Modélisation de l'équation de Navier-Stokes et résolution par la méthode de compacité

Abdelkader Benmenine

Department of Mathematics, University of Ouargla, Ouargla 30000, Algeria

aekbenmenine@gmail.com

Abstract

Le mouvement d'un fluide incompressible visqueux, de viscosité v, remplissant un ouvert $\Omega \subset R^n$ de frontiere Γ réguliere, est modélisé par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - v\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i u = f - \nabla p & , v > 0 \\ \nabla u = 0 & \\ u = 0 & \text{sur } \sum = \Gamma \times]0;T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Ou u est le vecteur vitesse défini dans $Q = \Omega \times]0;T[$ et p est un scalaire pression $p(t,x) \in R$, les variables sont $t \in R$ et $x \in \Omega$.
Le probleme est de trouver u et p.

Mots-clés: Equation de Navier-Stokes, Problem nonlinéaire, Probleme de Stokes non stationnaire.

1. Introduction

On veut étudier le probleme de Stokes non stationnaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - v\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i u = f - \nabla p & , v > 0 \\ \nabla u = 0 & \\ u = 0 & \text{sur } \sum = \Gamma \times]0;T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Ou $\Omega \subset R^n$ de frontiere Γ réguliere, u est le vecteur vitesse défini dans $Q = \Omega \times]0;T[$ et p est un scalaire pression $p(t,x) \in R$ et f la force extérieure.
On utilise la méthode de compacité pour montrer l'existence et l'unicité de la solution u.

2. Preliminaries

Theorem 2.1 *(L'existence)*
Il existe u solution du probleme précédent pout tout $T > 0$ fini.

Theorem 2.2 *(L'unicité)*
Si la dimension n égale a deux, le probleme précédent admet une solution unique .

La démonstration est basée sur la méthode de compacité dans l'espace
$V = \{v \,/ v \in (H_0^1(\Omega))^n, \nabla v = 0\}$.

3. Statement of the results

Theorem 3.1 *Si la dimension $n = 2$, la solution u du probleme précédent est apres modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0;T] \to H$, $u(t) \to u_0$ dans H l'orsque $t \to 0$.*

On montre de plus que, en dimension $n \leq 4$ on peut obtenir, pour des donnés tres particulieres, un théoreme d'existence global (en t) de solution forte.

Theorem 3.2 *On suppose que $n \leq 2$, $f = 0$ et que $u_0 \in V \cap (H^2(\Omega))^n = W$ avec $\|u_0\|_W$ assez petit, alors il existe une solution u unique du probleme précédent vérifiant*
$u' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$.

avec H =adhérence de G dans $L^2(\Omega)^n$ et $G = \{\varphi \,/ \varphi \in D(\Omega)^n, \nabla\varphi = 0\}$.

References

[1] F.Hirsch, G. Lacombe *Elément d'analyse Fonctionnelle*,Masson(1997).

[2] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*, Springer (2011).

[3] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaire*,Masson(1969)

[4] J. L. Lions, E. Magenes, *Problemes aux limites non homogenes et applications* , Dover, Dunod(1968).

[5] N. Depauw, *Solution des équations de Navier-Stokes incompressible dans un domaine exterieur*, Rev. Math Iberoam, 17(2001) 21-68.

[6] S.Godounov, *Equation de la physique mathématique.*

[7] S. Nicaise, *Analyse numérique et équation aux dérivées partielles*, Dunod(2000).

[8] W. Rudin, *Functional analysis*,Mc.Graw-Hill,Inc(1973)