Etude de la couche limite dans l'homogéneisation des problèmes elliptiques

CHEDALA Fatma Zohra

Département de Mathématiques, Université de Ouargla, Ouargla 30000, Algérie

CHEDALA.Fatmazohra@gmail.com

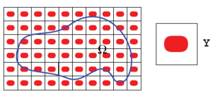
Résumé

L'objectif de ce travail de mémoire est d'étudier le comportement asymptotique au voisinage du bord dans l'homogénéisation d'un problème aux limites elliptique, avec condition de Dirichlet homogène, posé sur un domaine finement périodique dont la frontière est parallèle aux axes de coordonnées, par exemple un hupercube.

Mots clés: *Couche limite, homogénéisation, échelle multiple, structure périodique, problème elliptique, élasticité.*

1. Introduction

L'expression "couche limite" (Grenzschicht) a été utilisé pour la première fois par L. Prandtl le 12 aout 1904 lors "the Third Internationalen Mathematischen Kongress in Heidelberg, Germany". Prandtl a étudié l'écoulement d'un fluide à travers un corps solide dans le cas d'un nombre de Reynolds très important, il a montré que cet écoulement se divise en deux régions, une région extérieure d'écoulement non visqueux et une région très voisine du bord (couche limite) dans la viscosité est importante. Prandtl a décrit un système d'équations qui donne la première approximation de la vitesse du fluide dans la couche limite. A l'interface entre la couche limite et la région extérieure les deux écoulements se raccordent.



On considère dans notre travail un problème aux limites, de type Dirichlet homogène, elliptique d'ordre 2 avec coefficients oscillants périodiquement posé sur un domaineΩ. L'application de la méthode d'homogénéisation asymptotique fournit un comportement macroscopique optimal de la solution à l'intérieur du domaine ou bien si le domaine est l'espace tout entier ou que les conditions aux bords sont périodiques. On obtient dans ce cas une estimation de l'énergie de l'erreur d'ordreε. Cependant, si le problème est posé sur un domaine à frontière régulière, lipschitzienne par exemple, alors la présence de la frontière a une influence sur la précision des approximations et l'estimation correspondante de l'énergie de l'erreur est d'ordre $\varepsilon^{1/2}$ seulement dans ce cas.

Afin de donner une meilleure description des solutions au voisinage du bord et ainsi améliorer les approximations, on utilise les deux méthodes:

1- Méthode de Lions-Tartar, basée sur l'ajout de termes correcteurs de frontière au développement asymptotique à double échelles à partir de l'ordre 1. Ces correcteurs de frontière qui se nomment aussi solutions de couche limite sont solutions d'un problème aux limites elliptique sans second membre, de type Dirichlet non homogène, défini dans la cellule couche limite $]0,1[^{n-1}\times]0,\infty[$ dont l'énergie décroit exponentiellement par rapport a la deuxième variable.

2- Méthode de Sanchez-Palencia, basée sur les techniques utilisées par Prandtl, développement intérieur, développement extérieur et le raccordement.

2. Plan du mémoire

Ce travail est décomposé en trois chapitres::

Chapitre 1: Introduction à la couche limite.

Chapitre 2: Etude de la couche limite dans l'homogénéisation d'un problème elliptique.

Chapitre 3: Application en élasticité linéaire.

3. Problématique

Soit G un domaine parallèle aux axes, on cosidère le problème suivant:

$$\begin{cases} -divA(y)\nabla\psi^j = 0 dans G, \\ \psi^j = \chi^j sur\Gamma, \\ y' \longrightarrow \psi^j(y', y_n)Y' - priodique. \end{cases} \tag{3.1}$$

Lemme 3.1 *: Il existe une solution unique ψ^j de (3.1) dans H^1_{Loc}, en plus il existe un exposant $\gamma > 0$ et une constante réel unique d^j :*

$$e^{-\gamma y_n}(\psi^j(y) - d^j) \in L^2(G), e^{-\gamma y_n}\nabla\psi^j(y) \in L^2(G), j = 1, ..n.$$

On définit:

$$\widetilde{\psi}^j_\varepsilon(x', x_n) = \psi^j_\varepsilon(x', x_n)V(x', x_n), \tag{3.2}$$

Lemme 3.2 *: soit $\widetilde{\psi}^j_\varepsilon$ definit par (3. 2), Soit ω_ε la solution unique dans $H^1(\Omega)$ de:*

$$\begin{cases} -divA_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon = 0.....................................dans\Omega, \\ \omega_\varepsilon(x) = \widetilde{\psi}^j_\varepsilon = V(x)(\chi^j(\frac{x}{\varepsilon}) - d^j)................sur\partial\Omega. \end{cases}$$

Alors

$$\|\omega_\varepsilon - \widetilde{\psi}^j_\varepsilon\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Corollaire 3.1 *: Soit ω_ε défini comme le lemme(3. 2). Alors:*

$$\|\omega_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{3.3}$$

$$\|\omega_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.4}$$

et, pour toute ensemble ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ il existe une constante $C > 0$ tel que:

$$\|\omega_\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.5}$$

On peut écrire le terme de couche limite $u^{cl,\varepsilon}_1(x)$ défini par (2.12) [4] sous la forme:

$$u^{cl,\varepsilon}_1(x) = v^{cl,\varepsilon}_1(x) + w^{cl,\varepsilon}_1(x),$$

tels que $v^{cl,\varepsilon}_1(x)$ et $w^{cl,\varepsilon}_1$ sont vérifiés (3.6) et (3.7) (dans [4]) respectivement.

Théorème 3.1 *: Soient u_ε et u les solutions uniques des (2.2) et (2.9) (dans [4]) respectivement, supposon que $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$.*

Alors pour chaque ensemble ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ avec injection compact dans Ω, il existe une constante C, tel que:

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\|_{H^1(\omega)} \leq C\varepsilon$$

Preuve: (voir [4]).

Théorème 3.2 *: Soient u_ε et u les solutions uniques de (2.2) et(2.9) respectivement, supposons que $u \in W^{3,\infty}(\Omega)$, soit u_1 definie par (2.5) et on suppose que $\widetilde{u_1}$ vérifie l'équation (2.10), et:*

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u^{cl,\varepsilon}_1(x) - \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \tag{3.6}$$

En plus, pour toute ensemble ouverte $\omega \subset\subset \Omega$ avec injection compact dans Ω, il existe une constante c indépendant de ε:

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon v^{cl,\varepsilon}_1(x) - \varepsilon^2 v^{cl}_{1,1}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\|_{H^1(\omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \tag{3.7}$$

et

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon v^{cl}_1(x)\|_{L^2(\omega)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

Preuve: *Soit $\omega \subset\subset \Omega$ lorsque $u^{cl,\varepsilon}_1(x) = v^{cl,\varepsilon}_1(x) + w^{cl,\varepsilon}_1(x)$, on remarque:*

$$\|u_\varepsilon - u - \varepsilon u_1 - \varepsilon v^{cl,\varepsilon}_1 - \varepsilon^2 v^{cl}_{1,1} - \varepsilon^2 u_2\|_{H^1(\omega)}$$

$$\leq \|u_\varepsilon - u - \varepsilon u_1 - \varepsilon u^{cl,\varepsilon}_1 - \varepsilon^2 u_2\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon\|w^{cl,\varepsilon}_1\|_{H^1(\omega)} + \varepsilon\|v^{cl,\varepsilon}_1 - v^{cl}_1 - v^{cl}_{1,1}\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'aprés le lemme (3.4) ([4]), on a: $\varepsilon\|w^{cl,\varepsilon}_1\|_{H^1(\omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, et d'aprés (3. 8) ([4]):

$$\varepsilon\|v^{cl,\varepsilon}_1 - v^{cl}_1 - v^{cl}_{1,1}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

On définit:

$$r_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u^{cl,\varepsilon}_1(x) - \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^2},$$

qui vérifié:

$$\begin{cases} -divA_\varepsilon\nabla r_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}(f + divA_\varepsilon\nabla u) + \frac{1}{\varepsilon}divA_\varepsilon\nabla u_1 + divA_\varepsilon\nabla u_2......dans\Omega, \\ r_\varepsilon(x) = -u_2(x, \frac{x}{\varepsilon})...sur\partial\Omega. \end{cases}$$

On décompose $r_\varepsilon = r^1_\varepsilon + r^2_\varepsilon$, tel que r^1_ε est donné par:

$$\begin{cases} -divA_\varepsilon\nabla r^1_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}(f + divA_\varepsilon\nabla u) + \frac{1}{\varepsilon}divA_\varepsilon\nabla u_1 + divA_\varepsilon\nabla u_2.....dans\Omega, \\ r_\varepsilon(x) = 0...sur\partial\Omega. \end{cases}$$

et r^2_ε vérifiée:

$$\begin{cases} -divA_\varepsilon\nabla r^2_\varepsilon = 0............................dans\Omega, \\ r^2_\varepsilon(x) = -u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) ....sur\partial\Omega. \end{cases}$$

Lorsque

$$\|u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$$

et

$$\|\nabla u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon},$$

d'aprés le lemme (2.6) ([4]) on trouve $\|r^2_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$. D'autre part, on a:

$$\|r^1_\varepsilon\|_{H^1_0}(\Omega) \leq \frac{1}{\lambda}\|\frac{1}{\varepsilon^2}(f + divA_\varepsilon\nabla u) + \frac{1}{\varepsilon}divA_\varepsilon\nabla u_1 + divA_\varepsilon\nabla u_2\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

On utilise les équations (2.4) ([4]), pour chaque $\phi \in H^1_0(\Omega)$, on a:

$$\left|\int_\Omega \left[\frac{1}{\varepsilon^2}(f + divA_\varepsilon\nabla u) + \frac{1}{\varepsilon}divA_\varepsilon\nabla u_1 + divA_\varepsilon\nabla u_2\right]\phi dx\right|$$

$$= \left|\int_\Omega \left[-\frac{1}{\varepsilon}(div_y A\nabla_y u_3)(x, \frac{x}{\varepsilon}) + div_x A\nabla_x u_2)(x, \frac{x}{\varepsilon})\right]\phi dx\right|$$

$$\leq \left|\int_\Omega - \left[(div_x A\nabla_y u_3)(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}(div_y A\nabla_y u_3)(x, \frac{x}{\varepsilon})\right]\phi dx\right|$$

$$+ \left|\int_\Omega [div_x A_\varepsilon\nabla_y u_3(x, \frac{x}{\varepsilon}) + div_x A_\varepsilon\nabla_x u_2(x, \frac{x}{\varepsilon})]\phi dx\right|$$

$$\leq \left|\int_\Omega (A\nabla_y u_3)(x, \frac{x}{\varepsilon})\nabla\phi dx\right| + C\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)}.$$

Lorsque $\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)} = 1$, on trouve

$$\|r^1_\varepsilon\|_{H^1_0}(\Omega) \leq C\|\frac{1}{\varepsilon^2}(f + divA_\varepsilon\nabla u) + \frac{1}{\varepsilon}divA_\varepsilon\nabla u_1 + divA_\varepsilon\nabla u_2\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Finalement, on obtient $\varepsilon^2\|r_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, donc le résultat.

Références

[1] *A.Benssoussan, J.L.Lions and G.Papanicolaon,* Asymtotic analysis for periodic structures *North-Holland, Amesterdam (1978).*

[2] *D. Gérard-Varet and N. Massoudi,* Homogenization and boundary layers, *Acta. Math. 209 (2012), 133-178.*

[3] *E. SANCHEZ PALENCIA and A. ZAOUI, Homogenization techniques for composite meadia, Springer. 1987.*

[4] *G.Allaire and M.Amar,* Boundary layer tails periodic homogenization , *ESAIM, control optim. calc. var.4 (1999), 209-243.*

[5] *H.Dumontet,* Study of a boundary layer problem in elastic composite matrials. *RAIRO, tome 20, n:2(1986), pp 265-286.*

[6] *M. Neuss-Radu,* A result on the decay of the boundary layer in the homogenization theory , *Asymtotic Analysis 23 (2000), 313-328.*