2 - 2\xi_1\xi_2 - \xi_1^3 - 3 \\
-15\xi_1 - \xi_2 - 7\xi_1\xi_2 + 27\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_2^3 + 6\xi_1\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_2 - 11 \\
-\xi_1 + \xi_1\xi_2^2 + 1 \\
-2\xi_2 + \xi_1\xi_2 + \xi_1^3 + 2 \\
15\xi_1 - 5\xi_2 + 11\xi_1\xi_2 - 27\xi_1^2 + 2\xi_1^3 + \xi_2^2 + 2\xi_2^3 - 6\xi_1\xi_2^2 - 2\xi_1^2\xi_2 + 17 \\
15\xi_1 + \xi_2 + 6\xi_1\xi_2 - 27\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + \xi_2^3 - 6\xi_1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2 + 11 \\
2\xi_1 - \xi_1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2 - 2
\end{pmatrix}$$

## 4.5 Fonctions de "super-éléments"

Décrivons naïvement comment s'y prendre pour résoudre numériquement le problème décomposé. Une analyse plus précise et plus rigoureuse sera faite dans les sections suivantes.

On pratique une triangulation standard du domaine 2D,  $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5$ , par exemple au moyen d'un maillage structuré (c\_a\_d), et on maille également les deux segments  $I_2, I_4$ .

On munit  $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, I_2, I_4$  d'un ensemble de fonctions de base affines par morceaux (fonctions chapeaux), définies pour chaque noeud, valant 1 au noeud considéré, et 0 aux autres.

On construit ces fonctions de bases de telle manière que les noeuds situés sur les droites

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ . ne possèdent pas de fonction de base associée. Formellement, c'est comme si cet ensemble de fonctions de base était formé de l'union de deux ensembles indépendants de fonctions chapeaux standard définies sur la partie 2D et sur la partie 1D avec une condition de Dirichlet sur  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ .

On considère l'union des fonctions sur  $(\Omega_1, I_2), (I_2, \Omega_3), (\Omega_3, I_4), (I_4, \Omega_5)$  .ainsi définies et on ajoute des fonction spéciales pour traiter la liaison entre chaque deux domaines : une fonction de "super-élément". Elle est définie sur

$(\Omega_1, I_2)$ , elle vaut 1 sur  $\Gamma_1$  et vaut 0 sur tous les autres noeuds.

$(I_2, \Omega_3)$ , elle vaut 1 sur  $\Gamma_2$  et vaut 0 sur tous les autres noeuds.

$(\Omega_3, I_4)$ , elle vaut 1 sur  $\Gamma_3$  et vaut 0 sur tous les autres noeuds.

$(I_4, \Omega_5)$ , elle vaut 1 sur  $\Gamma_4$  et vaut 0 sur tous les autres noeuds.

FIG. – Support de la fonction de "super-élément"

Dans la partie suivante, nous allons expliquer comment on arrive à ces fonctions de "super-éléments" en éliminant des degrés de liberté à partir d'un projecteur sur un domaine 2D.

## 4.6 Revisitation du projecteur

On considère le domaine bidimensionnel  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{i=5} \Omega_i$  , On considère une triangulation  $\tau_h^i$  de  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) On pose  $\tau_h = \bigcup_{i=1}^{i=5} \tau_h^i$  . On demande que l'hypothèse suivante soit vérifiée :

$(H_1)$   $\tau_h$  est une triangulation de  $\bar{\Omega}$  En

particulier, les noeuds de  $\tau_h^1$  situés sur  $\Gamma_1$  doivent correspondre aux noeuds de  $\tau_h^2$  situés sur  $\Gamma_1$

et les noeuds de  $\tau_h^2$  situés sur  $\Gamma_2$  doivent correspondre aux noeuds de  $\tau_h^3$  situés sur  $\Gamma_2$

et les noeuds de  $\tau_h^3$  situés sur  $\Gamma_3$  doivent correspondre aux noeuds de  $\tau_h^4$  situés sur  $\Gamma_3$

et les noeuds de  $\tau_h^4$  situés sur  $\Gamma_4$  doivent correspondre aux noeuds de  $\tau_h^5$  situés sur  $\Gamma_4$

## 4.7 Indexation des noeuds

L'indexation des noeuds se fait habituellement sur un sous-ensemble de cardinal fini de l'ensemble des entiers. Afin de faciliter l'exposé, on va indexer à la place les noeuds de la triangulation  $\tau_h$  sur une partie finie d'un ensemble réel au moyen de leurs coordonnées spatiales. Cette notation nous permet de ne pas différencier les notations pour  $x < \delta$  ( $\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}$  et  $x > 1 - \delta$ ) (qui

va correspondre ‘a un maillage libre) et pour  $\delta \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}$  et  $\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \leq x \leq 1 - \delta$  (qui va correspondre à un maillage contraint).

Le fait de pouvoir regrouper les degrés de liberté situés sur des lignes verticales en vue de leur élimination est facilité par cette notation qui permet d’avoir un indice qui reste invariant sur une ligne verticale, tout en gardant la possibilité d’organiser le maillage à gauche de  $\Gamma_1$  et à droite de  $\Gamma_2$  et gauche de  $\Gamma_3$  et à droite de  $\Gamma_4$ . comme on l’entend. Plus précisément, on note  $E \times F$  l’ensemble o’u vivent les indices des noeuds c’est un sousensemble de cardinal fini de  $\Omega$  .

On note donc par  $(b_{xy})_{(x;y) \in E \times F}$  les noeuds de  $\tau_h$ . Les coordonnées d’un noeud  $b_{xy}$  sont  $(x; y)$

A titre d’exemple, les points  $b_{\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}, y}$  correspondent aux points de la triangulation situés sur la droite  $\Gamma_2$ .

## 4.8 Hypothèses sur la triangulation

On fait les hypothèses supplémentaires suivantes sur  $\tau_h^1$  et  $\tau_h^2$  :

$(H_2^2)$  Il existe un entier  $n_1$  un ensemble de réels  $\delta = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n_1} = \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}$  et une famille finie de droites verticales  $\Delta_i = (\{x = \xi_i\})$  tels que, si  $(x; y) \in E \times F$  et  $\delta \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}$  alors il existe  $i_0, 1 \leq i_0 \leq n_1$  tel que  $(b_{xy}) \in (\Delta_{i_0})$ .

Il existe un entier  $m$  et  $n_2$  un ensemble de réels  $\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} = \xi_{m+1} < \xi_{m+2} < \dots < \xi_{m+n_2} = 1 - \delta$  et une famille finie de droites verticales  $\Delta_i = (\{x = \xi_i\})$  tels que, si  $(x; y) \in E \times F$  et  $\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \leq x \leq 1 - \delta$  alors il existe  $i_1, m \leq i_1 \leq m + n_2$  tel que  $(b_{xy}) \in (\Delta_{i_1})$ .

$(H_2^1)$  Il existe quatres réels  $\xi_0, \xi_{n_1+1}, \xi_{m-1}, \xi_{m+n_2+1}, 0 < \xi_0 < \delta, \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} < \xi_{n_1+1} < \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} < \xi_{m-1} < \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}, 1 - \delta < \xi_{m+n_2+1} < 1$

et les droite  $\Delta_o = \{x = \xi_0\}, \Delta_{n_1+1} = \{x = \xi_{n_1+1}\}, \Delta_{m-1} = \{x = \xi_{m-1}\}, \Delta_{m+n_2+1} = \{x = \xi_{m+n_2+1}\}$  tels que si  $(x; y) \in E \times F$  et  $x \in ]\xi_0, \delta[$  ou  $x \in ]\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}, \xi_{n_1+1}[$  ou  $x \in ]\xi_{m-1}, \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}[$  ou  $x \in ]1 - \delta, \xi_{m+n_2+1}[$

alors  $b_{xy} \in \Delta_o \cup \Delta_{n_1+1} \cup \Delta_{m-1} \cup \Delta_{m+n_2+1}$

**Remarque 4.3** On sépare ces hypothèses, car l’hypothèse  $(H_2^1)$  sur  $\tau_h^1$  est liée au support que l’on désire avoir pour la fonction  $W_{SE}$  . On aurait la possibilité de faire la même analyse sans l’hypothèse  $(H_2^1)$ , auquel cas on ne ferait que modifier le support de  $W_{SE}$

## 4.9 Éléments finis

Rappelons que  $H$  dec défini en 4.3 peut se réécrire sous la forme suivante :

$$H_{dec} = \{w \in V : \partial w /_{\Omega_2 \cup \Omega_4} = 0\} \quad (4.10)$$

Pour construire une approximation de la solution du problème décomposé sur le domaine  $\Omega$ , on va choisir un sous-espace de constitué de fonctions continues par morceaux.

**Définition 4.3 ( locale)** *Définition locale Plus précisément, on définit l'élément fini d hérnite de référence  $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$  comme étant un triangle de hermite(ou Zienkiewicz) (voir par exemple [28] ou [27] ) :*

$$\begin{aligned} (i) \quad \widehat{k} &= \{\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \widehat{a}_3\} \\ (ii) \quad \sum_{\widehat{k}} &= \left\{ \widehat{v}(\widehat{a}_i), \frac{\partial}{\partial x_1} \widehat{v}(\widehat{a}_i), \frac{\partial}{\partial x_2} \widehat{v}(\widehat{a}_i) / i = 1, 2, 3 \right\} \\ (iii) \quad P_{\widehat{k}} &= P_3(\widehat{k}) \end{aligned}$$

Ici, comme dans toute la suite, représente l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $k$  sur  $K$ .

Les fonctions de base locales sont définies par :

$$\begin{cases} P_{i\widehat{k}} \in & 1 \leq i \leq n \\ P_{i\widehat{k}}(\widehat{a}_j) = \delta_{ij} & 1 \leq i, j \leq \end{cases}$$

$$\delta_{ij} \text{ représente le symbole de Kronecker : } \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Le projecteur local  $\Pi_{\widehat{k}}$  est défini par :

$$\Pi_{\widehat{k}} \widehat{v} = \sum_{i=1}^{i=n} \widehat{v}(\widehat{a}_i) P_{i\widehat{k}}$$

**Définition 4.4 (globale)** *On associe à l'élément de référence  $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ , une famille affine équivalente d'éléments finis  $(K, \Sigma, P)$*

On note  $W_{xy}$  la fonction de base associée au degré de liberté du noeud

$$\phi_{xy} : v \longrightarrow v(b_{xy})$$

**Définition 4.5** Rappelons que si  $x \in E$  et  $x > \xi$  on peut associer au noeud  $b_{xy}$  l'entier  $i$  ;  
 $0 < i < n_1$  tel que  $x_1 = \xi_i$

soit  $i$  telque  $0 < i < n_1$  on pose  $\psi_i : [\xi_{i-1}, \xi_i] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\psi_i(x_1, x_2) = \sum_{y \in F} w_{\xi_i, y}$   
si  $x \in E$  et  $x > m$  on peut associer au noeud  $b_{xy}$  l'entier  $i$  ;  
 $m < i < m + n_2$  tel que  $x_1 = \xi_i$

soit  $i$  telque  $0 < i < n_1$  on pose  $\psi_i : [\xi_{i-1}, \xi_i] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\psi_i(x_1, x_2) = \sum_{y \in F} w_{\xi_i, y}$   
 $x_1 = \xi_{n_1}$   
 $x_1 = \xi_{m+n_2}$

**Proposition 4.3** Les degrés de liberté verticaux sont éliminés pour  $\delta \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \leq x \leq 1 - \delta$  et au moyen des fonctions  $\psi_i, 0 < i < n_1; m < i < m + n_2$

Ces fonctions sont indépendantes de  $x_2$  et on note

Le projecteur global  $\pi_h$  est défini par :

$$\pi_h v(x_1, x_2) = \sum_{(x \in E) \cap \{\delta \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}\}} \sum_{y \in F} v(b_{xy}) w_{xy}(x_1, x_2) + \sum_{\{0 < i < n_1\} \cup \{m < i < m + n_2\}} v(b_{\xi_i, 0}) w_x(x_1)$$

$\forall (x_1, x_2) \in \Omega$

pour  $i = 1$  on a  $x = \delta$  et  $\psi_1 = W_{SE}$

pour  $i = 1$  on a  $x = \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}$  et  $\psi_{n_1} = W_{SE}$

pour  $i = 1$  on a  $x = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}$  et  $\psi_m = W_{SE}$

pour  $i = 1$  on a  $x = 1 - \delta$  et  $\psi_{m+n_2} = W_{SE}$

## 4.10 Espace d'approximation

Dans cette section, après avoir défini le projecteur  $\pi_h$ , on explicite l'espace dans lequel on approche le problème décomposé

On considère une triangulation  $\tau_h^1$  de  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_3 \cup \bar{\Omega}_5$  qui vérifie l'hypothèse  $(H_2^1)$ , et une triangulation  $\tau_h^2 = \bigcup_{\{0 < i < n_1\} \cup \{m < i < m + n_2\}} [\xi_i, \xi_{i+1}]$  de  $\bar{T}_2 \cup \bar{T}_4$

l'espace d'approximation est défini par :



$$H_{dec}^h = \{\pi_h v : v \in H_{dec} \cap C^1(\Omega)\}$$

#### Définition 4.6

Le problème discret associé au problème décomposé est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{dec}^h \text{ telle que} \\ a(u_{dec}^h, v_h) + \varepsilon^2 b(u_{dec}^h, v) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v \in H_{dec}^h \end{cases}$$

### 4.11 Estimation d'erreur a priori

Dans cette section on utilisera les notations et les hypothèses développées dans les sections précédentes. En particulier celles sur la triangulation  $(\tau_h)$ .

Afin d'obtenir une estimation d'erreur locale et globale, on se donne une famille de triangulation  $(\tau_h)$  qui vérifie toutes les hypothèses précédentes. On fait les hypothèses supplémentaires sur ces triangulations  $\tau_h$  (voir par exemple à ce sujet Ciarlet[28]) :

(H<sub>3</sub>) La famille de triangulations  $(\tau_h)$  est une famille de triangulations régulière de  $\bar{\Omega}$  (voir définition 4.13).[28]

**Remarque 4.4** *Il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèses de ce genre sur , de même qu'il n'était pas nécessaire d'avoir cette hypothèse pour faire des estimations d'erreur dans le chapitre 3 où le domaine considéré était monodimensionnel, une triangulation d'un domaine monodimensionnel étant toujours régulière.*

**Théorème 4.1** *Soit  $\tau_h^1$  (resp  $\tau_h^2$ ) une triangulation de  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_3 \cup \bar{\Omega}_5$  (resp  $\bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_4$ ) comme décrite auparavant. Soit  $m, p$  deux entiers positifs ou nuls, suffisamment régulière de telle manière que*

la solution du problème variationnel :

$$a(u_{dec}, v) + \varepsilon^2 b(u_{dec}, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_{dec}$$

vérifie :  $u_{dec} \in (H^{p+1}(\Omega_1) \cup H^{p+1}(\Omega_2)) \cap H^2(\Omega)$

Alors, il existe une constante  $c$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|u_{dec} - u_{dec}^h\|_{m;\Omega} \leq c \left( \max_{k \in \tau_h^1 \cup \tau_h^3 \cup \tau_h^5} (k)^{p+1-m} |u_{dec}|_{p+1, \Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_5} + (\max h_l)^{p+1-m} |u_{dec}|_{p+1, \Omega_2 \cup \Omega_4} \right)$$

$$h_i = \xi_i - \xi_{i+1} \quad 0 < i < n_1; \quad m < i < m + n_2$$

et  $u_{dec}^h \in H_{dec}^h$  est la solution du problème discret définie en

**Preuve.** soit  $k \in \tau_h$ , et soit  $u \in H^{p+1}(k) \cap H_{dec}(\Omega)$  . ■

si  $k \in \tau_h^1 \cup \tau_h^3 \cup \tau_h^5$  alors on peut utiliser les inégalités d'interpolation locales classiques. Par exemple, d'après Ciarlet[28] théorème 3.1.6 p.124, il existe une constante  $c$  telle que :

$$\|u - \pi_h u\|_{m;k} \leq c_1 (\text{diam}(k))^{p+1-m} |u|_{p+1,k}$$

si  $k \notin \tau_h^1 \cup \tau_h^3 \cup \tau_h^5$  alors  $k \in \tau_h^2 \cup \tau_h^4$

$$\sum_{k \in \tau_h^2 \cup \tau_h^4} \|u - \pi_h u\|_{m;k}^2 = \sum_{\substack{0 < i < n_1 - 1 \\ m < i < m + n_2}} \|u - \pi_h u\|_{m;[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [0,1]}^2$$

pour  $(x_1, x_2) \in \Omega_2 \cup \Omega_4$  on à

$$u(x_1, x_2) = \tilde{u}(x_1) \quad \text{et} \quad \pi_h u|_{\Omega_2 \cup \Omega_4}(x_1, x_2) = \sum_{0 < i < n_1} u(b_{\xi_i}, 0) \tilde{\psi}_i(x_1) + \sum_{m < i < m + n_2} u(b_{\xi_i}, 0) \tilde{\psi}_i(x_1)$$

On pose donc :

$$\pi_h u(x_1) = \sum_{\substack{0 < i < n_1 \\ m < i < m + n_2}} \tilde{u}(x_1) \tilde{\psi}_i(x_1)$$

C'est le projecteur global sur  $I_2 \cup I_4$  associé à la famille affine d'éléments finis :

$$\hat{k} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2\}, \quad \sum_{\hat{k}} = \left\{ \hat{v}(\hat{a}_i), \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{v}(\hat{a}_i), \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{v}(\hat{a}_i) / i = 1, 2 \right\} \quad P_{i\hat{k}} = P_3(\hat{k})$$

Le maillage sur  $I_2 \cup I_4$  considéré étant formé par l'ensemble des segment  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$

$0 < i < n_1$  ou  $m < i < m + n_2$ ,  $u$  étant assez régulière,  $\tilde{u}$  l'est de même

On a donc une inégalité d'interpolation 1D il existe une constante  $c_2$  telle que :

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{\pi}_h \tilde{u}\|_{m;[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [0,1]}^2 &= \int_0^1 \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \sum_{k=0}^{k=m} \frac{d^k}{dx_1^k} (u - \tilde{\pi}_h u)^2 dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^1 \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \sum_{k=0}^{k=m} \frac{d^k}{dx_1^k} (\tilde{u} - \tilde{\pi}_h u)^2 dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|u - \pi_h u\|_{m;[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [0,1]}^2 &\leq (c_2 (h_i)^{p+1-m} |\tilde{u}|_{p+1, [\xi_i, \xi_{i+1}]})^2 \\ &= (c_2 (h_i)^{p+1-m} |u|_{p+1, [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [0,1]})^2 \end{aligned}$$

Ainsi il existe une constante  $c_3$  telle que :

$$\begin{aligned} \|u - \pi_h u\|_{m;\Omega} &= \left( \sum_{k \in \tau_h^1 \cup \tau_h^3 \cup \tau_h^5} \|u - \pi_h u\|_{m;k}^2 + \sum_{k \in \tau_h^2 \cup \tau_h^4} \|u - \pi_h u\|_{m;k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_3 \left( \max_{k \in \tau_h^1 \cup \tau_h^3 \cup \tau_h^5} (\text{diam}(k))^{p+1-m} |u|_{p+1,\Omega_1} + (\max h_i)^{p+1-m} |u|_{p+1,\Omega_2} \right) \end{aligned}$$

On conclut à l'estimation d'erreur grâce au lemme de Céa (voir par exemple Ciarlet[28] p.104) en prenant  $u = u_{dec}^h$  il existe une constante  $c_4$  telle que :

$$\begin{aligned} \|u_{dec} - u_{dec}^h\|_{m;\Omega} &\leq c_4 \left( \inf_{v_h \in u_{dec}^h} \|u_{dec} - v_h\|_{m;\Omega} \right) \\ &\leq c_4 \|u_{dec} - \pi_h u_{dec}\|_{m;\Omega} \end{aligned}$$

D'où l'estimation d'erreur voulue.

## Annexe 1

### La condition de Shapiro-Lopatinskiï

La condition de *Shapiro-Lopatinskiï*, pour un système donné et les conditions aux limites associées, représente en quelques sorte le fait le système soit en harmonie ou non avec ses conditions aux limites. Pour vérifier si cette condition est satisfaite, il faut considérer localement près du bord étudié, le problème homogène dans un demi-plan avec les conditions aux limites homogènes associées. On cherche alors des solutions sinusoïdales le long du bord et décroissantes exponentiellement dans la direction perpendiculaire au bord vers l'intérieur du domaine. S'il existe de telles solutions non nulles, la condition de *Shapiro-Lopatinskiï* n'est pas satisfaite. Cela conduit à une sorte de non-unicité de la solution. Lorsque l'on considère le problème général dans un domaine  $\Omega$ , ces solutions apparaissent comme locales au voisinage du bord en question. En cherchant des solutions de ce type, on peut démontrer que :

- la condition de *Shapiro-Lopatinskiï* est satisfaite au niveau d'un bord fixé ou encastré
- la condition de *Shapiro-Lopatinskiï* n'est pas satisfaite au niveau d'un bord libre.

## Annexe 2

### Rappels sur les éléments finis

Dans le but de clairement expliciter les notions que l'on va utiliser dans toute la suite, on rappelle brièvement quelques définitions relatives aux éléments finis. Le contexte est le suivant. Etant donné un espace de Hilbert  $V$ , une forme bilinéaire coercive et continue  $a$  sur  $V$ , et une forme linéaire  $L$  sur  $V$ , on considère le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (212)$$

On se donne un sous-espace  $V_h$  de  $V$  de dimension finie  $M$ . et on cherche à résoudre le problème discret suivant,

$$\begin{cases} \text{trouver } v_h \in V_h \text{ telle que} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (213)$$

### Aspects locaux des éléments finis

**Définition 4.7** Soit

- $K \subset \mathbb{R}^n$  un domaine de frontière lisse par morceaux (**le domaine de l'élément**),
- $P$  un espace de fonctions sur  $K$  de dimension finie (**les fonctions de base**),
- $\Sigma$  une base de  $P$  (les éléments  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$  de la base sont appelés les degrés de liberté). Alors  $(K, \Sigma, P)$  est appelé un **élément fini**

**Définition 4.8** Il existe  $p_i$   $1 \leq i \leq N$ , dans  $P$  telles que  $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq N$  et on a

$$\forall p \in P, p = \sum_{i=1}^N \varphi_i(v) p_j$$

Les fonctions  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  sont appelées fonctions de base (locales) de l'élément fini  $K$ .

**Définition 4.9** On appelle interpolant local l'opérateur  $\Pi_k$  défini pour toute fonction  $v$  admissible définie sur  $k$  par

$$\Pi v = \sum_{i=1}^N \varphi_i(p) p_j$$

**Définition 4.10** Soit  $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$  un élément fini et soit  $F(x) = Ax + b$  ( $A$  inversible) une application affine.

L'élément fini est dit **affine-équivalent** à  $(K, \Sigma, P)$  si

- $P = P \circ F$
- $\Sigma(\widehat{f} \circ \widehat{F}) = \widehat{\Sigma} \widehat{f}$

**Remarque 4.5** la relation d'affine-équivalence définit une relation d'équivalence

### Aspects globaux des éléments finis

**Domaine** Pour simplifier les explications, on suppose qu'on est dans le cas d'un ouvert  $\Omega$  polyédrique, c'est-à-dire une réunion finie de polyèdres de (ou de polygones ou de segments respectivement dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}$ ).

**Triangulation** On définit une triangulation comme suit (voir par exemple Raviart & Thomas [29]p.104).

**Définition 4.11** Une triangulation de  $\overline{\Omega}$  est une décomposition finie du domaine

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k \in \tau_h} K \tag{214}$$

telle que

- (i) chaque élément  $k$  de  $\tau_h$  est un polyèdre de  $\mathbb{R}^n$ , d'intérieur non vide;
- (ii) les intérieurs de deux polyèdres de  $\tau_h$  distincts sont disjoints;
- (iii) toute face d'un polyèdre  $k_1 \in \tau_h$  est soit face d'un autre polyèdre  $k_2 \in \tau_h$  auquel cas  $k_1$  et  $k_2$  sont dits adjacents, soit une partie de la frontière de  $\Omega$ .

On dit qu'une famille  $(K, \Sigma_k, P_k)$ ,  $K \in \tau_h$  est une famille affine d'éléments finis, si  $(K, \Sigma_k, P_k)$  est affine-équivalent à un élément de référence  $(\hat{K}, \hat{\Sigma}_k, \hat{P}_k)$  pour tout  $K \in \tau_h$

**Remarque 4.6** *La définition de la triangulation est de peu d'intérêt dans un problème monodimensionnel comme celui traité dans ce chapitre, en effet dans ce cas l'a il s'agit d'une partition du segment, mais le lecteur intéressé par le chapitre suivant aura besoin de ces notions.*

**Définition 4.12** *au titre du vocabulaire les noeuds de la triangulation ou noeuds du maillage, il s'agit de l'ensemble des sommets des polyèdres des éléments la triangulation. On note cet ensemble  $\varkappa_h$*

**Espace d'approximation** On suppose qu'à chaque polyèdre  $K$  de  $\tau_h$  on fasse correspondre un élément fini. On peut définir un espace de fonctions définies sur  $\Omega$  comme suit :

$$X_h = \{x \in C_s; \forall K \in \tau_h, v|_K \in P_k\}$$

Généralement en pratique  $P_k \subset C^s$ ,  $s$  est à définir et dépend du nombre de dérivées partielles présentes dans les degrés de liberté. C'est dans cet espace d'approximation que l'on recherche les solutions du problème variationnel ??.

**Opérateur d'interpolation global** On peut définir un opérateur d'interpolation  $\Pi_h$  sur  $X_h$  de la manière suivante

$$\forall K \in \tau_h, (\Pi_h v)|_K = \Pi_k v$$

**Degrés de liberté globaux** On peut aussi définir un ensemble de degrés de liberté global de la façon qui suit :

$$\Sigma_h = \bigcup_{k \in \tau_h} \Sigma_k$$

**Fonctions de base globales** Si on réécrit l'ensemble  $\Sigma_h$  sous la forme  $\Sigma_h = \{\Phi_j, 1 \leq j \leq M\}$  alors les fonctions de base  $w_j, 1 \leq j \leq N$  de l'espace d'éléments finis sont définies par la relation

$$w_j \in X_h \quad \text{et} \quad \Phi_j(w_j) = \delta_{ij} w_j, \quad 1 \leq j \leq M$$

On peut alors donner une formule reliant opérateur d'interpolation, degrés de liberté et fonctions de base :

$$\Pi_h v = \sum_{j=1}^M \Phi_J(v) w_j$$

**Définition 4.13 (famille régulière)** Soit  $\Omega$  un domaine donné, et  $(\tau_h)_{0 < h < 1}$  une famille de triangulations de  $\bar{\Omega}$ . On dit que  $(\tau_h)_{0 < h < 1}$  est une famille régulière (ou non-dégénérée) de triangulations si

- il existe une constante  $\rho > 0$  telle que pour tout  $K \in (\tau_h)$ , et pour tout  $0 < h < 1$

$$\text{diam} B_K \geq \rho \text{diam} K$$

où  $B_K$  est la plus grande boule contenue dans  $K$

Il s'agit d'une hypothèse géométrique sur le maillage qui précise que les éléments  $K$  sur  $\tau_h$  ne deviennent pas trop "plat" à la limite, voir [28].

la définition précédente nécessaire pour énoncer un résultat d'estimation d'erreur



# Bibliographie

- [1] Alexandre ERN et Jean-Luc GUERMOND. éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre, volume 36 de Mathématiques & Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [2] C. A. De Souza & E. Sanchez–Palencia, "Complexification phenomenon in an example of sensitive singular perturbation", *C. R. Mecanique* 332 (2004), p. 605–612.
- [3] C. A. De Souza & E. Sanchez–Palencia, "Complexification phenomenon in certain singular perturbations", in *Fluid Mechanics : A volume in honor of Amable Linan*, F. J. Higuera, A. Jiménez and J. M. Vega (Eds.) CIMNE, Barcelona, 2004, p. 363-379.
- [4] D. Caillerie, "*Etude générale d'un type de problèmes raides et de perturbation singulière*", *C. R. Mathématique* 323, (1996), 835–840.
- [5] D. Leguillon, J. Sanchez–Hubert and E. Sanchez-Palencia, "Model problem of singular perturbation without limit in the space of finite energy and its computation", *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 326, Série IIb, p. 609-614, 1999.
- [6] Delphine DUPUY. Modélisation mathématique de l'extrusion bivis m . Thèse de doctorat, Université Jean Monnet - Saint Etienne, 2004.
- [7] F. Fontvieille, "Décomposition asymptotique et éléments finis", Thèse de Doctorat, Université de Lyon France, 2004.
- [8] F. BLANC, O. GIPOULOUX, G. PANASENKO et A. M. ZINE. Asymptotic analysis and partial asymptotic decomposition of domain for Stokes equation in tube structure m . *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 9(9) :1351–1378, 1999.

- [9] F. FONTVIEILLE, G.P. PANASENKO et J. POUSIN.<<Asymptotic decomposition of a singular perturbation problem with unbounded energy>>. C.R. Mécanique, 330 :507–512,2002.
- [10] F. Fontvieille, G. P. Panasenko and J. Pousin, "Asymptotic decomposition of a singular perturbation problem with unbounded energy", C. R. Mécanique 330, p. 507-512, 2002.
- [11] G. P. Panasenko, "Method of asymptotic partial decomposition of domain", Rapport Technique 234, Equipe d'Analyse Numérique, Lyon Saint-Etienne, CNRS UMR 5585, 1996.
- [12] G. P. Panasenko, "Method of asymptotic partial decomposition of domain", Math. Models Methods Appl. Sci., 8(1), 139-156, 1998.
- [13] G. P. Panasenko, "Asymptotic partial decomposition of variational problems", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série IIb, p. 1185-1190, 1999.
- [14] G. P. Panasenko and E. Pérez, "Asymptotic partial decomposition of domain for spectral problems in rod structures", J. Math. Pures Appl. 87 (2007) 1–36.
- [15] G.P. Panasenko, "Multi-Scale Modelling for Structures and Composites", Springer, Berlin, 2005.
- [16] G.P. PANASENKO, B. RUTILY et O. TITAUD.<<Asymptotic analysis of integral equations for great interval and its application to stellar radiative transfer>>. C.R. Mécanique,330 :735–740, 2002.
- [17] Gouri DHATT et Gilbert TOUZOT. Une présentation de la méthode des éléments finis.Librarie Maloine, Paris, 1981. Collection Université de Compiègne. [Université de Compiègne collection].
- [18] J. L. Lions et E. Magenes, "Problèmes aux limites nonhomogènes et applications, vol. 1, Dunod, Paris 1968.
- [19] J. L. Lions et E. Sanchez–Palencia, "*Problèmes aux limites sensitifs*", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, (1994), 1021-1026.
- [20] J. L. Lions et E. Sanchez–Palencia, "*Sur quelques espaces de la théorie des coques et de la sensibilité*", in : D. Cioranescu, A. Damlamian and P. Donato (Eds.), Homogenization and Applications to Material Sciences, Gakkotosho, Tokyo, (1995), 271-278.

- [21] J. L. Lions et E. Sanchez–Palencia, "*Problèmes sensitifs et coques élastiques minces*", in : J. Céa, D. Chenais, G. Geymonat and J. L. Lions (Eds.), *Partial Differential Equations and Functional Analysis in memory of Pierre Grisvard*, Birkhauser, Boston, (1996), 207-220.
- [22] J. L. Lions and E. Sanchez–Palencia, "*Sensitivity of certain constrained systems and application to shell theory*", *J. Math. Pures Appl.* 79, 8, (2000), 821-838.
- [23] J. Pitkaranta and E. Sanchez–Palencia, "*On the asymptotic behaviour of sensitive shells with small thickness*", *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 325, Série IIB, (1997), 127-134.
- [24] Lloyd N. TREFETHEN. The definition of numerical analysis m. Dept. of Computer Science, Cornell University, 1992. Essay appeared also in the November, 1992 issue of SIAM News and the March, 1993 issue of the Bulletin of the Institute for Mathematics and Applications.
- [25] N. Meunier and E. Sanchez–Palencia, "*Sensitive versus classical singular perturbation problem via Fourier transform*", *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 16, (2006), 1783–1816.
- [26] N. Meunier, J. Sanchez–Hubert and E. Sanchez–Palencia, "*Various kinds of sensitive singular perturbation*", *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, Vol 14, N°2, Clermont-Ferrand, France, (2007), 199-242.
- [27] O. C. ZIENKIEWICZ. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, London, 1977. The third, expanded and revised, edition of *The Finite Element Method in Engineering Science*.
- [28] Philippe G. CIARLET. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. *Studies in Mathematics and its Applications*, Vol. 4.
- [29] P.-A. RAVIART et J.-M. THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection *Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983.
- [30] P. Gérard and E. Sanchez–Palencia, "*Sensitivity phenomena for certain thin elastic shells with edges*", *Math. Meth. Appl. Sci.*, 23, (2000), 379-399.
- [31] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, "*Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*", *Commun. Pure Appl. Math.* 12, (1959), 623–727.

- [32] Susanne C. BRENNER et L.Ridgway SCOTT. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer-Verlag, New-York, 1994.
- [33] Y. V. Egorov, N. Meunier, E. Sanchez-Palencia, "*Rigorous and heuristic treatment of certain sensitive singular perturbations*", J. Math. Pures Appl. 88, (2007), 123-147.
- [34] Yu. V. Egorov, A. I. Komech & M. A. Shubin, "Elements of the Modern Theory of Partial Differential Equations", Springer, 1999.

## ملخص :

في هذه المذكرة، التفكيك التقاربي الجزئي و العناصر المنتهية >> تطبيقات على بعض مسائل الاضطرابات الشاذة >> طريقة MAPDD طريقة التفكيك التقاربي الجزئي والتي اقترحت من طرف قريقوري باناسانكو سنة 1996 والتي تعتمد على تقريب مسألة مستمرة بمسألة أخرى مستمرة تدعى المسألة المفككة وذلك لاعتبارات تقاربيه ، والتي تكون تجزئتها ايسر من تجزئته المسألة الابتدائية .  
وقمنا بتذكير حول المسائل الشاذة، ثم تطرقنا لمعالجة هذه المسائل بتحويلات فوري ، ثم عرضنا طريقة التفكيك التقاربي الجزئي وأرفقت بمثال من الرتبة الأولى ، و مثال من الرتبة الثانية.  
الكلمات المفتاحية: التفكيك التقاربي، العناصر المنتهية، تقديرات الأخطاء، المسائل الحساسة.

## Abstract:

In this dissertation, Partial Asymptotic Decomposition and finit elements <<application to some sensitive singular perturbation problems >>, one makes a theoretical recall concerning the problems of singular sensitifs perturbation >>, then one conducts the analytic treatment to the sense of Fourier of the sensitive problems , one presents the MAPDD, Method of Partial Asymptotic Decomposition of Domain proposed by G. Panasenko in 1996 that is based on the approximation of a continuous problem by another continuous problem (says decomposed problem) via the asymptotic considerations, and whose discretisation appears simpler than the one of the initial continuous problem, we consider two example of sensitive problems to treat with the MAPDD, the first one is one-dimensional and the second is two-dimensional

Keywords: asymptotic decomposition, finite element, error estimates, sensitive Problems

## Résumé:

Dans ce mémoire, Décomposition Asymptotique Partielle et éléments finis <<Application à quelques problème de perturbation singulières sensitifs>>, on fait un rappel théorique concernant les problèmes de perturbations singulières sensitifs, puis on procède au traitement analytique au sens de Fourier des problèmes sensitifs, on présente la MAPDD, Méthode de Décomposition Asymptotique Partielle de Domaine (Method of Asymptotic Partial Domain Decomposition en anglais) proposée par G. Panasenko en 1996 qui est basée sur l'approximation d'un problème continu par un autre problème continu (dit problème décomposé) via des considérations asymptotiques, et dont la discrétisation apparait comme plus simple que celle du problème continu initial, on considère deux exemples de problèmes sensitifs à traiter par la MAPDD, le premier est monodimensionnel et le second est bidimensionnel.

Mots-clefs : décomposition asymptotique, éléments finis, estimation d'erreur, problème sensitifs

## ملخص :

في هذه المذكرة، التفكيك التقاربي الجزئي و العناصر المنتهية >> تطبيقات على بعض مسائل الاضطرابات الشاذة << طريقة MAPDD طريقة التفكيك التقاربي الجزئي والتي اقترحت من طرف قريقوري باناسانكو سنة 1996 والتي تعتمد على تقريب مسألة مستمرة بمسألة أخرى مستمرة تدعى المسألة المفككة وذلك لاعتبارات تقاربيه ، والتي تكون تجزئتها ايسر من تجزئته المسألة الابتدائية .  
وقمنا بتذكير حول المسائل الشاذة، ثم تطرقنا لمعالجة هذه المسائل بتحويلات فوري ، ثم عرضنا طريقة التفكيك التقاربي الجزئي وأرفقت بمثال من الرتبة الأولى ، و مثال من الرتبة الثانية.  
الكلمات المفتاحية: التفكيك التقاربي، العناصر المنتهية، تقديرات الأخطاء. المسائل الحساسة.

## Abstract:

In this dissertation, Partial Asymptotic Decomposition and finit elements <<application to some sensitive singular perturbation problems >>, one makes a theoretical recall concerning the problems of singular sensstifs perturbation >>, then one conducts the analytic treatment to the sense of Fourier of the sensitive problems , one presents the MAPDD, Method of Partial Asymptotic Decomposition of Domain proposed by G. Panasenko in 1996 that is based on the approximation of a continuous problem by another continuous problem (says decomposed problem) via the asymptotic considerations, and whose discretisation appears simpler than the one of the initial continuous problem, we consider two example of sensitive problems to treat with the MAPDD, the first one is one-dimensional and the second is two-dimensional

Keywords: asymptotic decomposition, finite element, error estimates, sensitive Problems

## Résumé:

Dans ce mémoire, Décomposition Asymptotique Partielle et éléments finis <<Application à quelques problème de perturbation singulières sensitifs>>, on fait un rappel théorique concernant les problèmes de perturbations singulières sensitifs, puis on procède au traitement analytique au sens de Fourier des problèmes sensitifs, on présente la MAPDD, Méthode de Décomposition Asymptotique Partielle de Domaine (Method of Asymptotic Partial Domain Decomposition en anglais) proposée par G. Panasenko en 1996 qui est basée sur l'approximation d'un problème continu par un autre problème continu (dit problème décomposé) via des considérations asymptotiques, et dont la discrétisation apparait comme plus simple que celle du problème continu initial, on considère deux exemples de problèmes sensitifs à traiter par la MAPDD, le premier est monodimensionnel et le second est bidimensionnel.

Mots-clefs : décomposition asymptotique, éléments finis, estimation d'erreur, problème sensitifs