جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الفيزياء

رقم الترتيب:.........
رقم التسلسلي:.......

مذكرة

ماستر أكاديمي

مجال: علوم المادة

فرع: فيزياء

تخصص : فيزياء الإشعاعات، كاشف وبصريات إلكترونية

من إعداد : بوسعيد شعيب

بعنوان:

التناظر SO(4) لذرة الهيدروجين

نوقشت يوم: 2015/05/25

أمام لجنة المناقشة المكونة من:

بن بيتور محمد عبد الوهاب	أستاذ محاضر(أ)	جامعة ورقلة	رئيسا
بن الزاير هجيرة	أستاذة محاضرة(أ)	جامعة ورقلة	ممتحنا
طيب مفتاح	أستاذ تعليم عال	جامعة ورقلة	مشرفا

الموسم الجامعي: 2015/2014

تشكر

الحمد و الشكر لله رب العـــالمين

الفهـــــــرس

مقدمـــــة

تخضع ذرة الهيدروجين إلى تناظر كروي أو إلى تناظر بالدوران ذو الزمرة $SO(3)$ ناتج عن تبادل مؤثر هاملتون مع مؤثر العزم الحركي $\vec{L}$, لكن مجموع الحالات المولدة بالدوران هو $2l + 1$, ولا ترقى للتوالد الكلي لهذا النظام, و الذي هو N^2, إذن فذرة الهيدروجين تخضع لتناظر أكبر من التناظر $SO(3)$, هذا ما سنحاول الكشف عن خلفياته في موضوعنا هذا.

الفصل الأول

مبادئ ميكانيك الكم

1)– مبدأ Heisenberg[1]:

أ)– علاقات الارتياب موضع – كمية حركة لجسيم كمي:

التوزيعات$P(r)$ لكثافة احتمال الوجود و $\pi(p)$ لكثافة احتمال كمية الحركة تعرف من الدالة الموجية $\psi(r)$, و

لكن ليست مستقلة عن بعضها البعض, رغم أن الدالة $\psi(r)$ تكتب الدالة الموجية تحت الشكل:

$$\psi(r) = \sqrt{P(r)}e^{i\alpha(r)}$$

الطور $\alpha(r)$ يبقى غير محدد كليا. نعتبر مثلا جسيم ذو بعد واحد, نرمز لموضعه بـ x و p لكمية حركته لتكن

$\psi(r)$ و $\varphi(p)$ حيث:

$$\varphi(p) = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r)e^{-p.\frac{x}{\hbar}}dx$$

الدوال الموجية الممثلة للحالة الديناميكية في الفضاء x و الفضاء p على الترتيب .

نتيجة Heisenberg تترجم أساسا بالفعل الرياضي تمدد الموجة ψ (التشتت) أو تمدد ثنائيتها φ إذا كانت ψ

تشغل منطقة من رتبة Δx في الفضاء x و الموجة φ منطقة من رتبة Δp في الفضاء p الجداء $\Delta x.\Delta p$ يبقى دوما

أكبر بكثير من كمية من رتبة $\hbar$:

$$\Delta x.\Delta p \gtrsim \hbar \qquad (1H)$$

يمكننا تفسير صلاحية هته النتيجة بالفرض النصف كمي, كل موجة $\psi(r)$ هي تطابق لموجات مستوية e^{ikx} بطول

موجة $\frac{2\pi}{k}$. إذا كان Δk تمدد مجال تغير المقدار k و Δx مجال x, يجب أن يكون الاتفاق في الطور بين هذه

المتغيرات الموجية لا يحدث إلا في هذا المجال و أن التداخل هدام في بقية الفضاء . الطول الموجي $\frac{2\pi}{k}$ المحتوى في Δx

هو $\frac{\Delta x}{2\pi}k$. لتتمكن المتغيرات المستوية من التداخل الهدام في حدود المجال Δx, من اللازم أن هذا العدد يختلف على

الأقل عن الوحدة أي:

$$\Delta x.\Delta k \gtrsim 1 \qquad (2H)$$

بما أن كمية الحركة ترتبط بـ k بالعلاقة $p=k\hbar$, نستنتج فورا العلاقة (1H). نسمي الكميتين Δx و Δp الارتياب في الموقع و كمية الحركة على الترتيب و نصيغ نتيجة Heisenberg بالطريقة التالية:

الجداء للارتياب في الموقع بالارتياب في كمية الحركة يبقى دوما أكبر من كمية من رتبة $\hbar$.

ب)- علاقات الارتياب المنصوص عليها بدقة:

نعالج بالتفصيل حالة جسيم في بعد واحد نتبنى للارتياب في x و p التعريفات الدقيقة التالية: Δx و Δp هي الانزياحات التربيعية المتوسطة للتوزيعات $|\psi(x)|^2$ و $|\varphi(p)|^2$. لدينا إذن:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \\ \Delta p &= \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} \end{aligned} \qquad (3H)$$

الكمية Δ تكمن مباشرة في قياس الموضع, وهي التقلب الإحصائي لنتيجة القياس حول القيمة المتوسطة لـ x, نفس الملاحظة لـ Δ بالنسبة لقياس كمية الحركة سنبرهن بصفة عامة أن:

$$\Delta x . \Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{2} \qquad (4H)$$

نعتبر الصيغة المعرفة الموجبة:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x\psi + \lambda\hbar \frac{\partial\psi}{\partial x} \right|^2 dx \qquad , (I(\lambda) \geq 0 \, , \forall\lambda)$$

نكامل بالتجزئة:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x\psi|^2 dx + \lambda\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x} x\psi + x\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dx + \lambda^2\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2 dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x^2 \psi dx - \lambda\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\psi dx - \lambda^2\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} dx$$

و التي تعطي, بفرض أن ψ مستنظمة للوحدة:

$$\Longrightarrow I(\lambda) = \langle x^2\rangle - \lambda\hbar + \lambda^2\langle p^2\rangle \qquad (5H)$$

لأن $I(\lambda)$ هو من الدرجة الثانية بالنسبة لـ λ و معرف موجب (أو موجب), مميزها:

$$\hbar^2 - 4\langle p^2\rangle\langle x^2\rangle$$

بالضرورة سالب (أو معدوم) إذن:

$$\langle x^2\rangle\langle p^2\rangle \gtrsim \frac{\hbar^2}{4} \qquad (6H)$$

الشرط (6H) أقل تقييدا من الشرط (4H) السابق. لكن نستطيع القيام بحساب مشابه بدءا من صيغة $I(\lambda)$ المختلفة قليلا أي نعوض في تعريف $I(\lambda)$

$$x \to x - \langle x\rangle \ \text{و}\ \ \hbar\frac{\partial}{\partial x} \to \hbar\frac{\partial}{\partial x} - i\langle p\rangle$$

أو العملية المكافئة نعوض فيها:

$$\psi(x) \to \exp\left(-\frac{i\langle p\rangle x}{\hbar}\right)\psi(x + \langle x\rangle)$$

النتيجة مماثلة لما ورد في (5H).

$$I(\lambda) = (\Delta x)^2 - \lambda\hbar + \lambda^2(\Delta p)^2 \geq 0$$

الشرط (4H) يوضح فعل أن مميز هذه الصيغة التي هي من الدرجة الثانية بالنسبة لـ λ ليست موجبة بتاتا.

البرهان السابق يطبق أيضا على جسيم في ثلاثة أبعاد. الدالة الموجية $\psi(r)$ هي دالة فضاء ذو ثلاثة أبعاد و التكاملات تقدم في البرهان على أنها في ثلاثة أبعاد لفضاء التراتيب بدلا من x فقط؛ يمكننا التحقق بسهولة بأن التلاعبات التي تكون على هذه التكاملات تبقى صالحة, أيضا التعريف (3H) للانزياحات التربيعية المتوسطة تعمم و نحصل على علاقات الارتياب لـ Heisenberg:

$$\Delta x_i . \Delta p_i \gtrsim \frac{\hbar}{2} \;\; ; i = 1,2,3$$

ج)- تعميم: علاقات الارتياب بين المتغيرات المشتركة:

نجد نفس العلاقات في الحالة العامة لأنظمة كمية ذات n بعد. بتمديد التعريف (3H), نقيس الارتياب على q_i و p_i على الترتيب بالانزياح التربيعي المتوسط لتوزيعها الإحصائي:

$$\Delta q_i = \sqrt{\langle {q_i}^2 \rangle - \langle q_i \rangle^2}$$
$$\Delta p_i = \sqrt{\langle {p_i}^2 \rangle - \langle p_i \rangle^2}$$

بالاعتماد على البرهان السابق و بإجراء نفس التغييرات نستخلص علاقات الارتياب بين هته المتغيرات (الكارتيزية):

$$\Delta x_i . \Delta p_i \gtrsim \frac{\hbar}{2} \;\; ; i = 1,2,\ldots,n$$

ومن هذا المنطلق ننطلق في بناء ميكانيك الكم باعتبار مبدأ Heisenberg كأول مبدأ أساسي, إذ نختار بنية جبرية تتماشى معه و من بين هذه البنيات نعتمد على الموضع وكمية الحركة ككميات ملاحظة و نظرا لتحقيقها لشرط التبادل

المحقق لهذا المبدأ:

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

2)- فضاء Hilbert[1]:

لكل جملة فيزيائية عند زمن معين t نعرف فضاء Hilbert, $\mathcal{H}$ للجملة و هو فضاء الدوال الموجية الممكنة للجملة.

أ)- مبدأ التطابق و تمثيل الحالات الحركية بأشعة:

في الحقيقة المبادئ الأساسية فيما يتعلق بالقيم المتوسطة تفسر أيضا أكثر باستعمال المؤثرات في فضاء كميات الحركة.

التعميم يأتي على دوال من الشكل $F(\vec{r})$ و $G(\vec{p})$, نستطيع أيضا تنفيذ نفس التعميم على الصيغ الموافقة المبنية على الدوال φ, نستخلص المبادئ المكافئة :

أ)- لكل متغير حركي $\vec{A} = A(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ مؤثر خطي يرتبط به :

$$\widehat{\vec{A}} = \widehat{A}(i\hbar\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, i\hbar\frac{\partial}{\partial p_n}; p_1, \dots, p_2)$$

ب)- القيم المتوسطة المأخوذة بهذا المتغير الديناميكي عند تواجد النظام في الحالة الديناميكية المعرفة بالدالة $\varphi(p_1, \dots, p_2)$ هي:

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\langle \varphi, \hat{A}\varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle}$$

التعبير بين حاضنتين دلالة على الجداء السلمي لفضاء كميات الحركة:

$$\langle \varphi, \hat{A}\varphi \rangle = \int \varphi^* \hat{A}\varphi dp_1 \dots dp_n$$

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \int \varphi^* \varphi dp_1 \dots dp_n$$

المبادئ المكافئة ترتكز على خصائص تحويل فوري. كما أن الدوال φ و ψ هي تمثيل مكافئ لنفس الحالة الحركية.

ب)- المقادير الملاحظة:

$$\hat{A}(i\hbar\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, i\hbar\frac{\partial}{\partial p_n}; p_1, \dots, p_2)$$

$$\hat{A}(q_1, \dots, q_n; i\hbar\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, i\hbar\frac{\partial}{\partial q_n})$$

هي تمثيلات مكافئة لنفس المتغير الديناميكي. كل نظرية المقادير الملاحظة نستطيع القيام بها بدون إجراء تغيير في إحدى هاتين العبارتين. نتحصل أيضا على صيغتين مكافئتين لنظرية الكم. كل هذا واضح, عندما نسلم بأن الدوال الموجية φ و ψ تمثل نفس الشعاع لفضاء ذو بعد غير منتهي. كل المفاهيم المقدمة؛ فضاء دالي, جداء سلمي, نظيم, التعامد, ... إلخ هي إذن ترجمة هندسية جد بسيطة. وفق هذا المنظور, المقادير المأخوذة بالدالة $\psi(q_1, \dots, q_n)$ في كل نقطة من فضاء التراتيب هي مركبات هذا الشعاع وفقا لنظام معين من المحاور المتعامدة كذلك, المقادير المأخوذة بالدالة $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ في كل نقطة من فضاء كميات الحركة هي مركبات لنفس الشعاع الموافق لنظام محاور آخر.

وهكذا أدى هذا إلى بناء نظرية الكم بدءا مباشرة من مفهوم الشعاع, نضع كمبدأ أساسي للنظرية مبدأ تطابق الحالات الديناميكية وفق الحالات الديناميكية الممكنة لنظام كمي معطى يمتلك الخاصية المميزة لكل موجة في العموم. يجرى التكميم خطيا و بالتالي يمكن تمثيلها بأشعة لفضاء خطي معين الذي يبقى محدد و نتيجة لكل حالة ديناميكية مرتبطة بشعاع لهذا الفضاء؛ كذلك لكل متغير ديناميكي مرتبط بمؤثر خطي لهذا الفضاء نقدم أيضا أن هذه النظرية أكثر شمولا و أحسن صياغة من حيث الشكل من الميكانيك الموجي, لأنها تطبق أيضا في الأنظمة الكمية التي ليس لها مماثل كلاسيكي.

ج)- فضاء الدوال الموجية:

الدوال الموجية قابلة لتمثيل نظام فيزيائي معطى و التي تنتمي إلى فضاء دالي ينبغي تحديده بدقة. لهذا التوزيعات $\pi(\vec{p})$ و $P(\vec{r})$ لها معنى, من اللازم و الكافي و الذي يمكن تطبيقه على الدالة الموجية $\psi(\vec{r})$ شرط الإستنظام. و هذا يقودنا للتعريف التالي لفضاء الدوال الموجية:

الدوال الموجية للميكانيك الموجي:

هي الدوال ذات المربع القابل للجمع لفضاء التراتيب بمعنى هي الدوال $\psi(q_1, \dots, q_n)$ بحيث أن التكامل:

$$\int_{\tau} \left|\psi(q_1, \dots, q_{n)}\right|^2 d\tau < \infty$$

نستطيع حصر الفضاء الدالي قليلا من خلال فرض أن الدالة الموجية تستنظم للوحدة:

$$\int_{\tau} \left|\psi(q_1, \dots, q_{n)}\right|^2 d\tau = 1$$

لكن من الأفضل ترك هذا القيد يمكننا القيام بذلك كنتيجة لتغيير طفيف في تعريف التوزيعات الإحصائية و الاحتمالية. بلغة الرياضيين, الفضاء الدالي الذي سنحدده هو فضاء Hilbert. لدينا في الحقيقة الخصائص المميزة لهذا الفضاء و التي سنسردها فيما يلي:

- هو فضاء خطي, إذا كان ψ_1 و ψ_1 دالتين ذواتا مربع قابل للجمع, جمعهما, جداء كل واحدة منهما بعدد مركب و بصفة عامة كل مزج خطي :

$$\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$$

أين λ_1 و λ_2 هي أعداد مركبة ثابتة كيفية, هي أيضا دوال ذات مربع قابل للجمع

- هو فضاء ذو بعد غير منتهي
- نستطيع تحديد أو تعريف, الجداء السلمي لدالة ψ بدالة φ بالشكل التالي :

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int \varphi^*(q_1,\dots,q_n)\psi(q_1,\dots,q_n)d\tau$$

إذا كان معدوم نقول أن الدوال ψ و φ متعامدة. النظيم N_ψ لدالة ψ هو الجداء السلمي للدالة مع نفسها:

$$N_\psi = \langle\psi,\psi\rangle$$

الخصائص الأساسية للجداء السلمي هي التالية:

أ)- الجداء السلمي للدالة φ بالدالة ψ هو مرافق الجداء السلمي للدالة ψ بالدالة φ:

$$\langle\psi,\varphi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle^*$$

ب)- الجداء السلمي للدالة ψ بالدالة φ خطي بالنسبة لـ ψ بمعنى:

$$\langle\varphi,\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2\rangle = \lambda_1\langle\varphi,\psi_1\rangle + \lambda_2\langle\varphi,\psi_2\rangle$$

ج)- نظيم دالة ψ هو عدد حقيقي غير سالب:

$$\langle\psi,\psi\rangle \geq 0$$

و إذا كان معدوم , بالضرورة $\psi = 0$ كل هذه الخصائص واضحة لأنها تشير إلى تعريف الجداء السلمي.

الخصائص (أ), (ب) و (ج) تنتج خاصية مهمة للجداء السلمي؛ متراجحة Schwarz :

$$|\langle\varphi,\psi\rangle| \leq \sqrt{\langle\varphi,\varphi\rangle\langle\psi,\psi\rangle}$$

المتراجحة محققة إذا كانت الدوال φ و ψ هي مضاعفات بعضها البعض و فقط في هذه الحالة. متراجحة Schwarz تضمن أن التكامل لمربع الدالة الموجية يحدد الجداء السلمي المتقارب قطعا إذا كانت الدوال φ و ψ هي دوال ذات مربع قابل للجمع بالإضافة إلى كونه خطي و يمكننا تحديد الجداء السلمي, الفضاء الدالي للمربع القابل للجمع لديه خاصية كونه كامل, و هذا ما يعطينا تحديد لفضاء Hilbert. كونه كامل يعني أن كل متتالية لدالة ذات مربع قابل للجمع تحقق معيار كوشي, متقاربة لدالة ذات مربع قابل للجمع. تكافئيا, كل دالة ذات مربع قابل للجمع نستطيع اعتبارها كنهاية لمتتالية متقاربة بمفهوم كوشي للدوال ذات المربع القابل للجمع (الاستمرارية).

د)- تعريف الحالات و تكوين فضاء Hilbert, ع:

في بعض الأحيان نحسب المتغيرات (الملاحظة) الخاصة بنظامنا الكمي و نضع علاقاتها للتبادل يجب التعريف بمختلف

الحالات الديناميكية الممكنة: يجب تكوين فضاء Hilbert بحيث تشمل كل المتغيرات. من الكافي هنا إعطاء نظام أشعة أساس لهذا الفضاء, ثم تعريف كل متغير بعمله على أشعة الأساس. يجب ضمان, بالطبع بأن كل المؤثرات تمثل مقادير فيزيائية, التي نعرفها بهذه الطريقة؛ هي حقيقة مقادير ملاحظة و أن قواعد الجبر لهذه المقادير هي حقيقة محترمة. لنعرف نظام الأساس, نستخرج لكل جمع المتغيرات مجموعة كاملة للمقادير الملاحظة و التي تتبادل $A, B, C, \ldots$. على التوالي كل مجموعة للمقادير الذاتية $a, b, c, \ldots$ لهذه المتغيرات تعرف شعاع من ζ إلى ثابت بـ : تثبيت كيفي لهذا الثابت, نحصل على شعاع ممثل معين $|a, b, c, \ldots\rangle$.مجموعة الأشعة $|a, b, c, \ldots\rangle$ نحصل عليها بفعل تغير كل قيمة من القيم الذاتية $a, b, c, \ldots$ في كل أنحاء الطيف على الترتيب (تخص) $A, B, C, \ldots$ تشكل نظام متعامد كامل للفضاء ζ إذا ثبتنا إستنظام الأشعة $|a, b, c, \ldots\rangle$ بطريقة ملائمة, بالإستنظام للوحدة لكل الأشعة ذات النظيم الغير منتهي هي نظام شبه جيبي كامل لـ ζ. نحصل إذن على نظام أساس لـ ζ من خلال إعطاء الطيف على الترتيب للمقادير الملاحظة $A, B, C, \ldots$, يبقى إذن لضبط مختلف المقادير الملاحظة الأخرى العرضة لتمثيل المقادير الفيزيائية الاعتبار الوحيد لعلاقات التبادل تعطى على العموم لـ :

(1)- التأكد من أن المجموعة $A, B, C, \ldots$ تشكل مجموعة كاملة من المقادير الملاحظة التي تتبادل فيما بينها

(2)- تحديد طيفها على الترتيب

(3)- تثبيت عمل المقادير الملاحظة الأخرى على نظام الأساس

بعبارة أخرى, معرفة جبر المقادير الملاحظة للنظام كاف تقريبا دائما لتحديد كيفية عمل الفضاء ζ. ثم يبقى التأكد من التداخل الداخلي أيضا للبنية المحددة بمعنى التحقق من أن المؤثرات الممثلة للمقادير الفيزيائية هي حقيقة مقادير ملاحظة. نلاحظ في هذه المرحلة, أن النظرية تضفي إلى ضبط تجريبي. المقادير الفيزيائية تحدد مبدئيا بالمؤثرات المقاسة بدقة و طيفها يمكن الوصول إليه مباشرة من التجربة من اللازم أن يكون الطيف نظري؛ بمعنى طيف القيم الذاتية للمقادير الملاحظة تتزامن مع الطيف التجريبي.

3)- بناء معادلة Schrödinger[1]:

أ)- قانون انحفاظ عدد الجسيمات المادية:

الدراسات الفيزيائية كلها تصل إلى حقيقة واحدة ألا و هي تشابه الخصائص بين الضوء و المادة على العموم عدد الجسيمات الأساسية للمادة يبقى ثابت. و تشير الدراسات في الفيزياء الذرية إلى صحة هذا القانون المهم (قانون الانحفاظ) .

ب)- الحاجة إلى معادلة موجة و شرط وضعها:

الشدة في نقطة و في لحظة معطاة للموجة لجسيم تعطي احتمال إيجاده في هذه النقطة و في تلك اللحظة. بصفة عامة نسلم بأن الدالة الموجية ψ لنظام كمي تحدد كليا حالته الديناميكية بمعنى أن كل التوقعات لمختلف الخصائص الديناميكية للنظام في لحظة t معطاة تستنتج من معرفة ψ في هذه اللحظة. المشكل الرئيسي في هذه النظرية هو التالي: معرفة دالة الموجة في لحظة ابتدائية معطاة t_0 يحدد هذه الدالة من أجل $t \geq t_0$. للقيام بذلك يجب علينا معرفة معادلة الانتشار للموجة ψ. ككل معادلة للفيزياء الرياضية, يجب أن تفرض و تبريرها الوحيد في نجاحها في مواجه ة تنبؤاتها للنتائج التجريبية. مع ذلك اختيار معادلة الموجة محدود بعدد معين من الشروط المسبقة إذا أردنا الاحتفاظ ب ψ المترجمة و المحددة سابقا.

أ)- المعادلة يجب أن تكون خطية و متجانسة

ب)- يجب أن تكون معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالنسبة للزمن, كذلك, معرفة ψ في لحظة ابتدائية كاف لمعرفة و تحديد تطورها بعد هته اللحظة تطابقا مع فرضية أن الحالة الديناميكية للنظام الفيزيائي تحدد تماما بإعطاء ψ. من جهة أخرى توقعات النظرية يجب أن تتماشى مع ميكانيك Newton .

ج)- القاعدة العامة لشكل معادلة Schrödinger بمبدأ التطابق:

نعمم عملية التطابق, نستطيع تكوين طريقة تنظيمية لشكل معادلة Schrödinger المطبقة على أنظمة جد معممة. نعتبر نظام ديناميكي كلاسيكي له معادلات حركة مستنتجة من دالة Hamilton:

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, \mathrm{p}_n)$$

هذه الدالة تتعلق بالإحداثيات $q_1, q_2, \dots, q_n$ للنظام في فضاء التراتيب و كميات حركتها على الترتيب

$p_1, p_2, \dots, p_n$ و لزمن t الطاقة الكلية E للنظام هي :

$$E = H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n; t)$$

نوفق بين هذا النظام الكلاسيكي و ميكانيك الكم بأن له الحالة الديناميكية $\psi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ المحددة في

فضاء التراتيب و يملك المعادلة الموجية المتحصل عليها في الحقيقة من معادلات الاستبدال التالية :

$$q_i \longrightarrow q_i$$

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$p_j \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \; ; j = 1,2, \dots, n$$

و نكتب هاتين الكميتين باعتبارهما مؤثران يعطيان نتائج مساوية عند تطبيقهما على ψ. المعادلة المحصلة كذلك هي

معادلة Schrödinger للنظام الكمي الموافق:

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \Psi(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \dots, \mathrm{q}_\mathrm{n}; \mathrm{t}) = \mathrm{H}(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \dots, \mathrm{q}_\mathrm{n}; \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}_1}, \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}_2}, \dots, \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}_\mathrm{n}}; \mathrm{t})\Psi$$

المؤثر $\widehat{\mathrm{H}}$ يحمل اسم Hamiltonien النظام المعتبر .

الفصل الثاني

التناظر $SO(3)$

1)- فضاء الحالات و زمر التناظر:

أ)- التناظر في الفيزياء[2]:

لكل نظام فيزيائي في ميكانيك الكم فضاء Hilbert, $\mathcal{H}$ الخاص به. حالة نقية لنظام هي شعاع من $\mathcal{H}$ ذو نظيم مختار يسمى $|\psi\rangle$, ديناميكية النظام يحكمها مؤثر Hamilton, $\widehat{H}$ من خلال معادلة Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \widehat{H}|\Psi(t)\rangle$$

التحولات التي يخضع لها النظام الموافق للمؤثرات في فضاء الحالات, لما نرفق المقادير الفيزيائية بمقادير ملاحظة, مؤثرات خطية هيرميتية لها القيم الذاتية التي تسمح بقياس هته المقادير. إذاكان النظام ثابت بالنسبة لفئة معينة من التحويلات الفيزيائية, سيكون من نفس شعاع الحالة. نقول أن هذه التحويلات تناظرية و تكون زمرة لها تمثيل في $\mathcal{H}$ ليس بالضرورة تمثيل خطي: في الحقيقة في ميكانيك الكم فقط مربع نظيم شعاع الحالة يملك معنى فيزيائي لا نستطيع إذن تمييز شعاعين للحالة يتعلقان ببعضهما و لهما نفس النظيم يجب إذن إدخال فكرة التمثيل الإسقاطي بمعنى تمثيل بطور تقريبي:

$$\forall g_1, g_2 \in G\,,\, \varrho(g_1)\varrho(g_2) = \varrho(g_1 g_2)e^{i\Phi(g_1,g_2)}$$

أين Φ هي دالة من $G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ والتي تحقق قانون معين بسبب قانون التجميع الخاص بالزمرة نستطيع رغم ذلك تبيين أن التمثيل الإسقاطي لزمرة هو تمثيل خطي لتمديد مركزي للزمرة. كمثال على ذلك تمثيل زمرة Galilée.

الترجمة الاحتمالية لنظيمات أشعة الحالة تعني انحفاظ هذه النظيمات: في الحقيقة $|\langle\psi|\varphi\rangle|^2$ هو احتمال مشاهدة نظام محضر في الحالة $|\varphi\rangle$ في حالة $|\psi\rangle$. لدينا إذن لكل المقادير الملاحظة $\widehat{A}$ و لتناظر S:

$$S|\psi|\hat{A}\varphi\rangle|^2 = |\langle S(\psi)|S(\hat{A})|S(\varphi)\rangle|^2$$

نظرية وصل إليها Wigner في هذا السياق هي كالتالي:

نظرية Wigner: S إذن تمثل بمؤثر وحدوي خطي أو ضد خطي, بحيث:

$$S(|\psi\rangle) = U(g)(|\psi\rangle)\ ; S(\hat{A}) = U(g)\hat{A}U^{+}(g)$$

نقول أن النظام ثابت في التحويل الذي يوافق مؤثر $U(g)$ من $\mathcal{H}$ إذا كان Hamiltonien ناعم غير متغير (ثابت), حيث نكتب:

$$U(g)\hat{H}U^{+}(g) = \hat{H}$$

إذا كان:

$$[\hat{H}, U(g)] = 0$$

إذن نعيد صياغة فكرة تناظر نظام كمي: هو إعطاء زمرة تحويلات و تمثيل إسقاطي وحدوي لهذه الزمرة يتبادل مع Hamiltonien و بعبارة أدق فإن تحويل تناظري يحافظ على الجداء السلمي, ليكن $|\psi\rangle$ و $|\varphi\rangle$ حالتين كميتين للنظام فإن $|\psi'\rangle$ و $|\varphi'\rangle$ صورتاهما على الترتيب حيث أن :

$$\langle\psi'|\varphi'\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle$$

و كمثال على التحويلات التناظرية الدوران في $\mathbb{R}^3$.

ب)- زمرة الدوران في الفضاء:

مجموعة الدورانات R في ثلاثة أبعاد تكون زمرة غير تبديليه بعملية الضرب المعهودة وهذا لتحقيقها لشروط الزمرة:

- أن الضرب قانون تشكيل داخلي:

$$\forall R(\theta), R(\varphi)\epsilon R\ , R(\theta)R(\varphi) = R(\xi); R(\xi)\epsilon R$$

- قانون التجميع:

$$\forall R(\theta), R(\varphi), R(\xi)\epsilon R$$

$$R(\theta)R(\varphi)R(\xi) = \big(R(\theta)R(\varphi)\big)R(\xi) = R(\theta)\big(R(\varphi)R(\xi)\big)$$

- يوجد عنصر حيادي e بحيث :

$$\forall R(\theta)\epsilon R, eR(\theta) = R(\theta)e = R(\theta)$$

- لكل عنصر نظير:

$$\forall R(\theta)\epsilon R, \exists R^{-1}(\theta)\epsilon R; R^{-1}(\theta)R(\theta) = e$$

الدوران في $\mathbb{R}^3$:

- الدوران الأول:

دوران حول المحور (oz) بزاوية ξ يعطي :

$$\vec{\rho} = \rho[\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}]$$

$$\Rightarrow x = \rho\cos(\theta)$$

$$y = \rho\sin(\theta)$$

$$\vec{\rho}' = \rho[\cos(\theta+\xi)\,\vec{i} + \sin(\theta+\xi)\vec{j}]$$

$$\Rightarrow x' = \rho\cos(\theta+\xi) = \rho\cos(\xi)\cos(\theta) - \rho\sin(\xi)\sin(\theta)$$

$$= \cos(\xi)\,x - \sin(\xi)\,y$$

$$y' = \rho\sin(\theta+\xi) = \rho\cos(\xi)\sin(\theta) + \rho\sin(\xi)\cos(\theta)$$

$$= \sin(\xi)\,x + \cos(\xi)\,y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\xi)\,x - \sin(\xi)\,y \\ \sin(\xi)\,x + \cos(\xi)\,y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\xi) & -\sin(\xi) & 0 \\ \sin(\xi) & \cos(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

لو اعتبرنا أن ψ مقدار تفاضلي فنحصل على:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \xi y \\ \xi x + y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi(x', y', z') = \psi(x - \xi y, \xi x + y, z)$$

نطبق نشر Taylor من الدرجة الأولى:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{x-x_0}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} + \frac{y-y_0}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}$$

فنجد :

$$\psi(x',y',z') = \psi(x,y,z) - \xi\left[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right]\psi(x,y,z)$$
$$= \left[1 - i\xi\frac{L_z}{\hbar}\right]\psi(x,y,z) = e^{-i\xi\frac{L_z}{\hbar}}\psi(x,y,z)$$

الدوران الثاني حول (oy) بزاوية φ و الثالث حول (ox) بزاوية θ يتم بإتباع نفس الخطوات, فنجد:

$$(2)\quad \psi(x',y',z') = \psi(x,y,z) - \varphi\left[z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right]\psi(x,y,z)$$
$$= \left[1 - i\varphi\frac{L_y}{\hbar}\right]\psi(x,y,z) = e^{-i\varphi\frac{L_y}{\hbar}}\psi(x,y,z)$$
$$(3)\quad \psi(x',y',z') = \psi(x,y,z) - \theta\left[y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right]\psi(x,y,z)$$
$$= \left[1 - i\theta\frac{L_x}{\hbar}\right]\psi(x,y,z) = e^{-i\theta\frac{L_x}{\hbar}}\psi(x,y,z)$$

حاصل هته الدورانات هو :

$$R(\theta,\varphi,\psi) = e^{-i\vec{a}\frac{\vec{L}}{\hbar}}\ ;\ \vec{a} = \theta\vec{i} + \varphi\vec{j} + \psi\vec{k}$$

ج)- زمر Lie[3]:

قبل الخوض في زمر Lie نعطي بعض التعريفات التي تخص الزمرة .

تعريف : زمرة جزئية H من G هي مجموعة جزئية من G تكون زمرة تحت قانون تشكيل الزمرة .

نظرية : إذا كانت $H_1 \epsilon G$ و $H_2 \epsilon G$ زمر جزئية من G إذن $H_{12} = H_1 \cap H_2$ هي زمرة جزئية من G .

تعريف: زمرة Lie هي مجموعة مصفوفات مزودة بقانون ضرب المصفوفات تكون زمرة, بحيث تخضع لقيد معين.

- الزمر الخطية العامة $GL(n,F)$: تتكون من المصفوفات ذات n سطر و n عمود فوق حقل الأعداد F و التي تحقق العلاقة :

$$\forall M \in GL(n,F), \det M \neq 0$$

في حالتنا نأخذ $F = \mathbb{R}$.

- الزمر المتعامدة $O(n)$: هي زمرة جزئية من$GL(n,F)$ تحت القيد:

$$\forall M \in O(n), M^{+}M = I_n$$

- الزمر الوحدوية $SL(n,\mathbb{R})$: هي زمرة جزئية من $GL(n,\mathbb{R})$ تحت القيد :

$$\forall M \in SL(n,\mathbb{R}), \det M = 1$$

على غرار هذا نعرف لزمرة $SO(n,\mathbb{R})$ بالشكل التالي :

$$SO(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{R}) \cap O(n)$$

- الزمرة $SO(3)$: هي زمرة مصفوفات 3×3 بحيث :

$$\forall M \in SO(3), \begin{cases} \det M = 1 \\ M^{+}M = I_n \end{cases}$$

د)- جبر Lie لـ $SO(3)$:

لدينا مولدات $SO(3)$ هي المجموعة $\{A_i\}_{i=1,2,3}$ بحيث :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3$$

$$[A_2, A_3] = A_2A_3 - A_3A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

$$[A_3, A_1] = A_3A_1 - A_1A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2$$

$$\Longrightarrow [A_i, A_j] = \varepsilon_{ijk} A_k$$

ولدينا :

$$R(\theta,\varphi,\psi) = e^{-i\vec{a}\frac{\vec{L}}{\hbar}}$$

دالة expentiel تصل بين زمرة Lie و جبر Lie و هي تمثيل في فضاء Hilbert, إذن نقول تعديا أن

$\{L_i\}_{i=1,2,3}$ هي مولدات زمرة الدوران, ولدينا علاقات التبادل للعزم الحركي هي:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$$

وهي نفسها جبر Lie للزمرة $SO(3)$ بمعامل تناسب $i\hbar$ إذن نقول أن زمرة الدوران في $\mathbb{R}^3$ هي $SO(3)$.

2)- دالة الموجة لذرة الهيدروجين[3]:

استنتاج Schrödinger لمعادلة الموجة لجسيم ذو كتلة m بدأ بعلاقة الانتشار (التشتت) النسبية لجسيم حر:

$$P^{\mu}P_{\mu} = (mc^2)^2 \qquad (1Hy)$$

بدلالة الطاقة E و مركبات كمية الحركة الثلاثية البعد هي:

$$E^2 = \left(\vec{P}c\right)^2 = (mc^2)^2 \qquad (2Hy)$$

تفاعل جسيم ذو شحنة q مع حقل مغناطيسي يوصف بمبدأ الربط الكهرومغناطيسي الأدنى:

$$P_{\mu} \longrightarrow \pi_{\mu} = P_{\mu} - \frac{q}{c}A_{\mu} \qquad (3Hy)$$

أين الكمون الرباعي A يتكون من الكمون السلمي ϕ و الكمون الشعاعي A. وهي تخضع للقوانين:

$$E = \overrightarrow{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$$

لإلكترون $q = -e$, أين e هي شحنة البروتون الموجبة بالتعريف. في حقل Colomb المنشأ من طرف البروتون :

$$A = 0 \quad , \quad \phi = -\frac{e}{r}$$

لهذا السبب $E \longrightarrow E + \frac{e^2}{r}$. r هنا هو المسافة إلكترون - بروتون. فرضية Schrödinger لتحويل علاقة

الانتشار لدالة موجة بتبديل $\vec{P} \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ و السماح للمعادلة الناتجة بالعمل في فضاء الدوال $\psi(\vec{r})$ هذه الفرضية

تنتج في معادلة Klein-Gordon:

$$\left\{E^2 - (mc^2)^2 + 2E\frac{e^2}{r} + \left(\frac{e^2}{r}\right)^2 - \left(-i\hbar c\vec{\nabla}\right)\right\}\Psi = 0 \qquad (4Hy)$$

هذه المعادلة تخضع لتناظر كروي بالمعنى الذي لا يغير من الشكل تحت الدوران:

$$\langle S'|H|S'\rangle = \langle S|H|S\rangle$$

أين $\langle S'|S\rangle \epsilon SO(3)$. Schrödinger حل هذه المعادلة, مقارنة توقعاتها بطيف قياسات الطاقة لذرة

الهيدروجين, لم يوثق نظريته و دفن هذا التقريب في درج مكتبه. و في وقت لاحق أعاد النظر في هذا الحساب و أخذ

نهايته اللانسبية. منذ ذلك الحين طاقة الربط هي حوالي 13,6 ev و الطاقة السكونية للإلكترون mc^2 حوالي

51000 ev, فمن المنطقي كتابة : $E = mc^2 + w$, أين الجزء الرئيسي للطاقة النسبية E هو الطاقة

السكونية للإلكترون و الطاقة اللانسبية w هو اضطراب صغير من رتبة $(\simeq 0,0025\%)$ تحت هذا الاستبدال,

و إهمال شرط الترتيب $\frac{1}{mc^2}\left(w + \frac{e^2}{r}\right)^2$, نتحصل على الصيغة اللانسبية للمعادلة (4Hy) , معادلة Schrödinger:

$$\left\{\frac{\vec{P}\vec{P}}{2m} - \frac{e^2}{r} - w\right\}\psi(\vec{r}) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{e^2}{r} - w\right\}\psi(\vec{r}) = 0 \qquad (5Hy)$$

أ)- شروط التكميم:

التقريب الافتراضي لحل معادلات الاشتقاق الجزئي هي بفصل المتغيرات. بما أن المعادلتين السابقتين تملكان تناظر كروي

من المفيد إدخال الإحداثيات الكروية. التناظر الكروي ناتج عن أن $[H, \vec{L}] = \vec{0}$.

المبدل: نعرف مبدل مؤثرين A و B على أنه:

$$[A, B] = AB - BA$$

خصائص المبدل:

$$[A, B] = -[B, A]$$
$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$$
$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

علاقات التبادل الأساسية هي:

$$[q_i q_j] = 0 \,, [p_i p_j] = 0 \,, [q_i p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{r} \times \vec{\nabla} = \left[(yp_z - zp_y)\vec{\imath} + (zp_x - xp_z)\vec{\jmath} + (xp_y - yp_x)\vec{k}\right]$$

لدينا Hamiltonien ذرة الهيدروجين هو:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q^2}{r}$$

حيث أن:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \,, q^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$
$$[\vec{L}, H] = \frac{1}{2m}\left([\vec{L}, {p_x}^2] + [\vec{L}, {p_y}^2] + [\vec{L}, {p_z}^2]\right) + q^2\left[\vec{L}, \frac{1}{r}\right]$$
$$[\vec{L}, {p_x}^2] = [L_x, {p_x}^2] + [L_y, {p_x}^2] + [L_z, {p_x}^2]$$
$$[L_x, {p_x}^2] = [yp_z, {p_x}^2] - [zp_y, {p_x}^2] = 0$$
$$[L_y, {p_x}^2] = [zp_x, {p_x}^2] - [xp_z, {p_x}^2] = -[x, {p_x}^2]p_z$$
$$= -([x, p_x]p_x + p_x[x, p_x])p_z = -i2\hbar p_x p_z$$
$$[L_z, {p_x}^2] = [xp_y, {p_x}^2] - [yp_x, {p_x}^2] = [x, {p_x}^2]p_y$$
$$= ([x, p_x]p_x + p_x[x, p_x])p_y = i2\hbar p_x p_y$$

$$[\vec{L}, p_y{}^2] = [L_x, p_y{}^2] + [L_y, p_y{}^2] + [L_z, p_y{}^2]$$

$$[L_x, p_y{}^2] = [yp_z, p_y{}^2] - [zp_y, p_y{}^2] = [y, p_y{}^2]p_z$$

$$= ([y, p_y]p_y + p_y[y, p_y])p_z = i2\hbar p_y p_z$$

$$[L_y, p_y{}^2] = [zp_x, \mathrm{p}_y{}^2] - [xp_z, p_y{}^2] = 0$$

$$[L_z, p_y{}^2] = [xp_y, p_y{}^2] - [yp_x, p_y{}^2] = -[y, p_y{}^2]p_x$$

$$= ([y, p_y]p_y + p_y[y, p_y])p_x = -i2\hbar p_x p_y$$

$$[\vec{L}, p_z{}^2] = [L_x, p_z{}^2] + [L_y, p_z{}^2] + [L_z, p_z{}^2]$$

$$[L_x, p_z{}^2] = [yp_z, p_z{}^2] - [zp_x, p_z{}^2] = -[z, p_z{}^2]p_y$$

$$= -([z, p_z]p_z + p_z[z, p_z])p_y = -i2\hbar p_y p_z$$

$$[L_y, p_z{}^2] = [zp_x, p_z{}^2] - [xp_z, p_z{}^2] = [z, p_z{}^2]p_x$$

$$= ([z, p_z]p_z + p_z[z, p_z])p_x = i2\hbar p_x p_z$$

$$[L_z, p_z{}^2] = [xp_y, p_z{}^2] - [yp_x, p_z{}^2] = 0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[L_x, \frac{1}{r}\right] = \frac{i}{\hbar}\left(\left[yp_z, \frac{1}{r}\right] - \left[zp_y, \frac{1}{r}\right]\right) = \frac{i}{\hbar}\left(y\left[p_z, \frac{1}{r}\right] - z\left[p_y, \frac{1}{r}\right]\right)$$

$$= -\frac{yz}{r^3} + \frac{zy}{r^3} = 0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[L_y, \frac{1}{r}\right] = \frac{i}{\hbar}\left(\left[zp_x, \frac{1}{r}\right] - \left[xp_z, \frac{1}{r}\right]\right) = \frac{i}{\hbar}\left(z\left[p_x, \frac{1}{r}\right] - x\left[p_z, \frac{1}{r}\right]\right)$$

$$= -\frac{zx}{r^3} + \frac{xz}{r^3} = 0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[L_z, \frac{1}{r}\right] = \frac{i}{\hbar}\left(\left[xp_y, \frac{1}{r}\right] - \left[yp_x, \frac{1}{r}\right]\right) = \frac{i}{\hbar}\left(x\left[p_y, \frac{1}{r}\right] - y\left[p_x, \frac{1}{r}\right]\right)$$

$$= -\frac{xy}{r^3} + \frac{yx}{r^3} = 0$$

$$\Longrightarrow [\vec{L}, H] = \frac{1}{2m}(0 - i2\hbar p_x p_z + i2\hbar p_x p_y + i2\hbar p_y p_z + 0 - i2\hbar p_x p_y$$

$$-i2\hbar p_y p_z + i2\hbar p_x p_z + 0) + 0 = \vec{0}$$

في الإحداثيات الكروية (r,θ,φ) لدينا:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\mathcal{L}^2(S^2)}{r^2} \qquad (6Hy)$$

$$\mathcal{L}^2(S^2) = \frac{1}{sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad (7Hy)$$

المؤثر التفاضلي من الدرجة الثانية $\mathcal{L}^2(S^2)$ هو Laplacien في الكرة S^2.المعادلات التفاضلية للتفاضل الجزئي (5Hy) يتم تخفيضها إلى تفاضل جزئي بسيط باستبدال Ansatz:

$$\Psi(r,\theta,\varphi) \longrightarrow \frac{1}{r}R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \qquad (8Hy)$$

في المعادلة, نستبدل الجزء الزاوي لـ Laplacien بالقيمة الذاتية $\{-l(l+1)\}$:

$$\mathcal{L}^2(S^2)Y_{lm}(\theta,\varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

و نضرب من اليسار في r فتعطينا:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2me^2}{\hbar^2 r} + \frac{2mw}{\hbar^2}\right)R(r) = 0$$

وهي من الشكل:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r} + C\right)R(r) = 0 \qquad (9Hy)$$

يوجد إجراء افتراضي لحل المعادلات التفاضلية المألوفة البسيطة للنوع الموجود في المعادلة (9Hy) وهي طريقة :Frobenius

	Procedure	Result
1	Locate singularities	$0, \infty$
2	Determine analytic behavior at singular points	$r \to 0: \quad R \simeq r^{\gamma}, \ \gamma(\gamma-1)+A=0$ $r \to \infty: R \simeq e^{\lambda r}, \ \lambda^2 + C = 0$
3	Keep only $\mathcal{L}^2$ solutions	$\gamma = \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - A}, \ \lambda = -\sqrt{-C}$
4	Look for solutions with proper asymptotic behavior	$R = r^{\gamma} e^{\lambda r} f(r)$
5	Construct differential equation for $f(r)$	$\left[\left(rD^2 + 2\gamma D\right) + (2\lambda\gamma + B + 2\lambda r D)\right] f(r) = 0$
6	Construct recursion relation	$f_{j+1} = -\dfrac{2\lambda(j+\gamma)+B}{j(j+1)+2\gamma(j+1)} f_j$
7	Look at asymptotic behavior	$f \simeq e^{-2\lambda r}$ if series does not terminate $\simeq e^{+1\lambda r}$ if series does terminate $(\lambda < 0)$
8	Construct quantization condition	$2\lambda(n+\gamma) + B = 0$ or $n + \dfrac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - A} = \dfrac{B}{2\sqrt{-C}}$
9	Construct explicit solutions	$E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1+(\alpha/N')^2}}, \ W = -\dfrac{1}{2} mc^2 \alpha^2 \dfrac{1}{N^2}$ $N' = n + \frac{1}{2} + \sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 - \alpha^2}, \quad N = n + l + 1$

ب)- التناظر الهندسي $SO(3)$ [3]:

التناظر يعني التوالد, لرؤية هذا, نفترض أن $g_i \in G$ زمرة المؤثرات التي تجعل Hamiltonien, H ثابت (لا يتغير في الشكل):

$$g_i H g_i^{-1} = H \quad \text{أو} \quad g_i H = H g_i$$

$$\Longrightarrow [g_i, H] = 0$$

عندما تكون G زمرة التحويلات الهندسية الترجمة الفيزيائية لهذه المعادلة سنطرحها فيما يلي. Hamiltonien, H يملك نفس صيغة نظامين للإحداثيات الذي يختلف بمؤثر الزمرة g_i تحت هذا الشرط إذا كان $|\Psi\rangle$ حالة ذاتية لـ H

مع القيمة الذاتية E إذن $g_i|\Psi\rangle$ هي أيضا حالة ذاتية لـ H بنفس القيمة الذاتية E. البرهان بسيط:

$$H(g_i|\Psi\rangle) = (Hg_i)|\Psi\rangle = (g_iH)|\Psi\rangle = g_i(H|\Psi\rangle) = g_i(E|\Psi\rangle)$$
$$= E(g_i|\Psi\rangle)$$

بثبات Hamiltonien تحت زمرة الدوران و مبدأ التكافؤ هته الدوال الجديدة تصف حالات ممكنة للنظام و هذه الحالات يجب أن تكون موجودة.

مؤثرات الدوران O(3) تجعل من Hamiltonien ذرة الهيدروجين ثابت.مؤثرات الدوران نستطيع التعبير عنها في صيغ مولدات تفاضلية للدوران حول المحاور i

$$\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k$$

مؤثرات العزم الزاوي الفيزيائية:

$$\vec{L} = (\vec{r}\times\vec{p})_i = \frac{\hbar}{i}\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k$$

الدوران المحدد يمكن أن نعبر عنه كـ expentiel كما يلي:

$$R(\theta) = exp\left(\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k\right) = e^{i\theta\frac{l}{\hbar}}$$

مؤثر العزم الزاوي $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ يساهم ينفس علاقات التبديل للمولدات التفاضلية للدوران $\vec{r}\times\vec{\nabla}$, حتى معامل التناسب $\frac{\hbar}{i}$.

من المفيد بناء مجموعات خطية لهته المؤثرات التي تمتلك علاقات تبادل قانونية تحقيقا لهذه الغاية نعرف المؤثرات L_+ و L_- بحيث:

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \qquad (1L)$$

مؤثرات العزم الزاوي هذه تتعلق بمؤثري Boson كما يلي:

$$L_z = \frac{\hbar}{2}(a_1{}^+a_1 - a_2{}^+a_2)$$
$$L_+ = \hbar a_1{}^+a_2$$

$$L_- = \hbar a_2{}^+ a_1$$

و كنتيجة مؤثرات العزم الزاوي تملك تمثيل مصفوفي مع أشعة الأساس: $|n_1, n_2\rangle = \left|{j \atop m}\right\rangle$ بحيث:

$$n_1 - n_2 = 2m\,, n_1 + n_2 = 2j\ ;\ n_1, n_2 \in \mathbb{N}\,, -j \le m \le j$$

لرؤية هذا نتطرق إلى نظرية العزم الحركي.

ب-1)- نظرية العزم الحركي[4]:

تعريفات و تدوين:

لهذا الغرض ندخل المؤثرات L_+ و L_- السابقة الذكر, هذه المؤثرات تحقق علاقات التبادل :

$$[L_z, L_+] = \hbar L_+ \qquad (2L)$$

$$[L_z, L_-] = \hbar L_- \qquad (3L)$$

$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z \qquad (4L)$$

$$[L^2, L_+] = [L^2, L_-] = [L^2, L_z] = 0 \qquad (5L)$$

ضرب المؤثرين L_+ و L_- يعطي :

$$L_+L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) = L_x{}^2 + L_y{}^2 - i[L_x, L_y]$$

$$= L_x{}^2 + L_y{}^2 + \hbar L_z \quad (L6-a)$$

$$L_-L_+ = (L_x - iL_y)(L_x + iL_y) = L_x{}^2 + L_y{}^2 + i[L_x, L_y]$$

$$= L_x{}^2 + L_y{}^2 - \hbar L_z \quad (L6-b)$$

$$\Longrightarrow L_+L_- = L^2 - L_z{}^2 + \hbar L_z \quad (7L-a)$$

$$L_-L_+ = L^2 - L_z{}^2 - \hbar L_z \quad (7L-b)$$

$$\Longrightarrow L^2 = \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z{}^2 \quad (8L)$$

أ)- ترميز القيم الذاتية لـ $\mathbf{L}^2$ و L_z:

وفقا لتعريف L^2: هو مجموع مربعات ثلاث مؤثرات هيرميتية, بناءا على ذلك لكل ket, $|\psi\rangle$ عناصر المصفوفة

$\langle\psi|L^2|\psi\rangle$ هي أكبر أو تساوي الصفر:

$$\langle\psi|L^2|\psi\rangle = \langle\psi|{L_x}^2|\psi\rangle + \langle\psi|{L_y}^2|\psi\rangle + \langle\psi|{L_z}^2|\psi\rangle$$
$$= \|L_x|\psi\rangle\|^2 + \left\|L_y|\psi\rangle\right\|^2 + \|L_z|\psi\rangle\|^2 \geq 0 \qquad (9L)$$

نلاحظ أن هذا متوقع بما أن L^2 يوافق مربع القيم المطلقة للعزم الحركي. من هذا نرى بخاصة أن القيم الذاتية لـ L^2 هي موجبة أو معدومة, بما أنه إذا كان $|\psi\rangle$ هو قيمة ذاتية لـ L^2, $\langle\psi|L^2|\psi\rangle$ هو الجداء للقيمة الذاتية الموافقة و مربع نظيم $|\psi\rangle$ الذي هو دائما موجب سنكتب القيمة الذاتية لـ L^2 على شكل $j(j+1)\hbar^2$ مع الشرط:

$$j \geq 0 \qquad (10L)$$

هذا الترميز قصد تبسيط البراهين التي تلي و ليس له أثر في النتيجة. بما أن $\vec{L}$ يملك بعد $\hbar$, قيمة ذاتية لـ L^2 بالضرورة هي من الشكل $\hbar^2$ أين λ يجب أن يكون موجب أو معدوم. نستطيع التأكد بسهولة من أن المعادلة من الدرجة الثانية لـ j:

$$j(j+1) = \lambda \qquad (11L)$$

تمتلك دوما وفقط جذر واحد موجب أو معدوم من ثم, إذا استعملنا كون $j \geq 0$ فإن مواصفات λ تحدد j وحيدة: كل قيمة ذاتية لـ L^2 نستطيع أن نكتبها من الشكل $j(j+1)\hbar^2$ مع $j \geq 0$ أما فيما يتعلق بالقيم الذاتية لـ L_z. أين لدينا بعد $\hbar$ نفسه, تترجم إلى الكتابة $m\hbar$ أين m هو عدد بدون وحدة .

ب)- معادلات القيم الذاتية لـ L^2 و L_z:

سوف نصنف الأشعة الذاتية لـ L^2 و L_z بالرموز j و m التي تميز القيم الذاتية المشتركة لكن L^2 و L_z لا تشكل C.S.C.O ومن المهم إدخال رمز ثالث في الترتيب للتمييز بين مختلف الأشعة الذاتية الموافقة للقيم الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ و $m\hbar$ لـ L^2 و L_z نسمي هذا الرمز k, ومن ثم سنحاول حل معادلات القيم الذاتية المتشابهة:

$$\left.\begin{aligned} L^2|k,j,m\rangle &= j(j+1)\hbar^2|k,j,m\rangle \\ L_z|k,j,m\rangle &= m\hbar|k,j,m\rangle \end{aligned}\right\} \qquad (12L)$$

ج)- القيم الذاتية لـ L^2 و L_z:

سنبدأ ببرهنة ثلاث مبرهنات و التي ستمكننا من تحديد طيف L^2 و L_z.

مبرهنة (1):

إذا كان $j(j+1)\hbar^2$ و $m\hbar$ هي القيم الذاتية المشتركة مع الشعاع الذاتي $|k,j,m\rangle$ إذن j و m تحقق

العلاقة:

$$-j \leq m \leq j \qquad (13L)$$

لبرهان هذا نعتبر الشعاع $L_+|k,j,m\rangle$ و $L_-|k,j,m\rangle$ و نلاحظ أن مربع النظيمات موجب أو معدوم:

$$\|L_+|k,j,m\rangle\|^2 = \langle k,j,m|L_-L_+|k,j,m\rangle \geq 0 \qquad (14L-a)$$
$$\|L_-|k,j,m\rangle\|^2 = \langle k,j,m|L_+L_-|k,j,m\rangle \geq 0 \qquad (14L-b)$$

لحساب الطرف الأيسر لهذه المعادلة نستطيع استعمال الصيغة (6L) فنجد (إذا اعتبرنا أن $|k,j,m\rangle$ مستنظمة):

$$\langle k,j,m|L_+L_-|k,j,m\rangle = \left\langle k,j,m\middle|L^2 - {L_z}^2 - \hbar L_z\middle|k,j,m\right\rangle$$
$$= j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2 \qquad (15L-a)$$
$$\langle k,j,m|L_-L_+|k,j,m\rangle = \left\langle k,j,m\middle|L^2 - {L_z}^2 + \hbar L_z\middle|k,j,m\right\rangle$$
$$= j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 + m\hbar^2 \qquad (15L-b)$$

نستبدل هذه الصيغة في المتراجحة (14L) فنحصل على:

$$j(j+1) - m(m+1) = (j-m)(j+m+1) \geq 0 \qquad (16L-a)$$
$$j(j+1) - m(m-1) = (j-m+1)(j+m) \geq 0 \qquad (16L-b)$$

و هذا هو:

$$-(j+1) \leq m \leq j \qquad (17L-a)$$
$$-j \leq m \leq j+1 \qquad (17L-b)$$

هاذين الشرطين محققين إذا وفقط إذا كان:

$$-j \leq m \leq j$$

مبرهنة (2):

ليكن $|k, j, m\rangle$ شعاع ذاتي لـ L^2 و L_z المرفق بالقيم الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ و $m\hbar$.

(1)- إذا كان $m = -j$ فإن $L_-|k, \mathrm{j}, m\rangle = 0$.

(2)- إذا كان $m > -j$ فإن $L_-|k, j, m\rangle$ هو شعاع ذاتي غير معدوم لـ L^2 و L_z مع القيم الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ و $(m-1)\hbar$.

(1)- وفقا لما ورد في (15L-a), مربع نظيم $L_-|k, j, m\rangle$ يساوي إلى:

$$\hbar^2\big(j(j+1) - m(m-1)\big)$$

و كذلك تساوي الصفر عند $m = -j$. في حين نظيم الشعاع يساوي إلى الصفر إذاا كان هذا الشعاع هو شعاع معدوم نستنتج أن كل الأشعة $L_-|k, j, m\rangle$ معدومة :

$$m = -j \Rightarrow L_-|k, j, m\rangle = 0 \qquad (18L)$$

يمكننا تبيين الاستلزام العكسي :

$$L_-|k, j, m\rangle = 0 \Longrightarrow m = -j \qquad (19L)$$

لنطبق L_+ على كلا الطرفين للمعادلة الظاهرة في (19L) و باستعمال (7L-a) نجد :

$$\hbar^2\big(j(j+1) - m(m-1)\big)|k, j, m\rangle = \hbar^2(j+m)(j-m+1)|k, j, m\rangle$$
$$= 0 \qquad (20L)$$

نستعمل (13L) و (20L) والتي تملك حل وحيد $m = -j$.

(2)- الآن نفترض أن $m > -j$, وفقا لما ورد في (15L-a), $L_-|k, j, m\rangle$ هو أيضا شعاع غير معدوم بما أن مربع نظيمه يختلف عن الصفر. دعنا نتأكد من أنه شعاع ذاتي لـ L^2 و L_z. المؤثرات L^2 و L_z تتبادل بناءا على ذلك:

$$[L^2, L_-]|k,j,m\rangle = 0 \qquad (21L)$$

و التي يمكننا كتابتها من الشكل:

$$L^2 L_-|k,j,m\rangle = L_- L^2|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 L_-|k,j,m\rangle \qquad (22L)$$

هذه العلاقة تعبر على حقيقة أن $L_-|k,j,m\rangle$ هو شعاع ذاتي لـ L^2 مع القيمة الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ علاوة على ذلك, إذا طبقنا المعادلة (3L) على $|k,j,m\rangle$:

$$[L_z, L_-]|k,j,m\rangle = -\hbar L_-|k,j,m\rangle \qquad (23L)$$

$$L_z L_-|k,j,m\rangle = L_- L_z|k,j,m\rangle - \hbar L_z|k,j,m\rangle$$

$$= m\hbar L_-|k,j,m\rangle - \hbar L_-|k,j,m\rangle = (m-1)\hbar L_-|k,j,m\rangle \qquad (24L)$$

$L_-|k,j,m\rangle$ هو إذن شعاع ذاتي لـ L_z بالقيمة الذاتية $(m-1)\hbar$.

مبرهنة (3):

ليكن $|k,j,m\rangle$ شعاع ذاتي لـ L^2 و L_z مع القيمة الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ و $m\hbar$.

(1)- إذا كان $m = j$ فإن $L_+|k,j,m\rangle = 0$.

(2)- إذا كان $m < j$ فإن $L_+|k,j,m\rangle = 0$ هو شعاع ذاتي غير معدوم لـ L^2 و L_z المرفق بالقيمة الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ و $(m+1)\hbar$.

(1)- البرهان مشابه لما سبق في (2L-a-b) وفقا لـ (14L-a) , مربع نظيم $L_+|k,j,m\rangle$ معدوم إذاا كان $m = j$ إذا :

$$m = j \Rightarrow L_+|k,j,m\rangle = 0$$

الاستلزام العكسي يمكن إثباته بنفس الطريقة :

$$m = j \Leftrightarrow L_+|k,j,m\rangle = 0$$

(2)- إذا كان $m < j$, برهان مماثل لما سبق :

$$L^2L_+|k,j,m\rangle = L_-L^2|k,j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2L_+|k,j,m\rangle \qquad (27L)$$
$$L_zL_+|k,j,m\rangle = m\hbar L_+|k,j,m\rangle \qquad (28L)$$

د)- تحديد طيف L^2 و L_z:

سنرى الآن أن المبرهنات السابقة تمكننا من تحديد القيم الممكنة لـ j و m. ليكن $|k,j,m\rangle$ شعاع ذاتي غير معدوم لـ L^2 و L_z مرفقة بالقيم الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ و $m\hbar$ وفقا للمبرهنة (1)؛ $-j \le m \le j$ و من ثم نحن على يقين أنه يوجد عدد صحيح p موجب أو معدوم حيث:

$$-j \le m - p \le -j + 1 \qquad (29L)$$

الآن لنعتبر سلسلة الأشعة:

$$|k,j,m\rangle, L_-|k,j,m\rangle, \dots, (L_-)^p|k,j,m\rangle \qquad (30L)$$

وفقا للمبرهنة (2), كل شعاع $(L_-)^n|k,j,m\rangle$ من هذه السلسلة هو شعاع ذاتي غير معدوم لـ L^2 و L_z مرفقة بالقيم الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ و $(m-n)\hbar$. $(L_-)^n|k,j,m\rangle$ نحصل عليه من تطبيق L_- على $(L_-)^{n-1}|k,j,m\rangle$, الذي هو شعاع ذاتي لـ L^2 و L_z مع القيم الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ و $(m-n+1)\hbar$, القيم الذاتية الأخرى تكون بالتأكيد أكبر من $-j$, بما أنه وفقا لـ (29L):

$$m - n + 1 \ge m - p + 1 \ge -j + 1 \qquad (31L)$$

وفقا للنقطة الثانية في المبرهنة (2), أن $(L_-)^n|k,j,m\rangle$ هو شعاع ذاتي غير معدوم لـ L^2 و L_z القيمة الذاتية الموافقة تصبح $j(j+1)\hbar^2$ و $(m-n)\hbar$. الآن لنطبق L_- على $(L_-)^p|k,j,m\rangle$, دعنا أولا نفترض أن القيمة الذاتية $(m-)\hbar$ لـ L_z التي ترتبط مع $(L_-)^p|k,j,m\rangle$ أكبر من $-j\hbar$, هذا هو:

$$m-p>-j \qquad (32L)$$

باستعمال النقطة الثانية في المبرهنة (2) $L_-(L_-)^p|k,j,m\rangle$ هو أيضا غير معدوم و يوافق القيمة الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ و $(m-n-1)\hbar$ وهي تناقض مع المبرهنة (1) بما أنه وفقا لـ (29L):

$$m-p-1<-j \qquad (33L)$$

يجب إذن امتلاك $m-$ مساواة لـ $-j$, في هذه الحالة $(L_-)^p|k,j,\mathrm{m}\rangle$ توافق القيمة الذاتية $\mathrm{j}-$ لـ L_z, ووفقا للنقطة الأولى من المبرهنة (2) $L_-(L_-)^p|k,j,m\rangle$ معدومة . سلسلة الأشعة (30L) نحصل عليها بتكرار فعل L_- على الشعاع $|k,j,m\rangle$ هو لذلك محدود و التناقض مع المبرهنة (1) يسقط . لنرى الآن أنه يوجد عدد صحيح $p\geq 0$ بحيث :

$$m-p=-j \qquad (34L)$$

تفسير مماثل تماما, يرتكز في المبرهنة (3), نريد أن نرى أنه يوجد عدد صحيح $q\geq 0$ بحيث:

$$m+q=j \qquad (35L)$$

بما أن سلسلة الأشعة:

$$|k,j,m\rangle, L_+|k,j,m\rangle, \dots, (L_+)^p|k,j,m\rangle \qquad (36L)$$

يجب أن تكون محدودة لكي لا تناقض مع المبرهنة (1). نجمع بين (34L) و (35L) فنجد: $p+q=2j$.

إذن $j\in\frac{\mathbb{N}}{2}$, علاوة على ذلك , إذا وجد شعاع غير معدوم $|k,j,m\rangle$, كل أشعة السلسلة (30L) و (36L) هي أيضا أشعة ذاتية غير معدومة لـ L^2 بالقيمة الذاتية $j(j+1)\hbar^2$ و كذلك لـ L_z بالقيم الذاتية:

$$-j\hbar, (-j+1)\hbar, \dots, j\hbar$$

نلخص هذه النتائج من خلال ما يلي :

ليكن L عزم حركي كيفي , يخضع لعلاقات التبادل السابقة . إذا كانت $j(j+1)\hbar^2$ و $m\hbar$ تدل على القيمة الذاتية لـ L^2 و L_z فإن :

- $j\in\frac{\mathbb{N}}{2}$ هو عدد نصف طبيعي

- من أجل قيمة مثبتة لـ j القيم الممكنة لـ m هي $2j+1$ قيمة كما يلي :

$$-j, -j+1, -j+2, \dots, j$$

إذن $-j \le m \le j$ أشعة الأساس هته تصف تمثيل البعد المحدود الغير القابل للاختزال لزمرة التغطية $SU(2)$ لـ $SO(3)$.

المجموعة الجزئية للتمثيل مع $j = l$ (صحيح) تصف تمثيل لـ $SO(3)$.

الدوال في $\mathbb{R}^3$ التي تحول تحت مؤثرات العزم الحركي يمكن أن تكون في الأساس حل المعادلات التفاضلية:

$$L^2 Y_m^l(\theta, \varphi) = \hbar^2 j(j+1) Y_m^l(\theta, \varphi)$$
$$L_z Y_m^l(\theta, \varphi) = m\hbar Y_m^l(\theta, \varphi)$$
$$L_\pm Y_m^l(\theta, \varphi) = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, Y_m^l(\theta, \varphi)$$

نعطي في الجدول التالي بعض الحالات للدالة $Y_m^l(\theta, \varphi)$:

m	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
0	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$	$\sqrt{\frac{7}{16\pi}}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
±1		$\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$	$\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$	$\mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)\, e^{\pm i\phi}$
±2			$\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi}$	$\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\sin^2\theta\cos\theta\, e^{\pm 2i\phi}$
±3				$\mp\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\sin^3\theta\, e^{\pm 3i\phi}$

الجدول: يوضح التوافقيات الكروية $Y_m^l(\theta, \varphi)$ لذرة الهيدروجين لقيم صغيرة لـ l و m.

الفصل الثالث

التناظر الحركي $SO(4)$

1)- تقديم[3]:

التناظر يعني التوالد , التناظر الأعظم:

الحالات اللانسبية لذرة الهيدروجين بثبات عدد الكم الرئيسي $N = n + l + 1$ متوالد بطاقة

$E_N = \frac{mc^2\alpha^2}{2}\frac{1}{N^2}$. هناك $\sum_{l=0}^{l=N-1}(2l+1) = N^2$ حالة بهذه الطاقة. يوجد إذن N^2 تضاعف مولد

وهو أكبر من $2l + 1$ تضاعف مولد مطلوب من قبل ثبات الدوران لـ Hamiltonien. إذا افترضنا العكس, أن

التوالد يعني التناظر, إذن يمكن أن تقودنا إلى توقع أن الهيدروجين أو ذرة الهيدروجين تخضع لتناظر أكثر مما تراه العين.

في الحقيقة هذا التناظر الديناميكي (الحركي), موجود و يتعلق بثبات الحركة $\frac{1}{r^2}$ قانون القوة. ثابت الحركة يعرف

بشعاع Laplace-Reng-Lenz. وهو ثابت حركة سطحية غير مضطرب, التي لها قانون القوة من الشكل:

$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$ أين, $k = mGM$, G هو ثابت التجاذب الكوني, m و M هما الكتلتان المتجاذبتان و $\vec{r}$

هو الشعاع الرابط بين الكتلتين . مشتق الزمن بالنسبة لـ $\vec{P} \times \vec{L}$ هو:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P} \times \vec{L}\right) = \frac{d\vec{P}}{dx} \times \vec{L} + \vec{P} \times \frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{k}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times m\vec{v}) + 0$$

$$= -mk\frac{r(\vec{r}.\vec{v}) - (\vec{r}.\vec{r})}{r^3} = mk\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{M}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{P} \times \vec{L}}{2m} - k\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

في العبور من الميكانيك الكلاسيكي إلى ميكانيك الكم نتحصل على المؤثر $\widehat{\vec{M}}$ من المؤثر الكلاسيكي $\vec{M}$ و الذي هو

مؤثر غير هيرميتي. Pauli ناظر ذلك بصورة صحيحة, و عرف المؤثر الكمي الهيرميتي:

$$\overrightarrow{M} = \frac{\vec{P}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{P}}{2m} - k\frac{\vec{r}}{r}$$

حيث وفي حالتنا بالنسبة لذرة الهيدروجين لدينا: $k = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}$, حيث e شحنة البروتون.

2)- معادلات Pauli[5]:

التوالد لعرضي في 1 يكمن في وجود ثابت حركة أي مؤثر Laplace-Runge-Lenz و Pauli السابق الذكر.

نستطيع التأكد و بسهولة من أن:

$$[H, M_j] = 0.$$

البرهان:

$$\overrightarrow{M} = \frac{\vec{P}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{P}}{2m} - k\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{P}\times\vec{L} = (P_yL_z - P_zL_y)\vec{i} + (P_zL_x - P_xL_z)\vec{j} + (P_xL_y - P_yL_x)\vec{k}$$

$$\vec{L}\times\vec{P} = (L_yP_z - L_zP_y)\vec{i} + (L_zP_x - L_xP_z)\vec{j} + (L_xP_y - L_yP_x)\vec{k}$$

$$P_yL_z = P_y(xP_y - yP_x) = i\hbar P_x + L_zP_y$$

$$P_zL_y = P_z(zP_x - xP_z) = -i\hbar P_x + L_yP_z$$

$$P_zL_x = P_z(yP_z - zP_y) = i\hbar P_y + L_xP_z$$

$$P_xL_z = P_x(xP_y - yP_x) = -i\hbar P_y + L_zP_x$$

$$P_xL_y = P_x(zP_x - xP_z) = i\hbar P_z + L_yP_x$$

$$P_yL_x = P_y(yP_z - zP_y) = -i\hbar P_z + L_xP_y$$

$$\Longrightarrow \vec{P}\times\vec{L} = -\vec{L}\times\vec{P} + i2\hbar\vec{P}$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{\vec{P}\times\vec{L} - i\hbar\vec{P}}{m} - k\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\Longrightarrow M_x = \frac{1}{m}(P_yL_z - P_zL_y - i\hbar P_x) - k\frac{x}{r}$$

$$M_y = \frac{1}{m}(P_zL_x - P_xL_z - i\hbar P_y) - k\frac{y}{r}$$

$$M_z = \frac{1}{m}(P_xL_y - P_yL_x - i\hbar P_z) - k\frac{z}{r}$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[P_x{}^2, P_yL_z\right] = \left[P_x{}^2, P_y\right]L_z + P_y\left[P_x{}^2, L_z\right] = -i2\hbar P_xP_y{}^2$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[P_y{}^2, P_yL_z\right] = \left[P_y{}^2, P_y\right]L_z + P_y\left[P_y{}^2, L_z\right] = i2\hbar P_xP_y{}^2$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[P_z{}^2, P_yL_z\right] = \left[P_z{}^2, P_y\right]L_z + P_y\left[P_z{}^2, L_z\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{r}, P_yL_z\right] = \left[\frac{1}{r}, P_y\right]L_z + P_y\left[\frac{1}{r}, L_z\right] = -i\hbar\frac{y}{r^3}L_z$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[P_x{}^2, P_zL_y\right] = \left[P_x{}^2, P_z\right]L_y + P_z\left[P_x{}^2, L_y\right] = i2\hbar P_xP_z{}^2$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[P_y{}^2, P_zL_y\right] = \left[P_y{}^2, P_z\right]L_y + P_z\left[P_y{}^2, L_y\right] = 0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[P_z{}^2, P_zL_y\right] = \left[P_z{}^2, P_z\right]L_y + P_z\left[P_z{}^2, L_y\right] = -i2\hbar P_xP_z{}^2$$

$$\left[\frac{1}{r}, P_zL_y\right] = \left[\frac{1}{r}, P_z\right]L_y + P_z\left[\frac{1}{r}, L_y\right] = -i\hbar\frac{z}{r^3}L_y$$

$$\left[P_x{}^2, P_x\right] = \left[P_y{}^2, P_x\right] = \left[P_z{}^2, P_x\right] = 0\,, \left[\frac{1}{r}, P_x\right] = i\hbar\frac{x}{r^3}\,, \left[\frac{1}{r}, \frac{x}{r}\right] = 0$$

$$\left[H, \frac{x}{r}\right] = [H, \vec{e}_r] = \left[\frac{\vec{L}^2}{2mr^2}, \vec{e}_r\right]$$

$$\left[L^2, \frac{x}{r}\right] = \left[L_x{}^2, \frac{x}{r}\right] + \left[L_y{}^2, \frac{x}{r}\right] + \left[L_z{}^2, \frac{x}{r}\right]$$

$$\left[L_x{}^2, \frac{x}{r}\right] = \left[L_x, \frac{x}{r}\right]L_x + L_x\left[L_x, \frac{x}{r}\right]$$

$$\left[L_x, \frac{x}{r}\right] = [L_x, x]\frac{1}{r} + x\left[L_x, \frac{1}{r}\right] = 0 \Longrightarrow \left[L_x{}^2, \frac{x}{r}\right] = 0$$

$$\left[L_y{}^2, \frac{x}{r}\right] = \left[L_y, \frac{x}{r}\right]L_y + L_y\left[L_y, \frac{x}{r}\right]$$

$$\left[L_y, \frac{x}{r}\right] = [L_y, x]\frac{1}{r} + x\left[L_y, \frac{1}{r}\right]$$

$$\left[L_y, x\right] = [zP_x, x] - [xP_z, x] = -i\hbar z \Longrightarrow \left[L_y{}^2, \frac{x}{r}\right] = -i2\hbar\frac{z}{r}L_y + \hbar^2\frac{x}{r}$$

$$\left[L_z{}^2, \frac{x}{r}\right] = \left[L_z, \frac{x}{r}\right]L_z + L_z\left[L_z, \frac{x}{r}\right]$$

$$\left[L_z,\frac{x}{r}\right]=[L_z,x]\frac{1}{r}+x\left[L_z,\frac{1}{r}\right]$$

$$[L_z,x]=\left[xP_y,x\right]-[yP_x,x]=i\hbar y\Longrightarrow\left[{L_z}^2,\frac{x}{r}\right]=i2\hbar\frac{y}{r}L_z+\hbar^2\frac{x}{r}$$

$$\Longrightarrow[H,M_x]=\frac{1}{m}\left[H,P_yL_z\right]-\frac{1}{m}\left[H,P_zL_y\right]-\frac{i\hbar}{m}[H,P_x]-k\left[H,\frac{x}{r}\right]$$

$$=\frac{\hbar}{i2m^2}\left(-i2\hbar P_x{P_y}^2+i2\hbar P_x{P_y}^2+0\right)-\frac{k}{m}\left(-i\hbar\frac{y}{r^3}L_z\right)$$

$$-\frac{\hbar}{i2m^2}\left(i2\hbar P_x{P_z}^2+0-i2\hbar P_x{P_z}^2\right)+\frac{k}{m}\left(-i\hbar\frac{z}{r^3}L_y\right)-\frac{i\hbar}{2m^2}(0)$$

$$+k\frac{\hbar^2}{m}\frac{x}{r^3}-\frac{k}{2mr^2}\left(0-i2\hbar\frac{z}{r}L_y+\hbar^2\frac{x}{r}+i2\hbar\frac{y}{r}L_z+\hbar^2\frac{x}{r}\right)$$

$$=-\frac{k\hbar}{im}\frac{y}{r^3}L_z+\frac{k\hbar}{im}\frac{z}{r^3}L_y-\frac{k\hbar}{im}\frac{z}{r^3}L_y+\frac{k\hbar}{im}\frac{y}{r^3}L_z+\frac{k\hbar^2}{m}\frac{x}{r^3}-\frac{k\hbar^2}{m}\frac{x}{r^3}=0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[{P_x}^2,P_zL_x\right]=\left[{P_x}^2,P_z\right]L_x+P_z\left[{P_x}^2,L_x\right]=0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[{P_y}^2,P_zL_x\right]=\left[{P_y}^2,P_z\right]L_x+P_z\left[{P_y}^2,L_x\right]=-i2\hbar P_y{P_z}^2$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[{P_z}^2,P_zL_x\right]=\left[{P_z}^2,P_z\right]L_x+P_z\left[{P_z}^2,L_x\right]=i2\hbar P_y{P_z}^2$$

$$\left[\frac{1}{r},P_zL_x\right]=\left[\frac{1}{r},P_z\right]L_x+P_z\left[\frac{1}{r},L_x\right]=-i\hbar\frac{z}{r^3}L_x$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[{P_x}^2,P_xL_z\right]=\left[{P_x}^2,P_x\right]L_z+P_x\left[{P_x}^2,L_z\right]=-i2\hbar P_y{P_x}^2$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[{P_y}^2,P_xL_z\right]=\left[{P_y}^2,P_x\right]L_z+P_x\left[{P_y}^2,L_z\right]=i2\hbar P_y{P_x}^2$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[{P_z}^2,P_xL_z\right]=\left[{P_z}^2,P_x\right]L_z+P_x\left[{P_z}^2,L_z\right]=0$$

$$\left[\frac{1}{r},P_xL_z\right]=\left[\frac{1}{r},P_x\right]L_z+P_x\left[\frac{1}{r},L_z\right]=-i\hbar\frac{x}{r^3}L_z$$

$$\left[{P_x}^2,P_y\right]=\left[{P_y}^2,P_y\right]=\left[{P_z}^2,P_y\right]=0\,,\left[\frac{1}{r},P_y\right]=i\hbar\frac{y}{r^3}\,,\left[\frac{1}{r},\frac{y}{r}\right]=0$$

$$\left[L^2,\frac{y}{r}\right]=\left[{L_x}^2,\frac{y}{r}\right]+\left[{L_y}^2,\frac{y}{r}\right]+\left[{L_z}^2,\frac{y}{r}\right]$$

$$\left[{L_x}^2,\frac{y}{r}\right]=\left[L_x,\frac{y}{r}\right]L_x+L_x\left[L_x,\frac{y}{r}\right]$$

$$\left[L_x,\frac{y}{r}\right]=[L_x,y]\frac{1}{r}+y\left[L_x,\frac{1}{r}\right]=0$$

$$[L_x,y]=[yP_z,y]-\left[zP_y,y\right]=-z\left[P_y,y\right]=i\hbar z\Longrightarrow\left[{L_x}^2,\frac{y}{r}\right]$$

$$=i2\hbar\frac{z}{r}L_x+\hbar^2\frac{y}{r}$$

$$\left[{L_y}^2,\frac{y}{r}\right]=\left[L_y,\frac{y}{r}\right]L_y+L_y\left[L_y,\frac{y}{r}\right]$$

$$\left[L_y,\frac{y}{r}\right]=\left[L_y,y\right]\frac{1}{r}+y\left[L_y,\frac{1}{r}\right]$$

$$\left[L_y,y\right]=[zP_x,y]-[xP_z,y]=0\Longrightarrow\left[{L_y}^2,\frac{x}{r}\right]=0$$

$$\left[{L_z}^2,\frac{y}{r}\right]=\left[L_z,\frac{y}{r}\right]L_z+L_z\left[L_z,\frac{y}{r}\right]$$

$$\left[L_z,\frac{y}{r}\right]=[L_z,y]\frac{1}{r}+y\left[L_z,\frac{1}{r}\right]$$

$$[L_z,y]=\left[xP_y,y\right]-[yP_x,y]=i\hbar x\Longrightarrow\left[{L_z}^2,\frac{x}{r}\right]=-i2\hbar\frac{x}{r}L_z+\hbar^2\frac{y}{r}$$

$$\Longrightarrow\left[H,M_y\right]=\frac{1}{m}[H,P_zL_x]-\frac{1}{m}[H,P_xL_z]-\frac{i\hbar}{m}\left[H,P_y\right]-k\left[H,\frac{y}{r}\right]$$

$$=\frac{\hbar}{i2m^2}\left(0-i2\hbar P_y{P_z}^2+i2\hbar P_y{P_z}^2\right)-\frac{k}{m}\left(-i\hbar\frac{y}{r^3}L_x\right)$$

$$-\frac{\hbar}{i2m^2}\left(-i2\hbar P_y{P_x}^2+i2\hbar P_y{P_x}^2+0\right)+\frac{k}{m}\left(-i\hbar\frac{z}{r^3}L_z\right)-\frac{i\hbar}{2m^2}(0)$$

$$+k\frac{\hbar^2}{m}\frac{y}{r^3}-\frac{k}{2mr^2}\left(i2\hbar\frac{z}{r}L_x+\hbar^2\frac{y}{r}+0-i2\hbar\frac{x}{r}L_z+\hbar^2\frac{y}{r}\right)$$

$$=-\frac{k\hbar}{im}\frac{z}{r^3}L_x+\frac{k\hbar}{im}\frac{x}{r^3}L_z+\frac{k\hbar}{im}\frac{z}{r^3}L_x-\frac{k\hbar}{im}\frac{x}{r^3}L_z+\frac{k\hbar^2}{m}\frac{y}{r^3}-\frac{k\hbar^2}{m}\frac{y}{r^3}=0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[{P_x}^2,P_xL_y\right]=\left[{P_x}^2,P_x\right]L_y+P_x\left[{P_x}^2,L_y\right]=i2\hbar P_z{P_x}^2$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[{P_y}^2,P_xL_y\right]=\left[{P_y}^2,P_x\right]L_y+P_x\left[{P_y}^2,L_y\right]=0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[{P_z}^2,P_xL_y\right]=\left[{P_z}^2,P_x\right]L_y+P_x\left[{P_z}^2,L_y\right]=-i2\hbar P_z{P_x}^2$$

$$\left[\frac{1}{r},P_xL_y\right]=\left[\frac{1}{r},P_x\right]L_y+P_x\left[\frac{1}{r},L_y\right]=-i\hbar\frac{x}{r^3}L_y$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\mathrm{P_x}^2,\mathrm{P_y L_x}\right]=\left[\mathrm{P_x}^2,\mathrm{P_y}\right]\mathrm{L_x}+\mathrm{P_y}\left[\mathrm{P_x}^2,\mathrm{L_x}\right]=0$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\mathrm{P_y}^2,\mathrm{P_y L_x}\right]=\left[\mathrm{P_y}^2,\mathrm{P_y}\right]\mathrm{L_x}+\mathrm{P_y}\left[\mathrm{P_y}^2,\mathrm{L_x}\right]=-\mathrm{i}2\hbar\mathrm{P_z}\mathrm{P_y}^2$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\mathrm{P_z}^2,\mathrm{P_y L_x}\right]=\left[\mathrm{P_z}^2,\mathrm{P_y}\right]\mathrm{L_x}+\mathrm{P_y}\left[\mathrm{P_z}^2,\mathrm{L_x}\right]=\mathrm{i}2\hbar\mathrm{P_z}\mathrm{P_y}^2$$

$$\left[\frac{1}{\mathrm{r}},\mathrm{P_y L_x}\right]=\left[\frac{1}{r},P_y\right]L_x+P_y\left[\frac{1}{r},L_x\right]=-i\hbar\frac{y}{r^3}L_x$$

$$\left[P_x{}^2,P_z\right]=\left[P_y{}^2,P_z\right]=\left[P_z{}^2,P_z\right]=0\,,\left[\frac{1}{r},P_z\right]=i\hbar\frac{z}{r^3}\,,\left[\frac{1}{r},\frac{z}{r}\right]=0$$

$$\left[L^2,\frac{z}{r}\right]=\left[L_x{}^2,\frac{z}{r}\right]+\left[L_y{}^2,\frac{z}{r}\right]+\left[L_z{}^2,\frac{z}{r}\right]$$

$$\left[L_x{}^2,\frac{z}{r}\right]=\left[L_x,\frac{z}{r}\right]L_x+L_x\left[L_x,\frac{z}{r}\right]$$

$$\left[L_x,\frac{z}{r}\right]=[L_x,z]\frac{1}{r}+z\left[L_x,\frac{1}{r}\right]$$

$$[L_x,z]=[yP_z,z]-\left[zP_y,z\right]=y[P_z,z]=i\hbar y\Longrightarrow\left[L_x{}^2,\frac{z}{r}\right]$$

$$=-i2\hbar\frac{y}{r}L_x+\hbar^2\frac{z}{r}$$

$$\left[L_y{}^2,\frac{z}{r}\right]=\left[L_y,\frac{z}{r}\right]L_y+L_y\left[L_y,\frac{z}{r}\right]$$

$$\left[L_y,\frac{z}{r}\right]=\left[L_y,z\right]\frac{1}{r}+z\left[L_y,\frac{1}{r}\right]$$

$$\left[L_y,z\right]=[zP_x,z]-[xP_z,z]=i\hbar x\Longrightarrow\left[L_y{}^2,\frac{z}{r}\right]=i2\hbar\frac{x}{r}L_y+\hbar^2\frac{z}{r}$$

$$\left[L_z{}^2,\frac{z}{r}\right]=\left[L_z,\frac{z}{r}\right]L_z+L_z\left[L_z,\frac{z}{r}\right]$$

$$\left[L_z,\frac{z}{r}\right]=[L_z,z]\frac{1}{r}+z\left[L_z,\frac{1}{r}\right]$$

$$[L_z,y]=\left[xP_y,y\right]-[yP_x,y]=0\Longrightarrow\left[L_z{}^2,\frac{x}{r}\right]=0$$

$$\Longrightarrow[H,M_z]=\frac{1}{m}\left[H,P_xL_y\right]-\frac{1}{m}\left[H,P_yL_x\right]-\frac{i\hbar}{m}[H,P_z]-k\left[H,\frac{z}{r}\right]$$

$$=\frac{\hbar}{i2m^2}\left(i2\hbar P_zP_x{}^2+0-i2\hbar P_zP_x{}^2\right)-\frac{k}{m}\left(-i\hbar\frac{x}{r^3}L_y\right)$$

$$-\frac{\hbar}{i2m^2}\left(0-i2\hbar P_z P_y{}^2 \pm i2\hbar P_z P_y{}^2\right)+\frac{k}{m}\left(-i\hbar\frac{y}{r^3}L_x\right)-\frac{i\hbar}{2m^2}(0)$$

$$+k\frac{\hbar^2}{m}\frac{z}{r^3}-\frac{k}{2mr^2}\left(-i2\hbar\frac{y}{r}L_x+\hbar^2\frac{z}{r}-i2\hbar\frac{x}{r}L_y+\hbar^2\frac{z}{r}\right)$$

$$=-\frac{k\hbar}{im}\frac{x}{r^3}L_y+\frac{k\hbar}{im}\frac{y}{r^3}L_x-\frac{k\hbar}{im}\frac{y}{r^3}L_x+\frac{k\hbar}{im}\frac{x}{r^3}L_y+\frac{k\hbar^2}{m}\frac{z}{r^3}-\frac{k\hbar^2}{m}\frac{z}{r^3}=0$$

$$\Longrightarrow \left[H,M_j\right]=0$$

ولهذا السبب $\vec{M}$ هو ثابت حركة. الإحداثيات الكارتيزية للمؤثرين $\vec{L}$ و $\vec{M}$ تحقق العلاقات الاستثنائية, و التي نستطيع التحقق منها:

$$\left[L_i,L_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \qquad (1)$$

$$\left[L_i,M_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}M_k \qquad (2)$$

$$\left[M_i,M_j\right]=-i\frac{2\hbar}{m}\varepsilon_{ijk}L_kH \qquad (3)$$

زيادة على ذلك, نستطيع اشتقاق العلاقتين:

$$\vec{M}.\vec{L}=\vec{L}.\vec{M}=\vec{0} \qquad (4)$$

$$m^2-k^2=\frac{2}{m}H(L^2+\hbar^2) \qquad (5)$$

هته المعادلات هي معادلات Pauli. سندرس الحالة $E<0$. هنا, ستنحصر على فضاء جزئي يوافق قيمة ذاتية E معطاة لـ H.

الطيف المتقطع ($E<0$):

في هذه الحالة نستطيع وضع:

$$\vec{A}=\sqrt{\frac{-m}{2E}}\vec{M}$$

و المعادلات من (3)-(1) تعطي إذن الصيغ:

$$\left[L_i,L_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \qquad (1LA)$$

$$\left[L_i,A_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}A_k \qquad (2LA)$$

$$[A_i, A_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \qquad (3LA)$$

علاقات التبادل من (1LA)-(3LA) تبين أن $\{L_j, A_j\}$ تولد جبر Lie, $SO(4)$ (التي هي isomorphe

مع زمرة الدورانات الذاتية في E^4). نستطيع وضع جبر Lie هذا على الشكل $SO(3) \oplus SO(3)$ وندخل

أيضا الزمرة $SO(3) \otimes SO(3)$, وهو مجرد الجمع بين:

$$\vec{J} = \frac{\vec{L} + \vec{A}}{2} \,, \vec{K} = \frac{\vec{L} - \vec{A}}{2}$$

مع العلاقات (1LA)-(3LA). نحصل بهذه الطريقة على علاقات التبادل:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \qquad (1JK)$$

$$[L_i, A_j] = 0 \qquad (2JK)$$

$$[K_i, K_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}K_k \qquad (3JK)$$

التي توافق جبر Lie لـ $SO(4)$ على شكل $SO(3) \otimes SO(3)$. زيادة على ذلك في صيغة $\vec{J}$ و $\vec{K}$ المعادلة (4) و (5) تكتب:

$$J^2 - K^2 = \vec{0} \qquad (4JK)$$

$$E(2J^2 + 2K^2 + \hbar^2) = -m\frac{k^2}{2} \qquad (5JK)$$

العلاقتين (1JK) و (3JK) تبينان أن $\vec{J}$ و $\vec{K}$ هما عزمان زاويان معممان. القيم الذاتية لـ J^2 و K^2 هي إذن $\hbar^2 j(j+1)$ و $\hbar^2 k(k+1)$ على الترتيب مع $j, k \in \frac{\mathbb{N}}{2}$. العلاقة (4JK) تفرض أن $j = k$. وفقا لذلك, العلاقة (5JK) تؤدي إلى صيغة Balmer-Bohr:

$$E = E_n = \frac{E_0}{n^2} \;; \begin{cases} E_0 = -\dfrac{mk^2}{2\hbar^2} \\ n = 2j + 1 = 1,2,3, \dots \end{cases}$$

أين E_0 هي طاقة المستوي الأساسي و n هو عدد الكم الرئيسي. درجة التوالد لمستوي E_n تعطى بالعدد الكلي للأشعة الذاتية لـ J^2 و K^2 الموافقة لقيمة معطاة لـ $j = k$ و نجد أيضا عدد Stone:

$$(2j + 1)(2k + 1) = n^2$$

لدرجة توالد المستوي E_n .

و كنتيجة نستخلص ما يلي :

الطيف المتقطع لذرة الهيدروجين نتحصل عليه على غرار التكميم مع الشرط $j = k$ لزوج من العزم الزاوي المعمم.

وهناك طريقتين لتجسيد هذا الفرض, النهج المحلي و النهج العام.

2- أ)- النهج المحلي:

معادلات Boson Pauli:

نقترح إيجاد تحقق لمعادلات Pauli من (1) إلى(5) باستعمال مؤثرات Boson في الحالة $E < 0$ هنا نعود

لأول مرة لتحقيق جبر Lie $SO(4)$ بمساعدة مؤثرات Boson في الحالة:

$$SO(4) \approx SO(3)_J \oplus SO(3)_K$$

لحل المشكل يكفي استعمال نتائج Schwinger على نظرية العزم الزاوي التي ترتبط ارتباطا وثيقا بدراسة جبر

Lie, $SO(3)$ من المعروف أن المولدات التفاضلية لـ $SO(3)$ يمكن أن تتحقق في صيغة أشكال ثنائية لأربع

مؤثرات Boson يلزم إذن ثمانية مؤثرات Boson لوصف جبر Lie, $SO(4)$.

نذكر بعلاقات التبادل للمؤثرات Boson:

$$[a_\alpha\,,\ a_\beta] = [a_\alpha^+\,,\ a_\beta^+] = 0\,, [a_\alpha\,,\ a_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta}$$

بلغة التكميم الثاني a_α هو مؤثر الإلغاء و a_α^+ هو مؤثر الإنشاء. المؤثرات a_α و a_α^+ يمكن كتابتها بدلالة المتغيرات

القانونية المرافقة p_α و q_α حسب التحويل:

$$a_\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, q_\alpha + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\, p_\alpha$$

$$a_\alpha^+ = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}\, q_\alpha - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\mu\omega}}\, p_\alpha$$

التحويل العكسي $\{q_\alpha\,, p_\alpha\} \to \{a_\alpha\,,\ a_\alpha^+\}$ يعطي:

$$p_\alpha = \frac{\sqrt{2\hbar m\omega}}{2i}\,(a_\alpha - a_\alpha^+)$$

$$q_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(a_\alpha + a_\alpha^+) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_\alpha + a_\alpha^+)$$

و نذكر كذلك أن Hamiltonien:

$$H_+ = \sum_{\alpha=1}^{d}\left[\frac{p_\alpha^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q_\alpha^2\right]$$

لهزاز توافقي متجانس بجهد جاذب بعده d, نكتب:

$$H_+ = \sum_{\alpha=1}^{d}\left(a_\alpha^+ a_\alpha + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

الآن نحسب باختصار Boson معادلات Pauli للطيف المتقطع $(E < 0)$.

نعيد كتابة $SO(3)_J$ بمساعدة الـ Bosons الأربعة a_1 ، a_1^+ ، a_2 و a_2^+. و كتابة $SO(3)_K$ بمساعدة الـ Bosons الأربعة a_3 ، a_3^+ ، a_4 و a_4^+ نستطيع التحقق أن العلاقات (الأشكال) الثنائية:

$$J_j = a_{12}^+ \sigma_j a_{12}\frac{\hbar}{2}$$

$$K_j = a_{34}^+ \sigma_j a_{34}\frac{\hbar}{2}$$

تحقق علاقات التبادل $(3JK) - (1JK)$

حيث σ_j $(i = 1, 2, 3)$ تمثل الثلاث مصفوفات لـ Pauli بصيغها الافتراضية:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ ، } \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} \text{ و } \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$a_{\alpha\beta}$ و $a_{\alpha\beta}^+$ تعرف على أنها الأشعة سطر:

$$\vec{a}_{\alpha\beta} = (a_{\alpha}, a_{\beta})$$

نعوض الأشكال Boson لـ J_j و K_j في معادلات Pauli $(4JK)$ و $(5JK)$ فنحصل على:

$$(a_1^{+}a_1 + a_2^{+}a_2 + a_3^{+}a_3 + a_4^{+}a_4 + 2)(a_1^{+}a_1 + a_2^{+}a_2 - a_3^{+}a_3 - a_4^{+}a_4)$$

$$= 0 \qquad (4A)$$

$$(a_1^{+}a_1 + a_2^{+}a_2 + 1)^2 + (a_3^{+}a_3 + a_4^{+}a_4 + 1)^2 = -\frac{mk^2}{E\hbar^2} \qquad (5A)$$

العلاقة $(4A)$ تختزل الى شرط التقييد التالي :

$$a_1^{+}a_1 + a_2^{+}a_2 - a_3^{+}a_3 - a_4^{+}a_4 = 0 \qquad (C)$$

استعمال العلاقة (C) في العلاقة $(5A)$ يسمح بكتابة ما يلي :

$$a_1^{+}a_1 + a_2^{+}a_2 + 1 = a_3^{+}a_3 + a_4^{+}a_4 + 1 = \left(-\frac{mk^2}{E2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

عدداها الأولان يوافقان المعامل $\hbar\omega$ الممثل لـ Hamiltonien من نوع H_+. نستطيع إدخال المعامل $\hbar\omega$ الغير الضروري لكن مقيد لظهور Hamiltonien:

$$H_{12} = \left[a_1^{+}a_1 + a_2^{+}a_2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\right]\hbar\omega$$
$$H_{34} = \left[a_3^{+}a_3 + a_4^{+}a_4 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\right]\hbar\omega$$

لهزازين توافقيين بجهد جاذب في بعدهما 2 و متجانس Hamiltonien, H_{12} و H_{34} لديهم القيم الذاتية:

$$(N_1 + N_2 + 1)\hbar\omega = (N_3 + N_4 + 1)\hbar\omega$$

أين $N_\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ لهذا السبب نحصل على غرار $(5A)$

$$(N_1 + N_2 + 1)^2 = (N_3 + N_4 + 1)^2 = -\frac{mk^2}{2E\hbar^2}$$

و بوضع:

$$n^2 = (N_1 + N_2 + 1)^2 = (N_3 + N_4 + 1)^2$$
$$= (N_1 + N_2 + 1)(N_3 + N_4 + 1)$$

وهو عدد ستون (Stone), نجد علاقة Palmer-Bohr:

$$E = E_n = -\frac{mk^2}{2\hbar^2}\frac{1}{(N_1 + N_2 + 1)^2}$$

و كنتيجة نستخلص أن:

الطيف المتقطع لذرة الهيدروجين نحصل عليه من التكميم مع القيد: $N_1 + N_2 = N_3 + N_4$

لزوج من الهزازات التوافقية المتجانسة بجهد جاذب في فضاء بعده 2.

2- ب)- النهج العام:

في هذا النهج نقترح ما يلي:

للعثور على النتائج المتحصل عليها في النهج المحلي بتحويل معادلة Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi-\frac{k}{r}\psi=E\psi$$

لذرة الهيدروجين بمساعدة تحويل Kustaanheimo–Stiefel لذلك نعطى أولا خصائص هذا التحويل الذي هو ضروري للمتابعة

تحويل Kustaanheimo–Stiefel:

هذا التحويل يوافق تطبيق لـ $\mathbb{R}^4$ على $\mathbb{R}^3$ و المعرف بـ :

$$(u_1,u_2,u_3,u_4)\rightarrow(x_1,x_2,x_3)$$

حيث:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A(\vec{u})\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}$$

حيث $A(\vec{u})$ هي المصفوفة 3×4:

$$A(\vec{u})=\begin{pmatrix}u_3&-u_4&u_1&-u_2\\u_4&u_3&u_2&u_1\\u_1&u_2&-u_3&-u_4\end{pmatrix}$$

تفاضل العبارة السابقة يعطى بـ :

$$\begin{pmatrix}dx_1\\dx_2\\dx_3\end{pmatrix}=2A(\vec{u})\begin{pmatrix}du_1\\du_2\\du_3\\du_4\end{pmatrix}$$

للحصول على عبارة متجانسة نحول الشعاع التفاضلي في ثلاثة أبعاد إلى شعاع تفاضلي في أربعة أبعاد و نكتب:

$$\overrightarrow{dx}=2A(\vec{u})\,\overrightarrow{du}$$

السهم على رأس x يشير إلى أنه قد أصبح شعاع رباعي. لأجل أسباب تخص التناظر, نختار المصفوفة 4×4, $A(\vec{u})$:

$$A(\vec{u})=\begin{pmatrix}u_3&-u_4&u_1&-u_2\\u_4&u_3&u_2&u_1\\u_1&u_2&-u_3&-u_4\\u_2&-u_1&-u_4&u_3\end{pmatrix}$$

فنحصل على:

$$dx_4 = 2(-u_1 du_2 + u_2 du_1 + u_3 du_4 - u_4 du_3) = 0$$

و بالتالي نستخلص الجملة:

$$x_1 = 2(u_1 u_3 - u_2 u_4)$$
$$x_2 = 2(u_1 u_4 + u_2 u_3)$$
$$x_3 = {u_1}^2 + {u_2}^2 - {u_3}^2 - {u_4}^2$$

و تخضع للشرط:

$$-u_1 du_2 + u_2 du_1 + u_3 du_4 - u_4 du_3 = 0 \qquad (KS2)$$

خصائص تحويل Kustaanheimo-Stiefel أساسية للحساب فيما بعد و في ما يلي.

خاصية 1:

$$r = ({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{\frac{1}{2}} \equiv {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 + {u_4}^2$$

خاصية 2[6]:

$$A^T = \vec{u}^2 A^{-1} = rA^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{r} A^T$$

$$\Rightarrow u_j = \sum_{k=1}^{4} (A^{-1})_{jk} x_k = \frac{1}{4r} \sum_{j=1}^{4} A_{kj} x_k$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{r} A_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_j} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{4} A_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{4} A_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{4r} \sum_{j=1}^{4} A_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} \right)$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} A_{ij} A_{ik} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} A_{ij} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial u_j} A_{ik} \frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{ik}}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial u_k} \right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} A_{ij}\,A_{ik}\,\frac{\partial^2}{\partial {u_j}^2} + \frac{1}{r^2}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} A_{ij}\left[-\frac{2u_j}{r}A_{ik}\frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial u_j}\frac{\partial}{\partial u_k}\right]$$

$$\Rightarrow \Delta = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} A_{ij}\,A_{ik}\,\frac{\partial^2}{\partial {u_j}^2}$$

$$+ \frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} A_{ij}\left[-\frac{2u_j}{r^2}A_{ik}\frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial u_j}\frac{\partial}{\partial u_k}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial {u_j}^2} - u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_3\frac{\partial}{\partial u_4} - u_4\frac{\partial}{\partial u_3}$$

إذن Laplacien, Δ في $\mathbb{R}^3$ يعبر عنه بدلالة Δ_u في $\mathbb{R}^4$ بـ :

$$\Delta = \frac{1}{r}\Delta_u - \frac{1}{r^2}X_u$$

حيث المؤثر X_u يعطى بالصيغة:

$$X_u = -u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_3\frac{\partial}{\partial u_4} - u_4\frac{\partial}{\partial u_3}$$

نلاحظ تشابه جزئي شكلي بين الشرط (KS2) و العلاقة $X_u = 0$.

تطبيقها على ذرة الهيدروجين:

معادلة Schrödinger لذرة الهيدروجين يمكن أن تحول بسهولة بمساعدة تحويل K-S, فنحصل على معادلة التفاضل الجزئي:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_u\psi + \frac{\hbar^2}{2mr}X_u\psi - Er\psi = k\psi$$

لضمان أن دالة الموجة $\psi = \psi\big(x_i(u_\alpha)\big)$ هي دالة وحيدة القيمة, يجب أن يكون لدينا شرط التقييد $X_u\psi = 0$, وهذا واضح لأن:

$$\frac{\partial}{\partial x_4}=\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial u_j}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}_j}=u_2\frac{\partial}{\partial u_1}-u_1\frac{\partial}{\partial u_2}-u_4\frac{\partial}{\partial u_3}+u_3\frac{\partial}{\partial u_4}=X_u$$

و لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial x_4}=0\Longrightarrow X_u=0$$

و بالتالي يقود الى الجملة:

$$u_1\frac{\partial\psi}{\partial u_2}-u_2\frac{\partial\psi}{\partial u_1}-u_3\frac{\partial\psi}{\partial u_4}+u_4\frac{\partial\psi}{\partial u_3}=0 \qquad (S1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_u\psi-E(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)\psi=k\psi \qquad (S2)$$

الجمل (S1) - (S2) قابلة لفصل المتغيرات (1,2) في جهة و (3,4) في الجهة الأخرى.

نبحث عن حل من الشكل $\psi\big(x_i(u_\alpha)\big)=f(u_1,u_2)g(u_3,u_4)$

فنحصل على الجملة:

$$u_1\frac{\partial f}{\partial u_2}-u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}=af \qquad (6)$$

$$u_3\frac{\partial g}{\partial u_4}-u_4\frac{\partial g}{\partial u_3}=ag \qquad (7)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial {u_1}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial {u_2}^2}\right)-E({u_1}^2+{u_2}^2)f=Z_1kf \qquad (8)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial {u_3}^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial {u_4}^2}\right)-E({u_3}^2+{u_4}^2)g=Z_2kg \qquad (9)$$

$$Z_1+Z_2=1 \qquad (10)$$

حيث Z_1 و Z_2 هما ثوابت الفصل.

في الحالة $E<0$ (طيف متقطع) المعادلات (10)-(6) توضح جيدا الخاصية الثانية. لـ $E<0$ المعادلتين (8) و (9) تعطيان:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial {u_1}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial {u_2}^2}\right)+\frac{m\omega^2}{2}({u_1}^2+{u_2}^2)f=Z_1kf$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial {u_3}^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial {u_4}^2}\right)+\frac{m\omega^2}{2}({u_3}^2+{u_4}^2)g=Z_2kg$$

$$-E=\frac{m\omega^2}{2}$$

التي هي معادلات Schrödinger لزوج من الهزازات التوافقية المتجانسة بجهد جاذب في البعد 2.

التوتر المشترك لهاذين الهزازين هو:

$$\upsilon=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-2E}{m}}$$

و طاقتيهما هي:

$$Z_1k=(n_1+n_2+1)h\upsilon$$
$$Z_2k=(n_3+n_4+1)h\upsilon$$

حيث أن n_α عدد طبيعي $(n_\alpha\in N)$.

بالجمع بين العلاقات الثلاثة الأخيرة نحصل على:

$$E=-\frac{2mk^2}{\hbar^2}\frac{1}{(n_1+n_2+n_3+n_4+2)^2}$$

بعد إزالة υ من شروط التقييد (6) و (7) نستطيع أن نبين أن $n_1+n_2+n_3+n_4$ هو عدد طبيعي زوجي.

في الواقع نبحث عن حلول من الشكل المتغير بـ :

$$f=\sum_{n_1n_2}C_{n_1n_2}\varphi_{n_1}(u_1)\varphi_{n_2}(u_2)$$
$$g=\sum_{n_3n_4}C_{n_3n_4}\varphi_{n_3}(u_3)\varphi_{n_4}(u_4)$$

أين $\varphi_{n_\alpha}(u_\alpha)$ هي دالة ذاتية لهزاز توافقي في بعد واحد (dim=1).

المعادلتين (6) و (7) تقود إلى العلاقات التراجعية التالية:

$$[n_1(n_2+1)]^{\frac{1}{2}}C_{n_1-1,n_2+1}-[(n_1+1)n_2]^{\frac{1}{2}}C_{n_1+1,n_2-1}=aC_{n_1n_2}$$

و التي يمكن البرهان على أنها محققة من اجل $n_1+n_2+n_3+n_4$ عدد زوجي.

في إدخال هذا القيد (الذي يوافق شرط التقييد (4A)) في الصيغ السابقة لـE نجد صيغة Bohr–Palmer مع:

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2n$$

و نستخلص كنتيجة:

أن تحويل K–S يسمح بجلب معادلة Schrödinger للطيف المتقطع لذرة الهيدروجين من تلك التي هي لزوج من الهزازات التوافقية المتجانسة بحد جاذب في البعد 2 برفقة زوج من معادلات القيد.

إلكترون ذرة الهيدروجين يتحرك على سطح الكرة S^3 في الفضاء $\mathbb{R}^4$($u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 + u_4{}^2 = r$)

نسعى الآن إلى إثبات أن كون حركة الإلكترون على سطح كرة لا يتعارض مع مبدأ Heisenberg, و هذا ما سنتناوله في ما يلي.

3)– جسيم مقيد على سطح[7]:

لنعتبر جسيم ذو كتلة m يتحرك على سطح S بشكل دائم محدود بالمعادلة $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2)$ أين $\vec{r}$ هو شعاع الموضع في نقطة كيفية p من السطح. في الجوار المباشر لـ S من الفضاء يمكننا تحديده كـ :

$$\vec{R}(q_1, q_2, q_3) = \vec{r}(q_1, q_2) + q_3\vec{N}(q_1, q_2) \qquad (1C)$$

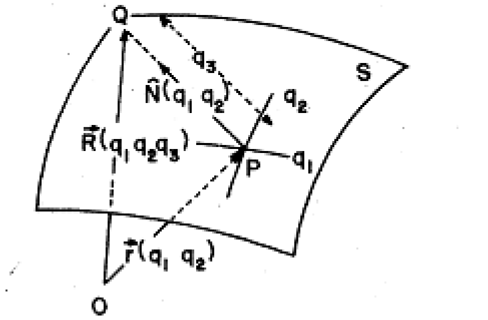
أين $\vec{N}(q_1, q_2)$ هو شعاع الوحدة الناظمي على السطح S. القيمة المطلقة للإحداثية q_3 هي المسافة بين السطح و النقطة Q للإحداثيات (q_1, q_2, q_3) في جوار السطح. يجب علينا الآن اعتبار كمون

فضائي $V = V_\lambda(q_3)$, أين λ هو معامل الضغط الذي يقيس شدة الكمون:

$$\lim_{\lambda\to\infty} V_\lambda(q_3) = \begin{cases} 0\,, q_3 = 0 \\ \\ \infty\,, q_3 \neq 0 \end{cases}$$

(على سبيل المثال, نستطيع تخيل التوافقي $V_\lambda(q_3) = \frac{1}{2}m\lambda^2 q_3{}^2$, مع λ تذهب إلى مالا نهاية, الشيء الذي يعطي $\langle q_3{}^2\rangle = \frac{\hbar}{m\lambda}$). قبل الذهاب إلى معادلة Schrödinger من المهم مراجعة,

و باختصار نظام الإحداثيات (1).



الشكل (1): نظام الإحداثيات المنحنية المرتكز على سطح S محدد بالمعادلة $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2)$.

دعنا نسمي: $g_{ij} = \left(\frac{\vec{r}}{q_i}\right)\left(\frac{\partial \vec{r}}{q_j}\right)\ ; i, j = 1{,}2$ الموتور المتري للإحداثيات الثابتة لسطحنا S,

$g = det\ (g_{ij})$ و $h_{ij} = h_{ji}$ معاملات الشكل التربيعي الثاني) $S = \{p\ /\ h(p, p) = cte\}$. بما

أن بما أن مشتقات الناظم $\vec{N}(q_1, q_2)$ العادية في السطح الزاوي لدينا هي:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \qquad (2C)$$

مع:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{g}(g_{12}h_{21} - g_{22}h_{11})\ , \alpha_{12} = \frac{1}{g}(h_{11}g_{21} - h_{21}g_{11})$$
$$\alpha_{21} = \frac{1}{g}(h_{22}g_{12} - h_{12}g_{22})\ , \alpha_{22} = \frac{1}{g}(h_{21}g_{12} - h_{22}g_{11}) \qquad (3C)$$

(معادلات Weingarten). من (1) و (2) نجد:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{2} \left(\delta_{ij} + \alpha_{ij} q_3\right) \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\ ; i, j = 1{,}2$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3} = \vec{N}(q_1, q_2) \qquad (4C)$$

في جوار S في ثلاثة أبعاد المركبات الثابتة للموتور المتري تعطى بـ :

$$G_{ij} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_j} \; ; i,j = 1,2,3$$

نستعمل (4C), نرمز لمصفوفة الانتقال بـ T, فيكون لدينا:

$$G_{ij} = g_{ij} + [\alpha g + (\alpha g)^T]_{ij} q_3 + (\alpha g \alpha^T)_{ij} {q_3}^2$$
$$G_{i3} = G_{3i} = 0 \; ; i = 1,2 \; , G_{33} = 1 \qquad (5C)$$

بإمكاننا الآن أن نصرف انتباهنا صوب معادلة Schrödinger. نكتب Laplacien في الإحداثيات المنحنية (q_1, q_2, q_3) فنحصل على :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{G}(G^{-1})_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right) + V_\lambda(q_3)\psi = i\hbar\frac{d\psi}{dt} \qquad (6C)$$

أين $G = det\,(G_{ij})$. بسبب بنية G_{ij} المعطاة في (5C) بإمكاننا فصل Laplacien إلى جزأين: الجزء الزاوي نرمز له بـ $D(q_1, q_2, q_3)$, المعطى بالصيغ $i,j = 1,2$, و الجزء القطري المحدد بـ $i = j = 3$,

نستطيع إذن كتابة:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}D(q_1, q_2, q_3)\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial {q_3}^2} + \frac{\partial}{\partial q_3}ln\left(\sqrt{G}\right)\frac{\partial \psi}{\partial q_3}\right) + V_\lambda(q_3)\psi$$
$$= i\hbar\frac{d\psi}{dt} \qquad (7C)$$

فصل المتغيرات و تنظيم الدالة الموجية:

بما أننا نأمل بإيجاد دالة موجة سطحية تتعلق فقط بالمتغيرات q_1 و q_2, من الطبيعي أن تؤدي إلى تقديم دالة موجه جديدة χ مستنظمة. نستطيع فصل المتغيرات و ذلك باعتبار:

$$\chi(q_1, q_2, q_3) = \chi_t(q_1, q_2)\chi_n(q_3)$$

لتنظيم الدالة نحتاج إلى شكل عنصر الحجم dV هندسيا و المعبر عنه في الإحداثيات المنحنية (q_1, q_2, q_3). من استعمال (4C) لدينا:

$$dV = f(q_1, q_2, q_3)\, dS\, dq_3 \qquad (8C)$$

أين dS هو عنصر السطح:

$$dS = \sqrt{g}\, dq_1\, dq_2$$

$$f(q_1, q_2, q_3) = 1 + Tr(\alpha)q_3 + det(\alpha)\, {q_3}^2 \qquad (9C)$$

العبارة (8C) الآن تعطي النتيجة:

$$\chi(q_1, q_2, q_3) = [f(q_1, q_2, q_3)]^{\frac{1}{2}}\psi(q_1, q_2, q_3) \qquad (10C)$$

ندخل هذا الاستبدال في (7C) فنجد:

$$\sqrt{f}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}D\left(\frac{\chi}{\sqrt{f}}\right)\right]-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2\chi}{\partial {q_3}^2}+\frac{1}{4f^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)^2-2f\frac{\partial^2 f}{\partial {q_3}^2}\chi\right]\chi\right\}$$
$$+V_\lambda(q_3)\chi = i\hbar\frac{d\chi}{dt} \qquad (11C)$$

نحن الآن مستعدين للأخذ بعين الاعتبار تأثير الكمون $V_\lambda(q_3)$. بما أنه يوجد في النهاية عندما $\lambda \to 0$ دالة الموجة ترى بئر كمون في كلتا الجهتين للسطح قيمتاهما تختلف عن الصفر بشكل ملحوظ فقط في نطاق صغير جدا لقيمة q_3 حول $q_3 = 0$. في هذه الحالة نستطيع تعديا أخذ $q_3 \to 0$ في كل معاملات المعادلة (11C) (ما عدا طبعا في الصيغة المحتوية على $V_\lambda(q_3)$). النتيجة من (5C) و (9C) هي:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{g}(g^{-1})_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\left[\frac{1}{2}Tr(\alpha)\right]^2-det(\alpha)\right)\chi$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\chi}{\partial {q_3}^2}+V_\lambda(q_3)\chi = i\hbar\frac{d\chi}{dt} \qquad (12C)$$

المعادلة (12C) نستطيع فصلها بسهولة بوضع $\chi(q_1,q_2,q_3)=\chi_t(q_1,q_2)\chi_n(q_3)$, أين الرمز t و n يدل على الجزء الزاوي و العادي على الترتيب. الإجراء المعتاد ينتج المعادلات التالية:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\chi_n}{\partial {q_3}^2}+V_\lambda(q_3)\chi_n = i\hbar\frac{d\chi_n}{dt} \qquad (13C)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{g}(g^{-1})_{ij}\frac{\partial\chi_t}{\partial q_j}\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\left[\frac{1}{2}Tr(\alpha)\right]^2-det(\alpha)\right)\chi_t$$
$$= i\hbar\frac{d\chi_t}{dt} \qquad (14C)$$

العبارة (13C) هي فقط معادلة Schrödinger ذات بعد واحد لجسيم مقيد بالكمون المعترض $V_\lambda(q_3)$,

ويمكن تجاهله في حساباتنا. الشيء المهم أكثر هو الكمون $V_s(q_1,q_2)$ الكامن في السطح S حيث:

$$V_s(q_1,q_2) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\left[\frac{1}{2}Tr(\alpha)\right]^2 - det(\alpha)\right\}$$

باستعمال (3C) هذه الصيغة يمكننا كتابتها في شكل مفيد أكثر:

$$V_s(q_1,q_2) = -\frac{\hbar^2}{2m}(M^2 - K) = -\frac{\hbar^2}{2m}(k_1 - k_2)^2 \qquad (15C)$$

أين k_1 و k_2 هي المنحنيات الأساسية للسطح S و:

$$M = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2g}(g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - g_{12}h_{12}) \qquad (16C)$$

$$K = k_1k_2 = \frac{1}{g}det(h) \qquad (17C)$$

تعلق V_s بـ q مفيد بفضل وجود المنحنى المتوسط M, بما أنه لا يمكننا الحصول عليها من g_{ij} و مشتقاتها وحدها (عكس ما يحصل مع K). هذه النتيجة تمتلك تبعات مهمة: $V_s(q_1,q_2)$ سوف لن يكون نفسه لسطحين متساويين (لأجل النقاط المتطابقة التي نستطيع إيجادها بنفس g_{ij}). هذا في تباين مدهش مع نتائج الميكانيك الكلاسيكي أين Lagrangien لحركة سطحية حرة:

$$\mathcal{L}(q_1,q_2;\dot{q}_1,\dot{q}_2) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,(q_1q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2$$

يتعلق فقط بالخصائص المترية للسطح. غريبة كما قد تظهر للمرة الأولى, لكن هذه ليست نتيجة غير متوقعة, بما أنه يوجد استقلالية في مدى صغر القيمة المفروضة لـ q_3, دالة الموجة دائما تتحرك في جزء من الفضاء الثلاثي البعد إذن هذا الجسيم على علم بالخصائص الخارجية للسطح المحدود S.

ملاحظة أخرى يجب أن تشير إليها النتائج السابقة تفيد أن النهاية المتحصل عليها هنا ليست موجودة في الواقع. رأينا أن هذه الحسابات, رغم أنها رياضيا يقينية, مصورة بشكل سيء من وجهة نظر فيزيائية بما أنها تعود كمونيا إلى قوى مماسية غير معدومة في كل جوار للسطح S. لاختيار الإجراء الموصوف بـ Cheng نتخيل أن جسيمنا مضغوط بين سطحين صلبين, السطح S و سطح آخر S' و لتكن المسافة $d(q_1, q_2)$ بينهما, تذهب بثبات إلى الصفر. إذا أخذنا $d = \varepsilon f(q_1, q_2)$؛ $\varepsilon \longrightarrow 0$, إذن على حد تعبير Cheng, معادلة Schrödinger يجب أن تمتلك صيغة تتناسب مع $[\varepsilon f(q_1, q_2)]^2$ التي تتغير بشدة خلال $\{q_i\}_{i=1,2,3}$, هذه, في الحقيقة يمكن بالفعل أن نتوقعها من البداية, بما أن هذا النوع من الكمون يمنع فصل الدالة الموجية χ إلى جزء زاوي و عادي كما أعطي في (13C) و (14C). نذهب إلى حقيقة أن القوى تميل لأن تكون عادية في S في النهاية لما $\varepsilon \longrightarrow 0$ لا تعني زوال المركبات الزاوية بما أن القوى نفسها تذهب إلى مالا نهاية يحول دون أي مقارنة مباشرة مع الحالة الكلاسيكية.

خاتمـــــة

تطرقنا في موضوعنا هذا إلى التناظر الأعظمي الذي تخضع له ذرة الهيدروجين و الذي هو $SO(4)$ و من هنا فقد وضعنا الإطار الرياضي لهته الظاهرة الفيزيائية الشيء الذي يضفي نوع من المطلقية و إمكانية إخضاع نظامنا لدراسة دقيقة في إطارها الرياضي.

المراجـــــــــع

- [1] Albert Messiah; Mécanique quantique, Tome 1, pp. 50-58, 109-114, 137-139, 173-176, 204-210, 254, 255 (Dunode, paris, 2003)
- [2] Olivier Wang sous la direction de Denis Bernard et David Hernandez, Symétries En physique et représentations, pp. 8, 9 (15 juin 2010)
- [3] Robert Gilmore, Lie groups, physics, and geometry, pp.34-47, 221-243 (2008)
- [4] C. Cohen-Tannoudji, B.Diu, F.Laloe ; Mécanique quantique, Tome 1, pp. 647-660 (1973)
- [5] Maurice Kibler, Tijani Negadi; Quantification avec contrainte: Exemple de L'atome d'hydrogène (octobre 1984)
- [6] Hagen Kleinert; Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets, Vol. 4(June 2006)
- [7] R. C. T. da Costa; Quantum mechanics of a constrained particle, Vol. 23, N^0 4 (Avril 1981)

ملخص: تخضع ذرة الهيدروجين إلى تناظر $SO(3)$ والذي يمثل الحالات المولدة بالدوران في الفضاء $\mathbb{R}^3$، إلا أن مجمل الحالات المولدة عن الدوران لا يصل إلى توالد المستوي الطاقوي E_n, هذا يعني أن نظامنا يخضع لتناظر أكبر من التناظر $SO(3)$ والذي هو التناظر الحركي $SO(4)$. و هذا ما نسعى إلى توضيحه في عملنا هذا.

الكلمات المفتاحية: مبدأ هيزنبرغ, فضاء هيلبرت, معادلة شرودنغر, الزمرة $SO(3)$, الزمرة $SO(4)$, البوزون, تحويل كيستانيمو–ستيفل.

Résumé: l'atome d'Hydrogène sujet à une symétrie $SO(3)$ qui représente les états engendrées par les rotations dans l'espace $\mathbb{R}^3$, mais, le nombre des états générer par la rotation est inférieur à la dégénérescence du niveau d'énergie E_n, ça signifie que notre système soumise à une symétrie plus grande que $SO(3)$, qui est la symétrie dynamique $SO(4)$. Ce que nous essayons d'éclaircir dans ce travail.

Mots clé: principe de Heisenberg, espace de Hilbert, l'équation de Schrödinger, le groupe $SO(3)$, le groupe $SO(4)$, boson, transformation de Kustaanheimo-Stiefel.

Summary: the Hydrogen atom subjects to a symmetry $SO(3)$ which represent the generated states with rotations in $\mathbb{R}^3$, However, the number of generated states by rotations is less then the energy level degeneration E_n, which mean that our system exhibits to a symmetry more then $SO(3)$, which is the dynamical symmetry $SO(4)$, and this is what we are try to explain in this work.

Key words: Heisenberg principle, Hilbert space, Schrodinger equation, $SO(3) group$, $SO(4)$ group, boson, Kustaanheimo-Stiefel transformation.