



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**

**Faculté des Mathématiques et des Sciences
de la Matière**

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Laboratoire de Mathématiques Appliquées

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :Chedala Fatma Zohra

Thème

**ETUDE DE LA COUCHE LIMITE DANS
L'HOMOGENEISATION D'UN PROBLEME ELLIPTIQUE**

Soutenu publiquement le : 04/06/2015

Devant le jury composé de :

Meflah Mabrouk	MC (A). Université KASDI Merbah-Ouargla	Président
Ghezal Abderrazek	MC (B). Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Chacha Djamel Ahmed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Année universitaire : 2014/2015

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

Mon père et ma mère, mes frères et ma soeur, toute ma famille.

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma donné
durant tous ces années d'étude.

Je tiens tout d'abord à remercier premier lieu, mon encadreur Monsieur le Professeur
Chacha Djamel Ahmed de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa
continuité à me soutenir et à m'encourager.

Mes remerciements vont également à Messieurs les Docteurs Meflah Mabrouk et Ghezal
Abderrazek d'avoir accepter de juger ce travail Je remercie également les membres du
département de Mathématique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes
conditions pendant la réalisation de mon travail.

Je remercie aussi toute personne de près ou de loin qui ont contribué à la finalisation de
ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Dédicace	i
Remerciements	ii
Notations et conventions	v
Introduction	2
1 Introduction à la couche limite	4
1.1 Couche limite -historique- :	4
1.2 Généralité :	5
1.3 Un exemple de base :	6
2 Couche limite en homogénéisation	11
2.1 Le cas classique :	12
2.2 Le cas où la frontière du domaine est parallèle aux axes de coordonnées : .	15
2.2.1 Méthode de Tartar-Lions :	15
2.2.2 L'estimation en H^1 et L^2 :	20
3 Application en élasticité linéaire	23

3.1	Position du problème	23
3.1.1	Position du problème	24
3.1.2	Existence et unicité de (P^ε)	24
3.2	Le problème de couche limite	28
3.2.1	Etude du problème de deuxième ordre	32
3.2.2	Etude du problème de quatrième ordre	34
	Conclusion	36
	Bibliographie	38

NOTATIONS ET CONVENTIONS

- Les indices Latins varient dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et les indices Grecs (à l'exception de ε) varient dans l'ensemble $\{1, 2\}$.
- On utilise la convention de la sommation par rapport aux répétés.

Les symboles :

- $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$: c'est la fermeture de Ω .
- $\omega \subset\subset \Omega$: ω est injection compact dans Ω .
- max : le maximum.
- sup : le supérieur.
- $O(\varepsilon^{n+1})$: $f(\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}) \iff \left| \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{n+1}} \right| \leq C$ (constante positive) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.
- δ_{ij} : le symbole de Kronecker.
- E : module d'Young.
- ν : le coefficient de Poisson.

Les opérateurs :

- $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$: c'est l'opérateur de Laplace.
- ∇ : le gradient.
- div : c'est l'opérateur de divergence.
- $\langle \cdot \rangle$: c'est l'opérateur de moyenne : $\langle f \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y f dy$.

Les espaces :

- $W^{m,\infty}(\Omega) : \{f \in L^\infty : D^\alpha f \in L^\infty(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$.
- $H^{-1}(\Omega) : (H_0^1(\Omega))'$.
- $H_P^1(Y) : = \{v \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^n)/v \text{ est } Y - \text{périodique}\}$.
- $H_{loc}^1 : \{f \in H^1 : \int_\omega f dx < +\infty\}$.

Les fonctions :

- $u^{i,cl}$: les termes de couche limite.
- Φ, Ψ : deux fonctions potentiels.

Les relations :

- **L'inégalité de Korn :**

Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $\exists C > 0$:

$$\int_{\Omega} e_{ij}(u)e_{ij}(u)dx + \int_{\Omega} u^2 dx \geq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

- **La loi de Hooke (1635-1703) :**

On utilise ici la loi de Hooke dans le cas d'un matériau isotrope :

$$e_{ij} = \frac{1}{E} ((1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}).$$

INTRODUCTION

Le phénomène de couche limite en homogénéisation est utilisé dans plusieurs domaines scientifiques (physique, mécanique des milieux continus,...) [3], [6] et [9]. L'étude mathématique de ce phénomène remonte aux années 70 avec la publication de l'ouvrage de référence [2].

On considère dans notre travail un problème aux limites elliptique d'ordre 2 de type Dirichlet homogène, avec coefficients oscillants périodiques posé sur un domaine de type hyper cube. Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier est dédié à la présentation du problème de la couche limite sur un modèle. On commence par donner un exemple qui explique la méthode de Vishik-Lyusternik [5], cette méthode est la base de la méthode de Tartar-Lions. Cette méthode est basée sur l'ajout des termes comme correcteurs de frontière au développement asymptotique à double échelles à partir de l'ordre 1. Ces correcteurs de frontière qui se nomment aussi solutions de couche limite sont solutions d'un problème aux limites elliptique sans second membre de type Dirichlet non homogène, défini dans la cellule de référence $(0, 1)^{n-1} \times]0, \infty[$, dont l'énergie décroît exponentiellement par rapport à la deuxième variable.

L'application de la méthode d'homogénéisation asymptotique fournit un comportement macroscopique optimale de la solution à l'intérieur du domaine ou bien si le domaine est l'espace tout entier ou que les conditions aux bords sont périodiques. On obtient dans ce cas une estimation de l'énergie de l'erreur d'ordre ε . Cependant, si le problème est posé sur un domaine à frontière, lipschitzienne par exemple, alors la présence de la frontière a une influence sur la précision des approximations et l'estimation correspondante de l'énergie de l'erreur est d'ordre $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ seulement dans ce cas.

Finallement, dans le troisième chapitre, on applique l'étude précédente en élasticité linéaire dans le cas d'un matériau multicouche isotrope. On cherche cette fois les contraintes couche limite d'ordre 1 en appliquant la méthode des potentiels.

INTRODUCTION À LA COUCHE LIMITE

1.1 Couche limite -historique- :

L'expression "**couche limite**" (Grenzschicht en allemand) a été utilisé pour la première fois par **L. Prandtl** le 12 aout 1904 lors "the Third Internationalen Mathematischen Kongress in Heidelberg, Germany". Prandtl a étudié l'écoulement d'un fluide à travers un corps solide dans le cas d'un nombre de Reynolds très important, il a montré que cet écoulement se divise en deux régions, une région extérieure d'écoulement non visqueux et une région très voisine du bord (couche limite) dans la viscosité est importante.

Prandtl a décrit un système d'équations qui donne la première approximation de la vitesse du fluide dans la couche limite. A l'interface entre la couche limite et la région extérieure les deux écoulements se raccordent.

1.2 Généralité :

Le but de cette partie est de donner une idée générale sur l'expression de "**couche limite**" (mathématiquement). Au début, on donne une notion sur le "**développement asymptotique**" :

Soit $f(x, \varepsilon)$ une fonction tel que $x \in \Omega$, et $\delta_i(\varepsilon)$ est une suite asymptotique. On appelle développement asymptotique de f dans Ω par rapport à $\delta_i(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ si :

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n a_i(x) \delta_i(\varepsilon) + O(\delta_{n+1}(\varepsilon))$$

on écrit :

$$f(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) \delta_i(\varepsilon), \forall x \in \Omega, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Supposons que :

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \delta_n(\varepsilon).$$

Si le développement asymptotique n'est pas uniforme en $x_0 \in \Omega$, c'est-à-dire :

$$f(x, \varepsilon) \neq \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) \delta_i(\varepsilon)$$

alors, on dit que $x_0 \in \Omega$ est un point singulier.

Donc, on peut dire que la couche limite est un voisinage d'un point singulier.

Dans tout ce qui suit, on utilise le développement des puissances, i.e :

$$\delta_i(\varepsilon) = \varepsilon^i.$$

1.3 Un exemple de base :

(D'après [5])

Soit Ω un domaine, borné de \mathbb{R}^2 , supposons que le bord $\partial\Omega$ est une courbe régulière. Les fonctions $k(x, y)$ et $f(x, y, \varepsilon)$ sont régulières, et $k(x, y) > 0$ dans $\bar{\Omega}$.

On considère l'équation elliptique suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u - k^2(x, y)u = f(x, y, \varepsilon), & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

La régularité des $k, f, \partial\Omega$ et le signe négatif de $-k^2(x, y)$ impliquent l'existence et l'unicité de la solution $u(x, y, \varepsilon)$.

L'expression asymptotique de la solution du problème (3.1) est constituée par : \bar{u} c'est le terme régulier et Π représente le terme de couche limite.

Pour construire les fonctions des couches limites, on utilise d'autres coordonnées au voisinage du $\partial\Omega$.

On considère les équations (sur $\partial\Omega$) données par :

$$x = \varphi(l) \quad y = \psi(l), \quad 0 \leq l \leq l_0,$$

Le point $M'(\varphi(l), \psi(l))$ se déplace sur $\partial\Omega$, de telle sorte que le domaine Ω reste à la gauche. au δ -voisinage de la courbe, on introduit les nouvelles variables locales comme suit :

Soit le point $M(x, y)$ appartenant à $\bar{\Omega}$ qui lie le vecteur normal à $\partial\Omega$ en passant par le point $M'(\varphi(l), \psi(l))$ (Figure (1.1)), notons par r la distance MM' , le couple des nombres (r, l) sera les nouvelles coordonnées du point M .

Si le δ -voisinage $\{(0 \leq r \leq \delta) \times (0 \leq l \leq l_0)\}$ est suffisamment étroit, c'est-à-dire δ est suffisamment petit. Dans cette région il existe une application bijective entre les deux coordonnées (x, y) et (r, l) donnée par :

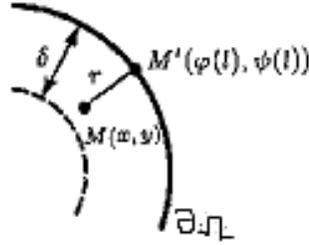


FIGURE 1.1 – Les coordonnées (r, l) au voisinage de $\partial\Omega$.

$$x = \varphi(l) - r \frac{\psi'(l)}{\sqrt{\varphi'^2(l) + \psi'^2(l)}}, \quad y = \psi(l) + r \frac{\varphi'(l)}{\sqrt{\varphi'^2(l) + \psi'^2(l)}}.$$

Dans le δ -voisinage du $\partial\Omega$ on obtient l'expression suivante de l'opérateur L_ε des termes de nouvelles variables (r, l) :

$$L_\varepsilon = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \alpha(r, l) \frac{\partial^2}{\partial l^2} + \beta(r, l) \frac{\partial}{\partial r} + \gamma(r, l) \frac{\partial}{\partial l} \right) - k^2(x(r, l), y(r, l)),$$

où

$$\alpha(r, l) = \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right)^2, \quad \beta(r, l) = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \gamma(r, l) = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2}.$$

Maintenant, nous effectuons le changement de variable de r tel que : $r = \varepsilon\rho$, nous obtenons :

$$L_\varepsilon = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - k^2(l) \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j L_j.$$

tel que $k^2(l) = k^2(\varphi(l), \psi(l))$, et L_j sont des opérateurs différentiels linéaires contenant les différenciations : $\partial/\partial\rho, \partial/\partial l, \partial^2/\partial l^2$.

Nous allons chercher la solution asymptotique de (3.1) qui s'écrit sous la forme :

$$u(x, y, \varepsilon) = \bar{u} + \Pi = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\bar{u}_i(x, y) + \Pi_i(\rho, l)). \quad (1.2)$$

Nous substituons (1.2) dans (3.1), et nous effectuons un développement de $f(x, y, \varepsilon)$ en série de puissances de ε , nous obtenons :

$$[\varepsilon^2 \Delta - k^2(x, y)] \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i(x, y) + \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - k^2(l) \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j L_j \right] \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i(\rho, l) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i(x, y), \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\bar{u}_i(l) + \Pi_i(0, l)) = 0. \quad (1.4)$$

tel que $\bar{u}_i(l) = \bar{u}_i(\varphi(l), \psi(l))$.

L'expression asymptotique des termes réguliers est donnée par :

$$-k^2(x, y)\bar{u}_0 = f_0(x, y), \quad -k^2(x, y)\bar{u}_1 = f_1(x, y),$$

$$\Delta \bar{u}_{i-2} - k^2(x, y)\bar{u}_i = f_i(x, y).$$

D'où :

$$\bar{u}_0 = -f_0(x, y)/k^2(x, y), \quad \bar{u}_1 = -f_1(x, y)/k^2(x, y),$$

$$\bar{u}_i = -(f_i(x, y) - \Delta \bar{u}_{i-2})/k^2(x, y).$$

En général, le terme régulier de l'expression asymptotique ne satisfait pas la condition du bord, mais la somme du terme régulier avec le terme de couche limite doit vérifier cette condition.

Pour les fonctions du bord, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \rho^2} - k^2(l)\Pi_i = \pi_i(\rho, l), \quad \rho \geq 0. \quad (1.5)$$

tel que $\pi_0 = 0$ et

$$\pi_i(\rho, l) = - \sum_{j=1}^i L_j \Pi_{i-j}(\rho, l), i \geq 1.$$

En plus, la partie de droite de l'expression de Π_i est exprimée de manière recursive par les Π_j ($j < i$). La condition de bord à $\rho = 0$ provient de (1.4) :

$$\Pi_i(0, l) = -\bar{u}_i(l). \tag{1.6}$$

Nous exigeons que les Π -fonctions sont décroissantes lorsque $\rho \rightarrow \infty$:

$$\Pi_i(\infty, l) = 0. \tag{1.7}$$

La solution explicite au problème (1.5)-(1.7) peut être trouvée successivement, par exemple :

$$\Pi_0(\rho, l) = -\bar{u}_0(l) \exp(-k(l)\rho).$$

Comme résultat de cette partie, toutes les fonctions Π_i possèdent l'estimation exponentielle suivante :

$$|\Pi_i(\rho, l)| \leq C \exp(-\kappa\rho),$$

où C et κ sont des constantes positives qui ne sont pas identiques pour chaque i .

- L'estimation du reste des termes :

Notons par $U_n(x, y, \varepsilon)$ la somme partielle d'ordre n de la série (1.2) :

$$U_n(x, y, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\bar{u}_i(x, y) + \Pi_i(\rho, l)).$$

Théorème 1.3.1 *La série (1.2) est la série de puissance asymptotique pour la solution $u(x, y, \varepsilon)$ du problème (3.1) dans $\bar{\Omega}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, donc on a l'estimation :*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x, y, \varepsilon) - U_n(x, y, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Preuve. : Posons $w(x, y, \varepsilon) = u(x, y, \varepsilon) - U_n(x, y, \varepsilon)$, on remplace $u = U_n + w$ dans (3.1) on obtient le problème suivant du terme w :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta w - k^2(x, y)w = h(x, y, \varepsilon), & (x, y) \in \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

d'où :

$$h(x, y, \varepsilon) = f(x, y, \varepsilon) - \varepsilon^2 \Delta U_n + k^2(x, y)U_n.$$

Il résulte de la méthode de construction de U_n que $h(x, y, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$ dans Ω .

Soit le point $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $w(x, y, \varepsilon)$ atteint sa valeur maximale positive. Alors $\Delta w \leq 0$ en ce point, ainsi l'équation de w implique :

$$w(x_0, y_0, \varepsilon) \leq \frac{|h(x_0, y_0, \varepsilon)|}{k^2(x_0, y_0)} = O(\varepsilon^{n+1}).$$

De la même manière, si (x_1, y_1) est un point dans Ω tel que $w(x, y, \varepsilon)$ atteint sa valeur minimale négative, alors :

$$w(x_1, y_1, \varepsilon) \leq \frac{|h(x_1, y_1, \varepsilon)|}{k^2(x_1, y_1)} = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Il découle des inégalités ci-dessus que :

$$\max_{\bar{\Omega}} |w(x, y, \varepsilon)| = \max_{\bar{\Omega}} |u - U_n| = O(\varepsilon^{n+1}).$$

■

COUCHE LIMITE EN HOMOGÉNÉISATION

Ce chapitre est basée sur le travail de G. Allaire et M. Amar dans l'article [1].

L'homogénéisation a d'abord été développé pour des structures périodiques ([2] et [8]). Celles-ci sont très nombreuses dans la nature ou dans les applications industrielles et on dispose d'une méthode très simple et très puissante pour les homogénéiser : la méthode des développements asymptotiques à deux échelles que nous avons présenté au premier chapitre.

Dans une structure périodique, nous notons ε le rapport de la période à la taille caractéristique de la structure. En générale, ce paramètre positif ε est petit, et l'homogénéisation consiste à effectuer une analyse asymptotique lorsque ε tend vers zéro. La limite ainsi obtenue sera dite homogénéisée, macroscopique ou effective. Dans le problème homogénéisé la forte hétérogénéité de la structure périodique d'origine est moyennée et remplacée par l'utilisation de coefficients homogénéisés.

2.1 Le cas classique :

Soit Ω un sous-ensemble ouvert et borné dans \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), et soit Y la cellule unité $Y = (0, 1)^n$ dans \mathbb{R}^n . On considère le problème elliptique suivant dans Ω :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u^\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

tel que $f \in L^2(\Omega)$, avec $A_\varepsilon(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice symétrique définie positive avec $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$.

Le problème (2.1) admet une solution faible unique $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ grâce au théorème de Lax-Milgram.

On va représenter le système (2.1) à coefficients oscillants par deux échelles caractéristiques : l'échelle macroscopique x et l'échelle microscopique représentée par la variable rapide $y = \frac{x}{\varepsilon}$. On est souvent conduit à séparer l'expression asymptotique en un problème à l'intérieur du domaine, et un problème au voisinage du bord.

Nous postulons le développement à double-échelle de la solution de (2.1) :

$$u^\varepsilon(x) = u^0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 \dots \quad (2.2)$$

Les fonctions $u^i = u^i(x, y)$ étant périodiques en la seconde variable (la variable microscopique : $y = \frac{x}{\varepsilon}$), En injectant (2.2) dans le système (2.1) et en identifiant les puissances de ε , on obtient de manière classique les équations suivantes :

$$-\operatorname{div}_y A(y) \nabla_y u^0 = 0 \quad (2.3)$$

$$-\operatorname{div}_y A(y) \nabla_y u^1 - \operatorname{div}_x A(y) \nabla_y u^0 - \operatorname{div}_y A(y) \nabla_x u^0 = 0 \quad (2.4)$$

$$- \operatorname{div}_y A(y) \nabla_y u^2 - \operatorname{div}_y A(y) \nabla_x u^1 - \operatorname{div}_x A(y) \nabla_y u^1 - \operatorname{div}_x A(y) \nabla_x u^0 = f \quad (2.5)$$

$$- \operatorname{div}_y A(y) \nabla_y u^3 - \operatorname{div}_y A(y) \nabla_x u^2 - \operatorname{div}_x A(y) \nabla_y u^2 - \operatorname{div}_x A(y) \nabla_x u^1 = 0 \quad (2.6)$$

$$- \operatorname{div}_y A(y) \nabla_y u^4 - \operatorname{div}_y A(y) \nabla_x u^3 - \operatorname{div}_x A(y) \nabla_y u^3 - \operatorname{div}_x A(y) \nabla_x u^2 = 0 \quad (2.7)$$

.....

La première équation (2.3) entraîne l'indépendance de u^0 par rapport à la variable y :

$$u^0(x, y) = u(x).$$

La deuxième équation (2.4) permet par séparation des variables x et y d'exprimer u^1 en fonction de la solution d'un problème cellulaire auxiliaire :

$$\begin{cases} \chi^j \in H_P^1(Y), \\ -\operatorname{div}_y A(y) \nabla_y \chi^j = -\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}(y) \\ \langle \chi^j \rangle = 0, \end{cases} \quad \text{dans } Y, \quad (2.8)$$

le terme à l'ordre 1 est donc :

$$u^1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = -\chi^j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x_j}(x) + \tilde{u}^1(x). \quad (2.9)$$

La troisième équation (2.5) implique :

$$u^2 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \chi^{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \chi^j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x_j}(x) + \tilde{u}^2(x) \quad (2.10)$$

avec les fonctions χ^{ij} sont solutions d'autres problèmes cellulaires auxiliaires :

$$\begin{cases} \chi^{ij} \in H_P^1(Y), \\ -\operatorname{div}_y A(y) \nabla_y \chi^{ij} = b_{ij} - \int_Y b_{ij}(y) dy \\ \langle \chi^{ij} \rangle = 0, \end{cases} \quad \text{dans } Y, \quad (2.11)$$

avec

$$b_{ij}(y) = a_{ij}(y) - a_{ik}(y) \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} - \frac{\partial}{\partial y_k} (a_{ki}(y) \chi^j),$$

et l'équation quatrième (2.6) implique :

$$u^3 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = -\chi^{ijk} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^3 u^0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (x) + \chi^{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x_j \partial x_j} (x) + \chi^k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x_k} + \tilde{u}^3(x). \quad (2.12)$$

Par application de l'opérateur moyenne à la troisième équation (2.5) et l'utilisation de (2.9), on trouve que $u^0(x)$ est solution du problème homogénéisé suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A^*(y) \nabla u^0 = f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.13)$$

tel que la matrice homogénéisée $A^* = (a_{ij}^*)$ est définie par :

$$a_{ij}^* = \int_Y \left[a_{ij}(y) - a_{ik}(y) \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y) \right] dy.$$

L'application de l'opérateur moyenne $\langle \cdot \rangle$ à la quatrième équation (2.6) implique :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}^*(y) \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x_j} \right] = F_1 \iff -\operatorname{div} A^* \nabla \tilde{u}^1 = c_{ijk} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad (2.14)$$

avec

$$c_{ijk} = \int_Y \left[a_{kl}(y) \frac{\partial \chi^{ij}}{\partial y_l}(y) - a_{ij}(y) \chi^k(y) \right] dy,$$

On applique les mêmes étapes à la cinquième équation (2.7), on obtient la relation de \tilde{u}^2 dans Ω :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}^*(y) \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x_j} \right] = F_2 \iff -\operatorname{div} A^* \nabla \tilde{u}^2 = M_{ijkl} \frac{\partial^4 u^0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \quad (2.15)$$

2.2 Le cas où la frontière du domaine est parallèle aux axes de coordonnées :

Maintenant, supposons que $\Omega = (0, 1)^n$ est le cube unité ouvert, on définit une semi-bande $G = Y' \times (-\infty, 0)$ avec $Y' = (0, 1)^{n-1}$, on note par $y = (y', y_n)$ le point $y \in G$ avec $y' \in Y'$ et $y_n \in (-\infty, 0)$. Le bord de G est composé de deux parties disjointes $\partial G = \Gamma \cup \partial G_P$:

la surface supérieure est définie par :

$$\Gamma = Y' \times \{0\}$$

et la surface latérale est définie par :

$$\partial G_P = \partial Y' \times (-\infty, 0)$$

L'étude de tout ce qui suit est de présenter une méthode qui a pour objectif d'exprimer le comportement asymptotique et d'étudier l'influence des termes de couche limite sur l'optimalité des estimations d'énergies sur des milieux finement périodiques, on utilise l'homogénéisation asymptotique. Cette méthode est appelée :

2.2.1 Méthode de Tartar-Lions :

L'objectif est de mieux comprendre le comportement de u^ε près du bord, ce qui nécessite d'introduire la couche limite $u^{i,\varepsilon cl}$ dans l'expression asymptotique de u^ε :

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon \left[u^1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + u^{1,\varepsilon cl}(x) \right] + \varepsilon^2 \left[u^2 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + u^{2,\varepsilon cl}(x) \right] + \varepsilon^3 \dots \quad (2.16)$$

Les termes de couche limite sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} -div A_\varepsilon \nabla u^{i,\varepsilon cl} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u^{i,\varepsilon cl}(x) = -u^i \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

Soit ψ^j une série de fonctions, on considère le problème suivant dans G :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(y) \nabla \psi^j = 0 & \text{dans } G, \\ \psi^j = \chi^j & \text{sur } \Gamma, \\ y' \longrightarrow \psi^j(y', y_n) & Y' - \text{périodique.} \end{cases} \quad (2.18)$$

On va exprimer par le lemme suivant le comportement des solutions de (2.18) à l'infini, qui vont décroître exponentiellement d'une façon rapide lorsqu'on s'éloigne du bord $\partial\Omega$.

Lemme 2.2.1 *Il existe une solution unique ψ^j de (2.18) dans $H_{Loc}^1(G)$, en plus il existe un exposant $\gamma > 0$ et une constante réelle unique d^j :*

$$e^{-\gamma y_n} (\psi^j(y) - d^j) \in L^2(G), e^{-\gamma y_n} \nabla \psi^j(y) \in L^2(G), j = 1, \dots, n.$$

On définit comme dans [7] :

$$\psi_\varepsilon^j(x', x_n) = \psi^j\left(\frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_n - 1}{\varepsilon}\right) - d^j$$

il est clair que $\psi_\varepsilon^j \in H^1(\Omega)$ et vérifie :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon^j = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi_\varepsilon^j(x) = \chi^j\left(\frac{x'}{\varepsilon}, 0\right) - d^j & \text{sur } \Gamma^1 = \partial\Omega \cap \{x_n = 1\}, \\ x' \longrightarrow \psi_\varepsilon^j(x', x_n) & \varepsilon Y' - \text{périodique,} \end{cases} \quad (2.19)$$

tel que ψ^j est la solution du problème (2.18) et d^j la limite associée à l'infini, d'après [1] on a :

$$\left\| \psi_\varepsilon^j \exp\left[-\gamma\left(\frac{x_n - 1}{\varepsilon}\right)\right] \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \text{ et } \left\| \nabla \psi_\varepsilon^j \exp\left[-\gamma\left(\frac{x_n - 1}{\varepsilon}\right)\right] \right\|_{L^2(\Omega)^n} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (2.20)$$

on définit aussi :

$$\tilde{\psi}_\varepsilon^j(x', x_n) = \psi_\varepsilon^j(x', x_n)V(x', x_n), \quad (2.21)$$

tel que $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ et $V = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \Gamma^1$.

Lemme 2.2.2 : Soit $\tilde{\psi}_\varepsilon^j$ définie par (2.21), et w_ε la solution unique dans $H^1(\Omega)$ de :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w_\varepsilon(x) = \tilde{\psi}_\varepsilon^j = V(x) \left(\chi^j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - d^j \right) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.22)$$

Alors

$$\|w_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^j\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Preuve. Par construction, on prend $\tilde{\psi}_\varepsilon^j = w_\varepsilon$ sur $\partial\Omega$ et $\tilde{\psi}_\varepsilon^j - w_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, on peut démontrer :

$$\|-\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla (w_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^j)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \quad (2.23)$$

On remarque :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla \tilde{\psi}_\varepsilon^j &= \operatorname{div} [A_\varepsilon \nabla (\psi_\varepsilon^j \cdot V)] = \operatorname{div} [A_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon^j \cdot V + A_\varepsilon \nabla V \cdot \psi_\varepsilon^j] \\ &= \operatorname{div} [(A_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon^j) \cdot V] + \operatorname{div} [(A_\varepsilon \nabla V) \cdot \psi_\varepsilon^j] \\ &= A_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon^j \nabla V + V \operatorname{div} (A_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon^j) + A_\varepsilon \nabla V \nabla \psi_\varepsilon^j + \psi_\varepsilon^j \operatorname{div} (A_\varepsilon \nabla V) \end{aligned}$$

alors, soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$ une fonction test :

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega -\operatorname{div} [A_\varepsilon \nabla (w_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^j)] \phi \, dx' \, dx_n = \int_\Omega \operatorname{div} (A_\varepsilon \nabla \tilde{\psi}_\varepsilon^j) \phi \, dx' \, dx_n \\ &= \int_\Omega A_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon^j \nabla V \phi \, dx' \, dx_n + \int_\Omega A_\varepsilon \nabla V \nabla \psi_\varepsilon^j \phi \, dx' \, dx_n + \int_\Omega \operatorname{div} (A_\varepsilon \nabla V) \psi_\varepsilon^j \phi \, dx' \, dx_n \end{aligned}$$

or

$$\int_\Omega \operatorname{div} (A_\varepsilon \nabla V) \psi_\varepsilon^j \phi \, dx' \, dx_n = - \int_\Omega A_\varepsilon \nabla V \nabla (\psi_\varepsilon^j \phi) \, dx' \, dx_n$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} [-A_{\varepsilon} \nabla V \nabla \phi \psi_{\varepsilon}^j + A_{\varepsilon} \nabla \psi_{\varepsilon}^j \nabla V \phi] dx' dx_n \\ &\leq C \int_{\Omega} [|\psi_{\varepsilon}^j| |\nabla \phi| + |\nabla \psi_{\varepsilon}^j| |\phi|] dx' dx_n \\ &= C[I_1 + I_2] \end{aligned}$$

On observe que :

$$I_1 \leq \|\psi_{\varepsilon}^j\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'après (2.20), on obtient :

$$\|\psi_{\varepsilon}^j\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \psi_{\varepsilon}^j \exp \left[-\gamma \left(\frac{x_n - 1}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

alors

$$I_1 \leq C\sqrt{\varepsilon} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{2.24}$$

Pour étudier I_2 :

$$I_2 = \int_{\Omega} |\nabla \psi_{\varepsilon}^j| |\phi| dx' dx_n \leq \|\nabla \psi_{\varepsilon}^j\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$

on définit l'inégalité de Poincaré comme suit :

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)^n},$$

donc :

$$I_2 \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} C\varepsilon \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)},$$

alors

$$I_1 + I_2 \leq C\sqrt{\varepsilon} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'autre part : (avec $\phi \in H_0^1$ et $\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$)

$$\| -div A_{\varepsilon} \nabla (w_{\varepsilon} - \tilde{\psi}_{\varepsilon}^j) \|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} = 1} \int_{\Omega} -div [A_{\varepsilon} \nabla (w_{\varepsilon} - \tilde{\psi}_{\varepsilon}^j)] \phi dx' dx_n \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

L'équation (2.23) implique :

$$\|w_{\varepsilon} - \tilde{\psi}_{\varepsilon}^j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} A_{\varepsilon} \nabla (w_{\varepsilon} - \tilde{\psi}_{\varepsilon}^j) \nabla (w_{\varepsilon} - \tilde{\psi}_{\varepsilon}^j) dx' dx_n = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} -div [A_{\varepsilon} \nabla (w_{\varepsilon} - \tilde{\psi}_{\varepsilon}^j)] (w_{\varepsilon} - \tilde{\psi}_{\varepsilon}^j) dx' dx_n$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \| -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla (w_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^j) \|_{H^{-1}(\Omega)} \| w_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \| w_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{H_0^1(\Omega)}.$$

■

Corollaire 2.2.1 : Soit w_ε définie comme dans le lemme(2.2.2). Alors :

$$\| w_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (2.25)$$

$$\| w_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.26)$$

et, pour tout ensemble ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\| w_\varepsilon \|_{H^1(\omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.27)$$

Preuve. : Pour démontrer la relation (2.25), on définit : $\delta_\varepsilon = w_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^j$, il est clair que $\delta_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon \nabla \delta_\varepsilon dx &= 0 \\ \lambda \| \nabla \delta_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla \delta_\varepsilon \nabla \delta_\varepsilon dx = - \int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla \tilde{\psi}_\varepsilon^j \nabla \delta_\varepsilon dx \leq C \| \nabla \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla \delta_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

donc

$$\| \nabla \delta_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| \nabla \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$$

on a :

$$\| w_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)} \leq \| \delta_\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)} + \| \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{H^1(\Omega)}$$

donc

$$\| w_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)} \leq \| \delta_\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)} + \| \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{H^1(\Omega)} \leq C \left[\| \nabla \delta_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right] \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Pour démontrer l'inégalité (2.26) on observe que :

$$\| w_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leq \| w_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{L^2(\Omega)} + \| \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{L^2(\Omega)} \leq \| w_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{H_0^1(\Omega)} + \| \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{L^2(\Omega)}$$

Le lemme (2.2.2) :

$$\| w_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^j \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon}$$

implique :

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon} + \|\tilde{\psi}_\varepsilon^j\|_{L^2(\Omega)},$$

d'après (2.20) et (2.21) :

$$\|\tilde{\psi}_\varepsilon^j\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\psi_\varepsilon^j\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon},$$

alors le résultat :

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Finallement, la démonstration de l'inégalité (2.27) (voir [1]). ■

2.2.2 L'estimation en H^1 et L^2 :

On présente dans cette partie l'étude de l'estimation de la solution en tenant compte du terme $u^{1,\varepsilon cl}$. L'estimation à l'ordre $u^{2,\varepsilon cl}$ c'est un enjeu majeur.

Commençons par définir le problème de $u^{1,\varepsilon cl}$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u^{1,\varepsilon cl} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u^{1,\varepsilon cl}(x) = -u^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On peut écrire le premier terme de couche limite $u^{1,\varepsilon cl}(x)$, sous la forme :

$$u^{1,\varepsilon cl}(x) = v^{1,\varepsilon cl}(x) + w^{1,\varepsilon cl}(x),$$

tel que $v^{1,\varepsilon cl}$ satisfait :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla v^{1,\varepsilon cl} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v^{1,\varepsilon cl}(x) = d_j^m \frac{\partial u^0}{\partial x_j}(x) - \tilde{u}^1(x) & \text{sur } \Gamma^m, \text{ pour } m = 1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (2.28)$$

et $w^{1,\varepsilon cl}$ satisfait :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla w^{1,\varepsilon cl} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w^{1,\varepsilon cl}(x) = \left(\chi^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - d_j^m\right) \frac{\partial u^0}{\partial x_j}(x) & \text{sur } \Gamma^m, \text{ pour } m = 1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (2.29)$$

Cette décomposition est motivée par le fait que le problème (2.29) est un problème d'homogénéisation standard (avec condition de Dirichlet non homogène indépendante de ε) et le second problème (2.30) est un problème dont la solution tend vers zéro à l'intérieur du domaine.

Lemme 2.2.3 : *Supposons que $u^0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$. Soit $w^{1,\varepsilon cl}$ la solution de (2.29), pour chaque ensemble ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ il existe un constante $C > 0$ tel que :*

$$\|w^{1,\varepsilon cl}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \|w^{1,\varepsilon cl}\|_{H^1(\omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

Preuve. : Voir [1] ■

Théorème 2.2.2 : *Soient u^ε et u^0 les solutions uniques de (2.1) et (2.13) respectivement, supposons que $u^0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$.*

Alors pour chaque sous-ensemble ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ avec injection compact dans Ω , il existe une constante C , tel que :

$$\left\| u^\varepsilon(x) - u^0(x) - \varepsilon u^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{H^1(\omega)} \leq C\varepsilon$$

Preuve. Voir [1]. ■

Théorème 2.2.3 : *Soient u^ε et u^0 les solutions uniques de (2.1) et (2.13) respectivement, supposons que $u^0 \in W^{3,\infty}(\Omega)$, soit u^1 définie par (2.9) et on suppose que \tilde{u}^1 vérifie l'équation (2.14), alors :*

$$\left\| u^\varepsilon(x) - u^0(x) - \varepsilon u^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u^{1,\varepsilon cl}(x) - \varepsilon^2 u^2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (2.30)$$

En plus, pour tout ensemble ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ avec injection compact dans Ω , il existe une constante C indépendante de ε :

$$\begin{aligned} & \left\| u^\varepsilon(x) - u^0(x) - \varepsilon u^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon v^{1,\varepsilon cl}(x) - \varepsilon^2 v^{1,1cl}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2 u^2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{H^1(\omega)} \\ & \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

et

$$\left\| u^\varepsilon(x) - u^0(x) - \varepsilon u^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon v^{1,cl}(x) \right\|_{L^2(\omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

tel que $v^{1,cl}(x, y) = \chi^j(y) \frac{\partial v^{1,cl}}{\partial x_j}(x)$, et $v^{1,cl}$ est la solution de :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla v^{1,cl} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v^{1,cl}(x) = d_j^m \frac{\partial u^0}{\partial x_j}(x) - \tilde{u}^1(x) & \text{sur } \Gamma^m, \text{ pour } m = 1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (2.32)$$

Preuve. Voir [1]. ■

APPLICATION EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

Ce chapitre reprend une partie de l'étude de H. Dumontet [3] avec plus de détails sur la couche limite pour un problème linéairement élastique multicouche périodique dans la direction verticale.

3.1 Position du problème

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 dont le bord $\partial\Omega$ est régulier, soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ les coordonnées cartésiennes d'un point de Ω , par rapport aux axes $R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Un corps élastique occupe le domaine Ω est soumis aux forces de densité : $f = (f_1, f_2, f_3)$ est fixé sur Γ_1 , on suppose que le reste du bord Γ_2 est libre. Le matériau est un composite laminé de structure périodique dans la direction \vec{e}_3 chaque couche est supposée d'un matériau élastique homogène et isotrope.

Notons par $\varepsilon - Z$ la période du matériau, ε est un paramètre très petit qui représente la taille de la période $Z =]0, Z^*[$ et qui doit tendre vers 0, le comportement élastique du matériau composite est caractérisé par les fonctions : $\mathcal{A}(z) = \{a_{ijkl}(z)\}$ défi-

nies sur Z , et étendues à tout l'espace par Z périodicité, on suppose qu'elles satisfont les propriétés suivantes :

$$a_{ijkl}(z) \in L^\infty(Z),$$

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl},$$

$$a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \geq Ce_{ij}e_{ij}, (C > 0), (\forall e_{ij} = e_{ji}).$$

Les coefficients élastiques locaux sont donnés par :

$$\mathcal{A}^\varepsilon(x) = \mathcal{A}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right) = \left\{ a_{ijkl}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right) \right\}$$

3.1.1 Position du problème

La formulation classique du problème d'équilibre est la suivante :

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^\varepsilon(x) = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma^\varepsilon(x) = \mathcal{A}^\varepsilon(x).e(u^\varepsilon(x)) & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \sigma^\varepsilon(x).n = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \end{array} \right.$$

tel que σ^ε est le tenseur de Cauchy, u^ε est le déplacement et $e_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ les composantes du tenseur des déformations associés à v .

3.1.2 Existence et unicité de $(\mathcal{P}^\varepsilon)$

Soit v la fonction test

$$v \in V = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = 0\}$$

$$\int_{\Omega} -\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} v_i \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx \iff \int_{\Omega} \sigma_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx$$

$$\iff \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\varepsilon}(x) e_{ij}(v) \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx.$$

Proposition 3.1.1 [8] : *Le problème élastique ($\mathcal{P}^{\varepsilon}$) admet une solution faible unique dans V .*

En effet, $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\varepsilon}(x) e_{ij}(v) \, dx$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur V grâce à l'inégalité de Korn, $f \in L^2(\Omega)$, et $L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ est une forme linéaire continue sur V .

D'après le théorème de Lax Milgram, le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in V, \end{cases}$$

admet une solution unique.

On postule les développements asymptotiques à double échelles pour u^{ε} et σ^{ε} comme suivant :

$$u^{\varepsilon}(x) = u^0(x) + \varepsilon u^1(x, z) + \varepsilon^2 \dots \quad (3.1)$$

$$\sigma^{\varepsilon}(x) = \sigma^0(x, z) + \varepsilon \sigma^1(x, z) + \varepsilon^2 \dots \quad (3.2)$$

tel que $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$, les fonctions $u^j(x, z)$ et $\sigma^k(x, z)$ ($j \geq 1$) et ($k \geq 0$) sont :

$$\begin{cases} \text{définies pour } x \in \Omega \text{ et } z \in Z, \\ Z - \text{périodiques par rapport à } z. \end{cases} \quad (3.3)$$

En appliquant le processus de l'homogénéisation asymptotique au ($\mathcal{P}^{\varepsilon}$) on obtient :

$$[\sigma_{ij}^0(x, z) + \varepsilon \sigma_{ij}^1(x, z) + \varepsilon^2 \dots] = [a_{ijkl}^{\varepsilon}(x)(e_{kl}^0 + \varepsilon e_{kl}^1 + \varepsilon^2 \dots)]$$

avec :

$$\sigma_{ij}^0(x, z) = a_{ijkl}(z)e_{kl}^0$$

$$\sigma_{ij}^1(x, z) = a_{ijkl}(z)e_{kl}^1$$

.....

Supposons que : $a_{ijkl}^\varepsilon(x) = a_{ijkl}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)$.

Pour trouver le problème homogénéisé, nous allons étudier l'équation :

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} [\sigma_{i1}^0 + \varepsilon\sigma_{i1}^1 + \varepsilon^2\dots] - \frac{\partial}{\partial x_2} [\sigma_{i2}^0 + \varepsilon\sigma_{i2}^1 + \varepsilon^2\dots] - \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\right) [\sigma_{i3}^0 + \varepsilon\sigma_{i3}^1 + \varepsilon^2\dots] = f_i$$

À l'ordre ε^{-1} :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{i3}^0(x, z) = 0 \tag{3.4}$$

À l'ordre ε^0 :

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{i1}^0(x, z) - \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{i2}^0(x, z) - \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{i3}^0(x, z) - \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{i3}^1(x, z) = f_i \tag{3.5}$$

-Etude de l'équation microscopique (3.4) :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{i3}^0(x, z) = 0 \iff -\frac{\partial}{\partial z} \left[a_{i3kl}^0\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right) e_{kl}(u^\varepsilon) \right] = 0$$

on a :

$$e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) = e_{\alpha\beta}^x(u^0) + \varepsilon e_{\alpha\beta}^x(u^1) + \dots$$

$$e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \right) (u_\alpha^0 + \varepsilon u_\alpha^1 + \varepsilon^2 + \dots) \right],$$

et

$$e_{33}(u^\varepsilon) = \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \right) (u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \varepsilon^2 \dots)$$

donc

$$e_{\alpha\beta}^0(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta^0}{\partial x_\alpha} \right) = e_{\alpha\beta}^x(u^0).$$

$$e_{\alpha 3}^0(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_3} + \frac{\partial u_\alpha^1}{\partial z} \right) = e_{\alpha 3}^x(u^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^1}{\partial z}.$$

$$e_{33}^0 = \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^1}{\partial z} = e_{33}^x(u^0) + \frac{\partial u_3^1}{\partial z}.$$

Alors

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial z} \left[a_{13\gamma\delta} e_{\gamma\delta}^x(u^0) + a_{i3\gamma 3} \left(e_{\gamma 3}^x(u^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\gamma^1}{\partial z} \right) + a_{i33\gamma} \left(e_{3\gamma}^x(u^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\gamma^1}{\partial z} \right) + a_{i333} \left(e_{33}^x(u^0) + \frac{\partial u_3^1}{\partial z} \right) \right] \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\iff -\frac{\partial}{\partial z} \left[a_{i3kl} e_{kl}^x(u^0) + a_{i3\gamma 3} \frac{\partial u_\gamma^1}{\partial z} + a_{i333} \frac{\partial u_3^1}{\partial z} \right] = 0$$

$$\iff -\frac{\partial}{\partial z} \left[a_{i3kl}(z) e_{kl}^x(u^0) + a_{i3k3} \frac{\partial u_k^1}{\partial z} \right] = 0$$

$$\iff -\frac{\partial}{\partial z} \left[a_{i3k3} \frac{\partial u_k^1}{\partial z} \right] = e_{kl}^x(u^0) \frac{\partial}{\partial z} a_{i3kl}(z)$$

On définit les fonctions $\chi^{kl}(z) \in H_z^1$ Z périodiques solutions de :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} \left[a_{i3k3} \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial z}(z) \right] = \frac{\partial}{\partial z} a_{i3mn}(z), \\ \langle \chi_k^{mn} \rangle = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

donc

$$u^1(x, z) = e_{kl}^x(u^0) \chi^{kl}(z) + \tilde{u}^1(x).$$

-Etude de l'équation macroscopique (3.5) :

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{i1}^0(x, z) - \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{i2}^0(x, z) - \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{i3}^0(x, z) - \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{i3}^1(x, z) = f_i$$

on utilise l'opérateur moyenne, on obtient : $\left\langle -\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}^0 \right\rangle = \langle f_i \rangle$

alors

$$\sigma_{ij}^0 = a_{ijkl}e_{kl}^0(u^0) = a_{ijkl}e_{kl}^x(u^0) + a_{ijk3}\frac{\partial u_k^1}{\partial z}.$$

Ainsi :

$$\langle \sigma_{ij}^0(x, z) \rangle_z = a_{ijmn}^H(z)e_{mn}^x(u^0),$$

avec :

$$a_{ijmn}^H = \left\langle a_{ijmn} + a_{ijk3}\frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial z} \right\rangle.$$

Finallement, Le problème homogénéisé est :

$$(\mathcal{P}^H) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \sigma^0(x, z) \rangle_z) = f & \text{dans } \Omega, \\ \langle \sigma^0(x, z) \rangle_z = \langle a_{ijmn}^H(z) \rangle_z e_{kl}(u^0) & \text{dans } \Omega, \\ u^0(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \langle \sigma^0(x, z) \rangle_z \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases}$$

Mais, la dernière condition du problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ n'est pas satisfaite en général lorsque $\varepsilon = 0$, c'est -à-dire $\sigma^0(x, z) \cdot n \neq 0$, ce qu'on obtient dans le problème homogénéisé est $\langle \sigma^0(x, z) \rangle_z \cdot n = 0$ ce qui implique l'existence du phénomène de couche limite.

3.2 Le problème de couche limite

Supposons que Γ_2 est planaire, définie par \vec{e}_1 et $\vec{e}_2 = \cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3$, avec $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $R' = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tel que $\vec{e}_3 = -\sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3$.

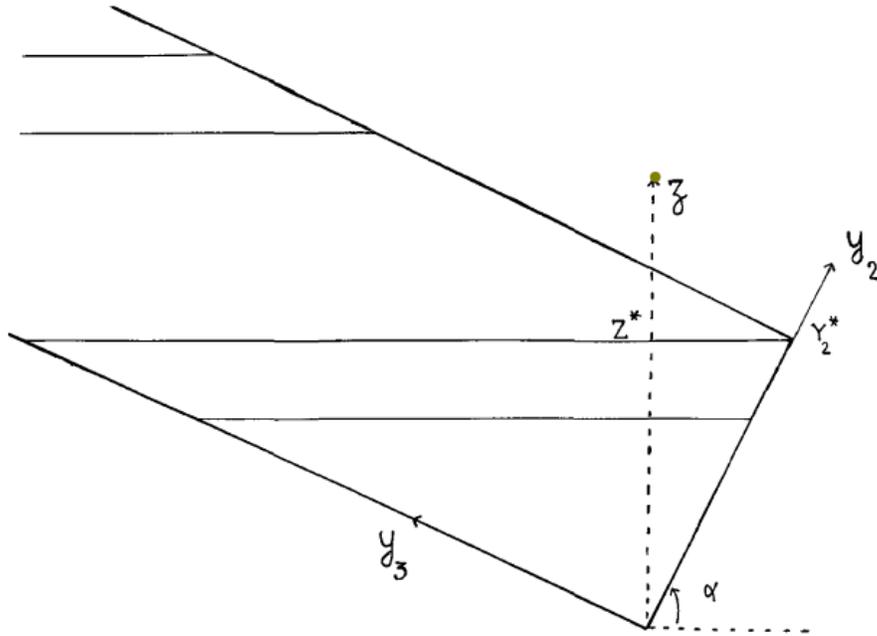


FIGURE 3.1 – La figure G .

Dans ce cas, on définit les variables microscopiques y_2 et y_3 comme suivant :

$$y_2 = \frac{x_2}{\varepsilon} \quad y_3 = \frac{x_3}{\varepsilon}. \quad (3.7)$$

on observe :

$$z = \sin \alpha y_2 + \cos \alpha y_3. \quad (3.8)$$

Soit :

$$G = Y_2 \times]0, +\infty[\quad \text{avec} \quad Y_2 =]0, Y_2^*[\quad \text{et} \quad Y_2^* = \frac{Z^*}{\sin \alpha}.$$

Remarquons que le domaine G se reproduit par Y_2 périodicité et que les coefficients

d'élasticité :

$$\tilde{\mathcal{A}}(y_2, y_3) = \mathcal{A}(z = \sin \alpha y_2 + \cos \alpha y_3)$$

sont Y_2 - périodiques, à y_3 fixe.

Les expressions asymptotiques de u^ε et σ^ε sont :

$$u^\varepsilon(x') = u^0(x') + \varepsilon [u^1(x', z) + u^{1,cl}(x', y_2, y_3)] + \varepsilon^2 \dots \quad (3.9)$$

$$\sigma^\varepsilon(x') = [\sigma^0(x', z) + \sigma^{0,cl}(x', y_2, y_3)] + \varepsilon \dots \quad (3.10)$$

où les termes de couche limite $u^{i,cl}(x', y_2, y_3)$ ($i \geq 1$) et $\sigma^{j,cl}(x', y_2, y_3)$ ($j \geq 0$) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{définies pour } x \in \Gamma_2 \text{ (i.e, } x' = (x'_1, x'_2, 0)) \text{ et } (y_2, y_3) \in G, \\ Y_2 - \text{périodiques par rapport à } y_2, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

et satisfont :

$$\sigma^{j,cl}(x', y_2, y_3) \text{ tend vers zéro lorsque } y_3 \rightarrow +\infty \quad (3.12)$$

$$\sigma_{p3}^{j,cl}(x'_1, x'_2, 0, y_2, 0) = -\sigma_{p3}^j(x'_1, x'_2, 0, y_2, 0), \quad (3.13)$$

$$\forall y_2 \in Y_2.$$

Pour trouver le problème de couche limite, on utilise la même méthode appliquée au chapitre 2 pour étudier les équations du problème :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_1} [(\sigma_{i1}^0 + \sigma_{i1}^{0,cl}) + \varepsilon \dots] - \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) [(\sigma_{i2}^0 + \sigma_{i2}^{0,cl}) + \varepsilon \dots] \\ - \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_3} \right) [(\sigma_{i3}^0 + \sigma_{i3}^{0,cl}) + \varepsilon \dots] = f_i \end{aligned} \quad (3.14)$$

À l'ordre ε^{-1} :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial y_2}(\sigma_{i2}^0 + \sigma_{i2}^{0,cl}) - \frac{\partial}{\partial y_3}(\sigma_{i3}^0 + \sigma_{i3}^{0,cl}) &= 0 \\
 \iff -\frac{\partial}{\partial y_2}\sigma_{i2}^{0,cl} - \frac{\partial}{\partial y_3}\sigma_{i3}^{0,cl} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

on obtient :

$$\begin{cases}
 -\frac{\partial}{\partial y_2}\sigma_{i2}^{0,cl} - \frac{\partial}{\partial y_3}\sigma_{i3}^{0,cl} = 0, \\
 \sigma_{ij}^{0,cl}(x', y_2, y_3) = \tilde{a}_{ijkl}(y_2, y_3)e_{kl}(u^{1,cl}(x', y_2, y_3)).
 \end{cases} \tag{3.16}$$

Alors on peut écrire le problème de couche limite sous la forme :

$$(\mathcal{P}^{cl}) \begin{cases}
 -\frac{\partial}{\partial y_2}\sigma_{i2}^{0,cl} - \frac{\partial}{\partial y_3}\sigma_{i3}^{0,cl} = 0, \\
 \sigma^{0,cl}(x', y_2, y_3) \text{ tend vers zéro lorsque } y_3 \rightarrow +\infty, \\
 u^{1,cl}(x', y_2, y_3) \text{ et } \sigma^{0,cl}(x', y_2, y_3) \quad Y_2 - \text{périodiques par rapport à } y_2.
 \end{cases}$$

Maintenant, d'après [6] on définit les fonctions potentielles suivantes :

$$\Psi(x', y_2, y_3) \quad \text{et} \quad \Phi(x', y_2, y_3)$$

définies pour $x' \in \Gamma_2$ et $(y_2, y_3) \in G$ tels que :

$$\begin{cases}
 \frac{\partial \Psi}{\partial y_3}(x', y_2, y_3) = -\sigma_{12}^{0,cl}(x', y_2, y_3) \\
 \frac{\partial \Psi}{\partial y_2}(x', y_2, y_3) = \sigma_{13}^{0,cl}(x', y_2, y_3)
 \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_2 \partial y_2}(x', y_2, y_3) = \sigma_{33}^{0,cl}(x', y_2, y_3) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_3 \partial y_3}(x', y_2, y_3) = \sigma_{22}^{0,cl}(x', y_2, y_3) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_2 \partial y_3}(x', y_2, y_3) = -\sigma_{23}^{0,cl}(x', y_2, y_3) \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Remarque 3.2.1 *Etant donné $e_{11}(u^{1,cl}) = 0$ et d'après (3.15), on observe que :*

$$\sigma_{11}^{0,cl} = \nu(y_2, y_3) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_2 \partial y_2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_3 \partial y_3} \right).$$

Pour étudier le problème de couche limite (\mathcal{P}^{CL}), on va considérer deux problèmes, le premier d'ordre deux et le second d'ordre quatre.

3.2.1 Etude du problème de deuxième ordre

On définit la fonction potentielle Ψ comme suite :

$$\Psi(x', y_2, y_3) = \tau^{rs}(y_2, y_3) e_{rs}(u^0)|_{(x'_1, x'_2, 0)} + \tilde{\Psi}(x'_1, x'_2, 0) \quad (3.19)$$

tel que $\tilde{\Psi}(x')$ est une fonction arbitraire, et $u^0(x')$ est la solution du problème homogénéisé (\mathcal{P}^H). On utilise la loi de Hooke et la relation $\frac{\partial^2 u_1^{1,cl}}{\partial y_2 \partial y_3} = \frac{\partial^2 u_1^{1,cl}}{\partial y_3 \partial y_2}$, pour retrouver le problème de ce cas.

Alors, les fonctions $\tau^{rs}(y_2, y_3)$ satisfont le problème suivant dans G :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial y_2} \left[\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial y_2} \right] + \frac{\partial}{\partial y_3} \left[\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial y_3} \right] = 0 \\
 \tau^{rs}(y_2, 0) = h^{rs}(y_2) = \int_0^{y_2} b_{13rs}(t, 0) dt - \frac{y_2}{Y_2^*} \int_0^{Y_2^*} b_{13rs}(y_2, 0) dy_2 \\
 \left(\frac{\partial \tau^{rs}}{\partial y_2}, \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial y_3} \right) \text{ tend vers zéro lorsque } y_3 \longrightarrow +\infty \\
 \tau^{rs}(y_2, y_3) \text{ sont } Y_2 - \text{périodiques par rapport à } y_2.
 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Comme résultat de ce cas, on a le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Il existe un réel $\gamma > 0$ tel que le problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial y_2} \left[\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial y_2} \right] + \frac{\partial}{\partial y_3} \left[\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial y_3} \right] = 0 \\
 \tau^{rs}(y_2, 0) = h^{rs}(y_2) = \int_0^{y_2} b_{13rs}(t, 0) dt - \frac{y_2}{Y_2^*} \int_0^{Y_2^*} b_{13rs}(y_2, 0) dy_2 \\
 \left(\frac{\partial \tau^{rs}}{\partial y_2}, \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial y_3} \right) \text{ tend vers zéro lorsque } y_3 \longrightarrow +\infty \\
 \left(e^{\gamma y_3} \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial y_2} \right) \in L^2(G), \left(e^{\gamma y_3} \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial y_3} \right) \in L^2(G)
 \end{array} \right.$$

admet une solution unique $\tau^{rs} \in V^{rs} = \{v \in L^2(0, R; V(Y_2))\}$, $R < \infty$, $e^{\gamma y_3} \frac{\partial}{\partial y_3} v \in L^2(G)$, $e^{\gamma y_3} \frac{\partial}{\partial y_2} v \in L^2(G), v(y_2, 0) = h^{rs}(y_2)\}$ avec $V(Y_2) = \{\Phi \in H^1(Y_2), \Phi \text{ est } Y_2\text{-périodique}\}$.

3.2.2 Étude du problème de quatrième ordre

De la même manière que le cas précédent, nous exprimons une fonction Φ définie pour x' , par la somme des fonctions arbitraires : $\tilde{\Phi}_1(x')$, $\tilde{\Phi}_2(x')$ et $\tilde{\Phi}_3(x')$ comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi(x'_1, x'_2, 0, y_2, y_3) &= \varphi^{rs}(y_2, y_3) e_{rs}(u^0)|_{(x'_1, x'_2, 0)} \\ &+ \tilde{\Phi}_1(x'_1, x'_2, 0) y_2 + \tilde{\Phi}_2(x'_1, x'_2, 0) y_3 + \tilde{\Phi}_3(x'_1, x'_2, 0), \end{aligned} \quad (3.21)$$

où les fonctions $\varphi^{rs}(y_2, y_3)$ satisfont le problème suivant dans G :

$$\left\{ \begin{array}{l} A[\varphi^{rs}(y_2, y_3)] = 0 \\ \varphi^{rs}(y_2, 0) = g^{rs}(y_2) \\ \frac{\partial \varphi^{rs}}{\partial y_3}(y_2, 0) = k^{rs}(y_2) \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi^{rs}}{\partial y_i \partial y_j} \right) \text{ tend vers zéro lorsque } y_3 \mapsto +\infty \\ \varphi^{rs}(y_2, y_3) \text{ sont } Y_2 - \text{périodiques par rapport à } y_2 \end{array} \right.$$

tel que l'opérateur A défini par :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_2} \left[\left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_3} \left[\left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_3} \right] \\ &+ 2 \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_3} \left[\left(\frac{\nu(1+\nu)}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_3} \right] - \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_2} \left[\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_3} \right] \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_3} \left[\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_2} \right], \end{aligned}$$

et $k^{rs}(y_2)$, $g^{rs}(y_2)$ des fonctions définies en Y_2 :

$$\begin{aligned} k^{rs}(y_2) &= \int_0^{y_2} b_{23rs}(t, 0) dt - y_2 \frac{1}{Y_2^*} \int_0^{Y_2^*} b_{23rs}(t, 0) dt \\ g^{rs}(y_2) &= - \int_0^{y_2} \left[\int_0^t b_{33rs}(t_1, 0) dt_1 \right] dt + \frac{y_2^2}{2Y_2^*} \int_0^{Y_2^*} b_{33rs}(y_2, 0) dt \\ &\quad + \int_0^{Y_2^*} \left[\int_0^{t_1} b_{33rs}(t_1, 0) dt_1 \right] dt - \frac{Y_2^*}{2} \int_0^{Y_2^*} b_{33rs}(y_2, 0) dy_2 \end{aligned}$$

Théorème 3.2.2 *Il existe un réel $\gamma > 0$ tel que le problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} A[\varphi^{rs}(y_2, y_3)] = 0 \\ \varphi^{rs}(y_2, 0) = g^{rs}(y_2) \\ \frac{\partial \varphi^{rs}}{\partial y_3}(y_2, 0) = k^{rs}(y_2) \\ \varphi^{rs}(y_2, y_3) \text{ sont } Y_2 - \text{périodiques par rapport à } y_2 \\ \left(e^{\gamma y_3} \frac{\partial^2 \varphi^{rs}}{\partial y_i \partial y_j} \right) \in L^2(G), \end{array} \right.$$

admet une solution unique $\varphi^{rs} \in W^{rs} = \{ v \in L^2(0, R, W(Y_2)), \forall R < \infty, e^{\gamma y_3} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} \in L^2(G), v(y_2, 0) = g^{rs}(y_2), \frac{\partial v}{\partial y_3}(y_2, 0) = k^{rs}(y_2) \}$ avec $W(Y_2) = \{ \Phi \in H^2(Y_2), \Phi \text{ est } Y_2 - \text{périodique} \}$

Preuve. Voir [3]. ■

CONCLUSION

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats, qu'on trouve dans les travaux cités dans la bibliographie, sur le comportement asymptotique en tenant compte de la couche limite, de la solution de problèmes elliptiques avec coefficients rapidement oscillants dans un domaine hypercube. La méthode employée est celle de Tartar-Lions. Ensuite, on a essayé d'utiliser l'étude précédente pour trouver une estimation optimale dans les espaces H^1 et L^2 . Enfin, on applique la méthode de l'homogénéisation asymptotique obtenue précédemment au cas de l'élasticité linéaire pour un milieu multi-couches.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Allaire and M. Amar, *Boundary layer tails in periodic homogenization*, ESAIM, control optim. calc. var.4 (1999), 209-243.
- [2] A. Bensoussan, J. L. Lions and G. Papanicolaon, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amesterdam (1978).
- [3] H. Dumontet, *Study of a boundary layer problem in elastic composite materials*. RAIRO, tome 20, n :2(1986), pp 265-286.
- [4] D. Gérard-Varet and N. Massoudi, *Homogenization and boundary layers*, Acta. Math. 209 (2012), 133-178.
- [5] J. John. H. Miller, *Singular perturbation problems in chemical physics. Analytic and Computational Methods*, 1997.
- [6] S. G. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden-Day ed, San Francisco, 1963.
- [7] S. Moskow and M. Vogelius, *First order corrections to the homogenized eigenvalues of a periodic composite medium. Aconvergence proof*. Proc. Roy. Soc. Edinburg 127 (1997) 1263-1295.

- [8] E. Sanchez Palencia, *Non homogeneous media and vibration theory*. Springer Verlag, Lecture notes in physics 127 (1980).
- [9] E. Sanchez Palencia and A. Zaoui, *Homogenization techniques for composite media*, Springer. 1987.

Résumé:

L'objectif de ce travail de mémoire est de présenter le phénomène de couche limite en homogénéisation. Le modèle considéré est un problème elliptique d'ordre 2 avec condition du bord de Dirichlet homogène. La problématique générale est d'étudier le comportement des solutions près du bord. Nous appliquons la méthode de développement asymptotique à double échelles à ce problème dans le cas où le domaine est à frontière parallèle aux axes de coordonnées. La deuxième partie est de donner l'estimation d'erreur intérieure et globale dans les espaces H^1 et L^2 . Enfin, nous donnons une application en élasticité linéaire où cette fois le problème de couche limite est un problème en contraintes et la méthode employée est la méthode des potentiels.

Mots clés : Homogénéisation , problème elliptique, couche limite, élasticité linéaire.

Abstract:

The aim of this work is to present a boundary layer phenomenon in homogenization. The model considered is an elliptic 2nd order problem with homogeneous Dirichlet condition. The general problem is to study the behavior of the solution near the boundary. We apply the double scale asymptotic expansion method to this problem in the case when the boundary of the domain is parallel to the coordinate axes. The second part of our study is to give interior and global error estimates in H^1 and L^2 . Finally, we give an application in linear elasticity where in this case the boundary layer problem is considered in stress form and the method used is the potential method.

Key words: Homogenization, a boundary layer, an elliptic problem, linear elasticity.

ملخص:

الهدف من هذا العمل هو دراسة ظاهرة الطبقات الجدارية في طريقة المجانسة ، النموذج المقترح هو عبارة عن مسألة ناقصية من الرتبة الثانية مزودة بشرط ديريشلي المتجانس على حدود الحيز. المسألة الأساسية هي دراسة سلوك هذه الطبقات في المنطقة القريبة من حافة الحيز حيث نقوم بتطبيق طريقة النشر المقارب ذو السلم الثنائي في حالة الحيز ذي الحافة الموازية لمحاور المعلم. ومن ثم نقوم بإعطاء نتائج حول تقدير الخطأ في حالتنا التقدير الداخلي و التقدير الكلي في كل من الفضاءين H^1 و L^2 . في الأخير نقدم تطبيقاً في حالة المرونة الخطية بحيث مسألة الطبقة الجدارية موضوعة في الشكل الإجهادي ، الطريقة المستعملة للحل في هذه الحالة هي طريقة الكمون.

الكلمات المفتاحية : المجانسة، الطبقات الجدارية، مسألة ناقصية، المرونة الخطية.