UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Master Académique

Spécialité: Mathématiques

Option: Analyse

Par: Mechri Mebrouka

Thème

Résolution d'un problème de réaction diffusion par la méthode de décomposition des opérateurs

Soutenu le: 03/06/2015

Devant le jury composé de:

Dr Assila Mostafa M.C(B).	Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Dr Amara Guerfi M.C(A).	Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Dr SAID Mohamed said M.C(A).	Université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Remerciements

Avant tout louane à**ALLAH** qui m'a donné le courage, la détermination, la volonté et la persévérance d'aller jusqu'au bout.
Nous remercions notre encadreur **Dr SAID Mohamed said** pour la sollicitude avec laquelle il a suivi et

Mes remerciements vont également :
A tous mes enseignants qui ont contribué à mon formation,
ainsi que tous les personnels de l'école.
A toute ma promotion pour tous les bons moments qu'on a passés ensemble.

Notations

Dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathbb{R}$: corps des réels
- $[0, T]$: l'intervalle fermé $0 \leq t \leq T$
- Ω :un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Γ :la frontiére topologique de Ω.
- Σ :la frontiér laterele de $\Omega \times]0, T[$.
- D_f : domaine de définition de f .
- $F(f) = \widehat{f}$: tronsformation de Fourier de la fonction f.
- F^{-1} :tronsformation de Fourier inverse.
- $(f * g)$: produit de convolution de f par g.
- $\|x\|$: la norme de x.
- $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{t \in I} |u(t)|$.
- $|.|$: la norme associée aux produits scalaires .
- Δ : opérateur de Laplace $\Delta = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
- $\nabla u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$: le gradient de la fonction $u$en $x \in \mathbb{R}^{\ltimes}$. (les dérivées sont prises au sens des distributions).
- $D(\Omega)$: désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.

- $L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}\ mesurable; \sup_{t\in\Omega} |u(t)| < +\infty\}$.
- $L^1([0,T])$: est l'espace des (classes) cet espace est L^∞
- $\|f\|_{L^1([0,T])}= (\int_0^T |f|dx)$

Table des matières

Introduction

Dans notre travail, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème de réaction diffusion :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) & dans\ \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R} & (condition\ \ initialle) \\ u(x,t) = 0\ on\ \Gamma = \partial\Omega & (condition\ aux\ limite) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0\ on\ \Gamma = \partial\Omega & (condition\ \ aux\ \ limite) \end{cases} \tag{1}$$

On considere le cas ou' :

$$f(u) = \mu u(1-u)\ et\ \mu > 0$$

et ceci par la **méthode de décomposition** cette méthode a été introduite par **R Temam [8]** et explicité par **J.Lions [2]**.
Cette méthode est basée sur **théoréme des approximations par des méthodes de décomposition** qui donne les étapes suivantes :
(i) théoréme d'un point fixe.
(ii)c'est théorème d'existence et d'unicité
Ce mémoire est divisé en quatre chapitres .
On donne dans le premier chapitre quelques notatios , définitions , propositions , propriétés de l'analyse fonctionelle, et on va étudier de l'aproximation d'équations aux dérivées partiélles par des méthodes de décomposition ,qui nous permet de mieux comprendre le contenu de ce travail.
Dans le deuxiéme chapitre on la transformation de Fourier pour transformer le prpbléme non linéaire en équation intégrale.
Dans le troisiéme chapitre on propose d'étudier l'existence et l'unicité de la solution.
Nous allons d'abord démontrer l'unicité par la méthode classique **(Lemme de Gronwall)**.

pour démontrer l'existence on utilise un résultat , du probléme(1) aproximation d'équations aux dérivées partiélles par des méthodes de décomposition
enfin Pour valider notre travail on fera une application numérique qui sera le sujet du dernier chapitre.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations et Définitions

1.1.1 Notations Dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes :

- On désigne par p.p. la notation qui veut dire presque partout
- $f \in L_{loc}(\Omega)$ si pour tout compect $K \subset \Omega, f \in L^1(K)$.
- $D(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de classeC^∞à support compact dansΩ
- $B_{1,N} = \{X \in \mathbb{R}^N, \|X\| < 1\}$
- $\underline{L}(X, X')$ désigne l'espace des applications linéaires de X dans X' continues inférieurement.
- $C([0,T]; X)$désigne l'espace des fonctions de $[0,T]$ dans X continues inférieurement.
- $C^{a,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions α -holdériennes de $C^\alpha(\Omega)$,
  c'est-à-dire qui vérifient : $\exists k > 0 telque \forall (x,y) \in \Omega, |u(x) - u(y)| \leq k\|x - y\|^\alpha$
- Si $E \subset V, (E, \|.\|_e) \hookrightarrow (V, \|.\|_v)$ signifie que E s'injecte continuement dans V , c'est à dire que l'injection $E \to V$ est continue (donc $\exists C > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\|v \leq C\|x\|_e$).

- $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes des) fonctions essentiellement bornés

  Si $1 \leq p < \infty$: $\|f\|_{L^p} = (\int_\Omega \mid f \mid_p dx)^{\frac{1}{p}}$
  Si $p = \infty$: $\|f\|_{L_p} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

- pour $T \geq 0$ et X un espace de Banach pour la norme $\shortparallel . \shortparallel_X$
  On note :
  i. $C(0, T, X)$: l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans X.
  ii. $L^p(0, T, X)$: l'espace des fonctions v telles que :
  $t\|v(t)\|_X$ est une fonction de $L^p(0, T), 1 \leq p \leq \infty$
  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

1.1.2 La topologie faible

- **Définition 1** *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une application p de E dans $\mathbb{R}^+$, appelé semi-norme quand :*
  a) $\forall x \in E, \forall \lambda \in R,$ *ou* $, p(\lambda x) = |\lambda| P(x)$
  b)$\in E, \forall y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Définition 2 *Soit E un espace vectoriel normé F un sous-espace vectoriel de E' (dual topologique de E), la topologie faible $\sigma(E, F)$ sur E est définie comme ci-dessus par les semi-normes :*
$p_\phi : x \in E \to p_\phi(x) = | < \phi, x > |$, *quand ϕ décrit F. Autrement dit :*

$$x_n \to x$$

dans $\sigma(E, F) \Longleftrightarrow \forall \phi \in F, < \phi, x_n > \to < \phi, x >$

1.1.3 La topologie faible $*$

Soit E un espace de Banach, E' son dual muni de la norme : $\|\phi\| = \sup_{x \in E \|x\| \leq 1} |F(\phi)|$, $|\phi(x)|$ et E'' son bidual, c'est à dire le dual de E' muni de la norme :

$\|F\|= \sup_{\phi\in E',\|(\phi)\|\leq 1}|F(\phi)|$

Proposition 3 *Soit E un espace de Banach,* $E^{"}$ *son bidual, alors l'application J de E dans* $E^{"}$ *définie par :*

$$[J(x)](\phi) = \phi(x)$$

est une isométrie linéaire de E dans $E^{"}$

Preuve. la démonstration de cette proposition se trouve dans M. SAMUELIDES, L. TOUZILLIER [12] (page 169). ■

Définition 4 *Sur* $E^{'}$ *on a défini deux topologies : la topologie asso-clée à la norme de* $E^{'}$ *et la topologie faible* $\sigma(E^{'}, E^{"})$*. On considérera aussi sur* $E^{'}$ *une autre topologie faible, la topologie* $\sigma(E', E)$ *appelée topologie faible* $*$ *car J n'est pas nécessairement surjective, mais toujours d'identifier E à un sous espace de* $E^{"}$

Remarque 5 *La topologie* $\sigma(E^{'}, E)$ *est la topologie la moins fine sur* $E^{'}$ *rendant continues toutes les applications* ϕ_x *où* $x \in E$.
Donc chaque ouvert pour la topologie $(E^{'}, E)$ *est un ouvert pour la topologie de la norme*

1.1.4 Espaces réflexifs, espaces séparables

Soit E un espace de Banach et $J : E- \to E^{"}$ l'injection canonique de E dans E$^{"} dfiniepar$:
$J_x(f) = f(x)$, pour tout $x \in E$, $f \in E^{'}$.
Définition 6 *L'espace E est réflexif, si* $J(E) = E^{"}$

Théorème 7 *Soit E un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Preuve. la démonstration de ce théorème se trouve dans H.BREZIS [1] (Théorème III.27, page 50). ■

Définition 8 *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble D dense et dénombrable*

Théorème 9 *Soit E un espace de Banach séparable, alors toute suite bornée $(f_n)_{n \geq 0} dans E'$ admet au moins une sous-suite faiblement $*$ convergente*

Preuve. la démonstration de ce théorème se trouve dans H.BREZIS [1] (corollaire III.26, page 50). ■

1.2 Rappels sur les espaces $L^p(\Omega)$

1.2.1 Inégalités principales

Théorème 10 *Si Ω est un ouvert de R^N $1 \leq p, q \leq \infty$ deux réels et $q = p'$ l'exposant conjugué de p , c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*

(1) Inégalité de Hölder

Si $f \in L^p(\Omega), g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f.g \in L^1$ et

$$\|f.g\|_{L_{1(\Omega)}} \leq \|f\|_{L_{p(\Omega)}} \|g\|_{L_{p'(\Omega)}}$$

(2) Inégalité d'interpolation

Si $f \in L^{p(\Omega)} \cap L^{q(\Omega)}$, alors $f \in L^r(\Omega)$ quelque soit $r \in [p, q]$ et

$$\|f\|_{L_{r)}(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L_P(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L_q(\Omega)}$$

avec

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\alpha - 1}{q}$$

pour un certain $0 \leq \alpha \leq 1$

(3) Inégalité d'inclusion

Si de plus $|\Omega| < \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$

et $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{P} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}$

En particulier

$$L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega), \forall 1 \leq p, q < \infty$$

1.2.2 Convolution et régularisation

Définition 11 *Soit $\rho \in C_0^\infty$ une fonction non négative telle que :*

$$\int_{R^N} \rho(X)dX = 1, Supp\rho \subset \overline{B}(0,1)$$

pour $\varepsilon > 0$, arbitrairement choisi la fonction $\rho_\varepsilon := \varepsilon^{-N}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$ appartient à $C_0^\infty(R^N)$ et $Supp\rho_\varepsilon \subset \overline{B}(0,\varepsilon)$

La fonction $\rho_\varepsilon$est appelée fonction régularisante et la convolution :

$$U_\varepsilon(X) := (\rho_\varepsilon * U)(X) = \int_{R^N} \rho_\varepsilon(X-y)U(y)dy$$

est appelée, pour autant que le membre à droite de l'égalité ait un sens, la régularisation de u.

Corollaire 12 *Soient $p \geq 1$, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. les assertions suivantes sont vérifiées :*
(1) pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$
(2) on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

Alors

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^N) \text{ et } \|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

En outre on a :

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

Théorème 13 *Soit $f \in C_0^k(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ et α un multi-indice tel que $|\alpha| = k$.*
Alors

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \text{ et } D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$$

En particulier si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),\ f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Ici D^αreprésente la α-iéme dérivée au sens usuel.

Corollaire 14 *Si* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), \varepsilon > 0,\ u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.
et $D^\alpha(\rho_\varepsilon * u) = (D^\alpha \rho_\varepsilon) * u$

Théorème 15 *Soit* $u \in C(\mathbb{R}^N)$ *,alors* $\rho_\varepsilon * u \to u$ *uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}^N$.

1.3 Espaces de Sobolev

Définition 16 *Les espaces de Sobolev sont, pour* Ω*ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$, *et* $p \in [1, +\infty]$ *:*
$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) | \forall \alpha \in \mathbb{N}^N\ |a| \leq m, D^\alpha f \in L^2(\Omega)\}$.
$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) | \forall \alpha \in \mathbb{N}^N\ |a| \leq m, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$ *On définit :*
sur $H^m(\Omega)$ *,le produit scalaire* $\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2}$,
sur $^{W^{m,p}(\Omega)}$ *, la norme*$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|D^\alpha u\|_{L^p}$

Remarque 17 1. $D_1 f$*étant une distribution* ,$D_1 f \in L^2$*signifie qu'il existe* $g \in L^2$ *telle que*

$$D_1 f = T_g$$

:

$$\forall \phi \in D(\Omega), \langle D_1 f, \phi \rangle = \int_\omega g(x)\phi(x)dx$$

2. $W^{m,2} = H^m$ *et les normes sur* $W^{m,2}$*et sur* H^m*sont équivalentes.*

Proposition 18 1. $W^{m,p}(\Omega)$*est un espace de Banach.*

2. *pour* $p < +\infty, W^{m,p}(\Omega)$*est séparable.*

3. *pour* $1 < p < +\infty, W^{m,p}(\Omega)$ *est réflexif.*

Remarque 19 $H^m(\Omega)$ *est donc un banach muni d'un produit scalaire c'est un hilbert.*

Définition 20 *Si* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^N$*,*$m \in \mathbb{N}$*,et* $p \in [1, +\infty]$, *on définit :*
$W^{m,p}_0(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ *, ou' l'adhérence est prise pour la topologie de* $, W^{m,p}(\Omega)$.

Proposition 21 *Si* $u \in W^{m,p}(\Omega)_0$*et* $\widetilde{u}$*est définie par :*

$$\begin{cases} u \text{ sur } \Omega \\ 0 \text{ sur } \Omega^c \end{cases}$$

alors $\widetilde{u} \in, W^{m,p}(\Omega)$.

1.3.1 Compacité

Théorème 22 ***(Kolmogorov)****Si Ω est un ouvert borné et $1 \leq p < \infty$ et $B \subset L^p$alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *B est relativement compacte dans L^p*
2. *Il existe un opérateur $P : B \to L^p(\mathbb{R}^N)$tel que :*

   - *$\forall u \in B, Pu = u$ sur Ω,*
   -*$\{Pu, u \in B\}$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}^N)$*
   - *$sup_{u\in B}\|\tau hPu - Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ quand $h \to 0$*

Théorème 23 ***(Rellich)****Si Ωest un ouvert borné à frontiére lipschitzienne et $1 < p < \infty$ alors toute partie bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$.*

Remarque 24 *Ceci traduit que l'inculsion $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte .*

Remarque 25 *Si l'on supprime l'hypothése "à frontiére lipschitzienne" alors le théoréme reste valable en remplaçant $W^{1,p}$ par $W_0^{1,p}$*

Théorème 26 *Si Ωest un ouvert borné à frontiére lipschitzienne et $1 < p < \infty$ alors la trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ est compacte.*

Remarque 27 *Une application linéaire est compacte si l'image de tout borné est relativement compacte .*

Remarque 28 *Ce théoréme est faux pour $p = 1$ puisque :*
$\gamma : W^{1,1}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ est surjective.

Lemme 1 ***(Lemme de Gronwall)***
Soit $f \in L^1([0, T])$ une fonction positive ,
$\forall x \in \mathbb{R}$ et g, h sont deux fonction continées et positives sur l'intervalle $[0, T]$, et si h satisfait :

$$h(t) \leq g(t) + \int_0^t f(s)h(s)ds \qquad \forall t \in [0, T]$$

alors :

$$h(t) \leq g(t) + exp(\int_0^t f(s)ds) \tag{1.1}$$

Remarque 29 *Si pour tout* $t \in]0,T[$, *et si :*

$$h^2(t) \leq C^2 + \int_0^t f(s)h(s)ds$$

alors :

$$h(t) \leq C + \frac{1}{2}\int_0^t f(s)ds \tag{1.2}$$

1.4 Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition

1.4.1 Problémes d'évolution

Description heuristique de la méthode des pas fractionnaires on considére dans un espase de Hilbert H une équation d'évolution

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t) + Au(t) = f(t),\ 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

où A est un opérateur linéaire dans H (hypothéses à préciser).
Dans les méthodes usuelles d'approximation , on considére un découpage de l'intervalles $[0,T]$ en N intervalles égaux de longueur k et on définit une famille d'éléments de H,

$$u^0, u^1, ..., u^N$$

. Par récurrence , en part de :

$$u^0 = u_0 \tag{1.4}$$

et de :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}-u^n}{K} + Au^{n+1} = f^{n+1} = (f((n+1)k)), \quad n = 0, ..., N-1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Si l'opérateur A admet une décomposition :

$$A = \sum_{i=1}^{q} A_i \tag{1.6}$$

on peut utiliser cette décomposition pour approcher (1.3)et ceci conduit au schéma de pas fractionnaires suivant : on défint les éléments :

$$u^{n+\frac{i}{q}}, n = 0, ..., N-1; i = 1, ..., q$$

tel que : (1.4)
et

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{i}{q}} - u^{n-\frac{i-1}{q}}}{k} + A_i u^{n+\frac{i}{q}} = f^{n+\frac{i}{q}} \\ n = 0, ..., N-1 \ \ ; \ i = 1, ..., q \end{cases} \tag{1.7}$$

Où

$$f^{n+1} = \sum_{i=1}^{q} f^{n+\frac{i}{q}} \tag{1.8}$$

Dans le cas du schéma (1.5), le calcul de u^{n+1} nécessite l'inversion de l'operateur $(I + KA)$; dans le cas du schéma (1.8), le calcul de $u^{n+\frac{i}{q}}, ..., u^{n+1}$,nécessite l'inversion des opérateurs $(I + A_1), ..., (I + KA_q)$, et la méthode est intéressante lorsque l'iversion de ces opérateurs est plus simple que l'inversion de léoperateur $I + KA$.

Un résultat de convergence Nous allons énoncerun résultat précis sur la maniére dont les $u^{n+\frac{i}{q}}$ approximent la solution u de (1.3). On se reportera à [13] pour la démonstration de ce résultat et pour d'autres résultats plus généraux .
Soient V_i , $i = 1, ..., q$ des espaces de Hilbert.

$$V = \cap_{i=1}^{q} V_i, \ avec \ V \subset V_i \subset H$$

les injections étant continues et chaque espase étant dens le suivant .
On identifie H à son dual V' , de V_i, V' celui de V , on a

$$V \subset V_i \subset H \subset V_i' \subset V' \tag{1.9}$$

avec injections continues , chaque espace étant dense dans le suivant .
Sopposons que $A_i \in \underline{L}(V_i, V)$ avec

$$\begin{cases} (A_i v, v) \geq \alpha_i \|v\|_{v_i'}^2 \\ \forall v \in V_i, \alpha_i > 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Alors , pour u_0 donnée dans H et f donnée dans $L^2([0,T];H)$, l'équation (1.3)posséde une solution unique $u \in L^2([0,T];V) \cap C([0,T];H)$ (cf .Lions[13])
On se donne une décomposition arbitraire de f

$$f = \sum_{i=1}^{q} f^i, f^i \in L^2([0,T];H) \tag{1.11}$$

et on pose :

$$f((n+\frac{i}{q})k) = f^{n+\frac{i}{q}} = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} f_i(s)ds \tag{1.12}$$

Les équations(1.7)définissent alors de maniére unique les $u^{n+\frac{i}{q}}$ comme éléments de V_i ,on introduit les fonctions étagées $u_{ik}, 1 \leq i \leq q$:

$$u_{ik} = u^{n+\frac{i}{q}},\ pour\ t \in [nk,(n+1)k[, i = 1,...,q$$

et on a le résultatde convergence (cf.[13]).

Théorème 30 *Lorsquek* $\to 0$
1. u_{ik}*converge vers* u *dans* $L^2([0,T];V_i)$*fort et* $L^\infty([0,T];H)$*faible* $*$
2. $u_{ik}(t) \to u(t)$ *dans* H*fort ,* $\forall t \in [0,T]$*, ou' u est la solution unique de (1.3).*

Cas particulier $q = 2$ De façon générale et formelle , considérons le systéme (u désignant éventuellement un vecteur) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1(u) + A_2(u) = f \tag{1.13}$$

où A_1 et A_2 sont deux opérateurs linéaires ou non .
Soit :

$$k = \Delta t$$

le pas de temps et supposons que nous connaissions :

$$u^n = << l'approximation >>\ de\ u\ \ l'instant\ nk$$

.

Nous déterminons alors u^{n+1} = («l'approximation» à l'instant $(n+1)k$) en deux étapes :

Premiére étape : on considére l'équation.

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial t} + A_1(W_1) = f_1, \\ W_1 \; verifiant \; les \; conditions \; aux \; limites \; << correspondantes \;\; A_1 >> W_1(nk) = u^n \end{cases} \quad (1.14)$$

et en «calcule» :

$$W_1((n+1)k) = u^{n+\frac{1}{2}} \quad (1.15)$$

Deuxiéme étape on considére la «deuxiéme partie» de l'équation (1.13).

$$\begin{cases} \frac{\partial W_2}{\partial t} + A_2(W_2) = f_2, \\ W_2 \; verifiant \; les \; conditions \; aux \; limites \; << correspondantes \;\; A_2 >> W_2(nk) = u^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.16)$$

où

$$f_1 + f_2 = f$$

. On prend alors :

$$u^{n+1} = W_2((n+1)k) \quad (1.17)$$

Pour «l'intégration» de (1.14),(1.16) il est naturel de se borner à une approximation de l'équation (1.14),(ou (1.16)) (puisque , mème une intégration exacte ne fournit qu'une « approximation » de u). On arrive ainsi ,par exempel , au schéma décomposé (ou de pas fractionnaire) :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k} + A_1 u^{n+\frac{1}{2}} = f_1^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{k} + A_2 u^{n+1} = f_2^n \end{cases} \quad (1.18)$$

1.4.2 Problémes de calcul des variations

Soient Hun espaces de Hilbert , V_i $1 \leq i \leq q$ des espaces de Banach réflexifs, $V = \cap_{i=1}^{q} V_i$, avec :

$$V \subset V_i \subset H \quad (1.19)$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant.

Pour chaque i, soit K_i, un ensemble convexe fermé de $V_i$et soit $K = \cap_{i=1}^{q} K_i$.

Soit $J_i$une fonctionnelle réelle définie surK_i, strictement convexe,semi-continue intérieurement et vérifiant :

$$lim_{u\in K_i,\|u\|_{V_i}\to\infty} J_i(u) = \infty$$

soit alors : $J = \Sigma_{i=1}^{q}\{J_i\}$
Il est bien connu que le probléme d'optimisation :

$$inf_{v\in K} J(v) \tag{1.20}$$

Posséde une solution unique u. On peut proposer un algorithme d'approximation de u par décomposition :
soient $\tau > 0$ et un entier N fixés ($\frac{1}{\tau}$ et N destinés à tendre vers l'ifini).
on définit une famille d'éléments $u^{n+\frac{i}{q}}$ $n = 0, ..., N$, $i = 1, ..., q$.
On part de :

$$u^0 \in H \tag{1.21}$$

quelque ,puis, lorsque $u^0, ..., u^{n+\frac{i-1}{q}}$ sont connus , on définit :

$$u^{n+\frac{i-1}{q}} \in K_i \tag{1.22}$$

car la solution du probléme(1.3) existe et unique :

$$inf_{v\in K_i}\{|v - u^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 + \tau J_i(v)\} \tag{1.23}$$

Ayant ainsi définit les $u^{n+\frac{i-1}{q}}$, on introduit les moyennes(du type Cesaro) :

$$w^{n+\frac{i}{q}} = \frac{1}{N}\Sigma_{n=0}^{N-1} u^{n+\frac{i-1}{q}} \in K_i. \tag{1.24}$$

On démontre alors le résultat suivant (cf.J.Lions et R. Temam[14]) : Sous les hypothéses précédentes, si $\tau \to 0, N \to \infty$
avec

$$\tau N \to \infty \tag{1.25}$$

alors, pour tout $i, 1 \leq i \leq q$,

$$w^{n+\frac{i}{q}} \to u \tag{1.26}$$

solution de (1.20)dans V_i faible.

1.5 Généralisation de la dérivation de la transformation de Fourier

Proposition 31 *Soit $f(x)$une fonction localement intégrable et absulement intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f^k(w)$ admet un transformation de Fourier et la relation opérationnelle suivante est valable :*

$$F(f^k)(w) = (iw)F(f)(w) \tag{1.27}$$

Preuve. On a :

$$F(f^k)(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx} f^k(x)dx$$

intégration par partie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx} f^k(x)dx = [e^{-iwx} f^{(k-1)}(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx}(iw) f^{(k-1)}(x)dx$$

alors :
si f est absolument intégrable sur $\mathbf{R}$, admettant des dérivées continues presqu' à l'ordre $(k-1)$ et une dérivée d'ordre k continue par morceaux sur chaque intervalle borné de $\mathbb{R}$ et telle que :

$$f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = ... = f^{(k-1)}(\pm\infty) = 0$$

alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx} f^{(k)}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (iw) e^{-iwx} f^{(k-1)}(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (iw)^2 e^{-iwx} f^{k-2}(x)dx$$

$$= \vdots$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (iw)^k e^{-iwx} f(x)dx$$

On a oura :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx} f^{(k)}(x)dx = (iw)^k (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx} f(x)dx)$$

alors :

$$F(f^{(k)})(w) = (iw)^k F(f)(w)$$

■

Chapitre 2

Transformation du problème non linéaire en équation intégrale

2.1 Équation de la chaleur

2.1.1 Introduction

L'équation de chaleur en dimension un est donnée par l'équation aux dérives partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ et \ \ t > 0 \tag{2.1}$$

u est une fonction inconnue réelle de deux variables x et t. L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique. Ici, $u = u(x,t)$ est la température dans un conducteur d'une dimension. La valeur de $u(x,t)$ d'epend un temps $t \geq 0$ et de la position x. En général, la valeur de $u(x,t)$ en $t = 0$ est donnée. C'est l'équation de la chaleur qui modélise des phénomènes d'évolution diffusion, répartition de substances chimiques, ...

2.1.2 Solutions fondamentales

pour plus de détails consulter [2]

Proposition 32 *La solution fondamentale de l'équation de la chaleur (2.1) est donnée par :*

$$\phi(t,x) \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\dfrac{x^2}{4t}) & t > 0 \ et \ x \in \mathbb{R} \\ 0 \quad t \leq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Preuve. La transformée de Fourier de l'équation de la chaleur par rapport à la variable x est une équation différentielle en t avec paramètre ω. On applique la transformation de Fourier à l'équation de la chaleur (2.2) :

$$F(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t))_{(\omega)} = F(0))_{(\omega)} = 0$$

On a :

$$F(u(x,t))_{(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x)u(x,t)dx$$

d'après la proposition(1.27), on trouve :

$$F(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t))_{(\omega)} = (i\omega)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x)u(x,t)dx)$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial t}F(u(x,t))_{(\omega)} + \omega^2 F(u(x,t))_{(\omega)} = 0$$

ce qui implique :

$$\partial_t \widehat{u}(\omega,t) + \omega^2 \widehat{u}(\omega,t) = (\widehat{u}(\omega,t))' + \omega^2 \widehat{u}(\omega,t) = 0$$

Ainsi :

$$\frac{(\widehat{u}(\omega,t))'}{\widehat{u}(\omega,t)} = -\omega^2$$

On obtiens :

$$\ln \widehat{u}(\omega,t) = -\omega^2$$

c'est à dire :

$$\widehat{u}(u,t) = \exp(-\omega^2 t)$$

On applique la transformation de Fourier inverse sur l'équation :

$$\widehat{u}(\omega,t) = \exp(-\omega^2 t)$$

où $\widehat{u}(x,t)$ est la transformation de Fourier de $u(t,x)$ alors :

$$F^{-1}(\widehat{u}(\omega,t)) = F^{-1}(\exp(-\omega^2 t)$$

On obtient
$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\omega x)\exp(-\omega^2 t)d\omega$$
On pose :
$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\omega x)\exp(-\omega^2 t)d\omega$$
intégration $\widehat{f}(\omega)$ par partie :
$$\widehat{f}(\omega)=[\frac{1}{ix}\exp(i\omega x)\exp(-\omega^2 t)]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{ix}\exp(i\omega x)(-2t\omega)\exp(-2t\omega)\exp(-\omega^2)d\omega$$
alors :
$$\widehat{f}(\omega)=-\frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\omega x)(-2\omega t)\exp(-\omega^2 t)d\omega=-\frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\omega x)(-2\omega t)\exp(-\omega^2 t)d\omega t$$
donc :
$$\widehat{f}(\omega)=-\frac{2t}{x}\int_{-\infty}^{+\infty}(i\omega)\exp(i\omega x)\exp(-\omega^2 t)d\omega=-\frac{2t}{x}(\widehat{f}(\omega))'$$
c'est à dire :
$$\frac{(\widehat{f}(\omega))'}{\widehat{f}(\omega)}=-\frac{x}{2t}$$
Ainsi :
$$\ln\widehat{f}(\omega)=-\frac{x^2}{4t}+k_1$$
donc :
$$\widehat{f}(\omega)=k\exp(-\frac{x^2}{4t})$$
tel que :
$$k=\widehat{f}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i0x)\exp(-\omega^2)d\omega$$
alors :
$$k=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\omega^2 t)d\omega$$
pour calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\omega^2 t)d\omega,\quad on\ \ pose$:
$$\omega=r\cos\theta\ et\ \ y=r\sin\theta$$
d'où :
$$\omega^2+y^2=r^2\ et\ d\omega dy=rdrd\theta$$

alors :

$$k^2 = \int_{-}^{=\infty} \exp(-\omega^2 t) d\omega \int_{-}^{+\infty} \exp(-y^2 t) dy = \int_{-\inf}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t(\omega^2 + y^2)) d\omega dy$$

c'est à dire :

$$k^2 = \int_{r=0}^{r=+\infty} [(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta) r \exp(-tr^2] dr = [-\frac{2\pi}{2t} \exp(-tr^2]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{t}$$

donc :

$$\widehat{f}(\omega) = k \exp(-\frac{x^2}{4t}) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp((-\frac{x^2}{4t})$$

c'est à dire :

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp(-\frac{x^2}{4t}), \forall t > 0$$

Finalement :

$$\phi(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t}) & t > 0 \\ 0 \quad t \leq 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Lemme 2 *Pour tout* $t > 0$, *alors :*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t,x) dx = 1 \tag{2.3}$$

Preuve. on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t,x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t}) dx$$

On pose :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t}) dx$$

Ecrivons :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t}) dx. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{y^2}{4t}) dy$$

alors :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{(x^2+y^2)}{4t}) dx dy$$

d'après la démonstration du proposition(32), on a :

$$I^2 = \int_{r=0}^{r=+\infty} [(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}) r \exp(-\frac{r^2}{4t})] dr = [-4\pi t \exp(-\frac{r^2}{4t})]_0^{+\infty} = 4\pi t$$

On obtient : donc :

$$I = 2\sqrt{\pi t}$$

alors :

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{4t})dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t})dx = 1$$

d'où :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x,t)dx = 1$$

■

2.2 Solution de l'équation de la chaleur homogène avec donnée initiale

2.2.1 Problème homogène avec donnée initiale non homogène

Proposition 33 *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in \mathbb{R} \quad et \quad t > 0 \\ u(0,x) = g(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x-y)g(y)dy, \forall x \in \mathbb{R} \quad et \quad t > 0 \tag{2.5}$$

On vérifie que l'équation (2.5) solution de problème (240)

Preuve. Pour ressouder le problème (2.4) nous allons utiliser la transformation de Fourier. On applique la transformation de Fourier sur le problème (1,1), on trouve :

$$\begin{cases} F(\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)_{(\omega)}) = F(0)_{(\omega)} = 0 \\ F(u(0,x))_{(\omega)} = F(g(x))_{(\omega)} \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}F(u(x,t))_{(\omega)} + \omega^2 F(u(x,t))_{(\omega)} = 0 \\ F(u(0,x))_{(\omega)} = F(g(x))_{(\omega)} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\omega,t) + \widehat{u}\omega^2(\omega,t) = 0 \\ \widehat{u}(\omega,0) = \widehat{g}(\omega) \end{cases}$$

alors :

$$\frac{(\widehat{u}(\omega,t))'}{\widehat{u}(\omega,t)} = -\omega^2$$

Ainsi :

$$\ln \widehat{u}(\omega,t) = -\omega^2$$

Or

$$\widehat{u}(\omega,t) = c\exp(-\omega^2 t) \quad et \quad \widehat{u}(0,t) = \widehat{g}(\omega) = c$$

donc :

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{g}(\omega)\exp(-\omega^2 t) \tag{2.6}$$

On applique la transformation de Fourier inverse sur l'équation(2.6) , on trouve :

$$F^{-1}(\widehat{u}(\omega,t)) = F^{-1}(\widehat{g}(\omega)\exp(-\omega^2))$$

On obtient :

$$u(x,t) = F^{-1}(\widehat{g}(\omega)) * F^{-1}(\exp(-\omega^2 t))$$

Par définition du problème de convolution, on à :

$$(f*g)(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x-y)g(y)dy$$

On oura :

$$F^{-1}(\widehat{g}(\omega)) = g(y)$$

avec :

$$F^{-1}(\exp(-\omega^2 t)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4t}) = \phi(t,x)$$

En effet :

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\phi(t,x-y)dy$$

c'est à dire :

$$u(x,t) = \phi(t,x) * g(y)$$

alors :

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{(x+y)^2}{4t}) g(y)dy$$

donc on peut écrire :

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x-y)g(y)dy$$

Finalement :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t, x-y)g(y)dy.$$

■

Commentaires : Nous en déduisons cinq propriétés fondamentales de la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur :

1. La solution en un point particulier dépend de la condition initiale en tout point du domaine. Le domaine de dépendance de la solution s'étend au domaine Ω tout entier.

2. Une perturbation en un point quelconque de la solution initiale influence immédiatement à la valeur en tout point de la solution u. On dit que la vitesse de propagation est infinie.

3. La valeur ponctuelle de la solution décroit au cours du temps en $\frac{1}{\sqrt{t}}$

4. Le temps t doit être positive, le phénomène est irréversible.

5. L'équation de la chaleur ou diffusion a un effet régularisant. La donnée initiale peut être discontinue, pour tout t strictement positif la solution est une fonction continue et dérivable de x

Remarque 34 *si la fonction g est bornée; on a pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$ alors :*

$$\inf g \mathbb{R}^2(x) \leq u(t,x) \sup \underline{\mathbb{R}} g(x)$$

Théorème 35 *Si la fonction $g \in C(\mathbb{R} \cap L^\infty)$ alors l'équation (2,5) vérifie :*

1. *$u(x,t)$ est de clase C^∞ dans $\mathbb{R}\times]0,\infty[$*

2.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} = 0 \\ \lim_{(t,x)\longrightarrow(0,x_0)} u(t,x) = g(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. *Si $g(x) \geq 0, y \neq 0$ alors : $\forall t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; u(t,x) \geq 0$*

Preuve.

1. On a la fonction :
$$\phi(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{x^2}{4t}),\ t > 0$$
est uniformément dérivable , avec uniformément bornées et uniformément intégrables de tout ordres sur $\mathbb{R} \times [\delta, +\infty[$ pour tout $\delta > 0$, nous voyons que $u(t,x)$ est de classe C^∞ *sur* $\mathbb{R} \times [0,\infty[$ de plus :
$$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} [(\phi_t - \Delta_x\phi)(x-y,t)]g(y)dy = 0$$
pour $x \in \mathbb{R}$ *et* $t > 0$ puis que $\phi(t,x)$ est une solution fondamentale de l'équation de la chaleur(2.1)

2. On monter :
$$\lim u(t,x) = g(x_0)$$
Soit maintenant $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta > 0$ telle que :
$$\forall y \in \mathbb{R} : \|y - x_0\| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0) \leq \varepsilon$$
et soit $x \in \mathbb{R}$ telle que :
$$\|x - x_0\| \leq \frac{\delta}{2}$$
Nous avons :
$$|u(t,x) - g(x_0)| = |\int_{\mathbb{R}} \phi(t, x-y)(g(x) - g(x_0))dy|$$

$$\leq \underbrace{\int_{B_{\delta(x_0)}} \phi(t,x-y)|g(y) - g(y_0)|dy}_{I} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{B}_{\delta(\frown\nvdash)}} \phi(t,x-y)|g(y) - g(x_0)|dy}_{J}$$

alors :

$$I = \int_{B_{\delta(x_0)}} \phi(t, x-y)|g(y) - g(x_0)|dy$$

donc d'après lemme(2.3, on obtient :

$$\int_{B_{\delta}(x_0)} \phi(t, x-y)|g(y) - g(x-0)|dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \phi(x-y)dt = \varepsilon$$

de plus si :

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\delta}{2} \; et \; \|y - x_0\| \geq \delta$$

alors :

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \frac{\delta}{2}$$

donc :

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \frac{1}{2} - x_0\|$$

et donc :

$$\|y - x\| \geq \frac{1}{2}\|y - x_0\|$$

ce qui donne :

$$J = \int_{\mathbb{R}\setminus B\delta(x_0)} \phi(t, x-y)|g(y) - g(y_0)|dy$$

alors :

$$\int_{\mathbb{R}\setminus B_{\delta}(x_0)} \phi(t, x-y)|g(y) - g(x_0)|dy \leq 2\|g\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus B_{\delta(x_0)}} \phi(t, x-y)dy$$

On a :

$$2\|g\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus B_{\delta(x_0)}} \phi(t, x-y)dy = \frac{c}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}\setminus_{\delta(x_0)}} e^{-\dfrac{\|x-y\|^2}{4t}} dy$$

donc :

$$\int_{\mathbb{R}\setminus B_{\delta}(x_0)} \phi(t, x-y)|g(y) - g(x_0)|dy \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}\setminus B_{\delta}(x_0)} e^{-\dfrac{\|y-x_0\|^2}{4t}} dy$$

On pose : $y - x_0 = r$, alors :

$$\frac{c}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}\setminus B_{\delta}(x_0)} e^{-\dfrac{r^2}{4t}} dr \longrightarrow 0 \;\; pour \;\; t \longrightarrow 0^+$$

et donc,si :

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\sigma}{2}$$

avec $t > 0$ est " assez petite" c'est à dire :

$$|u(t,x) - g(x_0)| < 2\varepsilon$$

Ainsi :

$$|u(t,x) - g(x_0)| = 0$$

3. On oura :

$$\phi(t,x) \geq 0 \quad et \quad g(x) \geq 0$$

On obtient :

$$(\phi(t,x) * g(y)) \geq 0$$

Finalement :

$$u(t,x) \geq 0$$

■

Remarque 36 *Si la fonction g est continue à support compact positive et non identiquement nulle, alors :*

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^2} \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} g(y)dy$$

est en fait strictement positive pour tout les points $x \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ et $t > 0$. Nous interprétons cette observation en distant que ,pour l'équation de la chaleur, la vitesse de propagation est infinis. Si la température initiale est positive et strictement positive quelque part, alors la température plus tard sera toujours strictement positive, quel que soit l'endroit où on se trouve.

2.3 Solution de l'équation de la chaleur non homogène avec donnée initiale

2.3.1 Problème non homogène avec donnée initiale homogène

Proposition 37 *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \\ u(0,x) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) f(s,y) dyds \tag{2.8}$$

On vérifie que l'équation (2.8) solution du problème (2.7)

Preuve. On applique la transformation de Fourier sur le problème (2.7) conduit l'équation différentiale suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\omega,t) - (i\omega)^2\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega,t) \\ \widehat{u}(0,\omega) = 0 \end{cases}$$

On cherche la solution par la méthode de la variation de la constante : alors on cherche une solution de la forme suivant :

$$\widehat{u}(\omega,t) = c(\omega,t)e^{-\omega^2 t} \tag{2.9}$$

On obtient :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\omega,t) = \frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)e^{-\omega^2 t} - \omega^2 c(\omega,t)e^{-\omega^2 t}$$

On oura :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \omega^2\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega,t)$$

alors :

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)e^{-\omega^2} - \omega^2 c(\omega,t)e^{-\omega^2} + \omega^2\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega,t)$$

donc :

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)e^{-\omega^2} - \omega^2 c(\omega,t)e^{-\omega^2 t} + \omega^2 c(\omega,t)e^{-\omega^2 t} = \widehat{f}(\omega,t)$$

ce qui implique :

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)e^{-\omega^2 t} = \widehat{f}(\omega,t)$$

c'est à dire :

$$c(\omega,t)=\int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{f}(\omega,s)ds, t\geq 0$$

On a :

$$\widehat{u}(\omega,t)=c(\omega,t)e^{-\omega^2 t}$$

alors :

$$\widehat{u}(\omega,t)=\int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{f}(\omega,s)e^{-\omega^2 t}ds$$

c'est à dire :

$$\widehat{u}(\omega,t)=\int_0^t \widehat{f}(\omega,s)e^{-\omega^2(t-s)}ds$$

On applique la transformation de Fourier inverse sur l'équation suivant :

$$\widehat{u}(\omega,t)=\int_0^t \widehat{f}(\omega,s)e^{-\omega^2(t-s)}ds$$

Ob obtient :

$$F^{-1}(\widehat{u}(\omega,t))=\int_0^t F^{-1}(\widehat{f}(\omega,s)\omega^{-\omega^2(t-s)})ds$$

alors :

$$u(t,x)=\int_0^t [F^{-1}(\widehat{f}(\omega,s))*F^{-1}(e^{-\omega^2(t-s)})]ds$$

telle que :

$$F^{-1}(\widehat{f}(\omega,s))=f(s,x)$$

avec :

$$F^{-1}(e^{-\omega^2(t-s)})=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}=\phi(t-s,x)}$$

On utilise le produit de convolution suivant :

$$(\phi*f)(t-s,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t-s,x-y)f(s,y)dy$$

d'où déduit :

$$u(t,x)=\int_0^t [\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,y)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}}dy$$

Finalement :

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) f(s,y) dyds$$

■

Théorème 38 *Si $f \in C_0^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, alors la fonction suivant :*

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) f(s,y) dyds \quad x \in \mathbb{R}; t > 0.$$

vérifie :

1. $u(t,x) \in C_0^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{x^2} = f(x,t) \\ \lim\limits_{(t,x) \longrightarrow (0,x_0} u(t,x) = 0 \quad x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2.3.2 Problème non homogène avec donnée initiale non homogène

Proposition 39 *Soit le problème non homogène suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \tag{2.10}$$

Il est faite de voir que la solution $u(x,t)$ de problème (2.10) est donnée par :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t, x-y) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} \pi(t-s, x-y) f(s,y) dyds \tag{2.11}$$

qz

Preuve. On applique la transformation de Fourier sur la problème (2.10)

On obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\omega t) + \omega^2 \widehat{u}(\omega t) = \widehat{f}(\omega t) \\ \widehat{u}(0,\omega) = \widehat{g}(\omega) \end{cases}$$

On pose : $y(t) = \widehat{u}(\omega t)$, alors :

$$\begin{cases} y^{'}(t) = \omega^2 y(t) = \widehat{f}(t) \\ y(0) = \widehat{g}(\omega) \end{cases} \tag{2.12}$$

On cherche la solution de l'équation (2.12) par la méthode de variation des constantes :

$$y^{'} + \omega^2 y(t) = \widehat{f}(t)$$

et on pose : $y(t) = X(t)V(t)$,,c'est à dire :

$$y'(t) = X\frac{dV}{dt} + V\frac{dX}{dt}$$

alors :

$$y^{'}(t) + \omega^2 y(t) = \widehat{f}(t)$$

c'est à dire :

$$(X\frac{dV}{dt} + \omega^2 V(t)) + V(t)\frac{dX}{dt} - \widehat{f}(t) = 0$$

On obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} + \omega^2 V(t) = 0 \\ V(t)\dfrac{dX}{dt} = \widehat{f}(t) \end{cases}$$

on oura :

$$\frac{dV}{dt} + \omega^2 V(t) = 0$$

alors :

$$\frac{dV}{dt} = -\omega^2 V(t) \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\omega^2 dt$$

Ainsi :

$$V(t) = e^{-\omega^2 t}$$

On a :

$$V(t)\frac{dX}{dt} = \widehat{f}(t)$$

on déduit que :

$$dX = e^{\omega^2 t}\widehat{f}dt$$

écrivons :

$$X(t) = c + \int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{f}(s)ds$$

On a : $y(t) = X(t)V(t)$, on trouve que :

$$y(t) = e^{-\omega^2 t}(c + \int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{f}(s)ds)$$

avec : $y(0) = c = \widehat{g}(\omega)$, c'est à dire :

$$y(t) = e^{-\omega^2 t}(\widehat{g}(\omega) + \int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{f}(s)ds)$$

donc on peut écrire :

$$y(t) = \widehat{g}(\omega)^{-\omega 2t} + \int_0^t e^{-\omega^2(t-s)}\widehat{f}(s)ds$$

On oura :$y(t) = \widehat{u}(\omega, t)$ alors :

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{g}(\omega)e^{-\omega^2(t-s)}\widehat{f}(s)ds \tag{2.13}$$

On applique la transformation de Fourier inverse sur l'équation (2.13), on obtient :

$$u(t,x) = F^{-1}(\widehat{g}(\omega)e^{-\omega^2}) + \int_0^t F^{-1}(e^{-\omega^2(t-s)}\widehat{f}(s))ds$$

c'est à dire :

$$u(t,x) = [F^{-1}(\widehat{g}(\omega)) * F^{-1}(e^{-\omega 2t})] + \int_0^t [F^{-1}(e^{-\omega^2(t-s)}) * F^{-1}(\widehat{f}(s))]ds$$

On utilise la produit de convolution, on obtient :

$$[F^{-1}(\widehat{g}(\omega)) * F^{-1}(e^{-\omega^2 t})] = \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x-y)g(y)dy$$

On déduit que :

$$\int_0^t [F^{-1}(e^{-\omega^2(t-s)}) * F^{-1}(\widehat{f}(s))]ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y)f(s,y)dyds$$

Finalement :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x-y)g(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y)f(s,y)dyds$$

■

2.4 Transformée problème de réaction diffusion en équation intégrale

2.4.1 Introduction

Les équation intégrale ont un caractère fort différent des équations différentielles que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes (par exemple de diffusion). La principal source d'équation de ce type est l'étude du transfert d'énergie par radiation. A la différence la transfert radiative, les phénomènes de radiation ne peuvent pas être décrits d'équations mettant en jeu un simple champ scalaire. Les lois de conservations deviennent alors plus complexe et ne peuvent s'exprimer que sous formes d'intégrales étendues à toutes la surface considérée.

Pour plus de détailes consulter [15]

Proposition 40 *Soit le problème de réaction diffusion suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu u(1-u) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad et \quad \mu > 0 \\ u(x,0) = u^0(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.14}$$

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} \phi(t, x-y) u_0 dy + \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) u(s,y)(1-u(s,y)) dy ds \tag{2.15}$$

On vérifie que l'équation (2.15) est un équation intégrale du problème (2.14)

Preuve. On à :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.16}$$

$$H_{u0}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} \phi(t, x-y) u_0(y) dy \tag{2.17}$$

l'équation (2.17) solution de problème (2.16) (d'aprés le proposition (33) alors, on cherche que la fonction $Ku(x,t)$ solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x2} = \mu u(1-u) \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

On applique la transformation de Fourier sur le poblème (2.18), on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \hat{\mathrm{u}}(\omega,t) + \omega^2 \hat{\mathrm{u}}(\omega,t) = \mu \hat{\mathrm{u}}(\omega,t)(1-\hat{\mathrm{u}}(\omega,t)) \\ \hat{\mathrm{u}}(0,\omega) \end{cases} \tag{2.19}$$

On cherch une solution de problème (2.19) sous la forme :

$$\widehat{u}(\omega,t)=c(\omega,t)e^{-\omega^2 t} \tag{2.20}$$

alors :

$$\frac{\partial\widehat{u}}{\partial t}(\omega,t)=\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)e^{-\omega^2}-\omega^2 c(\omega,t)e^{-\omega^2 t}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)e^{-\omega^2}-\omega^2 c(\omega,t)e^{-\omega^2 t}+\omega^2\widehat{u}(\omega,t)=\mu\widehat{u}(\omega,t)(1-\widehat{u}(\omega,t))$$

Implique :

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\omega,t)e^{-\omega^2 t}=\mu\widehat{u}(\omega,t)(1-\widehat{u}(\omega,t))(1-\widehat{u}(\omega,t))$$

c'est à dire :

$$c(\omega,t)=\mu\int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{u}(\omega,s)(1-\widehat{u}(\omega,s))ds$$

ce qui donne :

$$\widehat{u}(\omega,t)=\mu\int_0^t e^{\omega^2 s}\widehat{u}(\omega,s)(1\widehat{u}(\omega,s))e^{-\omega^2 t}ds$$

On obtient :

$$\widehat{u}(\omega,t)=\mu\int_0^t e^{-\omega^2(t-s)}\widehat{u}(\omega,s))ds \tag{2.21}$$

On applique la transformation de Fourier inverse sur l'équation (2.21) ce qui donne :

$$Ku(x,t)=\mu\int_0^t[F^{-1}(e^{-\omega^2(t-s)})*F^{-1}(\widehat{u}(\omega,s))(1-\widehat{u}(\omega,s))]ds$$

telle que :

$$F^{-1}(e^{-\omega^2}(t-s))=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}=\phi(t-s,x)$$

avec :

$$F^{-1}(\widehat{u}(\omega,s)(1-\widehat{u}(\omega,s))=u(s,x)(1-u(s,x))$$

On utilise le produit de convolution suivant :

$$(\phi*F)(t-s,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t-s,x-y)f(s,y)dy$$

alors :

$$Ku(x,t)=\mu\int_0^t[\int_{\mathbb{R}}u(s,y)(1-u(s,y))\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}}dy]ds$$

On obtient :

$$Ku(x,t) = \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s, x-y) u(s,y)(1-u(s,y)) dyds$$

donc l'équation intégrale de problème (2.14) donnée par :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} \phi(t, x-y) u_0(y) dy + \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} \phi(t-s, x-y) u(s,y)(1-u(s,y)) dyds$$

On a finalement :

$$u(t,x) = H_{u_0}(x,t) + Ku(x,t)$$

$\blacksquare$

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution

3.1 Position du probléme

Soit Ω un ouvert borné de R de frontiére $\Gamma = \partial\Omega$
et soit le cylindre Σ de $R_x \times R_t$ telle que : $\Sigma = \Omega \times]0, T[$
On chereche une fonction $u = u(x,t)$ solution du probléme suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu u(1-u) \ dans \ \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \quad (condition \ initialle) \\ u(x,t) = 0 \ on \ \Gamma = \partial\Omega \quad (condition \ auxe \ limite) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ on \ \Gamma = \partial\Omega \ \ (condition \ auxe \ limite) \end{cases} \tag{3.1}$$

telle que : $\mu > 0$ et $f(u) = \mu u(1-u) > 0$
F est une fonction de réaction diffusion non linéaire , continue et bornée.
Ce propléme aux dérivée partialle parapolique non linéaire.

3.2 Existence de la solution

Théorème 41 *si $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), u \geq 0$ in Σ, etu verifie les conditions initiales et aux limites continues dans et F est une fonction positive donne dans L^∞ , alors le probléme (3.1) admet au mois une solution $u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$*

Preuve. Elle se fait en trois etapes

3.3 Solutions approchées

On faire un rappel de la methode decomposition :
Soit $k = \Delta t$.
decomposition en deux sous problémes
promier sous probléme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu u(1-u) = 0 \tag{3.2}$$

Avec les conditions initiales et aux limites relatives à

$$L_1 = \frac{\partial u}{\partial t} - \mu u(1-u)$$

Second sous probléme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \tag{3.3}$$

Avec les conditions initials et aux limites relatives à

$$L_2 = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

L'intéréte de cette décompositions est que chacun des probléme(3.2),(3.3)peut étre résolu explicitement
Il est alors convenable que l'on puisse ainsi obtenir des estimations à priori « Plus fine» que celles que l'on pouvait obtenir directement(sans décomposition)
La semi-discétisation conduit en fin de compte à « l'approximation» suivant du probléme supposons connue u^n «l'approximation» à l'instant nk on détermine $u^{n+\frac{1}{2}}$ et u^{n+1} par :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k\mu[u^{n+\frac{1}{2}} - (u^{n+\frac{1}{2}})^2] \tag{3.4}$$

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = k\Delta u^{n+1} \tag{3.5}$$

Ceci a bien un sems en effet le probléme (3.4)admet une solution unique donnée explicitement par :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k\mu[u^{n+\frac{1}{2}} - (u^{n+\frac{1}{2}})^2]$$

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k\mu u^{n+\frac{1}{2}} - k\mu(u^{n+\frac{1}{2}})^2$$

On pose :

$$X = u^{n+\frac{1}{2}}$$

$$X - u^n = k\mu X - k\mu X^2$$

$$\mu k X^2 + (1 - \mu k)X - u^n = 0$$

$$\Delta = (\mu k - 1)^2 + 4\mu k u^n$$

d'ou

$$X = \frac{\mu k - 1 + \sqrt{(\mu k - 1)^2 + 4\mu k u^n}}{2\mu k}$$

cas on cherche des solutions positives $X = u^{n+\frac{1}{2}} > 0$

Alors :

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu k - 1 + \sqrt{(\mu k - 1)^2 + 4\mu k u^n}}{2\mu k} > 0 \tag{3.6}$$

3.3.1 Estimation à priori

On prend k sous la forme

$$k = \Delta t$$

et l'on introduit les fonctions :

$$\begin{cases} u_{ik}(t) = u^{n+\frac{i}{2}} \quad ; \quad i = 1, 2 \\ \textit{pour } t \in [nk, (n+1)k[\quad ; \quad n = 0, 1, ..., N-1. \end{cases} \tag{3.7}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{\mathrm{u}}_k(t) \text{ ` linéaire dans [nk , (n+1)k[} \\ \tilde{\mathrm{u}}_k(nk) = \mathrm{u}^n \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \tag{3.8}$$

On va monterer le lemme .

Lemme 3 *les fonctions* $u_{ik}(i = 1, 2)$, $\tilde{u}$ *demeurent lorsque* , $k \to 0$ *dans un borné de* $L^{\infty}(0, T, H^2(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega))$ *et sont à valeurs positives (p,p) .*
Nous allons diviser la démonstration de ce lemme en plusieurs étapes , on vérifiera en cours de route que les fonctions u_{ik}*... sont bien à valeurs dans* $H^2(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$

Nous alons montrer que la suite (u^n) est bornée dans H^1 on commence par montrer que la suite est bornée dans L^2

Lemme 4 *Si on pose* $C_0 = \|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ *, alors :* $\|u^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C_0$

Preuve. On va montrer que $C_0 = \|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)} \quad ; \quad \|u^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C_0$

On pose : $A^{n+\frac{i}{2}} = \|u^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^{\infty}(\Omega)}$; $i = 1, 2$
On multiplie (3.5) par u^{n+1} et on intéger sur Ω il vient :

$$\int_{\Omega} u^{n+1}.u^{n+1}dx - \int_{\Omega} u^{n+\frac{1}{2}}.u^{n+1}dx = k\int_{\Omega} \Delta u^{n+1}.u^{n+1}dx comme \int_{\Omega} \Delta u^{n+1}.u^{n+1}dx = -\|\nabla u^{n+1}\|^2 \leq 0$$

donc :

$$\|u^{n+1}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \tag{3.9}$$

de (3.9)on obtient $A^{n+1} \leq A^{n+\frac{1}{2}}$ il reste à verifier que $A^{n+\frac{1}{2}} \leq A^n$
on va utiliser la proposition suivonte :
■

Proposition 42 *Si* $u^n \geq 1$ *alors* $A^{n+\frac{1}{2}} \leq A^n$

Preuve. On a montre que $u^{n+\frac{1}{2}} - u^n \leq 0$ on pose $Z = u^n$ et $\varphi(Z) = u^{n+\frac{1}{2}}$ pour ceci on étudie la fonction $\varphi(Z) - Z$ D'prés (3.6) on obtient

$$\varphi(Z) - Z = \frac{\mu k - 1 + \sqrt{(\mu k - 1)^2 + 4\mu k Z}}{2\mu k} - Z$$

soit l'inegalité :

$$\frac{\mu k - 1 + \sqrt{(\mu k-1)^2 + 4\mu k Z}}{2\mu k} \leq Z \tag{3.10}$$

ceci donne :

$$\sqrt{(\mu k-1)^2 + 4\mu k Z} \leq 2\mu k Z - \mu k + 1$$

Alors :

$$(\mu k-1)^2 + 4\mu k Z \leq (2Zk\mu)^2 + 4Zk\mu(1-) + (1-\mu k)^2 \leq (2Zk\mu)^2 + 4Zk\mu(1-\mu k) + (\mu k-1)^2$$

$$1 \leq Zk\mu + (1-\mu k)$$

$$Zk\mu - \mu k \geq 0$$

$$k\mu(Z-1) \geq 0$$

donc

$$(Z-1) \geq 0$$

$$Z \geq 1$$

$$\|u^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \|u^n\|$$

■

pour montrer que quand k tend vers zeros , les fonctions $u_k, u_{ik}; i = 1,2$ demeurent dans un borné de $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$, on utilise le lemme .

Lemme 5 *Il existe une constante $C_1 \geq 0$ tq :*

$$\|\frac{\partial u^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x}\| \leq C_1 \ ; \ i = 1,2 \tag{3.11}$$

Preuve.

Il suffit détablir les inegaltés suivantes :

$$\|\frac{\partial u^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x}\| \leq \|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x}\| \tag{3.12}$$

On calcule les derives de l'equation (3.5)

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} = k\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u^{n+1}) \tag{3.13}$$

cette dérivation est justifiée si par exemple $\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \in L^{\infty}(\Omega)$

Prenant alors le produite scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}$ comme il vient :

$$\left\langle \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \right\rangle = k \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, [\frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}], \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\rangle \tag{3.14}$$

l'equation (3.14) donne :

$$\left\langle \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \right\rangle = k[\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x}), \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}), \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\rangle]$$

d'aprer les condition aux limite on

$$\left\langle \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \omega \right\rangle \leq 0$$

$$\omega = \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}$$

on obtient

$$\| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \|^2 \leq \| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \| \| u^{n+1} \|$$

donc

$$\| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \| \leq \| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \|$$

ce qui prouve le lemme .

Lemme 6 *Si* $\lambda = k\mu(4C_0 + 1) < 0$ *alors il existe une constante* $C_2 > 0$ *tq .*

$$\|Du^{n+\frac{1}{2}}\| \leq C_2 \|Du^n\| ou D = \frac{\partial}{\partial x}$$

Preuve. On calculi la dirive de léquation (3.4) par rapport aux variables $x_j; j = 1, 2$ on obtient :

$$Du^{n+\frac{1}{2}} - Du^n - k\mu(Du^{n+\frac{1}{2}} + 2(u^{n+\frac{1}{2}}).Du^{n+\frac{1}{2}}))$$

on deduite

$$\|Du^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \|Du^n\| + k\mu[|2(u^{n+\frac{1}{2}})|.\|Du^{n+\frac{1}{2}}\|]$$

pour

$$\|u^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \|u^n\| \leq C_0$$

donc

$$\|Du^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \|Du^n\| + K\mu(2C_0 + 1)\|Du^{n+\frac{1}{2}}\| \tag{3.15}$$

on pose

$$X = \|Du^{n+\frac{1}{2}}\|; A = \|Du^n\|$$

$$X \leq A + K\mu(2C_0 + 1)X$$

$$k\mu(2C_0 + 1) < \lambda < 1$$

alors l'inegalté (3.15)

$$[1 - k\mu(2C_0 + 1)]X \leq A$$

$$X \leq \frac{1}{1-k\mu(2C_0+1)}A$$

donc :

$$\|Du^{n+\frac{1}{2}}\| \leq C_2\|Du^n\| \tag{3.16}$$

et

$$C_2 = \frac{1}{1-k\mu(2C_0+1)}$$

■

de (3.16)on obtient $\|Du^{n+\frac{1}{2}}\| \leq C_2\|Du^n\|$ il reset verifier $\|D^2u^{n+1}\| \leq \|D^2u^{n+\frac{1}{2}}\|$ **Preuve.** On calcule les derives de l'equation (3.5)par rapport aux variables x on obtient :

$$Du^{n+1} - Du^{n+\frac{1}{2}} = kD(\Delta u^{n+1}) \tag{3.17}$$

On calcule les derives de l'equation (3.17)par rapport aux variables x on obtient :

$$D^2u^{n+1} - D^2u^{n+\frac{1}{2}} = kD^2(\Delta u^{n+1}) \tag{3.18}$$

On multiplie (3.18) par D^2u^{n+1} et on intéger sur Ω il vient :

$$\int_\Omega D^2u^{n+1}.D^2u^{n+1} - \int_\Omega D^2u^{n+\frac{1}{2}}.D^2u^{n+1} = k\int_\Omega D^2(\Delta u^{n+1}).D^2u^{n+1}$$

comme :

$$\int_\Omega D^2(\Delta u^{n+1})D^2u^{n+1} = \int_\Omega \Delta(D^2u^{n+1})(D^2u^{n+1}) \leq 0$$

donc :

$$\|D^2u^{n+1}\|^2 \leq \|D^2u^{n+\frac{1}{2}}\|$$

alore

$$\|D^2u^{n+1}\| \leq \|D^2u^{n+\frac{1}{2}}\| \tag{3.19}$$

■

3.3.2 Passage à la limite

D'aprés le lemme(3)

On peut extraire des sous suites , en coure notées :u_{ik}, $\tilde{u}_k$

$$\begin{cases} u_{ik} \to u_i \\ \tilde{u}_k \to \tilde{u} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.20) \\ \; dans \;\; L^\infty(0,T,H^2(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)) \quad faible \;\; etoile \end{cases}$$

ce type de convergence n'est pas suffisant pour passer à la limite à la limite dans les terme non linéaire,mais on a une estimation supplémentair pour $\widetilde{u}_k$

Lemme 7 *Lorsque* $k \to 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial t} \;\; demeurent \\ \;\; dans \;\; un \; borne \;\; L^\infty(0,T,H^2(\Omega)\cap L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{3.21}$$

Preuve. En ajoutant les égalités correspondantes de (3.4), (3.5) on a :

$$u^{n+1} - u^n - k\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} - k\mu[(u^{n+\frac{1}{2}}) - (u^{n+\frac{1}{2}})^2] = 0 \tag{3.22}$$

Ce qui équivant à

$$\frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_{2k}}{\partial x^2} - \mu u_{1k} + \mu (u_{1k})^2 = 0 \tag{3.23}$$

Ceci extrait (3.21) grace au lemme(3)

On peut alors supposer grace aux estimations sur $\widetilde{u}_k$ et la compacité de l'injection de $H^2(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$

que :

$$\begin{cases} \widetilde{u}_k \to \widetilde{u} \\ dans \; L^2(Q) fort \; et \; p.p \end{cases} \tag{3.24}$$

mais d'aprés la définition des fonctions $\widetilde{u}_k$ et u_{2k} on a :

$$\|\widetilde{u}_k - u_{2k}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq \sup_{0\leq n\leq N-1} |u^{n+1} - u^n|$$

et avec (3.22)et le lemme (3)il en résulte que :

$$\|\widetilde{u}_k - u_{2k}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq kC_3$$

Donc ,avec (3.24)on en déduit que l'on peut supposer :

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{2k} \to \widetilde{u} \\ dans\ L^2(Q) fort\ et\ p.p \end{cases} \tag{3.25}$$

mais la premiére égalité (3.5) s'écrite

$$u_{2k} - u_{1k} - k\frac{\partial^2 u_{2k}}{\partial x^2} = 0$$

d'ou' ,avec le lemme (3)

$$\|u_{2k} - u_{1k}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq kC_4 \tag{3.26}$$

on peut donc supposer ,d'aprés(3.25)que

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{1k} \to \widetilde{u} \\ dans\ L^2(Q) fort\ et\ p.p \end{cases}$$

alors[avec les notations (3.20)]

$$u_i = \widetilde{u} = u$$

et l'on amaintenant :
$(u_{1k})^2 \to u^2$ dans $L^2(Q)$ faible et on peut passer à la limite dans (3.22)
Comme d'aprés le lemme (7) on peut aussi supposer que :

$$\frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}$$

dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ faible étoile
on a

$$\widetilde{u}_k(0) \to u(0)$$

dans $L^2(\Omega)$
et par conséquent

$$u(0) = u_0$$

On voit ainsi que u satisfont au probléme (3.1) ■
■

3.4 Unicité de la solution

Théorème 43 *: Si $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), u \geq 0$ dans Σ et verifie (3.1) et (F) donnée dans $L^\infty(\Omega)$, Alors le probléme admet une solution unique $u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$*

Preuve.
On a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu u(1-u)$$

Soient u_1 *et* u_2 deux solutions du probléme (3.1)

u_1 solution ,alors :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \mu u_1(1-u_1) \tag{3.27}$$

u_2 solution ,alors :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \mu u_2(1-u_2) \tag{3.28}$$

en retranchement (3.27) et (3.28)
il vient :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - [\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}] = \mu[u_1(1-u_1) - u_2(1-u_2)]$$

On pose :

$$u = u_1 - u_2$$

Alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu(u_1 - u_1^2) - (u_2 - u_2^2) \tag{3.29}$$

Multiplions (3.29) par u , on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t}u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u = \mu u_1 u - \mu u_1^2 u - \mu u_2 u + \mu u_2^2 u$$

implique que :

$$\frac{\partial u}{\partial t}u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u = \mu u(u_1 - u_2) - \mu u(u_1^2 - u_2^2)$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u = \mu u^2 - \mu u(u_1^2 - u_2^2) \tag{3.30}$$

en integrant l'équation (3.30) sur Ω , on trouve

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}udx - \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}udx = \mu\int_\Omega u^2dx - \mu\int_\Omega u(u_1^2 - u_2^2)dx$$

d'ou'

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}udx + \int_\Omega \nabla u\nabla udx = \mu\int_\Omega u^2dx - \mu\int_\Omega u(u_1^2 - u_2^2)dx$$

Alors :

$$u(u_1^2 - u_2^2) = u(u_1 - u_2)(u_1 + u_2) = u^2(u_1 + u_2)$$

et comme :

$$u^2(u_1 + u_2) \geq 0$$

donc :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}udx \leq \mu\int_\Omega u^2dx$$

on obtient alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u| \leq |u|^2$$

D'aprés le lemme de Gronwall .

on a :

$$u = 0 \;\; d'ou' \;\; u_1 - u_2 = 0$$

Alors

$$u_1 = u_2$$

donc la solution est unique ■

Chapitre 4

Application

On a le probléme de réaction diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu u(1-u), \quad \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad , x \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \\ u = 0 sur \Gamma \quad et \ \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

On utilise la methoud décomposition : soit $k = \Delta t$ et $\Omega =]0,1[$
décomposition en deux sous problémes (3.4)et (3.5) on pose : $k = 1$ et $\mu = 1$
alors :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = [u^{n+\frac{1}{2}} - (u^{n+\frac{1}{2}})^2] \tag{4.1}$$

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = \Delta u^{n+1} \tag{4.2}$$

On pose $u^{\frac{1}{2}} = X, u^0 = u_0$ ceci define completement la suite $\{u^n\}$.

On pose :$u_0 = 1$
On va calcule $u^{\frac{1}{2}}$
la relation (4.1) donne :

$$u^{0+\frac{1}{2}} - u^0 = [u^{0+\frac{1}{2}} - (u^{0+\frac{1}{2}})^2]$$

alors :

$$X - 1 = X - X^2$$

$$X = 0 \ sur \ \Omega =]0,1[$$

$$X^2 = 1$$

d'ou :

$$X =^+_- 1$$

Donc comme on cherche des solutions positive

$$X = u^{\frac{1}{2}} = 1$$

On va calcule $\{u^1\}$

dans (4.2) on pose $n = 0$

donc :

$$u^{0+1} - u^{0+\frac{1}{2}} = \Delta u^{0+1}$$

alors :

$$u^1 - u^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} \ dans \ ]0,1[$$

$$u^1(0) = u^1(1) = 0 \ sur \ \Gamma$$

On pose $Y = u^1$

$$Y - 1 = Y'' \ dans \ ]0,1[$$

on va calcule l'équation défrentialle suivant :

$$Y'' - Y = -1 \tag{4.3}$$

On va calcule la solution paretiquliare

$r^2 - 1 = 0$ alors $r^2 = 1$

donc $r =^+_- x$

$$Y = Ae^{-x} + Be^{x}$$

la résulution de cette EDO est simple la solution génrale et

$$Y(x) = Ae^{-x} + Be^{x} + 1$$

$$Y(0) = A + B + 1 = 0$$

donc $A = -(B + 1)$

$$Y(1) = \frac{A}{e} + Be + 1 = 0$$

donc $\frac{A}{e} + Be = -1$ deux equations à deux inconnues ce qui donne A et B

$$\frac{-(B+1)}{e} + Be = -1$$

alors

$$B(e - \frac{1}{e}) - \frac{1}{e} = -1 \Longrightarrow B(e - \frac{1}{e}) = -1 + \frac{1}{e}$$

Donc

$$B = \frac{-1 + \frac{1}{e}}{(e - \frac{1}{e})}$$

$$B = \frac{(1-e)}{(e^2-1)}$$

Alors

$$Y(x) = [\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]e^{-x} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e^{x} + 1$$

Donc

$$Y = u^1 = [\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]e^{-x} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e^{x} + 1$$

On va calcule :$u^{\frac{3}{2}}$

le probléme (4.1)donne

$$u^{1+\frac{1}{2}} - u^1 = u^{1+\frac{1}{2}}[1 - (u^{1+\frac{1}{2}})]$$

$$u^{\frac{3}{2}} - u^1 = u^{\frac{3}{2}}[1 - (u^{\frac{3}{2}})]$$

Alors :

$$(u^{\frac{3}{2}})^2 = u^1$$

Donc

$$u^{\frac{3}{2}} =^{+}_{-} \sqrt{u^1}$$

on trouve la solution positive $u^{\frac{3}{2}} = \sqrt{u^1} = \sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]e^{-x} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e^x + 1}$

u^2 :

le second probléme(4.2) donne u^2

$$u^{1+1} - u^{1+\frac{1}{2}} = \frac{\partial^2 u^{1+1}}{\partial x^2}$$

Alors

$$u^2 - u^{\frac{3}{2}} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}$$

On pose $Z = u^2$

$$Z - u^{\frac{3}{2}} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

$$Z^{"} - Z = -u^{\frac{3}{2}} \ dans \ ]0,1[$$

$$Z(0) = Z(1) = 0 \ sur \ \Gamma$$

la résolution de cette EDO est simple la solution génerale est :

$$Z(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \sqrt{u^1}$$

pour : $Z(0) = C_1 + C_2 + \sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1] + \frac{(1-e)}{(e^2-1)} + 1} = 0$

alors $c_1 + C_2 + \sqrt{\frac{(e-1)}{(e^2-1)} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}} = 0$ donc $C_1 = -C_2$

et

$$\frac{C_1}{e} + C_2 e + \sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1}$$

on obtient :

$$Z(1) = \frac{C_1}{e} - C_1 e + \sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1}$$

alors :

$$C_1 = \frac{\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1}}{(\frac{1}{e} - e)}$$

Donc :

$$Z(x) = \frac{\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1}}{(\frac{1}{e} - e)} e^{-x} - \frac{\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1}}{(\frac{1}{e} - e)} e^{x} + \sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]e^{-x} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e^{x} + 1}$$

$$Z(x) = \frac{\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1}}{(\frac{1}{e} - e)}(e^{-x} - e^{x}) + \sqrt{u^1}$$

$$Z(x) = u^2 = \frac{\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1}}{(\frac{1}{e} - e)}(e^{-x} - e^{x}) + \sqrt{u^1}$$

On va calcule $u^{\frac{5}{2}}$
la relation (4.1) donne :

$$u^{2+\frac{1}{2}} - u^2 = [u^{2+\frac{1}{2}} - (u^{2+\frac{1}{2}})^2]$$

alors :

$$u^{\frac{5}{2}} - u^2 = u^{\frac{5}{2}} - (u^{\frac{5}{2}})^2$$

$$u^{\frac{5}{2}} = 0 \ sur \ \Omega =]0, 1[$$

$$(u^{\frac{5}{2}})^2 = u^2$$

$$u^2 = u_2$$

Alors :

$$u^{\frac{5}{2}} = \sqrt{u_2}$$

$u^3 =$:

le second probléme(4.2) donne u^3

$$u^{2+1} - u^{2+\frac{1}{2}} = \frac{\partial^2 u^{2+1}}{\partial x^2}$$

Alors

$$u^3 - u^{\frac{5}{2}} = \frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2}$$

On pose $S = u^3$

$$S - u^{\frac{5}{2}} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

$$S^{"} - S = -u^{\frac{5}{2}} \ dans \ ]0,1[$$

$$S(0) = S(1) = 0 \ sur \ \Gamma$$

la résolution de cette EDO est simple la solution génerale est :

$$S(x) = C_3 e^{-x} + C_4 e^{x} + \sqrt{u^{\frac{5}{2}}}$$

$S(0) = C_3 + C_4 = 0$ alors $C_3 = -C_4$

$$S(1) = C_3 \tfrac{1}{e} + C_4 e + (\sqrt{[\tfrac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\tfrac{1}{e} + \tfrac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1} + \sqrt{[\tfrac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\tfrac{1}{e} + \tfrac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1})^{\frac{1}{2}}$$

$$C_3(\frac{1}{e} - e) = (2\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1})^{\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$C_3 = (2\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{e} - e)$$

On obtient :

$$S(x) = (2\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{e} - e)(e^{-x} - e^{x})$$

Alors : $S(x) = u^3 = (2\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{e} - e)(e^{-x} - e^{x}) + \sqrt{u^{\frac{5}{2}}}$

finalement :

$$\begin{cases} u^0 = 1 \\ u^{\frac{1}{2}} = 1 \\ u^1 = [\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]e^{-x} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e^x + 1 \\ u^{\frac{3}{2}} = \sqrt{u^1} = \sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]e^{-x} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e^x + 1} \\ u^2 = \frac{\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)}-1]\frac{1}{e}+\frac{(1-e)}{(e^2-1)}e+1}}{(\frac{1}{e}-e)}(e^{-x} - e^x) + \sqrt{u^1} \\ u^{\frac{5}{2}} = \sqrt{u^2} \\ u^3 = (2\sqrt{[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1]\frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{e} - e)(e^{-x} - e^x) + \sqrt{u^{\frac{5}{2}}} \end{cases}$$

Conclusion

Dans mon travail , j'ai etudie un probléme quasi linéair de reaction diffusion parabolique . pour établir un résultat d'existence d'un solution au moins du probléme , nous avons utilisi la méthode de décomposition des opérateur qui décomposer le probléme initiale en deux sous probléme dans leur étude se fait en parallele cette méthode nous a suivi de construire un suite de solutions approchée la mise en evidence des estimations à priori et l'usage du lemme de compacité nous a montré la convergence de cette suite vers une solution du probléme initial
tandis faire l'unicité etablie en utilisant une des méthodes classiques : le lemme de Gronowll.
enfin on a validé notre travail en faisant une application sur un exemple simple .

Bibliographie

[1] BRESIS. H . Analyse Fonctionnelle Masson Paris 1983

[2] LIONS. J.L. MAGENES E. Problèmes aux limites non homogènes et applications Tome 1, Dunod Paris 1968

[3] LIONS J.L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires Dunod Guautier Villars Paris 1969

[4] PARODI Maurice, Mathématiques appliquées à l'Art de l'Ingénieur Equations Différentielles Tome 4, SESES Sorbonne, Paris IV 1966

[5] EINHARD H Equations différentielles ordinaires, Dunod Paris 1981

[6] SAID M.S Résolution d'un système non linéaire intervenant en dynamique des Gaz par la méthode de compacité Actes du CNAMA université de Jijel Algérie Novembre 2004 pp 165-174

[7] TARTAR L. Topics in non linear analysis Publications mathématiques d'Orsay 1978 N°13

[8] TEMAM R- Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition. Séminaire N.Bourbaki.(1969-1970), exp. n_{381}, p.(1-15)

[9] TEMAM R. Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, Annali di Mat. Pur. ad Applic., LXXIV (1968),p.191-380

[10] C.ZUILLY, Distribution et transformation de Fourier, Dunod 1999.

[11] L.ROQUES ; équations de réaction-diffusion non-linéaires et modélisation en écologie

[12] M. SAMUELIDES, L. TOUZILLIER - Aalyse fonctionnelle, Cepadues-éditions,n°255 (1989)

[13] J.-L. LIONS, R. TEMAM - Eclatement et décentralisation en calcul des va-riations,3eme Colloque International d'optimisation, Nice (1969), Springer-Verlag, Lecture Notes.

[14] R.A.FISHER,The advance of advantageouse genes,Ann.Eugenics 7(1937), pp (335-369)

[15] B.SEBBAR Résolution d'un problème de réaction diffusion par la méthode des approximations successives faisant intervenir des équations intégrales Mémoire de Master Université Kasdi Merbah Ouargla 2014

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا لدراسة وجود ووحدانية حل مسألة قطع مكافئ (مسألة الانتشار و رد الفعل) غير خطية.

من حيث وجود الحل استعملنا في دراستنا طريقة تحليل المسألة الى مسألتين فرعيتين يسهل حلهما و ايجاد حلول تقريبية تتلاقى لحل المسألة الأولى .

في حين تطرقنا لوحدانية الحل بطرق تقليدية (توطئة غرنوال) .

و أخيرا تحققنا من صحة عملنا بتقديم تطبيقا للمسألة المذكورة سابقا.

الكلمات المفتاحية : رد فعل الانتشار , القطع المكافئ , طريقة التفكيك .

Abstract

In this memory, we spoke to study the existence and uniqueness of the solution of a parabolic problem (diffusion reaction problem) nonlinear.

In terms of a solution we used in our decomposition method of studying the problem of two subgroups easy to solve and find approximate solutions converge to solve the first problem.While we were talking to the uniqueness of the traditional methods of solution **(Lemma Grunwall).**

Key words : {Diffusion reaction ,parabolic problems , decomposition method }

Résumé

Dans cette mémoire, nous avons parlé d'étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème parabolique (problème de réaction diffusion) non-linéaire.

En termes d'une solution, nous avons utilisé dans notre méthode de décomposition du problème de l'étude de deux sous-groupes faciles à résoudre et trouver des solutions approximatives convergé pour résoudre le premier problème.

Pendant que nous parlions à l'unicité des méthodes traditionnelles de solution (**lemme Grunwall**).

Enfin, nous avons vérifié l'authenticité de notre travail pour assurer l'application de la question mentionnée ci-dessus.

Mots-clés :{réaction diffusion, problémes paraboliquees, méthode de décomposition}