Erreur d'approximation polynômiale en dimension quelconque

Begui Noudjoud* **Bennour H.(encadreur)**

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie
*noudjoud.begui@gmail.com

Résumé

Établir des majorations de la distance de fonctions de régularité donne à un espace de polynômes pour les normes d'espace de Sobolev cette distance est calcule de le première problème au moyen de le projection orthogonale π_N dans l'espace $L^2(\Lambda)$ et dans le deuxième problème au moyen de le projection orthogonale $\pi_n^{k,0}$ dans l'espace $H_0^k(\Lambda)$ et dans le troisième problème au moyen de le projection orthogonale $\overline{\pi}_N$ dans l'espace $H^1(\Lambda)$

Mots clés: *polynômes orthogonaux, espaces discrets, polynômes de Legendre.*

1. Introduction

Ce chapitre a pour but de majorer la distanse de fonctions de régularité donnèe à un espace de polynômes,pour les normes de sobolev dèfinies dans le chapitre I.comme les espaces de sobolev que l'on considère ici sont des espaces de Hilbert,cette distance est calculèe au mayen d'opèrateurs de projection orthogonale sur l'espace de polynômes et a ètè intialement estimèedans[1] et [2] .L'ètude s'effectue d'abord sur l'intervalle $\Lambda =]-1,1[$, puis sur domaines du type $(]-1,1[)^d$ est un entier quelconque≥ 2. on conclut en presèntant un resultat de relevement de trace polynômiale. le paramètre de discrétisation est un entier positif notè N. Lesymbole c dèsigne une constante positive indépendant de N.

Dans ce qui suit, on noteΩ l'ouvert $]-1,1[^d$, où d est un entier quelconque ≥ 2. Le but de ce paragraphe est d'établir des majorations, analogues à celles de la Section 1, de la distance dans un espace$H^k(\Omega)$ d'une fonction de régularité connue à un certain espace de polynômes. Pour simplifier les notations on présente les démonstrations uniquement dans le cas $d = 2$. On désigne par $x = (x, y)$ le point générique de Ω dans ce cas.

Les démonstrations reposent essentiellement sur les résultats de la Section 1, utilisés sur chaque variable avec un argument de "tensorisation". Ceci signifie que l'on va faire appel à la propriété suivante, en dimension $d = 2$ par exemple,

$$L^2(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega v^2(x)dx < +\infty\}$$

$$= \{v : \Lambda * \Lambda \to \mathbb{R}; \int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1} v^2(x,y)dy)dx < +\infty\}$$

$$= \{v : \Lambda \to L^2(\Lambda); \int_{-1}^{1} \|v(x,.)\|^2_{L^2(\Lambda)}dx < +\infty\}$$

$$= L^2(\Lambda; L^2(\Lambda)).$$

De même façon, on voit facilement que

$$H^1(\Omega) = L^2(\Lambda; H^1(\Lambda)) \cap H^1(\Lambda; L^2(\Lambda))$$

2. Erreur d'approximation polynômiale

L'objectif de ce travail est d'établir des majorations,la distance dans un espace $L^2(\Omega)$

Théorème 2.1 *pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante$c$ positive ne dèpendent que de m telle que, pour toute fonctionφ de $H^m(\Lambda)$, on ait*

$$\|\varphi - \pi_n\varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)} \tag{1}$$

Démonstration du théorème (2.1):

Étant donnée une fonction φde $H^m(\varphi)$pour laquelle on écrit la décomposition (1.2),il faut estimer

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\int_{-1}^{1}\varphi(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta$$

On va distinguer deux cas , suivant que m est pair ou impair.

1)Lorsque m est pair $m = 2k$ et $\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\int_{-1}^{1}\varphi(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta$,d'après l'équation différentielle

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\frac{1}{n(n+1)}\int_{-1}^{1}\varphi(\zeta)AL_n(\zeta)d\zeta$$

comme l'opérateur Aest auto-adjoint dans $L^2(\Lambda)$, on obtient

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\frac{1}{n(n+1)}\int_{-1}^{1}(A\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta$$

En itérant k fois ce résultat , on en déduit

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\frac{1}{(n(n+1))^k}\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta$$

On constate donc que

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{(n(n+1))^{2k}}\left(\frac{\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\right)^2\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

On minore alors les $n(n+1)$ par N^2 ,ce qui donne

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-4k}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(\frac{\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\right)^2\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

Comme les $\frac{\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}$sont les coefficients de $A^k\varphi$ dans la base des polynômes de Legendre , on a

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-4k}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(\frac{\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\right)^2\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} = N^{-4k}\|A^k\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

on obtient

$$A^k : H^{2k}(\Lambda) \longmapsto H^0(\Lambda) = L^2(\Lambda)$$

alors

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-4k}\|A^k\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-4k}\|\varphi\|^2_{H^{2k}}$$

$$\Longrightarrow \|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-2m}\|\varphi\|^2_{H^m}$$

2) Lorsque m est impair :$m = 2k+1$ on obtient comme précédent

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\frac{1}{(n(n+1))^k}\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)(\zeta)L_n(\zeta)d\zeta$$

On utilise l'équation différentielle et On intègre par partie :

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\frac{1}{(n(n+1))^{2k+1}}\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)'(\zeta)L_n'(1-\zeta^2)d\zeta$$

On voit alors que

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{(n(n+1))^{2(k+1)}}\frac{(\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)'(\zeta)L_n'(1-\zeta^2)d\zeta)^2}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}$$

On note que, comme $(L_n')_n$, $n \geq 1$,sont deux à deux orthogonaux pour la mesure $(1-\zeta^2)d\zeta$ pour toute fonction ψ de$H^1(\Lambda)$ admet le développement

$$\psi = \sum_{n=0}^{+\infty}\psi^n L_n, \text{ avec } \psi^n = \frac{\int_{-1}^{1}\psi'(\zeta)L_n'(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta}{\int_{-1}^{1}L_n'^2(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta} \text{ pour } n \geq 1;$$

$$\|\psi\|^2_{H^1(\Lambda)} = \int_{-1}^{1}\psi'^2(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty}(\psi^n)^2\|L_n\|^2_{H^1(\Lambda)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\int_{-1}^{1}\psi'(\zeta)L_n'(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta)^2}{(\int_{-1}^{1}L_n'^2(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta)^2}\int_{-1}^{1}L_n'^2(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\frac{(\int_{-1}^{1}\psi'(\zeta)L_n'(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta)^2}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}$$

En appliquant cette formule pour la fonction $\psi = A^k\varphi$ et en minorant $(n(n+1))^{2k+1}$ par $N^{2(2k+1)}$, on voit que

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-2(2k+1)}\int_{-1}^{1}(A^k\varphi)'^2(\zeta)(1-\zeta^2)d\zeta.$$

Et on conclut

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-2m}\|(A^k\varphi)'\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-2m}\|A^k\varphi\|^2_{H^1(\Lambda)},$$

d'où,

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-2m}\|\varphi\|^2_{H^m(\Lambda)}$$

L'objectif de ce travail est d'établir des majorations,la distance dans un espace $H_0^k(\Omega)$

Théorème 2.2 *pour tout entier positif k et pour tout entier $m \geq k$, il existe une constante c positive ne dépendante que de k et de m telle que, pour tout fonction φ de $H^m(\Lambda) \cap H_0^k(\Lambda)$, on ait*

$$\|\varphi - \pi_N^{k,0}\varphi\|_{H^l(\Lambda)} \leq cN^{l-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}; 0 \leq l \leq k. \tag{2}$$

L'objectif de ce travail est d'établir des majorations,la distance dans un espace $H^k(\Omega)$

Théorème 2.3 *pour tout entier positif k et pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendante que de k et de m telle que, pour tout fonction φ de $H^m(\Lambda)$ on dit*

$$\|\varphi - \overline{\pi}_N^1\varphi\|_{H^1(\Lambda)} + N\|\varphi - \overline{\pi}_N^1\varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{1-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)} \tag{3}$$

Références

[1]Christine Bernardi, Yvon Maday, Approximation spectrales de problèmes aux limites elliptiques.

[2]Choristine Bernardi, Yvon Maday, Francesca rapetti, Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques.