



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :Safa Bouteraa

Thème

L'interpolé de Scott-Zhang pour les fonctions peu régulières

Soutenu publiquement le : 04/06/2014

Devant le jury composé de :

Chacha Djamel Ahmed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Meflah Mabrouk	M.C. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Merabet Ismail	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Je dédie ce projet,

A mes chers parents,

A ma fille B-S-K,

A mon encadreur Merabet Smail,

A mes collègues Molay Aicha, Thabet lokman, Laheg Naziha,

A mes chers amies,

Et toute la famille de près ou de loi

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier au premier lieu mon encadreur Monsieur MERABET Ismail de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématiques de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail. Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de près ou de loin qui a contribué à la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Préliminaires	1
1 Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$	4
1.1 Introduction	4
1.2 Les espaces de Sobolev $H^1(\Omega), H^m(\Omega)$	4
1.2.1 Densité et injections	7
1.2.2 Théorème de trace	7
1.2.3 L'espace $H_0^1(\Omega)$	8
1.2.4 Équivalence des normes	8
1.2.5 Dualité	9
1.3 Distribution	10
1.3.1 Dérivation au sens des distributions	11
1.4 Approximation polynomiale	12
1.4.1 Polynôme de Taylor et de Sobolev	12
1.4.2 Représentation d'erreur	14

1.4.3	Le potentiel de Riesz	16
1.4.4	Lemme de Deny-Lions	17
1.4.5	Lemme de Bramble-Hilbert	19
2	Interpolation des fonctions régulières	21
2.1	Introduction	21
2.2	Notion d'élément fini en 3D	21
2.2.1	Maillages	22
2.3	Éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_k	23
2.4	Éléments finis de Lagrange \mathbb{Q}^k	24
2.5	Éléments finis prismatiques	24
2.6	Autres éléments finis	25
2.6.1	Éléments finis de Raviart-Thomas	25
3	Interpolation de fonctions peu régulières	27
3.1	Introduction	27
3.2	L'opérateur \mathcal{SZ}_h	29
3.2.1	L'espace discret	30
3.2.2	Définition de l'opérateur \mathcal{SZ}_h	31
3.3	Stabilité de \mathcal{SZ}_h	34
3.4	Erreur d'interpolation	36
4	Application : Problèmes d'ordre deux à coefficients variables	39

NOTATIONS

- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v .
- $D^2 v = \nabla^2 v = \begin{pmatrix} \partial_x^2 v & \partial_{yx} v \\ \partial_{xy} v & \partial_y^2 v \end{pmatrix}$: La matrice Hessienne
- $D^2 w : D^2 v = \sum_{i,j=1}^2 w_{x_i x_j} v_{x_i x_j}$: Le produit scalaire dans \mathbb{R}^4 .
- $|v|_{2, \omega} = \left(\sum_{\alpha=2} \|D^\alpha v\|_{0, \omega} \right)^{1/2}$.
- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- $\llbracket v \rrbracket = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+$.
- $\{v\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}$.
- $\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = n \cdot (\nabla^2 v) n$.
- $\left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot n$.
- $Osc_2(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - f_T\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

INTRODUCTION

Les origines de la méthode des éléments finis remontent aux années 1950. Les premières applications furent issues de la mécanique des milieux continus déformables et notamment du domaine aéronautique. Ces problèmes faisaient intervenir des géométries complexes ce qui rendait difficile une approche numérique par des méthodes plus classiques comme les différences finies. Par ailleurs, des travaux plus théoriques concernant l'approximation des équations de l'élasticité linéaire sont également parus dans les années cinquante.

Dans les années soixante, la méthode des éléments finis connaît un développement important, notamment à cause du nombre croissant d'ingénieurs utilisant cette méthode pour traiter des problèmes de milieux continus déformables. A la fin des années soixante, un autre pas important est accompli en élargissant le champ d'applications, notamment à la mécanique des fluides. L'idée que les éléments finis ne s'appliquent qu'à des problèmes symétriques et coercifs, où une formulation variationnelle est possible, est progressivement abandonnée et les ingénieurs commencent à s'intéresser également à des problèmes sortant de ce cadre.

Les années 1970 marquent le développement de la théorie mathématique

des éléments finis. Un grand nombre de résultats empiriques connus des ingénieurs vont se trouver confirmés et clarifiés, ce qui permettra de jeter des bases solides pour étendre la méthode à un champ d'applications encore plus vaste. Dans ce contexte, une notion fondamentale est celle de problème bien posé au sens de Hadamard. Un tel problème admet une solution et une seule et jouit d'une propriété de stabilité qui permet de contrôler la solution par les données du problème dans certaines normes, i.e., il y a dépendance continue de la solution par rapport aux données. Lorsque l'ingénieur aborde un problème physique, la première étape dans sa démarche est se demander si le problème considéré est bien posé. C'est seulement dans l'affirmative qu'il est raisonnable d'envisager une approximation numérique de la solution.

Dans le premier chapitre nous introduisons les outils d'analyse fonctionnelle utiles pour l'étude mathématique de la méthode des éléments finis. Nous faisons d'abord quelques rappels sur les propriétés de l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$. Nous passons ensuite en revue les notions de distribution et de dérivation au sens des distributions. La plupart des résultats sont énoncés sans démonstration ; Ensuite, le deuxième chapitre présente la notion d'élément fini en 3D et les techniques d'interpolation des fonctions régulières, nous donnons la définition de maillage notamment les principaux éléments finis de Lagrange en 3D.

Le troisième chapitre le plus important, présente comment on construit la définition interpolé de Scott-Zhang et à l'utilisation de l'opérateur d'interpolation avec stabilité de \mathcal{SZ}_h et l'erreur d'interpolation dans le cas de fonctions peu régulières.

Le dernier chapitre s'intéresse à l'étude application de problèmes d'ordre deux à coefficients variables.

ESPACES DE SOBOLEV $H^m(\Omega)$

1.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions sur l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$. Puis, nous introduisons les principales propriétés des espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$, pour plus d'informations voir [6].

1.2 LES ESPACES DE SOBOLEV $H^1(\Omega), H^m(\Omega)$

On adoptera dans ce qui suit les notations suivantes :

Ω désignera un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions définies sur Ω

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$$

un multi-indice et on notera

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Définition 1.2.1 On note $H^1(\Omega)$ l'ensemble des éléments qui satisfont :

$$\{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2\} \quad (1.1)$$

Plus généralement on introduit les espaces suivants :

Définition 1.2.2 Pour $m \in \mathbb{N}$

$$H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad |\alpha| \leq m\} \quad (1.2)$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx. \quad (1.3)$$

La norme associée à ce produit scalaire

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Enfin, pour $m \geq 1$, nous introduisons la semi-norme

$$|u|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.5)$$

de sorte que

$$\|u\|_{m,\Omega} = (\|u\|_{m-1,\Omega}^2 + |u|_{m,\Omega}^2)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Définition 1.2.3 Soit un entier $m \geq 1$. On note

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)},$$

et $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'$, le dual de $H_0^m(\Omega)$, équipé de la norme

$$\forall f \in H^{-m}(\Omega), \quad \|f\|_{-m,\Omega} = \sup_{u \in H_0^m(\Omega), u \neq 0} \frac{\langle f, u \rangle_{H^{-m}(\Omega), H_0^m(\Omega)}}{\|u\|_{m,\Omega}}.$$

Proposition 1.2.4 .

i) Si $m \geq m'$, $H^m(\Omega)$ est contenu, avec injection continue, dans $H^{m'}(\Omega)$.

ii) $H^m(\Omega)$ munit du produit scalaire (1.3) est un espace de Hilbert séparable et réflexif.

Preuve. La partie i) est évidente, car si $m \geq m'$,

$$\|u\|_{m',\Omega} \leq \|u\|_{m,\Omega}.$$

Pour prouver la partie ii) Nous rappelons tous d'abord que les espaces L^p se sont des espaces complet ([6]), et pour démontrer (ii) il suffit de montrer que $H^m(\Omega)$ est complet pour la norme $\|u\|_{m,\Omega}$. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $H^m(\Omega)$. Alors $(u_n)_n$ de Cauchy dans H^m ,

donc

$$(u_n)_n \text{ et } (D^\alpha u_n)_n \text{ de Cauchy dans } L^2(\Omega),$$

mais L'espace L^2 est complet (Riez).

Alors

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2. \\ D^\alpha u_n \longrightarrow w \text{ dans } L^2. \end{cases} \quad (1.7)$$

On a $u_n \in H^m(\Omega)$, donc

$$\int_{\Omega} D^\alpha u_n \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_n D^\alpha \varphi,$$

par passage à la limite $n \rightarrow \infty$ on obtient

$$\int_{\Omega} w \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

$$\int_{\Omega} D^\alpha u \varphi = \int_{\Omega} w \varphi.$$

Alors $D^\alpha u \in L^2$, $D^\alpha u = w$,

donc $u \in H^m(\Omega)$, ce qui signifie H^m est complet. ■

Théorème 1.2.5 (*Analogie du Théorème de Bolzano-Weierstrass*)

De toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$.

Remarque 1.2.6 *Si Ω est lipschitzien, $(H^1(\Omega))'$ est différent de $H^{-1}(\Omega)$ et ne s'identifie pas à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Exemple, l'application $v \mapsto \int_{\partial\Omega} v d\sigma$ est dans $(H^1(\Omega))'$, mais est nulle sur $\mathcal{D}(\Omega)$, alors que ce n'est évidemment pas l'application nulle. On dit que $(H^1(\Omega))'$ n'est pas un espace de distributions. Par contre, si $\Omega = \mathbb{R}^d$, alors $(H^1(\mathbb{R}^d))' = H^{-1}(\mathbb{R}^d)$.

1.2.1 Densité et injections

Théorème 1.2.7 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière Lipschitzienne et soit m et k deux entiers satisfaisant $k - m > 1$. Alors il existe une constante C tel que pour tout $u \in H^k(\Omega)$ nous avons :

$$\|D^m u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{k,\Omega} \quad (1.8)$$

De plus, il existe une fonction de classe C^m égale presque partout à u dans l'espace $L^2(\Omega)$.

Théorème 1.2.8 1. Pour $d \geq 2$ et d est la dimension de l'espace \mathbb{R}^d , l'injection de

$H^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est continue pour tout nombre réel p qui satisfait à la fois $1 \leq$

$$p \leq p_0 < +\infty$$

où p_0 vérifie

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$$

et cette injection est compacte pour tout $p < p_0$.

2. Pour $d \geq 1$, l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $C^n(\bar{\Omega})$ est continue pour tout n et m , tels

que

$$\frac{1}{2} < \frac{m-n}{d}$$

1.2.2 Théorème de trace

Supposons que le domaine Ω est suffisamment régulier (de classe C^1 , par exemple), alors on définit l'opérateur de trace γ_0 par

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C^0(\bar{\partial\Omega}) \quad (1.9)$$

$$u \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$$

Théorème 1.2.9 *L'application linéaire γ_0 définie par (1.9) se prolonge par continuité à une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, i.e., il existe une constant c tel que :*

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{1,\Omega}, \forall u \in H^1(\Omega). \quad (1.10)$$

Preuve. Pour simplifier, nous démontrons le résultat pour le cas :

$$\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$$

$$|v(x, 0)|^2 = -2 \int_0^\infty v(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy$$

On utilise l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient :

$$|v(x, 0)|^2 \leq \int_0^\infty (|v(x, y)|^2 + \left| \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right|^2) dy$$

Nous intégrons par rapport à x on obtient ainsi,

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.11)$$

■

1.2.3 L'espace $H_0^1(\Omega)$

Propriété :

$$\text{Ker} \gamma_0 = H_0^1(\Omega)$$

On définit $H_0^1(\Omega)$ comme le noyau de γ_0 , i.e.,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

1.2.4 Équivalence des normes

Lemme 1.2.10 (Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . Alors, il existe une constante strictement positive C ne dépendant que de Ω et telle que*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2}. \quad (1.12)$$

Preuve. Nous démontrons l'inégalité (1.12) pour les éléments de $C_0^\infty(\Omega)$. Soit a, b deux réels tels que $\Omega \subset]a, b[\times]a, b[$. Alors

$$u(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial u(t, x_2)}{\partial t} dt.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial u(t, x_2)}{\partial t} \right|^2 dt \\ &\leq \int_a^b |\nabla(u)|_{L^2}^2 \\ &\leq (b-a)^{1/2} \|\nabla(u)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \|\nabla(u)\|_{L^2}^2.$$

Par argument de densité le résultat reste vrai pour les éléments de $H_0^1(\Omega)$. En effet, si $u \in H_0^1(\Omega)$ il existe $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n - u|^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^2 = 0 \quad (1.13)$$

Ce qui implique,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^2 = \int_{\Omega} |u|^2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

Puisque,

$$\int_{\Omega} |u_n(x)|^2 dx \leq C \|\nabla(u_n)\|_{L^2}^2 \implies \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \|\nabla(u)\|_{L^2}^2.$$

■

1.2.5 Dualité

Définition 1.2.11 Soit V un espace vectoriel normé. $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ est l'espace dual de V et est noté V' . Un élément $A \in V'$ est une forme linéaire continue et son action sur un élément $v \in V$ se note à l'aide du crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}$ de sorte que

$$\langle A, v \rangle_{V', V} = Av.$$

1.3 DISTRIBUTION

Définition 1.3.1 *L'espace $L^2(\Omega)$ étant un espace de Hilbert, nous pouvons, grâce au théorème de représentation de Riesz, identifier cet espace et son dual par l'intermédiaire du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$*

$$L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, \varphi) \longmapsto \langle u, \varphi \rangle = (u, \varphi)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} u\varphi.$$

En restreignant l'espace des φ à un sous-espace V de $L^2(\Omega)$, la forme bilinéaire $(u, \varphi) \longmapsto \langle u, \varphi \rangle$ garde un sens et reste continue pour un espace des u plus grand que $L^2(\Omega)$, noté V' et appelé l'espace dual de V . Plus l'espace V est "petit", plus l'espace V' est "grand". En particulier, lorsque $V = \mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact inclus dans Ω , $V' = \mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω . Une distribution est donc définie par son action sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 1.3.2 *Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ à support compact inclus dans Ω . On dit que u est une distribution sur Ω et on note $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si u est une application linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui vérifie la propriété suivante :*

pour tout compact K de Ω , il existe un entier p et une constante c tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \text{supp}(\varphi) \subset K, \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leq c \sup_{x \in K, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

où α est un multi-indice.

Remarque 1.3.3 *$\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas un espace vectoriel normé si bien que $\mathcal{D}'(\Omega)$ n'est pas le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ au sens de la définition dualité. Nous utiliserons néanmoins la notation $\mathcal{D}'(\Omega)$*

Exemple.

- Pour $1 \leq p \leq \infty$, les fonctions $f \in L^p(\Omega)$ peuvent être identifiées à des distributions en posant

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

L'identification repose sur la propriété fondamentale suivante : pour f et $g \in L^p(\Omega)$,

$$(f = g \text{ p.p dans } \Omega) \iff \left(\int_{\Omega} f \varphi = \int_{\Omega} g \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right).$$

Nous commettrons l'abus de notation de confondre $f \in L^p(\Omega)$ et sa distribution associée $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

- De même, toute fonction de $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, $k \geq 0$, peut être identifiée à une distribution.
- Soit $a \in \Omega$. La masse de Dirac ponctuelle en a est la distribution $\delta_{x=a} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$\langle \delta_{x=a}, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Notons que $\delta_{x=a} \notin L^2(\Omega)$, i.e., il n'existe pas de fonction $f \in L^2(\Omega)$ telle que $\langle \delta_{x=a}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi, \forall \varphi \in D(\Omega)$.

1.3.1 Dérivation au sens des distributions

Le point fondamental est que toute distribution est dérivable au sens des distributions.

Définition 1.3.4 Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $1 \leq i \leq d$. Alors, $\partial_i u$ est la distribution donnée par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \partial_i u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_i \varphi \rangle.$$

Plus généralement, soit α un multi-indice, On définit la distribution $\partial^\alpha u$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Par convention, on posera $\partial^0 u = u$ et $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_d u) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^d$.

Exemple.

La dérivation au sens des distribution est d'une part une extension de la dérivation usuelle dans $C^1(\bar{\Omega})$ et d'autre part nous permet de considérer dérivée de fonctions qui ne sont pas dérivable au sens classique.

-Pour $\Omega =]0, 1[$ et $u \in C^1(\bar{\Omega}) \subset D'(\Omega)$, notons $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{cl}$ sa dérivée usuelle.

Nous avons

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \left\langle \left(\frac{du}{dx}\right)_{cl}, \varphi \right\rangle &= \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)_{cl} \varphi \\ &= [u\varphi]_0^1 - \int_0^1 u \frac{d\varphi}{dx} \text{ (intégration par partie)} \\ &= - \int_0^1 u \frac{d\varphi}{dx} \text{ (car } \varphi(0) = \varphi(1) = 0) \\ &= - \left\langle u, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle, \end{aligned}$$

si bien que la dérivée au sens distributions coïncide avec la dérivée usuelle

Lemme 1.3.5 [1]

$\forall u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a l'implication : $(\nabla u = 0) \Rightarrow (u = Cste)$.

1.4 APPROXIMATION DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

Dans cette section nous nous intéressons à la construction de polynôme analogue à celui de Taylor (qui est défini pour des fonctions de classe C^k), mais pour les fonctions qui appartiennent à des espaces de Sobolev.

1.4.1 Polynôme de Taylor et de Sobolev

Nous commençons par la définition du polynôme de Taylor. Soit $u \in C^{m-1}(\mathbb{R}^N)$.

Définition 1.4.1 Le polynôme de Taylor d'ordre m évalué au point y est donné par

$$T_y^m u(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y) (x - y)^\alpha, \quad (1.14)$$

Définition 1.4.2 (*Fonction de troncature*) On appelle fonction de troncature toute fonctions qui satisfait les propriétés

1. $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$
2. $\int_{\mathbb{R}^N} \phi dx = 1$

L'exemple suivant montre l'existence de fonctions de troncature. Soit la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-(1/(1-\|x\|^2))} & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

et soit

$$c = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx.$$

Alors la fonction $\phi = \frac{\varphi}{c}$ est une fonction de troncature.

Définition 1.4.3 Soit $u \in H^{m-1}(\Omega)$, $B \subset\subset \Omega$, $m \geq 1$. Le polynôme de Sobolev d'ordre m évalué au point x est donné par

$$Q^m u(x) = \int_B T_y^m u(x) \phi(y) dy. \quad (1.15)$$

Proposition 1.4.4 Pour tout α tel que $|\alpha| \leq m - 1$

$$D_x^\alpha T_y^m u(x) = T_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x) \quad \forall u \in C^{|\alpha|}(\Omega) \quad (1.16)$$

Dans le cas général, si la fonction u est dans l'espace de Sobolev, $D^\alpha u$ est dans sens généralise. Donc on défini le polynôme de fonctions

Proposition 1.4.5 Pour tout α tel que $|\alpha| \leq m - 1$

$$D_x^\alpha Q_y^m u(x) = Q_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x) \quad \forall u \in C^{|\alpha|}(\Omega) \quad (1.17)$$

Preuve. si $u \in C^\infty(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} D_x^\alpha Q_y^m u(x) &= \int_B D_x^\alpha T_y^m u(x) \phi(x) dy \\ &= \int_B T_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x) \phi(x) dy \\ &= Q_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x). \end{aligned}$$

■

1.4.2 Représentation d'erreur

Pour $f \in C^m([0, 1])$, on a

$$f(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + m \int_0^1 \frac{1}{m!} s^{m-1} f^{(m)}(1-s) ds$$

soit $u \in C^m$. Pour $x \in \Omega$ et $y \in B$, on définit $f(s) = u(y + s(x - y))$

par des calculs directes on conclut que

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(s) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y + s(x - y)) (x - y)^\alpha \quad (1.18)$$

Définition 1.4.6 *Le reste d'ordre m est défini par*

$$R^m u(x) = u(x) - Q^m(x) \quad (1.19)$$

Proposition 1.4.7 *Le reste $R^m u(x)$ satisfait :*

$$R^m u(x) = m \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_x} k(x, z) D^\alpha u(z) dz \quad (1.20)$$

avec $z = x + s(y - x)$, $k_\alpha(x, z) = (\frac{1}{\alpha!})(x - z)^\alpha k(x, z)$ et

$$|k(x, z)| \leq C \left(1 + \frac{|x - x_0|}{\rho}\right)^n |z - x|^{-n} \quad (1.21)$$

Preuve. Pour $z = x + s(y - x)$, on utilise le changement de variable,

$$ds dy = s^{-n} ds dz$$

Soit $A = \{(z, s) : s \in (0, 1], |(1/s)(z - x) + x - x_0| < \rho\}$

On note

$$(z, s) \in A : \frac{|z - x|}{|x - x_0| + \rho} < s \quad (1.22)$$

alors

$$(x - y)^\alpha = s^{-m} (x - z)^\alpha \text{ si } |\alpha| = m \quad (1.23)$$

a partir de (1.4.1) et (1.18) on obtient

$$R^m u(x) = \sum_{|\alpha|} \int \int \chi_A(z, s) \phi(x + \frac{(z - x)}{s}) \times \frac{m}{\alpha!} s^{-n-1} (x - z)^\alpha D^\alpha u(z) ds dz. \quad (1.24)$$

Donc

$$\begin{aligned}
R^m u(x) &= m \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_x} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(z) (x-z)^\alpha \\
&\times \left[\int_0^1 \phi(x + (1/s)(z-x)) \chi_A(z, s) s^{-n-1} ds \right] dz \\
&= m \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_x} k_\alpha(x, z) D^\alpha u(z) dz,
\end{aligned}$$

Si on prend $k(x, z) = \int_0^1 \phi(x + (1/s)(z-x)) \chi_A(z, s) s^{-n-1} ds$ et $k_\alpha(x, z) = (1/\alpha!)(x-z)^\alpha k(x, z)$. Il reste de montrer l'estimation (1.21) pour $k(x, z)$

Soit $t = |z-x|/(|x-x_0| + \rho)$. Alors

$$\begin{aligned}
|k(x, z)| &= \left| \int_0^1 \chi_A(z, s) \phi(x + (1/s)(z-x)) s^{-n-1} ds \right| \\
&\leq \int_t^1 |\phi(x + (1/s)(z-x))| s^{-n-1} ds \quad (\text{d'apr\^es (1.22)}) \\
&\leq \|\phi\|_{L^\infty(B)} \frac{s^{-n}}{n} \Big|_1^t \\
&\leq (1/n) \|\phi\|_{L^\infty(B)} t^{-n} \\
&= (1/n) \|\phi\|_{L^\infty(B)} (\rho + |x-x_0|)^n |z-x|^{-n} \\
&\leq C \rho^{-n} (\rho + |x-x_0|)^n |z-x|^{-n} \\
&= C \left(1 + \frac{1}{\rho} |x-x_0|\right)^n |z-x|^{-n}
\end{aligned}$$

■

1.4.3 Le potentiel de Riesz

Lemme 1.4.8 *Soit $f \in L^p(\Omega)$, $m > n/p$. Alors*

$$\int_{\Omega} |z - x|^{-n+m} |f(z)| dz \leq C_p d^{m-n/p} \|f\|_{L^p} \quad \forall x \in \Omega \quad (1.25)$$

cette inégalité est aussi valable pour $p = 1$ si $m \geq n$.

Preuve.

1. Supposons d'abord que $1 < p < \infty$ et $m > n/p$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x - z|^{-n+m} |f(z)| dz &\leq \left(\int_{\Omega} |x - z|^{(-n+m)q} \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad (\text{L'inégalité de Hölder's}) \\ &< C \left(\int_0^d r^{(-n+m)q+n-1} dr \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad (\text{utilise Les coordonnées polaires}) \\ &= C (d^{(-n+m)q+n})^{1/q} \|f\|_{L^p(\Omega)} \\ &= C d^{m-(n/p)} \|f\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

2. au cas où $p = 1$ and $m \geq n$. Donc

$$\int_{\Omega} |x - z|^{-n+m} |f(z)| dz \leq \|(x - z)^{-n+m}\|_{L^\infty(\Omega)} \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

■

Proposition 1.4.9 *Soit $u \in W_p^m(\Omega)$*

$$\|R^m u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C d^{m-n/p} |u|_{W_p^m(\Omega)}, \quad (1.26)$$

où $1 < p < \infty$ et $m > n/p$, ou $p = 1$ et $m \geq n$.

1.4.4 Lemme de Deny-Lions

Notation : Pour tout entier $k \geq 0$, \mathbb{P}_k est l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égal à k . Pour tout entier m , puisque Ω est borné, $\mathbb{P}_k \subset H^m(\Omega)$ et on peut définir l'espace quotient $H^m(\Omega)/\mathbb{P}_k$, qui est un espace de Hilbert pour la norme quotient

$$\|f\|_{H^m(\Omega)/\mathbb{P}_k} = \inf_{p \in \mathbb{P}_k} \|f + p\|_{m,\Omega} \quad (1.27)$$

Lemme 1.4.10 (*Deny-Lions*)

On suppose que Ω est lipschitzien et connexe. Pour tout entier $k \geq 0$, il existe une constante C telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k, \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k} \leq C|v|_{k+1,\Omega} \quad (1.28)$$

Preuve.

1. La première des choses est de se débarrasser de la norme quotient dans (1.27). Pour cela, il suffit de construire un représentant convenable de la classe de v . Soit Π l'opérateur de projection orthogonale sur \mathbb{P}_k pour la norme de $L^2(\Omega)$: pour tout $v \in L^1(\Omega)$, $\Pi v \in \mathbb{P}_k$ est défini par

$$\int_{\Omega} (\Pi v - v)q dx = 0, \forall q \in \mathbb{P}_k. \quad (1.29)$$

C'est un système linéaire carré dont la dimension est celle de \mathbb{P}_k . Il admet une solution unique, Πv . De plus, Πv vérifie $\Pi(\Pi v) = \Pi v$ et $\|\Pi v\|_{0,\Omega}$. Alors

$$\|v\|_{H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k} \leq \|v - \Pi v\|_{k+1,\Omega} = (\|v - \Pi v\|_{k,\Omega}^2 + |v|_{k+1,\Omega}^2)^{1/2}. \quad (1.30)$$

Comme $\Pi(v - \Pi v) = 0$, il suffit de montrer qu'il existe une constante D telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega), \text{ telle que } \Pi v = 0, \|v\|_{k,\Omega} \leq D|v|_{k+1,\Omega}^2, \quad (1.31)$$

et on aura (1.4.10) avec $C = (1 + D^2)^{1/2}$.

2. On démontre (1) par l'absurde. si (1) est faux, on peut construire une suite v_n de H^{k+1} telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|_{k+1, \Omega} = 0 \text{ et } \|v_n\|_{k, \Omega} = 1. \quad (1.32)$$

Comme v_n est bornée dans $H^{k+1}(\Omega)$, grâce à une extension du Théorème (1.2.5), on peut extraire de v_n une sous-suite, encore notée v_n , qui converge faiblement dans $H^{k+1}(\Omega)$ (en fait le théorème (1.2.5) est valable pour des espaces de Banach réflexifs) : il existe v dans $H^{k+1}(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \text{ faiblement dans } H^{k+1}(\Omega). \quad (1.33)$$

Mais $\Pi v_n = 0$, i.e. $\int_{\Omega} v_n q dx = 0$ pour tout q dans \mathbb{P}_k . Donc, en passant à la limite faible dans cette égalité, on a $\int_{\Omega} v q dx = 0$ pour tout q dans \mathbb{P}_k , ce qui veut dire que $\Pi v = 0$.

D'autre part

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^{k+1} v_n \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (1.34)$$

Mais $\partial^{k+1} v_n$ converge faiblement vers $\partial^{k+1} v$ dans $L^2(\Omega)$. L'unicité de la limite entraîne que $\partial^{k+1} v = 0$. Alors (grâce à un résultat difficile), ceci entraîne que $v \in \mathbb{P}_k$. Donc $\Pi v = v$, et comme $\Pi v = 0$, ceci entraîne $v = 0$.

Enfin, comme l'injection de $H^{k+1}(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$ est compacte (ce qui est une extension facile de Théorème (1.2.1)), quitte à extraire une sous-suite, v_n converge vers $v = 0$ dans $H^k(\Omega)$. Ceci contredit le fait que $\|v_n\|_{k, \Omega} = 1$.

Remarques sur les hypothèses : La contradiction ne s'obtient qu'à la fin, quand on s'est servi de la compacité de l'injection. Si on n'a pas cette compacité, on ne peut rien conclure. Cette injection est fautive si Ω n'est pas borné et l'énoncé du théorème est faux dans ce cas car aucun polynôme de \mathbb{P}_k n'appartient à $L^2(\Omega)$.

La connexité de Ω permet de conclure que si $\partial^{k+1} v = 0$ alors $v \in \mathbb{P}_k$. Si Ω n'est pas connexe, les polynômes ne sont pas les mêmes dans chaque composante connexe de Ω et l'énoncé du théorème est faux. ■

1.4.5 Lemme de Bramble-Hilbert

Lemme 1.4.11 (*Bramble-Hilbert*)

$$|v - Q^m v|_{W_p^k(\Omega)} \leq C d^{m-k} |v|_{W_p^m(\Omega)} \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (1.35)$$

Où $d = \text{diam}(\Omega)$.

Preuve.

1. On suppose $\text{diam}(\Omega) = 1$. Alors pour tout $u \in C^m(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$, on a

$$|v - Q^m v|_{W_p^k(\Omega)} \leq C |v|_{W_p^m(\Omega)} \quad \forall k = 0, 1, \dots, m \quad (1.36)$$

Pour $k = m$, $|u - Q^m u|_{W_m^k(\Omega)} = |u|_{W_m^k(\Omega)}$.

Pour $k = 0$,

$$\begin{aligned} \|u - Q^m u\|_{L^p(\Omega)} &= \|R^m u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq m \sum_{|\alpha|=m} \left\| \int_{\Omega} K_{\alpha}(x, z) D^{\alpha} u(z) dz \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq c(1 + 1/\rho)^n \sum_{|\alpha|=m} \left\| \int_{\Omega} |x + z|^{-n+m} D^{\alpha} u(z) dz \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq |u|_{W_p^m(\Omega)} \end{aligned}$$

Pour $0 \leq k \leq m$,

$$\begin{aligned} |u - Q^m u|_{W_p^m(\Omega)} &= |R^m u|_{W_p^m(\Omega)} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha|=k} \|R^{m-k} D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^{\alpha} u|_{W_p^{m-k}(\Omega)} \right)^{1/p} \\ &\leq C |u|_{W_p^m(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

2. Pour un domaine général Ω , définie

$$\hat{\Omega} = \{\hat{x} = (1/d)x ; x \in \Omega\}$$

Soit $u \in W_p^m(\Omega)$ et $\hat{u} \in W_p^m(\hat{\Omega})$ où $\hat{u}(\hat{x}) = u(d\hat{x})$

Par un changement des variables, nous avons

$$|\hat{u}|_{W_p^m(\hat{\Omega})} = d^{m-n/p} |u|_{W_p^m(\Omega)} \quad \forall 0 \leq k \leq m.$$

Soit $\hat{Q}^m \hat{u}(\hat{x}) = Q^m \hat{u}(x) = Q^m u(d\hat{x})$ Alors

$$\begin{aligned} |\hat{u} - \hat{Q}^m \hat{u}|_{W_p^k(\hat{\Omega})} &\leq C |\hat{u}|_{W_p^m(\hat{\Omega})} \\ &= C d^{m-n/p} |u|_{W_p^m(\Omega)} \end{aligned} \quad (1.38)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |\hat{u} - \hat{Q}^m \hat{u}|_{W_p^k(\hat{\Omega})} &= |\hat{u} - Q^m \hat{u}|_{W_p^k(\hat{\Omega})} \\ &= d^{k-n/p} |u - Q^m u|_{W_p^k(\Omega)} \end{aligned} \quad (1.39)$$

D'après (1.38) et (1.39), on obtient

$$|u - Q^m u|_{W_p^k(\Omega)} \leq C d^{m-k} |u|_{W_p^m(\Omega)} \quad \forall 0 \leq k \leq m$$

■

INTERPOLATION DES FONCTIONS RÉGULIÈRES

2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre présente la notion d'élément fini en 3D et les techniques d'interpolation des fonctions régulière. Nous donnons la définition de maillage notamment les principaux éléments finis de Lagrange en 3D, pour plus d'informations voir [1].

2.2 NOTION D'ÉLÉMENT FINI EN 3D

Définition 2.2.1 *Un élément fini (en 3 D) est la donnée d'un triplet $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ tel que :*

- ▶ \hat{K} est une partie compacte, connexe, d'intérieur non vide de \mathbb{R}^3 .
- ▶ \hat{P} un espace vectoriel de fonctions définies sur \hat{T} .
- ▶ $\hat{\Sigma}$ est un ensemble de n_f formes linéaires $(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n_f})$ agissant sur les fonctions de \hat{P} telle que l'application :

$$\hat{p} \mapsto (\hat{\sigma}_1(\hat{p}), \dots, \hat{\sigma}_{n_f}(\hat{p}))$$

soit un isomorphisme.

Les formes linéaires $(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n_f})$ sont appelées degrés de liberté locaux.

2.2.1 Maillages

Définition 2.2.2 *Un maillage est une discrétisation du Ω par des simplexe. En notant $\{K_1, \dots, K_{N_e}\}$ ces simplexes, on a donc*

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_e} K_i$$

On dit que la discrétisation est admissible si pour tout $i \neq j$, l'ensemble $K_i \cap K_j$ est soit vide, soit réduit à un point qui est un sommet à la fois de K_i et de K_j , soit égal à un segment qui est une arête à la fois de K_i et de K_j .

En dimension 2, les simplexes sont les triangles K_i sont appelés mailles et les arêtes des triangles sont appelées faces.

Pour tout $1 \leq i \leq N_e$, nous notons h_i le diamètre de la maille K_i (défini comme la plus grande des longueurs des arêtes de K_i) et nous posons

$$h = \max_{1 \leq i \leq N_e} h_i$$

Ce paramètre caractérise la finesse globale du maillage.

Nous notons $\{s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,3}\}$ les trois sommets de la maille K_i . En regroupant tous ces sommets, nous obtenons un ensemble de points de cardinal noté N_s et dont les éléments, appelés sommets du maillage, sont numérotés sous la forme $\{s_1, \dots, s_{N_s}\}$.

2.3 ÉLÉMENTS FINIS DE LAGRANGE \mathbb{P}_k EN DIMENSION 3

Proposition 2.3.1 *Soit \hat{K} le simplexe unitaire de \mathbb{R}^3 . Posons $\hat{P} = \mathbb{P}_k$ pour $k \geq 1$. Considérons l'ensemble des neouds $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_f}$ de coordonnées $\left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}, \frac{i_3}{k}\right)$ avec $0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq k$ et $i_1 + i_2 + i_3 \leq k$.*

Notons $\hat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n_f}\}$ les formes linéaires sur \mathbb{P}_k données par $\hat{\sigma}_i(\hat{p}) = \hat{p}(\hat{a}_i)$. Alors, $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ est un élément fini de Lagrange de degré k .

La figure (2.1) donne des exemples pour $k = 1, 2$. En numérotant les 4 sommets de \hat{K} dans l'ordre $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, les 4 fonctions de forme locales pour $k = 1$ sont données par $\hat{\theta}_1 = 1 - x_1 - x_2 - x_3$, $\hat{\theta}_2 = x_1$, $\hat{\theta}_3 = x_2$, $\hat{\theta}_4 = x_3$.

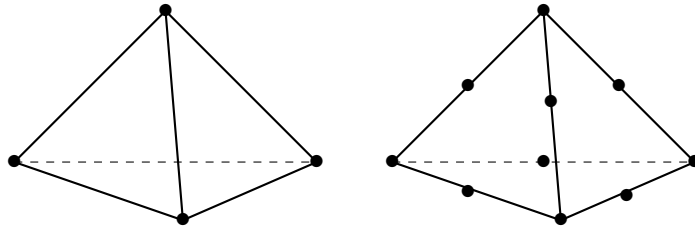


FIGURE 2.1 – Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ en 3D

2.4 ÉLÉMENTS FINIS DE LAGRANGE \mathbb{Q}_k EN DIMENSION 3

Proposition 2.4.1 Soit \hat{K} le carré unitaire de \mathbb{R}^3 . Posons $\hat{P} = \mathbb{Q}_k$ pour $k \geq 1$.

Considérons l'ensemble des noeuds $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_f}$ de coordonnées $\left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}, \frac{i_3}{k}\right)$ avec $0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq k$.

Notons $\hat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n_f}\}$ les formes linéaires sur \mathbb{Q}_k données par $\hat{\sigma}_i(\hat{p}) = \hat{p}(\hat{a}_i)$. Alors, $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ est un élément fini de Lagrange de degré k .

La figure (2.2) donne des exemples pour $k = 1, 2$ et 3 . En numérotant les 8 sommets de \hat{K} dans l'ordre $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)$, les 8 fonctions de forme locales pour $k = 1$ sont données par $\hat{\theta}_1 = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$, $\hat{\theta}_2 = x_1(1-x_2)(1-x_3)$, $\hat{\theta}_3 = x_1x_2(1-x_3)$, $\hat{\theta}_4 = (1-x_1)x_2(1-x_3)$, $\hat{\theta}_5 = (1-x_1)(1-x_2)x_3$, $\hat{\theta}_6 = x_1(1-x_2)x_3$, $\hat{\theta}_7 = x_1x_2x_3$, $\hat{\theta}_8 = (1-x_1)x_2x_3$.

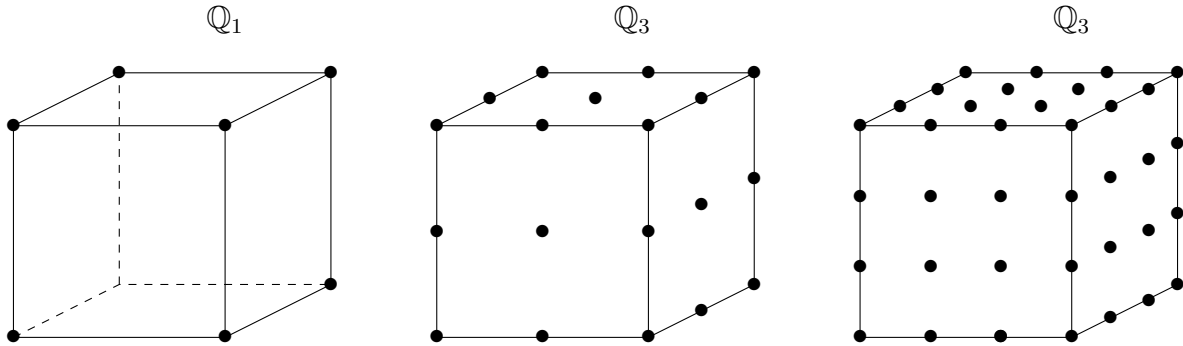


FIGURE 2.2 – Éléments finis de Lagrange \mathbb{Q}_1 , \mathbb{Q}_2 et \mathbb{Q}_3 en dimension 3

2.5 ÉLÉMENTS FINIS PRISMATIQUES EN DIMENSION 3

Proposition 2.5.1 Soit \hat{K} le prisme unitaire de \mathbb{R}^3 . Posons $\hat{P} = \mathcal{P}_k$ pour $k \geq 1$. Considérons l'ensemble des noeuds $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_f}$ de coordonnées $\left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}, \frac{i_3}{k}\right)$ avec $0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq k$ et $i_1 + i_2 \leq k$.

Notons $\hat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n_f}\}$ les formes linéaires sur \mathcal{P}_k données par $\hat{\sigma}_i(\hat{p}) = \hat{p}(\hat{a}_i)$. Alors,

$(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ est un élément fini de Lagrange de degré k .

2.6 AUTRES ÉLÉMENTS FINIS

Dans certaines applications, on souhaite interpolé des fonctions à valeurs vectorielles. Nous donnons dans cette section un exemple d'élément fini à valeurs dans \mathbb{R}^d . Pour approfondir l'étude des éléments finis introduits dans cette section.

2.6.1 Éléments finis de Raviart-Thomas

Soit \hat{K} le simplexe unitaire de \mathbb{R}^d . On considère l'espace polynômial de dimension $d + 1$ donné par

$$\hat{P} = (\mathbb{P}_0)^d \oplus x\mathbb{P}_0$$

où

$$x = (x_1, \dots, x_d).$$

On choisit pour degrés de liberté sur \hat{P} la valeur moyenne de la composante normale sur chacun des 3 côtés (resp. des 4 faces) de \hat{K} en dimension 2 (resp. 3). Notons $\hat{\Sigma}$ l'ensemble des degrés de liberté ainsi définis. On vérifie aisément que le triplet $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ est un élément fini. Il porte le nom d'élément fini de Raviart-Thomas et est souvent noté \mathbf{RT}_0 . Il intervient par exemple dans les applications liées à la mécanique des fluides où les fonctions à interpoler sont des vitesses dont on souhaite contrôler le flux normal aux interfaces des mailles.

En dimension 2, on a

$$\hat{P} = \{(\alpha_1 + \alpha_3 x_1, \alpha_2 + \alpha_3 x_2)\}$$

alors qu'en dimension 3, on a

$$\hat{P} = \{(\alpha_1 + \alpha_4 x_1, \alpha_2 + \alpha_4 x_2, \alpha_3 + \alpha_4 x_3)\}$$

.

INTERPOLATION DE FONCTIONS PEU RÉGULIÈRES

3.1 INTRODUCTION

Il est bien connu que si une fonction u appartenant à un espace de Sobolev, par exemple $H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, cette fonction peut être définie seulement presque par tout, et peut être même non bornée ; alors que l'approximation de fonctions par des fonctions polynomiales par morceaux nécessite que la fonction à interpolée soit bien définie aux points d'interpolation dites aussi les noeuds.

Une première approche pour résoudre ce problème est due à Clément [4] , qui a pu construire un quasi-interpolé en utilisant la technique de moyennisation ou régularisation pour définir la valeur de la fonction en un noeud quelconque. Cette technique donne des estimations d'erreur d'interpolation optimales et ça marche même pour des fonctions de classe L^1 .

Mais parmi les inconvénients de cet opérateur (de Clément), est le fait que cet opérateur ne préserve pas les conditions aux limites. Clément a proposé une alternative pour surmonter

ce problème si les conditions aux limites utilisées sont celles de Dirichlet homogènes, mais cette approche ne se généralise pas facilement aux autres cas par exemple le cas des conditions de Dirichlet non homogènes.

Dans ce chapitre, nous étudions l'approche de R. SCOTT et S. ZHANG ([8]) pour résoudre ce problème.

3.2 INTERPOLÉ DE SCOTT-ZHANG

Soit $\Omega \subset \mathcal{E}^d$ un ouvert borné connexe avec bord polygonal. Nous supposons que $\partial\Omega$ est Lipschitz-continue. Soit $C^\infty(\Omega)$ l'espace de fonctions définies et continument dérivable à tout ordre sur Ω , et soit $C_c^\infty(\Omega)$ les fonctions de classe C^∞ à support compact inclus dans Ω

L'espace de Sobolev $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ est la complétion de $C_c^\infty(\Omega)$, cet espace est munit par la norme :

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit la semi-norme

$$|f|_{W_p^l(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ici, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ est un multi-indice (chaque α_i est un entier non négatif) avec

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$$

et

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d}.$$

On note $W_2^l(\Omega)$ et $\mathring{W}_2^l(\Omega)$ par $H^l(\Omega)$ et $\mathring{H}^l(\Omega)$, respectivement.

3.2.1 L'espace discret

Soit \mathcal{T}_h une subdivision de Ω avec

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$$

cette subdivision est non-dégénérée :

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\text{diam}(K)}{\rho_K} \leq \gamma_0 \quad (3.1)$$

avec constante γ_0 indépendant de h . On Note qu'on ne suppose pas que tous simplexes, K ont de tailles comparables, autrement dit, on n'a pas besoin que le maillage soit quasi-uniforme, comme pour le cas de l'interpole de Clément, par exemple. Ici, K désigne un d -simplexe, $\text{diam}(K)$ désigne le diameter de K et ρ_K le rayon de plus grande boule fermée incluse dans \bar{K} .

Pour simplicité, on suppose que la variable spatiale est normalisée, i.e.,

$$\text{diam}(\Omega) = 1.$$

On considère l'espace des éléments finis V_h des fonctions continues et polynomiales par morceaux :

$$V_h = \{v \in C(\Omega) \mid v|_K \in P_K = \mathbb{P}_r^d \ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.2)$$

et le sous-espace \mathring{V}_h constitué par les fonctions continues et polynomiales par morceaux satisfont les conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

$$\mathring{V}_h = \{v \in V_h \mid v|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (3.3)$$

Ici, \mathbb{P}_r^d est l'espace des polynômes degré inférieur ou égale à r a d variables. les éléments finis de Lagrange

$$(K, \mathbb{P}_K, \mathcal{N}_K), \quad K \in \mathcal{T}_h,$$

qui sont affinement équivalente à l'élément $(\hat{K}, \mathbb{P}^d, \hat{\mathcal{N}})$. Où, $\hat{\mathcal{N}}$ désigne les variables nodales usuelles pour l'interpole de Lagrange évaluent la valeur en des points appropriées dans \hat{K} , et \mathcal{N}_K désigne évaluations à des points dans K qui sont l'image de ceux affine pour \hat{N} .

pour plus de simplicité, on suppose que \hat{K} est un simplexe régulier ayant tous les bords de longueur . Nous notons que les théorèmes donnés dans le présent document portent aussi des cas où les espaces d'éléments finis sont de la forme $\{v \in V_h, |v|_\Gamma = 0\}$ pour certains $\Gamma \subset \partial\Omega$, à condition que la triangulation correspond Γ appropriée.

3.2.2 Définition de l'opérateur \mathcal{SZ}_h

Pour définir un opérateur d'interpolations sur l'espace $W_p^l(\Omega)$ on utilise les noeuds utilisées par l'interpole de Lagrange.

Soit $\mathcal{N}_h = \{a_i\}_{i=1}^N$, l'ensemble de tous les noeuds de \mathcal{T}_h et $\{\phi_i\}_{i=1}^N \subset V_h$ la base nodale correspondante. On choisit pour chaque noeud a_i , un d -simplexe ou un $(d-1)$ -simplexe, σ_i , selon le type du noeud a_i , comme suit.

Si a_i est un point intérieur d'un d -simplexe, $K \in \mathcal{T}_h$, on pose

$$\sigma_i = K \tag{3.4}$$

Si a_i est un point sur une face (qui est un $(d-1)$ -simplexe), K' , d'un d -simplexe, K , on pose

$$\sigma_i = K'. \tag{3.5}$$

Pour les autres noeuds $a_i \in \mathcal{N}_h$, qui sont forcément sur un $(d-2)$ -simplexe, il existent plusieurs simplexe passant par ce point σ_i . On choisit n'importe quel $(d-1)$ -simplexe, K' , tel que $a_i \in \overline{K'}$, subie seulement la restriction

$$K' \subset \partial\Omega \text{ si } a_i \in \partial\Omega, \tag{3.6}$$

et on pose $\sigma_i = K'$. On peut voire que le choix de σ_i dans (3.6) n'est pas unique. La restriction $K' \subset \partial\Omega$ dans (3.6) pour $a_i \in \partial\Omega$ est fait avec objectif qu'elle préserve les conditions aux limites homogènes.

Pour chaque $(d-1)$ -simplexe, K' , de K , il existe une restriction naturelle (K, P_K, N_K) qui définisse un élément fini :

$$\left(K', P_{K'}, N_{K'} \right) = (K, P_K, N_K) |_{K'}. \tag{3.7}$$

Ici, $N_{K'}$, se compose de points évaluations au niveau des points de N_K qui se trouvent sur la face K' , et $P_{K'} = \rho_r^{d-1}$. par exemple, la restriction à une dimension linéaire, triangulaire, éléments finis serait linéaire, segment de ligne, éléments finis. Puisque tout (K, P_K, N_K) sont équivalente affine à un élément de référence unique, tous les $(K', P_{K'}, N_{K'})$, $(d-1)$ -dimensionnel sont équivalents à un seul affine élément. De plus, les fonctions qui sont non nuls restrictions des fonctions de base de nodales P_K on K' comprendre la base nodale pour $P_{K'}$. De plus, (3.1) implique que l'ensemble de tous visage $(d-1)$ -simplexe,

$$\left\{ K' \mid K' \text{ est un voisinage } ((d-1) - \text{simplex}) \text{ de } K, \text{ pour certains } K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (3.8)$$

est une famille de non dégénérée $(d-1)$ -simplexes. Nous remarquons que l'inverse de la dernière affirmation est fausse. Par exemple, une séquence de tétraèdres ayant une face non dégénérée (avec chaque face approchant d'une unité de triangle dans la limite) peut dégénérer en un plan; la limite est un carré unité avec deux diagonales.

On note par n_1 la dimension de ρ_r^d et $n_0(\sigma_i)$ la dimension de of $\rho_r^{dim\sigma_i}$, i.e, Soit la dimension de ρ_r^{d-1} on n_1 . Soit $a_{i,1} = a_i$, et soit $\{a_{i,j}\}_{j=1}^{n_0}$ l'ensemble des points nodal sur σ_i . Ici, σ_i est définie sur (3.4)-(3.6) associe à le neoud a_i . Pour la base nodale $\{\phi_{i,j}\}_{j=1}^{n_0}$ pour σ_i , on a une $L^2(\sigma_i)$ base-dual $\{\Psi_{i,j}\}$:

$$\int_{\sigma_i} \Psi_{i,j}(x) \phi_{i,k}(x) dx = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n_0, \quad (3.9)$$

Où δ_{jk} est symbole Kronecker. par simplicité, on pose

$$\Psi_i = \Psi_{i,1} \quad \forall a_i \in \mathcal{N}_i. \quad (3.10)$$

Alors, on a

$$\int_{\sigma_i} \Psi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.11)$$

où ϕ_j est une fonction de base nodal quelconque de V_h .

Scott-Zhang on définit l'opérateur d'interpolation Scott-Zhang,

$$\mathcal{SZ}_h : W_p^l(\Omega) \longrightarrow V_h(\Omega), \quad (3.12)$$

par

$$\mathcal{SZ}v(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \int_{\sigma_i} \Psi_i(\xi) v(\xi) d\xi, \quad (3.13)$$

où

$$l \geq 1 \text{ si } p = 1 \text{ et } l \geq \frac{1}{p} \text{ autrement.} \quad (3.14)$$

Ici, \mathcal{SZ}_h dépend de choix de σ_i à (3.4)-(3.6), mais ils ont utilisé \mathcal{SZ}_h au lieu de $\mathcal{SZ}_h \{\sigma_i\}$ par simplicité.

La condition (3.14) assure que les valeurs nodales, $\{\mathcal{SZ}v(a_i)\}$, sont bien définies grâce aux théorème de trace :

$$W_p^l(\Omega) \subset L^1(\sigma_i), \text{ i.e., } \|v\|_{L^1(\sigma_i)} \leq C(\Omega, \sigma_i) \|v\|_{W_p^l(\Omega)}, \forall v \in W_p^l(\Omega), i = 1, \dots, N. \quad (3.15)$$

De plus, la condition (3.14) assure la validité des conditions aux limites homogènes :

$$\forall v \in \mathring{W}_p^l(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0 \text{ dans } L^1(\partial\Omega), \text{ i.e., } \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} = 0. \quad (3.16)$$

Par le choix de σ_i dans (3.5),(3.6) on a, de (3.13) et (3.16), que

$$v \in \mathring{W}_p^l(\Omega) \implies \mathcal{SZ}v(a_i) = 0 \forall a_i \in \partial\Omega,$$

et par conséquent \mathcal{SZ} préserve les condition aux limites homogènes :

$$\mathcal{SZ} : \mathring{W}_p^l(\Omega) \longrightarrow \mathring{V}_h. \quad (3.17)$$

Puisque (3.11) implique que

$$\int_{\sigma_i} \phi_i(x)v(x)dx = v(a_i) \forall v \in V_h,$$

On conclu que \mathcal{SZ} est une projection,

$$\mathcal{SZ}v = v \forall v \in V_h. \quad (3.18)$$

On résume des résultats précédents dans la théorème suivante.

Théorème 3.2.1 [8]

Soit l et p satisfaisant (3.14), et soit \mathcal{T}_h satisfaire (3.1). Alors l'opérateur \mathcal{SZ} , définie par (3.13), est une projection à partir de $W_p^l(\Omega)$ dans V_h , définie par (3.2), avec la propriété que $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ est injecté dans \mathring{V}_h , définie par (3.3).

3.3 STABILITÉ DE \mathcal{SZ}_h

Dans le reste de ce chapitre, on utilise " $\lesssim \dots$ " et " $\simeq \dots$ " pour dénoter " $\leq C\dots$ " et " $= C\dots$ ", respectivement, avec une constant C indépendante du maillage \mathcal{T}_h et la fonction en f considération.

Soit $\{\sigma_i\}$ l'ensemble de simplexes qui sont soit d -simplexes ou $(d-1)$ -simplexes satisfont (3.1). Soit $\hat{\sigma}$ l'élément de référence de dimension d ou $(d-1)$, soit $\{\hat{\phi}_j\}$ la base nodale par $\hat{\sigma}$ et soit $\{\hat{\Psi}_j\}$ la base nodal duale par rapport produit scalaire de $L^2(\hat{\sigma})$. Supposons que l'application affine

$$F(\hat{x}) = B\hat{x} + x_0 \quad (3.19)$$

en voire $\hat{\sigma}$ à $\sigma \in \sigma_i$; nous avons [3] on a alors

$$\begin{aligned} \|B\| &\leq \frac{h_\sigma}{\hat{\rho}} \lesssim h_\sigma, \\ \|B^{-1}\| &\leq \frac{\hat{h}_\sigma}{\rho_\sigma} \lesssim h_\sigma^{-1}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\det(B) = \frac{\text{meas}(\hat{\sigma})}{\text{meas}(\sigma)} \lesssim \begin{cases} h_\sigma^d & \text{si } \dim(\sigma) = d, \\ h_\sigma^{d-1} & \text{si } \dim(\sigma) = d-1. \end{cases}$$

Ici $h_\sigma = \text{diam}(\sigma)$ et $\rho_\sigma = \text{diam}(\text{la plus grande boule contient } \bar{\sigma})$, avec \hat{h} et $\hat{\rho}$ définie correspondent. Soit $\{\bar{\phi}_j\}$ la base nodale duale à $\hat{\phi}_j$, et $\bar{\psi}_j$ la base nodale duale à $\{\bar{\Psi}_j\}$ sur σ :

$$\int_\sigma \bar{\Psi}_j(x) \bar{\phi}_k(x) dx = \delta_{jk} \quad \forall j, k.$$

Par l'utilisation de l'application affine définie par 3.19, il en résulte que

$$\int_{\hat{\sigma}} \bar{\Psi}_j(B\hat{x} + x_0) \bar{\phi}_k(B\hat{x} + x_0) \det(B) d\hat{x} = \delta_{jk} \quad \forall j, k.$$

Par l'unicité de la base duale noté $\hat{\phi}_j(\hat{x}) = \bar{\phi}_j(F(\hat{x}))$, on remarque que

$$\hat{\Psi}_j = \det(B) \bar{\Psi}_j \quad \forall j. \quad (3.21)$$

On utilise la régularité de la famille $\{\sigma_i\}$, on obtient le lemme suivant en combinant (3.21) et (3.20).

Lemme 3.3.1 *Pour toute neouds $a_i \in \mathcal{N}_h$,*

$$\|\Psi\|_{L^\infty(\sigma_i)} \lesssim h_K^{-\dim(\sigma_i)}, \quad (3.22)$$

où σ_i est d - or $(d-1)$ -simplex associe à a_i définie par (3.4)-(3.6), $K \in \mathcal{T}_h$ est tel que $\sigma_i \subset \overline{K}$, et Ψ_i est définie par (3.10).

Soit $\sigma_i = K'$ un $(d-1)$ -simplex tel que il est la face d'un d -simplex, K , et soit F définie par (3.19) applique la référence \hat{K} dans K tel que $F(\hat{K}') = K'$ et \hat{K}' est la $(d-1)$ -dimensionnel référence simplex. On suppose ici que \hat{K}' est une face simplex de \hat{K} . On suppose que les coordonnées sont choisis tel que on peut écrire

$$F|_{\hat{K}'}(\hat{x}_{d-1}, 0) = (B_{d-1}\hat{x}_{d-1}, 0) + x_0 \quad (3.23)$$

(en particulier, \hat{K}' lié au plane $x_d = 0$). On obtient d'après le théorème de trace et (3.20) que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^1(K')} &\leq |\det(B_{d-1})| \|\hat{v}\|_{L^1(\hat{K}')} \\ &\lesssim |\det(B_{d-1})| \|\hat{v}\|_{W_p^l(\hat{K}')} \\ &\lesssim h_K^{d-1} \|\hat{v}\|_{W_p^l(\hat{K}')} \\ &\lesssim h_K^{d-1} \sum_{k=0}^l \|B\|^k |\det(B)|^{-1|p|} |v|_{W_p^k(K)} \\ &\lesssim \sum_{k=0}^l h_K^{d-1+k-d|p|} |v|_{W_p^k(K)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

et, on a d'après l'inégalité de Hölder que

$$\|v\|_{L^1(K)} \lesssim h_K^{d-d|p|} |v|_{W_p^0(K)}. \quad (3.25)$$

Théorème 3.3.2 *Soit $v \in W_p^l(\Omega)$, soit l et p satisfait (3.14), soit \mathcal{T}_h satisfait (3.1) et soit $K \in \mathcal{T}_h$. Alors*

$$\|\mathcal{SZ}v\|_{W_q^m(K)} \lesssim \sum_{k=0}^l h_K^{k-m+\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} |v|_{W_p^k(S_K)}, \quad (3.26)$$

où

$$S_K = \text{intrieur} \left(\bigcup \left\{ \overline{K}_i | \overline{K}_i \cap \overline{K} \neq \emptyset, K_i \in \mathcal{T}_h \right\} \right) \quad (3.27)$$

et \mathcal{SZ}_h est définie par (3.13). dans (3.26), $1 \leq q \leq \infty$ et $m \geq 0$.

Preuve. Soit F , définie par (3.19), applique l'élément de référence \hat{K} sur K . On a, pour toute $v \in W_q^m(K)$,

$$|v|_{W_q^m(K)} \lesssim \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{-\frac{1}{q}} |\hat{v}|_{W_q^m(\hat{K})} \lesssim h_K^{-m+\frac{d}{q}} |\hat{v}|_{W_q^m(\hat{K})},$$

Où $\hat{v} = v(F(\hat{x}))$. De plus on a,

$$\|v\|_{W_q^m(K)} \lesssim h_K^{-m+\frac{d}{q}} \|\hat{v}\|_{W_q^m(\hat{K})},$$

puisque $h \leq \text{diam}(\Omega)$. sans perte de généralité, on peut supposer que les points nodaux, $\{a_i | 1 \leq i \leq n_1\}$, sont compris dans l'ensemble des points nodaux de N_K . Alors de (3.24)-(3.25) que, pour tout $v \in W_p^l(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}\mathcal{Z}v\|_{W_q^m(K)} &\leq \sum_{i=1}^{n_1} |\mathcal{S}\mathcal{Z}v(a_i)| \|\phi_i\|_{W_q^m(K)} \lesssim h_K^{-m+\frac{d}{q}} \max_{1 \leq i \leq n_1} \|\hat{\phi}_i\|_{W_q^m(\hat{K})} \sum_{i=1}^{n_1} |\mathcal{S}\mathcal{Z}v(a_i)| \\ &\lesssim h_K^{-m+\frac{d}{q}} \sum_{i=1}^{n_1} \left| \int_{\sigma_i} \psi_i(x) v(x) dx \right| \lesssim h_K^{-m+\frac{d}{q}} \sum_{i=1}^{n_1} \|\psi_i\|_{L^\infty(\sigma_i)} \|v\|_{L^1(\sigma_i)} \\ &\lesssim h_K^{-m+\frac{d}{q}} \sum_{i=1}^{n_1} h_k^{-\dim(\sigma_i)} \|v\|_{L^1(\sigma_i)} \lesssim h_K^{-m+\frac{d}{q}} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=0}^l h_K^{k-\frac{d}{p}} |v|_{W_p^k(K_i)} \\ &\lesssim \sum_{k=0}^l h_K^{-m+\frac{d}{q}+k-\frac{d}{p}} |v|_{W_p^k(S_K)}, \end{aligned}$$

où K_i est un voisinage d -simplex tel que $\sigma_i \subset \bar{K}_i$ et S_K est définie par (3.27). Ici, Lemme (3.19) est utilise pour borner $\|\Psi_i\|_{L^\infty(\sigma_i)}$ est on utilise le fait que (3.1) implique que K , σ_i , et K_i sont déduire comparables, i.e., un maillage non dégénéré est localement quasi-uniforme en 2D. ■

3.4 ERREUR D'INTERPOLATION

Dans ce qui suit on va considérer $\|v - \mathcal{S}\mathcal{Z}v\|_S$ pour $v \in W_p^l(\Omega)$ et pour différent normes Sobolev, $\|\cdot\|_S$. pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$ et tout polynôme $p \in \mathbb{P}_r^d$, on a d'après (3.18) et théorème (3.19) que

$$\|v - \mathcal{S}\mathcal{Z}v\|_{W_p^m(K)} \leq \|v - p\|_{W_p^m(K)} + \|\mathcal{S}\mathcal{Z}(p - v)\|_{W_p^m(K)} \lesssim \sum_{k=0}^m h_K^{k-m} \|v - p\|_{W_p^k(S_K)}. \quad (3.28)$$

Par (3.1), S_K est l'union of domaines chacun est convexe.

Alors, on peut appliquer le lemme de Bramble-Hilbert, sur le second membre de (3.28) pour obtenir, pour tout $\forall v \in W_p^1(S_K)$,

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_r^d} \|v - p\|_{W_p^k(S_K)} \leq C(d, r, \gamma_0) h_K^{l-k} |v|_{W_p^l(S_K)}, \quad 0 \leq k \leq l \leq r + 1. \quad (3.29)$$

En particulier, on soit le domaine D_j , dans [7] sont l'intérieur de la fermeture de l'union des couples ayant une face comme. Par conséquent de (3.1), les domaines sont convexe.

Grâce a l'hypothèse sur la régularité de $\partial\Omega$, et le fait que S_K est connexe.

D'après la remarque (7.2) de [5], (3.29) est vraie avec constante dépend seulement de d, r, γ_0 grâce a l'intersection de domaines D_j , qui contient un simplex S_K et donc contient un de diamètre S_K , où $\tilde{\gamma}_0$ dépend seulement γ_0 dans (3.1).

En combinant (3.28) et (3.29) alors

$$\|v - \mathcal{SZ}v\|_{W_p^m(K)} \leq C(d, r, \gamma_0) h_K^{l-m} |v|_{W_p^l(S_K)}, \quad (3.30)$$

Puisque

$$\sup_{\tilde{K} \in \mathcal{T}_h} \left\{ \text{card} \left\{ K \in \mathcal{T}_h \mid \tilde{K} \cap S_k \neq \emptyset \right\} \right\}$$

est une constante qui dépend seulement γ_0 par (3.1), on peut facilement conclure.

Théorème 3.4.1 [8]

Soit $v \in W_p^l(\Omega)$, soit l et p satisfait (3.14), et soit \mathcal{T}_h satisfait (3.1). Alors

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{P(m-l)} \|v - \mathcal{SZ}v\|_{W_p^m(K)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \|v\|_{W_p^l(\Omega)}, \quad 0 \leq m \leq l \leq r + 1, \quad (3.31)$$

où \mathcal{SZ} est définie par (3.13)

Posant $m = l$ et appliquant l'inégalité triangulaire on obtient

Corollaire 3.4.2 [8]

Soit $v \in W_p^l(\Omega)$, soit l et p satisfait (3.14), et soit \mathcal{T}_h satisfait (3.1).

Alors

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{SZ}v\|_{W_p^l(K)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \|v\|_{W_p^l(\Omega)}, \quad (3.32)$$

où \mathcal{SZ} est définie par (3.13).

Rappelons que $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$, propos de théorème (3.4.1) peut être simplifié comme suit :

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v - \mathcal{S}\mathcal{Z}v\|_{W_p^m(K)} \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim h^{l-m} \|v\|_{W_p^l(\Omega)}, \quad 0 \leq m \leq l \leq r+1. \quad (3.33)$$

On note que les résultats obtenus peuvent se généralisent aux autre domaines.

En effet, la seule condition critique est que S_K par (3.27) sont convexe ce qui est possible dans un tel cas.

APPLICATION : PROBLÈMES D'ORDRE DEUX À COEFFICIENTS VARIABLES

L'opérateur de projection $\mathcal{SZ}g$ (3.13) peut être utiliser pour étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0 \text{ dans } \Omega & , \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

On suppose que α_{ij} sont bornées, forment une matrice définie positive sur Ω . Supposons g régulière telle que $\mathcal{SZ}g$ soit définie, alors il est naturel qu'on cherche une approximation u_h dans

$$V_h^g = \{v \in V_h | v = \mathcal{SZ}g \text{ sur } \partial\Omega\} = \left\{v \in V_h | v - \mathcal{SZ}g \in \mathring{V}_h\right\}$$

tel que

$$a(u_h, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \alpha_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = 0, \quad \forall v \in \mathring{V}_h. \quad (4.2)$$

On note que u_h dépend seulement $\mathcal{SZ}g|_{\partial\Omega}$. Si \mathcal{SZ} est interpoles définie (3.13), $\mathcal{SZ}g|_{\partial\Omega}$ dépend seulement sur $g|_{\partial\Omega}$. En particulier, u donne une extension de $g|_{\partial\Omega}$, on peut penser que u_h soit définie dans l'espace

$$V_h^g = \left\{v \in V_h | v - \mathcal{SZ}u \in \mathring{V}_h\right\},$$

puisque $\mathcal{S}\mathcal{Z}g|_{\partial\Omega} = \mathcal{S}\mathcal{Z}u|_{\partial\Omega}$. On note que dans les interpolés ,e.g.[9], ayant cette propriété. On peut obtenir une estimation d'erreur standard par rapport à la norme

$$\|v\|_E^2 = a(v, v). \quad (4.3)$$

Puisque $a(u_h, v) = a(u, v) = 0$ pour $v \in \mathring{V}_h$,

on a

$$\|\mathcal{Z}\mathcal{S}u - u_h\|_E^2 = a(\mathcal{Z}\mathcal{S}u - u_h, \mathcal{Z}\mathcal{S}u - u_h) = a(\mathcal{Z}\mathcal{S}u, \mathcal{Z}\mathcal{S}u - u_h) = a(\mathcal{Z}\mathcal{S}u - u, \mathcal{Z}\mathcal{S}u - u_h)$$

.

D'après Cauchy-Schwarz on a

$$\|\mathcal{Z}\mathcal{S}u - u_h\|_E \leq \|\mathcal{Z}\mathcal{S}u - u\|_E$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\|\mathcal{Z}\mathcal{S}u - u_h\|_E \leq 2\|u - \mathcal{Z}\mathcal{S}u\|_E$$

L'estimation d'erreur (3.33) implique que

$$\|u - u_h\|_E \lesssim \max \{ \|\alpha_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} |i, j = 1, \dots, d\} h^{l-1} \|u\|_{H^l(\Omega)}, \quad 1 \leq l \leq r + 1. \quad (4.4)$$

Pour l'estimation dans les autres normes de Sobolev, voir [2]. On note que $\mathcal{Z}\mathcal{S}g$ peut ne pas être définie.

Une autre application de l'interpole $\mathcal{Z}\mathcal{S}$ définie (3.13) est l'extension des données du bord.

Supposons que $d = 2$ pour simplicité. On peut trouver un espace de Sobolev $W_p^s(\partial\Omega)$ pour $s \in [0, 1]$ en supposant que $\partial\Omega$ est Lipschitzienne.

Alors il existe $E : W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \rightarrow W_p^1(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$. Composée avec $\mathcal{S}\mathcal{Z}$, on obtient,

$$E_h = \mathcal{S}\mathcal{Z}E : W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \rightarrow V_h,$$

ayant la propriété

$$\|E_h v\|_{W_p^1(\Omega)} \lesssim \|v\|_{W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)} \quad (4.5)$$

Des plus soit $\Gamma \subset \partial\Omega$, et

$$\Gamma_h = \bigcup \{\sigma_i | \sigma_i \subset \Gamma\}, \quad (4.6)$$

Où σ_i est définie dans (3.4)-(3.6). Si v est polynomial sur Γ de degré r , alors (3.11) implique que $E_h v = v$ sur Γ_h . Alors on a une extension opérateur qui proposera des polynômes par morceaux sur la frontière aux polynômes par morceaux sur Ω , qui est bornée par une carte à partir $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ à $W_p^1(\Omega)$.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire on a étudié l'interpolé de Scott-Zhang. Cet opérateur est défini sous l'hypothèse minimale de régularité, i.e par des fonctions de $W^{l,p}$, $l = 0, 1, \dots$, $1 \leq p \leq \infty$ ce qui présente un avantage par rapport à l'interpolé de Lagrange qui ne peut être défini que si la fonction en considération est continue. Cet opérateur a les propriétés de stabilité et fournit des estimations d'erreur optimales. De plus l'opérateur de Scott-Zhang agit comme un opérateur de projection sur l'espace de V_h^1 des polynômes par morceaux, Un avantage de l'interpolé de Scott-Zhang réside dans le fait qu'il peut être utiliser pour un maillage anisotrope et il préserve les conditions aux limites.

L'utilisation de l'interpolé de Scott-Zhang pour les problèmes de perturbation singulières en 2D et 3D est mise comme une perspective de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Theory and Practice of Finite Elements (Applied Mathematical Sciences 159)*. Springer New York, 2004.
- [2] J.H. Bramble and S.R. Hilbert. Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with applications to Fourier transforms and spline interpolation. 1970.
- [3] P.G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. 1978.
- [4] Ph. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *M2AN*, 1975.
- [5] T. Dupont and R. Scott. Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces. 1980.
- [6] H.Brezis. Analyse fonctionnelle. 1983,Masson.
- [7] Brenner S and Scott R. The mathematical theory of finite element methods. 2007.
- [8] S. Zhang. An optimal order multigrid method for biharmonic, c^1 finite element equations. 1989.
- [9] X. Zhang. Studies in domain decomposition : Multilevel methods and the biharmonic dirichlet problem, 1991.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا إلى إمكانية استقطاب دوال ضعيفة الصقالة و ذلك باستخدام مؤثر استقطاب Scott-Zhang. مع التركيز على تطبيق هذا المؤثر في مثال نموذج معادلة من الدرجة الثانية بمعاملات متغيرة. الكلمات المفتاحية: استقطاب , عناصر منتهية , Scott-Zhang .

Abstract

In this memory we have studied the possibility of interpolation of functions with weak regularity by using the Scott-Zhang interpolate. An example model of second order elliptic problem with variables coefficients is studied.

Keys words: interpolation , finite elements , Scott-Zhang .

Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié la possibilité d'interpolation des fonctions avec faible régularité en utilisant l'interpolation de Scott-Zhang.

Un exemple modèle d'un problème elliptique de second ordre des coefficients variables à été étudié.

Mots clés : interpolation , éléments finis , Scott-Zhang.