UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire De Master Académique

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Messaoudi Abdeldjalil

Thème

Discrétisation spectrale des équations de Laplace avec conditions aux limites de Dirichlet

Version de : 07/06/2015

Devant le jury composé de :

Mr.Mabrouk Meflah	M.C. UKMO université-Ouargla	Président
Mr.Said Mohammed Said	M.C. UKMO université-Ouargla	Examinateur
Mr.Bennour Hacene	M.A. UKMO université-Ouargla	Rapporteur

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère,
A mon cher père qui m'ont toujours soutenu,
Qui m'ont aide à affronter les difficultés,
A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.
A mes très chères soeurs et frères.
A toute ma famille.
A tous les amis, Farouk, Lokmane, Mohammed, Messaoud, Mostafa, Elhadi.
A tous les étudiants d'université de KASDI Merbah - Ouargla.
A tous.

Remerciements

En premier lieu, je tient à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant, de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail.

Je tient à exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire, **M.r Bennour Hacene**, pour ces conseils,et son encouragement durant

la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire.

Je remercier sincèrement les membres du jury :

Docteur :Meflah Mabrouk, d'avoir accepté la présidence du jury.

Aussi je remercier vivement, mon professeur :

Docteur :Said Mohammed Said, d'avoir accepté l'examinateur de ce travail. Je le remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail.

Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père, ma mère, mes frères et mes soeurs, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement.
Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de Kasdi Merbah-Ouargla.

Un grand merci à mes collègues pour le soutient qui m'ont donnés.

Merci à tous ceux qui ont contribué, de prés ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Notations

On adaptera dans ce que suit les notations suivantes : on désigne $\Omega =]-1,1[^d, \quad d = 1,2$ l'ouvert borné de $\mathbb{R}^2$

➤ $L^2(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ est mesurable } \int_\Omega |v(x)|^2 < +\infty\}$

➤$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1,2\}$

➤ Pour $m \in \mathbb{N}$, et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ on notera

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial^{\alpha_1} x \partial^{\alpha_2} y}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m\}$$

On munit $H^m(\Omega)$ par le produit scalaire :

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx$$

La norme associé à ce produit scalaire

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

➤ On définit l'espace H_0^1 comme suit

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u_{/\partial\Omega} = 0\}$$

➤ Les espaces $H^m(\Omega; E)$ est définie :

$$H^m(\Omega; E) = \{v : \Omega \to E, \quad \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_E^2 dx < \infty\}$$

et sont munis de la norme

$$\|v\|_{H^m(\Omega;E)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_E^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

et de la semi norme

$$|v|_{H^m(\Omega;E)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|= m} \|D^\alpha v\|_E^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

➤ $\overrightarrow{\nabla} v = gradv = (\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y})^T$

➤ $\Delta v \quad = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

➤ On note la grille de Gauss-Lobatto de type Legendre Ξ_N par

$$\Xi_N = \begin{cases} (x,y) = (\xi_i, \xi_j);\ 0 \leq i,j \leq N \qquad si\ d=2, \\ (x,y,z) = (\xi_i, \xi_j, \xi_k);\ 0 \leq i,j,k \leq N \qquad si\ d=3. \end{cases}$$

Table des matières

Introduction

La mathématique est une science non limité, qui a plusieurs branches d'entre elle l'analyse numérique, qui se base sur les méthodes approximatives, celles-ci traitent les équations différentielles partielles et ses trois types.

Chaque type d'équation a une étude spéciale, mais notre travail est basé sur les équations différentielles partielles elliptiques ; l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet homogènes, son champ d'application est en premier lieu l'ingénierie mécanique et thermique.

On a choisi le cas le plus simple pour la traiter mathématiquement avec l'un de ces méthodes, et on a choisi la méthode spectrale, qui permettent de l'obtention des résultats très précis à partir des points de Gauss-Lobatto, qui sont les racines des dérivés des polynômes de Legendre $(\xi_1, ..., \xi_{N-1})$.

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à donner quelque notions préliminaires, qui décrivent les outils de base pour les techniques spectrales : on va définir l'espace discret correspondant, on introduit les bases sur les polynômes orthogonaux ; les polynômes de Legendre, ensuite on va décrire les formules de quadratures qui sont employées pour évaluer les intégrales intervenant dans la formule variationnelle.

Dans le deuxième chapitre, on posera le problème de Dirichlet homogène et on obtient sa formulation variationnelle, ensuite on expliquera la mise en oeuvre de l'approximation de Galerkin, enfin on introduira quelques résultats de l'approximation polynômiale, et certains résultats de l'interpolation polynômiale sur l'intervalle Λ puis sur le carré Λ^2.

Dans le dernier chapitre, nous appliquons l'analyse de la discrétisation spectrale sur l'équation de Laplace dans le carré par l'approximation de Galerkin. Finalement, on estime l'erreur entre la solution exacte et approchée à la meilleur approximation de la solution dans l'espace discret et à l'erreur d'interpolation aux noeuds de collocation sur le second membre de l'équation et on présente les outils nécessaires à l'implémentation de cette méthode.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Les espaces discrets

On définit les espaces des polynômes, tout d'abord en dimension $d = 1$, puis dans le domaine de dimension $d \geq 2$. qui sont produit des intervalles

Notation 1.1.1 *Pour tout entier n positif, on définit* $\mathbb{P}_n$ *comme les espaces des polynômes sur* $\mathbb{R}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$*, pour tout intervalle ouvert* Λ *on note* $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ *espace de restrictions à* Λ *des fonctions de l'ensemble* $\mathbb{P}_n$*.*

Notation 1.1.2 *Pour tout entier* $n \geq 1$ *et pour tout intervalle ouvert borné* Λ *de* $\mathbb{R}$ *on note* $\mathbb{P}_n^0(\Lambda)$ *l'espace des polynômes de* $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ *qui s'annule aux deux extrémités de* Λ*.*

*) un polynôme appartient à $\mathbb{P}_n^0(\Lambda)$, $n \geq 2$, $\Lambda =]a, b[$ si :

$$p(x) = (x - a)(x - b)k(x) \text{ tel que } k \in \mathbb{P}_n \tag{1.1}$$

*) Les bases de $\mathbb{P}_n$ est forment par les x^m, $0 \leq m \leq n$ alors on déduit le résultat suivant :
$\dim \mathbb{P}_n(\Lambda) = n + 1$,
$\dim \mathbb{P}_n^0(\Lambda) = n - 1$.
En dimension $d \geq 2$:on travaille dans des domaines Ω des tensorises c'est à dire du type $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_d$ où les $\Lambda_i = \Lambda_1, ..., \Lambda_d$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$, on note $u = (u_1, ..., u_d)$ le variable de $\mathbb{R}^d$.

Notation 1.1.3 *Pour tout entier n positif et pour tout domaine Ω égale au produit $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_d$. On note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des restrictions sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$ par rapport à chaque x_i ; $i = 1, ..., d$ alors tout polynôme $p \in \mathbb{P}_n(\Omega)$ s'écrit sous forme :*

$$p(x_1, ..., x_d) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} ... \sum_{k_d=0}^{n} \alpha_{k_1} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_d^{k_d} \tag{1.2}$$

où $\alpha_{k_1}, ..., \alpha_{k_d}$ sont réels.

Proposition 1.1.4 *Soit Ω_d le produit de $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_d$ des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et Ω_{d-1} le produit $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_{d-1}$, pour tout entier n positif et toute base $\{\phi_m,\ 0 \leq m \leq n\}$ de $\mathbb{P}_n(\Omega_d)$, un polynôme $p \in \mathbb{P}_n(\Omega_d)$ si est seulement si s'écrit sous forme :*

$$p(x_1, ..., x_d) = \sum_{m_1=0}^{n} q_m(x_1, ..., x_{d-1}) \phi_m(x_0) \tag{1.3}$$

$\phi_m \in \mathbb{P}_n(\Omega_{d-1})$, où $0 \leq m \leq n$

Preuve. considérons $\Omega = (]-1,1[)^d$ pour un intervalle $\Lambda =]-1,1[$ de $\mathbb{R}$.
la proposition (1.1.4) est alors équivalent au résultat suivant : Pour tout entier n positif et tout base $\{\phi_m, 0 \leq m \leq n-1\}$ de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ Les polynômes définie par : $\phi_{m_1} \otimes ... \otimes \phi_{m_d}$ est $\phi_{m_1} \otimes \phi_{m_2} ... \phi_{m_{d-1}} \otimes \phi_{m_d}(x_1, ..., x_d) = \phi_{m_1}(x_1)\phi_{m_2}(x_2)...\phi_{m_{d-1}}(x_{d-1})\phi_{m_d}(x_d)$
forment pour chaque $m_i,\ i = 1, ..., d$ (décrit les entier entre 0 à n) une base de $\mathbb{P}_N(\Omega)$.
Ceci évident lorsque par exemple les ϕ_m coïncident avec ϕ^m où $0 \leq m \leq n$, pour les problèmes avec condition aux limite essentielle on introduit les espaces suivants. ∎

Notation 1.1.5 *Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout ouvert égale un produit : $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_d$ des intervalle ouverts bornées de $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{P}_n^0(\Omega)$ espace de restrictions à Ω qui s'annulent sur $\partial\Omega$*

Proposition 1.1.6 *Soit Ω_d le produit de $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_d$ des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et Ω_{d-1} le produit $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times ... \times \Lambda_{d-1}$. pour tout entier $n \geq 1$ et toute base*

$\{\Phi_m, 0 \leq m \leq n-1\}$ de $\mathbb{P}_n^0(\Omega_d)$ un polynôme $p \in \mathbb{P}_n^0(\Omega_d)$ si est seulement s'il s'écrit sous forme :

$$p(x_1, ..., x_d) = \sum_{m_1=0}^{n-1} q_m(x_1, ..., x_{d-1})\Phi_m(x_d) \tag{1.4}$$

$\Phi_m \in \mathbb{P}_n^0(\Omega_{d-1})$ où $0 \leq m \leq n-1$

Preuve. Pour tout entier $n \geq 1$ en définit $\Omega = (]-1,1[)^d$ et tout base $\{\Phi_m, 0 \leq m \leq n-1\}$ $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, la proposition est équivalente au résultat suivant : les polynômes définit par $\Phi_{m_1} \otimes ... \otimes \Phi_{m_d}$ formés lorsque m_i décrit les entier de 1 à $(n-1)$, une base de $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$.
■

1.2 Polynôme de Legendre

Dans ce qui suit on rappels et démontres plusieurs propriétés importantes de polynômes de Legendre qui seront utiles par la suite. Les polynômes de Legendre forment famille des polynômes deux à deux orthogonaux et unitaire satisfait cette propriété peut être construire par la procède de Gram-Schmidt applique à la base canonique, dans l'espace $L^2(\Lambda)$.

Lemme 1.2.1 (2) *Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit L_n un polynôme non nul de degré n qui soit orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}(\Lambda)$ pour le produit $L^2(\Lambda)$. Alors*

i) L_n à la parité de son degré : $L_n(-x) = (-1)^n L_n(x)$

ii) Les zéros de L_n sont réels strictement compris entre -1 et 1.

Preuve.
*) Le polynôme $\tilde{L_n}$ définie par $\tilde{L_n}(x) = L_n(-x)$ est lui aussi orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}(\Lambda)$ et de degré n. Donc $\tilde{L_n}$ est proportionnel à L_n. Comme la symétrie est involution, $\tilde{L_n}$ est en fait égale à $+L_n$ ou à $-L_n$ et comme le degré de L_n égale n on obtient(i)
*) Soit l la nombre de zéros du polynôme L_n qui sont distinct strictement compris entre -1 et 1 et d'ordre impair. Soit $x_1, ..., x_l$ les zéros du L_n si $l < n$ les polynômes L_n est orthogonal à tous les polynômes des degré $\leq n-1$ alors

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\,(x-x_1)...(x-x_l)\,dx = 0$$

ceci impossible car la fonction intègre ne change pas de signe donc $l = n$ ceci montre que L_n ne s'annulent pas en -1 et 1 alors on peut définir les polynômes de Legendre. ■

Définition 1.2.2 *On appelle famille $(L_n)_n$ de polynômes deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2(\Lambda)$ et tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, le polynôme L_n est de degré n et vérifie $L_n(1) = 1$. pour $n \geqslant 1$, on note $\zeta_1, ..., \zeta_n$ ses zéros avec la convention $-1 < \zeta_1 < ... < \zeta_n < 1$ on l'appelle les points de collocation de Gauss.*

Définition 1.2.3 *Soit $n \geqslant 1$ les $(n-1)$ zéros de $L_n^{'}$ sont tout distincts et tous intérieurs à Λ on a ainsi $-1 = \xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_{n-1} < \xi_n = 1$ tel que $\xi_0, ..., \xi_n$ sont les zéros du polynôme $(1-x^2)L_n^{'}(x)$ et sont appels les points de collocation de Gauss-Lobatto.*

Remarque 1.2.4 .
i) Les zéros des L_n et aussi ceux des $L_n^{'}$ sont très importants, car ils sont au fondement de toute la méthode spectrale de collocation.
ii) Comme L_n forment une base orthogonale de $L^2(\Lambda)$ aussi la base des vecteurs propres d'opérateur de Sturm-Liouville (d'où le nom de méthodes spectrales pour les méthodes utilisant de telles bases de polynômes).

Proposition 1.2.5 *Pour tout entier n positif on note k_n le coefficient de x^n dans $L_n(x)$.*

Preuve.
$(1-x^2)^n = (-1)^n x^{2n} + \varphi_{2n-2}(x)$ où φ_{2n-2} est un polynôme de degré $2n-2$

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n = (-1)^n \frac{(2n)!x^n}{n!} + R_{n-1}(x)$$

où $R_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $(n-2)$ on obtient L_n est de degré n, sa parité est telle de n son coefficient dominant est $k_n = \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ ■

Proposition 1.2.6 (5) *pour tout entier n positif le polynôme $L_n(x)$ vérifie l'équation différentielle suivant :*

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right)+n(n+1)L_n(x)=0 \tag{1.5}$$

Preuve. On a $\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right)$ est un polynôme de degré $\leq n$ pour tout polynôme $\phi(x)$ de degré $\leq n-1$

$$\int_\Lambda \frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right)\phi(x)dx=$$

on intégrer par partie, on obtient

$$=\left[\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right)\phi(x)\right]_{-1}^{1}-\int_\Lambda\left(\left(1-\varepsilon^2\right)\phi^{'}(x)\right)L_n^{'}(x)dx$$

$$=\left[-L_n(x)\left(\left(1-x^2\right)\phi^{'}(x)\right)\right]_{-1}^{1}+\int_\Lambda\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\phi^{'}(x)\right)L_n(x)dx=0$$

car $\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\phi^{'}(x)\right)$ est un polynôme de degré $\leq (n-1)$. On en déduit qu'il existe un nombre λ_n tel que $\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right)+\lambda_n L_n(x)=0$ pour déterminant λ_n dans l'égalité ci-de sous :

$$-2xL_n^{'}(x)+(1-x^2)L_n^{''}(x)+\lambda_n L_n(x)=0 \tag{1.6}$$

On utilise l'équation des coefficients dominantes :

$$\begin{aligned}
-2nk_n-n(n-1)k_n+\lambda_n k_n&=0\\
-2nk_n-n^2k_n+nk_n+\lambda_n k_n&=0\\
-n^2k_n-nk_n+\lambda_n k_n&=0\\
-(n^2+n)k_n&=-\lambda_n k_n\\
\lambda_n&=n(n+1)
\end{aligned}$$

on multiple l'équation (1.5)par $L_m(x)$ et on intègre par partie on obtient :

$$\int_\Lambda\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)\right)L_m(x)dx+n(n+1)\int_\Lambda L_n(x)L_m(x)dx=0$$

$$\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)L_m(x)\mid_{-1}^{1}-\int_\Lambda\left(1-x^2\right)L_n^{'}(x)L_m^{'}(x)dx+n(n+1)\int_\Lambda L_n(x)L_m(x)dx=0$$

alors

$$-\int_{\Lambda}\left(1-x^{2}\right)L_{n}^{'}(x)L_{m}^{'}(x)dx+n(n+1)\int_{\Lambda}L_{n}(x)L_{m}(x)dx=0$$

$$\int_{\Lambda}L_{n}^{'}(x)L_{m}^{'}(x)\left(1-x^{2}\right)dx=n(n+1)\int_{\Lambda}L_{n}(x)L_{m}(x)dx=0$$

ceci signifie que $(L_{n}^{'})_{n}$ est une famille de polynôme deux à deux orthogonaux pour la mesure $(1-x^{2})\,dx$ sur $\Lambda=]-1,1[$ la dernière conséquence de l'équation (1.5)on prend $x=1$ dans l'équation (1.6) on obtient :

$-2L_{n}^{'}(1)+(1-(1)^{2})L_{n}^{''}(1)+n(n+1)L_{n}(1)=0$

$-2L_{n}^{'}(1)+n(n+1)L_{n}(1)=0\Rightarrow L_{n}^{'}(1)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ■

Lemme 1.2.7 (4) ***(Formule de Rodrigue)***

Pour tout entier $n\geq 0$, le polynôme $L_{n}(x)$ est donné par :

$$L_{n}(x)=\frac{(-1)^{n}}{2^{n}n!}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left((1-x^{2})^{n}\right). \tag{1.7}$$

Preuve.

On a la fonction $(1-x^{2})^{n}$ est un polynôme de degré $2n$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $\leq n-1$ et s'annulent en 1 et -1 en effectuant n fois intégrations par partie alors pour tout polynôme ϕ de degré $\leq n-1$

$$\int_{\Lambda}\left(\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(1-x^{2}\right)^{n}\right)\phi(x)dx=\left[\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^{2})^{n}\right)\phi(x)\right]_{-1}^{1}$$

$$-\int_{\Lambda}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^{2})^{n}\right)\phi^{'}(x)dx=...=(-1)^{n}\int_{\Lambda}(1-x^{2})\frac{d^{n}\phi}{dx^{n}}dx=0$$

alors $\dfrac{d^{n}}{dx^{n}}(1-x^{2})^{n}$ égale un constante que multiple par L_{n} pour déterminer la constante on calcule $(1-x^{2})^{n}|_{x=1}=0$

$\dfrac{d}{dx}(1-x^{2})^{n}|_{x=1}=\dfrac{d}{dx}(1-x)^{n}(1+x)^{n}=n(1-x)^{n-1}(-1)(1+x)^{n}|_{x=1}+n(1+x)^{n-1}(1-x)^{n}|_{x=1}=0$

$\dfrac{d}{dx}(1-x)^{n}(1+x)^{n}|_{x=1}=n!(-1)^{n}2^{n}+0$ parce que $\dfrac{d^{n}}{dx^{n}}(1-x^{2})^{n}|_{x=1}=c.L_{n}|_{x=1}$

$\Longrightarrow n!(-1)^{n}2!=c\ \dfrac{d^{n}}{dx^{n}}(1-x^{2})^{n}=n!(-1)^{n}2^{n}L_{n}$

$\Longrightarrow \dfrac{(-1)^{n}}{2^{n}n!}\dfrac{d^{n}}{dx^{n}}(1-x^{2})^{n}=L_{n}(x)$ ■

Corollaire 1.2.8 *pour tout entier n positif, on a la formule*

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \tag{1.8}$$

Preuve. On utilise l'intégration par partie :

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^n)\frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^n)dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^n\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}})(1-x^2)^n(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}})(1-x^2)^n dx = ...$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}})(1-x^2)^n dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \tag{1.9}$$

on calcule l'intégrale

$$= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx$$

On utilise le changement de variable $x = \cos\theta$

$$= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^{2n+1}\theta d\theta = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta d\theta$$

on obtient l'intégrale de Walis :

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta d\theta = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

en remplaçant dans (1.9) on obtient :

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \tag{1.10}$$

alors on a $\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} = \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$ ■

Corollaire 1.2.9 *Pour tout entier n positif, le coefficient k_n de x^n dans $L_n(x)$ est*

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \tag{1.11}$$

Preuve. Écrivons

$$(1-x^2)^n = (-1)^n x^{2n} + \phi_{2n-2}(x)$$

où ϕ_{2n-2} est un polynôme de degré $2n-2$ et se dérive d'ordre n sous forme :

$$(\frac{d^n}{dx^n})(1-x^2)^n = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} x^n + R_{n-2}(x)$$

on $R_{n-2}(x)$ est un polynôme de degré $(n-2)$. On obtient L_n est de degré n, sa partie est telle de n son coefficient domina est $k_n = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ ■

Lemme 1.2.10 *Pour tout entier n positif, on a la formule*

$$\int_{-1}^{x} L_n(t)dt = \frac{1}{2n+1}(L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)) \tag{1.12}$$

Preuve. Soit

$$H_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} L_n(t)dt$$

qui est on fait un polynôme de degré $(n+1)$ qui s'annule en 1 et -1

$$H_{n+1}(-1) = \int_{-1}^{-1} L_n(t)dt = 0$$

$$H_{n+1}(1) = \int_{-1}^{1} L_n(t)dt = \left[\frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)\right]_{-1}^{1} = 0$$

d'après la définition de $L_n(x)$ l'identité

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) H_{m+1}(x)dx = \int_{-1}^{1} L_m(x) H_{n+1}(x)dx$$

est vrai

$$\forall m > 0 \Rightarrow \int_{-1}^{-1} L_n^2(x)dx = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

et

$$\int_{-1}^{-1} L_{n-1}^2(x)dx = \frac{1}{n-\frac{1}{2}}$$

pour $n > m+1$ et $m > n+1$ l'identité est nul alors on peut écrire $H_{n+1}(x)$ sous la forme :
$H_{n+1}(x) = \alpha_n L_n(x) + \alpha_{n-1} L_{n-1}(x) + \alpha_{n+1} L_{n+1}(x)$
les coefficient $\alpha_n = 0$ puisque les polynômes $H_{n+1}(x)$, $L_{n+1}(x)$ et $L_{n-1}(x)$, d'un part et les

polynômes $L_n(x)$ d'autre part sont de parité différentes. Il reste de calcule α_{n-1} et α_{n+1}, en comparent le coefficient de x^{n+1}
$\frac{k_n}{n+1} = \alpha_{n+1}k_{n+1}$. En utilise corolaire(1.2.9)
$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2(n+1)} = \alpha_{n+1}\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} \Rightarrow 1 = \alpha_{n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)} \Rightarrow 1 = \alpha_{n+1}(2n+1) \Rightarrow$
$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$ on a $H_{n+1}(1) = 0$
$\alpha_{n-1}L_{n-1}(1) + \alpha_{n+1}L_{n+1}(1) = 0$
$\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} = -\alpha_{n-1} = \frac{1}{2n+1}$. ■

Lemme 1.2.11 *Pour tout entier $n \geq 0$, on a la formule de récurrence*

$$L^*_{n+1}(x) = \frac{k^*_{n+1}}{k^*_n}xL^*_n(x) - \frac{k^*_{n-1}k^*_{n+1}}{(k^*_n)^2}L^*_{n-1}(x) \tag{1.13}$$

Preuve. On voit que le polynôme $L^*_{n+1} - \frac{k^*_{n+1}}{k^*_n}xL^*_n$ est de degré $\leq n$ et orthogonal à tous polynôme de degré $\leq n-2$ lorsqu'il existe

$$L^*_{n+1}(x) - \frac{k^*_{n+1}}{k^*_n}xL^*_n(x) = u_nL^*_n(x) - v_nL^*_{n-1}(x)$$

le coefficient u_n est nulle puisque le polynôme L^*_n d'une part et les polynôme L^*_{n+1}, xL^*_n et L^*_{n-1} d'autre part sont de parité différentes il reste à calcule le coefficient v_n en multiple la formule(1.2)par L^*_{n-1}

$$L^*_{n+1}(x)L^*_{n-1}(x) = \frac{k^*_{n+1}}{k^*_n}xL^*_n(x)L^*_{n-1}(x) = u_nL^*_n(x)L^*_{n-1}(x) - v_n(L^*_{n-1}(x))^2$$

on intégré sur $]-1,1[$ on obtient :

$$\int_{-1}^1 L^*_{n+1}(x)L^*_{n-1}(x)dx = \frac{k^*_{n+1}}{k^*_n}\int_{-1}^1 xL^*_n(x)L^*_{n-1}(x)dx - v_n\int_{-1}^1(L^*_{n-1}(x))^2dx$$

$$0 = \frac{k^*_{n+1}}{k^*_n}\int_{-1}^1 xL^*_n(x).L^*_{n-1}(x)dx - v_n\int_{-1}^1(L^*_{n-1}(x))^2dx$$

on notant $xL^*_{n-1} = \frac{k^*_{n-1}}{k^*_n}L^*_n + \phi_{n-1}$ où ϕ_{n-1} est un polynôme de degré $\leq n-1$ et en remplaçant

$$0 = \frac{k^*_{n+1}}{(k^*_n)^2}\int_{-1}^1(L^*_n(x))^2dx - v_n\int_{-1}^1(L^*_{n-1}(x))^2dx$$

Alors on a $v_n = \dfrac{k^*_{n+1}k^*_{n-1}}{(k^*_n)^2}$ ■

Corollaire 1.2.12 *La famille $(L_n)_n$ est donné par les relations suivante :*

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \quad , \quad L_1(x) = x \\ (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \end{cases} \tag{1.14}$$

Preuve. En remplaçant chaque $L^*_n(x) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}L_n(x)$, et $k^*_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}}k_n$ dans la relation de récurrence de lemme(1.2.11)on obtient le résultat $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)\,;\, n \geq 1$ ■

Proposition 1.2.13 *L'opérateur de Sturm-Liouville est définie par :*
$A : u \to -\dfrac{d}{dx}((1-x^2)u^{'})$ *est autoadjoint positif sur* $L^2(\Lambda)$ *de domaine* $D(A)$ *où*
$D(A) = \{u \in H^1(\Lambda)\ (1-x^2)u^{''} \in L^2(\Lambda)\}$ *les* L_n *sont la base de ses vecteurs propres normalisés :*

$\exists\lambda_n \geq 0$ *tel que* $AL_n = \lambda_n L_n$ *de plus* $\lambda_n = n(n+1)$.

En général on a :
$D(A^m) = \{u \in H^m(\Lambda)\ (1-x^2)^{j-m}d^j_x u \in L^2(\Lambda),\ j = m+1, ..., 2m\}$
Preuve. voir(2) ■

Lemme 1.2.14 *Pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme $L^{'}_n(x)$ est vérifie*

$$\int_{-1}^{1} L^{'}_n(x)dx = n(n+1) = \|L_n\|^2_{H^1(\Lambda)} \tag{1.15}$$

Preuve. On utilise l'intégration par partie on obtient :

$$\int_{-1}^{1}\left(L^{'}_n(x)\right)^2 dx = \left[L^{'}_n(x)L_n(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} L^{''}_n(x)L_n(x)dx$$

Et on intègre par partie à la deuxième fois on obtient :

$$= L^{'}_n(1)L_n(1) - L^{'}_n(-1)L_n(-1) - \int_{-1}^{1} L^{''}_n(x)L_n(x)dx = L^{'}_n(1) - (-1)^n L^{'}_n(-1)$$

$\Rightarrow L^{'}_n(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $L^{'}_n(-1) = \dfrac{-n(n+1)}{2}$ lorsque n est pair et égale $L^{'}_n(-1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ lorsque n est impair ■

1.3 Formule de quadrature

Il est bien connus que les zéros et les extrémité des polynômes de Legendre servant à la construction des formules de quadrature de grande précision. C'est à dire qui seront exact sur un espace de polynôme de degré élevé , il s'agit principalement des formules de quadrature de Gauss et de Gauss-Lobatto pour approche l'intégrale sur $\Lambda =]-1, 1[$.

Proposition 1.3.1 *Soit N entier positif, il existe un unique ensemble de N points ζ_j, $1 \leq j \leq N$ et il existe un unique ensemble de N réels ω_j , $1 \leq j \leq N$ tel que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme $\Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$*

$$\int_\Lambda \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{N} \Phi(\zeta_j)\omega_j \tag{1.16}$$

Les noeuds sont les zéros ζ_j, $1 \leq j \leq N$ de L_N et les poids ω_j , $1 \leq j \leq N$ sont positifs

Preuve. Soit h_j les polynômes de Lagrange associés aux ζ_j, $1 \leq j \leq N$ c'est à dire que h_k, est l'unique polynôme de degré $N-1$ qui vaut 1 en ζ_k et 0 en les autres ζ_j, $j \neq k$. Les h_k, $1 \leq k \leq N$, forment une base de $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$. On pose

$$\omega_k = \int_\Lambda h_k(x)dx, \quad 1 \leq k \leq N. \tag{1.17}$$

Il set alors évident que la formule d'intégration

$$\int_\Lambda \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{N} \Phi(\zeta_j)\omega_j$$

est vraie pour tout les h_k, $1 \leq k \leq N$ et donc par combinaison linéaire, pour tout $\Phi \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$, soit maintenant $\Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$ par division euclidienne par L_N, Φ s'écrit $\Phi = QL_N + R$, avec $Q, R \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ comme L_N est orthogonal à $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$

$$\int_\Lambda \Phi(x)dx = \int_\Lambda Q(x)L_N(x)dx + \int_\Lambda R(x)dx = \int_\Lambda R(x)dx$$

d'où, comme $R \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$

$$\int_\Lambda \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{N} R(\zeta_j)\omega_j \tag{1.18}$$

or $\Phi(\zeta_j) = Q(\zeta_j)L_N(\zeta_j) + R(\zeta_j)$, et comme les $L_N(\zeta_j)$ sont tous nuls, $\Phi(\zeta_j) = R(\zeta_j)$, $1 \leq j \leq N$ ainsi on a obtenu(1.16)
pour montrer que les ω_j sont positifs, il suffit de remarquer que pour tout $1 \leq k \leq N$ $h_k^2 \in \mathbb{P}_{2N-2}(\Lambda)$ la formule (1.16)donne alors

$$\int_\Lambda h_k^2(x)dx = \sum_{j=1}^{N} h_k^2(\zeta_j)\omega_j = \omega_k > 0$$

■

Proposition 1.3.2 *Soit N entier positif fixe on pose $\xi_0 = -1$, $\xi_N = 1$ il existe un unique ensemble de $N+1$ points ξ_j , $1 \leq j \leq N-1$ et il existe un unique ensemble de $N+1$ réels ρ_j , $0 \leq j \leq N$ tel que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme $\Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$*

$$\int_\Lambda \Phi(x)dx = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\rho_j \tag{1.19}$$

Les noeuds sont les zéros ξ_j, $1 \leq j \leq N-1$ de $L_N^{'}$ et les poids ρ_j, $1 \leq j \leq N$ sont positifs

Preuve. Soit h_j les polynômes de Lagrange associés aux ξ_j, $0 \leq j \leq N$ c'est à dire que h_k, est l'unique polynôme de degré N qui vaut 1 en ξ_k et 0 en les autres ξ_j, $j \neq k$. Les h_k, $0 \leq k \leq N$, forment une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. On pose

$$\rho_k = \int_\Lambda h_k(x)dx,\ 0 \leq k \leq N \tag{1.20}$$

on a donc la formule d'intégration suivante pour tout $\Phi \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$:

$$\int_\Lambda \Phi(x)dx = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\rho_j$$

soit maintenant $\Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}$, par division euclidienne par $(1-x^2)L_N^{'}$, Φ s'écrit
$\Phi = Q(1-x^2)L_N^{'} + R$, avec $Q \in \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$ et $R \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$ comme $(1-x^2)L_N^{'}$ est orthogonal à $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$ ainsi on a obtenu(1.19)
pour établir que les poids ρ_j, sont positifs, il suffit comme ci-dessus, d'exhiber pour chaque $0 \leq j \leq N$ un polynôme $\Phi_j \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$ positif, qui est strictement positif en ξ_j et s'annule

en les autres ξ_k, $k \neq j$. Pour $1 \leq j \leq N-1$, on peut prendre par exemple $\Phi_j = (1-x^2)f_j^2$ où $f_j \in \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$ qui vaut 1 en ξ_j et 0 en ξ_k, $k \neq j$, $1 \leq j \leq N-1$ pour $j = N$ on peut prendre $\Phi_N(x) = (1+x)f_N^2(x)$ où $f_N \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ qui vaut 1 en $\xi_N = 1$ et 0 en ξ_k, $1 \leq k \leq N-1$. Pour $j = 0$, la construction est analogue ■

Corollaire 1.3.3 *Tout polynôme φ_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ vérifie les inégalités :*

$$\|\varphi_N\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq \sum_{j=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_j)\rho_j \leq 3\|\varphi_N\|^2_{L^2(\Lambda)} \tag{1.21}$$

Preuve. On écrit le polynôme φ_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{N} \varphi^n L_n$, de sorte que l'on a

$$\|\varphi_N\|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{n=0}^{N} (\varphi^n)^2 \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

On utilise le propriété(1.19), on a aussi

$$\sum_{j=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_j)\rho_j = \sum_{n=0}^{N} (\varphi^n)^2 \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + (\varphi^N)^2 \sum_{j=0}^{N} L_N^2(\xi_j)\rho_j$$

On applique l'égalité $\sum_{j=0}^{N} L_N^2(\xi_j)\rho_j = (2+\frac{1}{N})\|L_N\|^2_{L^2(\Lambda)}$ sur la formule précédente, on en déduit les inégalité

$$\|L_N\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq \sum_{j=0}^{N} L_N^2(\xi_j)\rho_j \leq 3\|L_N\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

■

Remarque 1.3.4 *Sur le carré Λ^2 on a des résultat analogues sur la grille $\Xi_N(\Lambda^2)$ de Gauss-Lobatto :*

$\Xi_N(\Lambda^2)$ est l'ensemble des couples $(\xi_i, \xi_j)_{i,j=1\ldots N}$. On a

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda) \qquad \int_\Lambda \int_\Lambda \Phi(x,y)dxdy = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_i, \xi_j)\rho_i\rho_j. \tag{1.22}$$

Chapitre 2

Problème de Dirichlet, Approximation et interpolation polynômiale

2.1 Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, où d est un entier positif. On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω. On considère Le problème aux limites elliptiques suivant :

$$\begin{cases} -\Delta U = F \quad \text{dans } \Omega, \\ \\ U = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

où F est dans $H^{-1}(\Omega)$ et $g \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$. L'inconnue U est cherchée dans $H^1(\Omega)$ le changement d'inconnue $u \to U-g$ et données $f \to F-\Delta g$ permet de se ramener au problème de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

En multipliant l'équation par une fonction v de classe C^1 et on intégrant par partie on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta u.vdx = \int_\Omega fvdx$$

En appliquant la formule de Green

$$\int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}.v ds = \int_{\Omega} f v dx$$

Sachant que $v \equiv 0$, $\forall x \in \partial\Omega$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

Alors on obtient la formule variationnelle

$$\begin{cases} Trouver \;\; u \in H_0^1(\Omega) \;\; tel \; que \\ \\ a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.3}$$

où la forme bilinéaire $a(u, v)$ est définie sous forme :

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v \; dx \tag{2.4}$$

et $(.,.)$ désigne le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, qui est l'extension du produit $L^2(\Omega)$.

On peut montre le problème précèdent(2.3) admet une solution unique d'après la condition de Lax-Milgram

Lemme 2.1.1 ***(Lax-Milgram)***

On suppose que la forme bilinéaire $a(.,.)$ vérifie les propriétés de continuité :

$$\forall u, v \in X, \;\; \forall \gamma < \infty, \;\; a(u_N, v_N) \leq \gamma \|u_N\|_X |v_N|_X \tag{2.5}$$

et d'ellipticité, pour une constante $\alpha > 0$:

$$\forall v \in X, a_N(v,v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \tag{2.6}$$

Alors pour toute donnée f dans X' le problème (2.3) admet une solution unique u dans X. De plus, cette solution vérifie

$$\|u\|_X \leq \alpha^{-1} \|f\|_{X'} \tag{2.7}$$

2.1.1 Approximation de Galerkin

Le principe de la méthode de Galerkin consiste à remplacer l'espace de dimension infinie $X = H_0^1(\Omega)$ par un sous-espace de dimension finie X_N. L'espace X_N est appelé espace d'approximation. où $N \geq 2$ le paramètre de discrétisation est un entier.

$$\begin{cases} \quad Trouver \;\; u_N \in X_N \;\; tel\ que \\ \\ a(u_N, v_N) = (f, v_N), \quad \forall v_N \in X_N \end{cases} \tag{2.8}$$

Dans ce qui suit, le paramètre de discrétisation est un entier positif, noté N et le symbole c désigne une constante positive pouvant varier d'une ligne à l'autre mais toujours indépendante de N.

Remarque 2.1.2 *Une question importante est celle de la régularité de la solution du problème (2.1), pour quels entier positifs k l'application $(f, g) \to u$, où u est la solution du problème (2.1) est continue de $H^{k-2}(\Omega) \times H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$.En général, ceci n'est pas vrai pour toutes les valeurs de k, car les singularités de la frontière $\partial\Omega$ donnent naissance à des singularités de la solution,même pour des conditions aux limites homogènes et une donnée f régulière :parmi de trois résultats on a :*

i)Lorsque l'ouvert Ω est convexe, la propriété est vraie pour k égal à 2

Théorème 2.1.3 ***Inégalité de Poincaré-Friedrichs***

Soit p un nombre réel, $1 \leq p \leq +\infty$. Il existe une constante $\mathcal{P}$ ne dépendant que Ω telle que v de $\mathcal{D}(\Omega)$ vérifie

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \mathcal{P} \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} |\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.9}$$

2.2 Approximation et interpolation polynômiale sur l'intervalle

2.2.1 Le projection π_N

Notation 2.2.1 *On note π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. Ceci signifie que, pour toute fonction v de $L^2(\Lambda)$, $\pi_N v$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie*

$$\forall \phi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad \int_\Lambda (v - \pi_N v)(x)\phi_N(x)dx = 0. \tag{2.10}$$

Comme les polynômes de Legendre sont deux à deux orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$, toute fonction v de l'espace $L^2(\Lambda)$ admet le développement

$$v = \sum_{n\geq 0} \alpha_n L_n \ \ , avec \ \ \alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \int_\Lambda v(x)L_n(x)dx, \text{et on a } \pi_N v = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n L_n$$

Théorème 2.2.2 *Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$, on ait*

$$\|v - \pi_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.11}$$

On commence par prouver un résultat de continuité de l'opérateur auto-adjoint positif A dans $L^2(\Lambda)$;$Av = -\dfrac{d}{dx}((1-x^2)v')$.

Lemme 2.2.3 *Pour tout entier $l \geq 0$, l'opérateur A est continu de $H^{l+2}(\Lambda)$ dans $H^l(\Lambda)$. Pour tous entiers $l \geq 0$ et $m \geq 0$, l'opérateur A^m est continu de $H^{l+2m}(\Lambda)$ dans $H^l(\Lambda)$*

Preuve. On vérifie facilement par récurrence sur k que, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\frac{d^k(Av)}{dx^k} = -(1-x^2)\frac{d^{k+2}v}{dx^{k+2}} + 2(k+1)x\frac{d^{k+1}v}{dx^{k+1}} + k(k+1)\frac{d^k v}{dx^k}$$

Lorsque $k = 0$,

$$Av = -\frac{d}{dx}((1-x^2)v^{'}) = -(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2} + 2x\frac{dv}{dx}$$

Lorsque $k = 1$,

$$\begin{aligned}\frac{d(Av)}{dx} &= -(1-x^2)\frac{d^3v}{dx^3} + 2x\frac{d^2v}{dx^2} + 2x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx} \\ &= -(1-x^2)\frac{d^3v}{dx^3} + 2(2)x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

est vraie,

$$\begin{aligned}\frac{d^k(Av)}{dx^k} &= -(1-x^2)\frac{d^{k+2}v}{dx^{k+2}} + 2x\frac{d^{k+1}v}{dx^{k+1}} + 2k\frac{d^kv}{dx^k} + 2kx\frac{d^{k+1}v}{dx^{k+1}} + k(k-1)\frac{d^kv}{dx^k} \\ &= -(1-x^2)\frac{d^{k+2}v}{dx^{k+2}} + 2(k+1)x\frac{d^{k+1}v}{dx^{k+1}} + k(k+1)\frac{d^kv}{dx^k}\end{aligned}$$

En appliquant l'identité $\forall k \geq 0$, $0 \leq k \leq l$,

$$\begin{aligned}\|\frac{d^k(Av)}{dx^k}\|_{L^2(\Lambda)} &\leq c\left(\|\frac{d^{k+2}v}{dx^{k+2}}\|_{L^2(\Lambda)} + \|\frac{d^{k+1}v}{dx^{k+1}}\|_{L^2(\Lambda)} + \|\frac{d^kv}{dx^k}\|_{L^2(\Lambda)}\right) \\ &\Rightarrow \|Av\|_{H^l(\Lambda)} \leq c(\|v\|_{H^{l+2}(\Lambda)} + \|v\|_{H^{l+1}(\Lambda)} + \|v\|_{H^l(\Lambda)})\end{aligned}$$

alors $A : H^{l+2}(\Lambda) \longrightarrow H^l(\Lambda)$ est continue.
En itérant ce résultat m fois on a l'opérateur

$$A^m : H^{l+2m}(\Lambda) \longrightarrow H^l(\Lambda)$$

est continue. ■

Preuve. de théorème(2.2.2)
étant donnée une fonction v dans $H^m(\Lambda)$ pour laquelle on écrit la décomposition :

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\int_\Lambda v(x)L_n(x)dx$$

on va distingue deux cas suivant que m est pair et impair :
i)Lorsque m est pair $m = 2k$ et $\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\int_\Lambda v(x)L_n(x)dx$ d'après l'équation différentielle

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}\frac{1}{n(n+1)}\int_\Lambda v(x)(AL_n)(x)dx$$

.Comme l'opérateur A est auto-adjoint dans $L^2(\Lambda)$ on obtient :

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \frac{1}{n(n+1)} \int_\Lambda (Av)(x) L_n(x) dx$$

. En itérant k fois ce résultat on en déduit

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_\Lambda (A^k v)(x) L_n(x) dx$$

. on voit que :

$$\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

$$\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2k}} \left(\frac{\int_\Lambda (A^k v)(x) L_n(x) dx}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \right)^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

on minore $n(n+1)$ par N^2

$$\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-4k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2k}} \left(\frac{\int_\Lambda (A^k v)(x) L_n(x) dx}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \right)^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

Comme les $\frac{\int_\Lambda (A^k v)(x) L_n(x) dx}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}$ sont les coefficients dans la base des polynômes de Legendre, alors

$$\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-4k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2k}} \left(\frac{\int_\Lambda (A^k v)(x) L_n(x) dx}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \right)^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} = N^{-4k} \|A^k v\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

.En utilisant le lemme (2.2.3)on obtient $A^k : H^{2k}(\Lambda) \to H^0(\Lambda) = L^2(\Lambda)$ alors

$$\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-4k} \|A^k v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq c N^{-4k} \|v\|_{H^{2k}(\Lambda)}$$

$$\Rightarrow \|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq c N^{-2m} \|v\|^2_{H^m(\Lambda)}$$

ii)Lorsque m est impair $m = 2k+1$: on obtient comme précédemment

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_\Lambda (A^k v)(x) L_n(x) dx$$

on utilise l'équation différentielle :

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \frac{-1}{(n(n+1))^{k+1}} \int_\Lambda (A^k v)(x) \frac{d}{dx}((1-x^2) L_n^{'})(x) dx$$

On intègre par partie on obtient :

$$\alpha_n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}} \frac{1}{(n(n+1))^{2k+1}} \int_\Lambda (A^k v)'(x) L_n'(x) dx$$

On voit alors que

$$\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2(k+1)}} \frac{(\int_\Lambda (A^k v)'(x) L_n'(x) dx)^2}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}$$

On note que, Comme $(L_n')_{n\geq 1}$ sont deux à deux orthogonaux pour la mesure $(1-x^2)dx$. pour toute fonction ψ de $H^1(\Lambda)$ admet le développement

$$\psi = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n L_n \quad \text{avec} \quad \beta_n = \frac{\int_\Lambda \psi'(x) L_n'(x)(1-x^2)dx}{\int_\Lambda (L_n')^2(x)(1-x^2)dx} \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

donc

$$\|\psi\|^2_{H^1(\Lambda)} = \int_\Lambda \psi'(x)(1-x^2)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n^2 \|L_n\|^2_{H^1(\Lambda)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\int_\Lambda \psi'(x) L_n'(x) dx)^2}{(\int_\Lambda (L_n')^2 (1-x^2)dx)^2} \int_\Lambda L_n'(x)(1-x^2)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\int_\Lambda \psi' L_n'(x)(1-x^2)dx}{n(n+1)\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}$$

En appliquant cette formule pour $\psi = Av$ est en minorant $n(n+1)$ par N^2

$$\|v - \pi_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-2(2k+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\int_\Lambda (A^k v)' L_n'(x)(1-x^2)dx)^2}{\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}}$$

$$= N^{-2(2k+1)} \|A^k v\|^2_{H^1(\Lambda)} \leq cN^{-2(2k+1)} \|v\|^2_{H^{2k+1}(\Lambda)} = cN^{-2m} \|v\|^2_{H^m(\Lambda)}$$

On utilisant le lemme précèdent on obtient :

$$A^k : H^{1+2k}(\Lambda) \to H^1(\Lambda)$$

$\leq cN^{-2(2k+1)} \|v\|_{H^{2k+1}(\Lambda)}$ tel que $2k+1 = m$, $\leq cN^{-2m} \|v\|_{H^m(\Lambda)}$ ■

Corollaire 2.2.4 *Pour tous entiers $k > 0$ et $m \geq 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de k et m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$, on ait*

$$\|v - \pi_N v\|_{H^{-k}(\Lambda)} \leq cN^{-k-m} \|v\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.12}$$

Preuve. par définition de l'espace $H^{-k}(\Lambda)$

$$\|v-\pi_N v\|_{H^{-k}(\Lambda)} = \sup_{\psi\in H_0^k(\Lambda)} \frac{\int_{-1}^{1}(v-\pi_N\varphi)(x)\psi(x)dx}{\|\psi\|_{H^k(\Lambda)}}$$

En utilisant (2.1)on voit que

$$\int_{-1}^{1}(v-\pi_N v)(x)\psi(x)dx = \int_{-1}^{1}(\varphi-\pi_N v)(x)(\psi-\pi_N\psi)(x)dx \leq \|v-\pi_N v\|_{L^2(\Lambda)}\|\psi-\pi_N\psi\|_{L^2(\Lambda)}$$

il suffit alors d'applique la majoration (2.3)du théorème (4)

$$\int_{-1}^{1}(v-\pi_N v)(x)\psi(x)dx \leq cN^{-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)}N^{-k}\|\psi\|_{H^k(\Lambda)}$$

$$\frac{\int_{-1}^{1}(v-\pi_N v)(x)\psi(x)dx}{\|\psi\|_{H^k(\Lambda)}} \leq cN^{-k-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)}$$

$$\Rightarrow \|v-\pi_N v\|_{H^{-k}(\Lambda)} \leq CN^{-k-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)}$$

si l'on essaie d'écrire une majoration d'erreur optimale de $\|v-\pi_N v\|_{H^1(\Lambda)}$ On s'aperçoit qu'elle ne peut pas être amélioré on démontre dans le cas particulier

$$\Rightarrow \|v-\pi_N v\|_{H^1(\Lambda)} \leq CN^{1/2}\|v\|_{H^1(\Lambda)}$$

on choisie $v = L_{N+1} - L_{N-1}$

$$v^{'} = L^{'}_{N+1} - L^{'}_{N-1} = (2N+1)L_N$$

$$\|v\|^2_{H^1(\Lambda)} = \|v^{'}\|^2_{L^2(\Lambda)} = 2(2N+1)$$

$$\|v\|_{H^1(\Lambda)} = \sqrt{2(2N+1)}$$

$$\pi_N v = -L_{N-1} \;\; et \;\; v-\pi_N v = L_{N+1}$$

$$\|v-\pi_N v\|^2_{H^1(\Lambda)} = (N+1)(N+2)$$

$$\|v-\pi_N v\|_{H^1(\Lambda)} = \sqrt{(N+1)(N+2)}$$

il s'agit de construire un autre opérateur pour lequel une majoration d'erreur soient vérifier dans la norme $\|.\|_{H^1(\Lambda)}$. on s'intéresse dans un premier temps à l'approximation de fonction de $H_0^1(\Lambda)$ sur l'espace $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. ■

2.2.2 Le projection $\pi_N^{1,0}$

Notation 2.2.5 *On note $\pi_N^{1,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$.pour le produit scalaire associe à la norme $|.|_{H^1(\Lambda)}$. Ceci équivaut à dire que,pour toute fonction v de $H_0^1(\Lambda)$, $\pi_N^{1,0}v$ appartient à $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ et vérifie*

$$\forall \phi_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad \int_\Lambda (v' - (\pi_N^{1,0}v)')(x)\phi_N'(x)dx = 0. \tag{2.13}$$

Théorème 2.2.6 *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$, on ait*

$$|v - \pi_N^{1,0}v|_{H^1(\Lambda)} \leq cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.14}$$

et

$$\|v - \pi_N^{1,0}v\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.15}$$

Preuve.

On commençons par établir la première majoration (2.6), elle est vérifie pour N=1, on suppose $N \geq 2$ on va établir l'identité :

$$(\pi_N^{1,0}v)' = \pi_{N-1}v' \tag{2.16}$$

pour cela on considère un polynôme quelque χ_{N-1} de $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ et en posant que

$$\psi_N(x) = \int_{-1}^{x} (\chi_{N-1}(x) - \int_{-1}^{1} \chi_{N-1}(\mu)d\mu)dx$$

on s'aperçoit comme la somme d'une constante λ et de la dérivée ψ_N' d'un polynôme dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. On a alors

$$\int_{-1}^{1}(v' - (\pi_N^{1,0}v)')(x)\chi_{N-1}(x)dx = \int_{-1}^{1}(v' - (\pi_N^{1,0}v)')(x)\psi'(x)dx + \lambda\int_{-1}^{1}(v' - (\pi_N^{1,0}v)')(x)dx$$

. en utilisant d'une part la définition (2.5) de l'opérateur $\pi_N^{1,0}$ et d'autre part le fait que $v - \pi_N^{1,0} v$ s'annule en ± 1, on obtient

$$\int_{-1}^{1} (v^{'} - (\pi_N^{1,0} v)^{'})(x) \chi_{N-1}(x) dx = 0$$

Comme $(\pi_N^{1,0} v)^{'}$ appartient bien à $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$, on en déduit l'identité (2.8). On a alors

$$\| v - \pi_N^{1,0} v \|_{H^1(\Lambda)} = \| v^{'} - \pi_{N-1}(v)^{'} \|_{L^2(\Lambda)}$$

et, en utilisant le (2.3) le Théorème (4)

$$\| v^{'} - (\pi_N^{1,0} v \|_{H^1(\Lambda)} \leq c(N-1)^{-(m-1)} \| v^{'} \|_{H^{m-1}}$$

$$\leq c N^{1-m} \| v \|_{H^m(\Lambda)}$$

la majoration de $\| v - \pi_N^{1,0} v \|_{L^2(\Lambda)}$ s'abstient grâce à la méthode classique de dualité d'Aubin-Nitsche, qui consiste à remarque que

$$\| v - \pi_N^{1,0} v \|_{L^2(\Lambda)} = \sup_{g \in L^2(\Lambda)} \frac{\int_{-1}^{1} (v - \pi_N^{1,0} v)(x) g(x) dx}{\| g \|_{L^2(\Lambda)}} \tag{2.17}$$

$\forall g \in L^2(\Lambda)$, on note χ l'unique solution dans $H_0^1(\Lambda)$ du problème

$$\forall \psi \in H_0^1(\Lambda), \int_{-1}^{1} \chi^{'}(x) \psi^{'}(x) dx = \int_{-1}^{1} g(x) \psi(x) dx.$$

on utilise l'intégralité de poincaré-Freidrichs, en prenant $\psi(x) = \chi(x)$

$$1/c \int_{-1}^{1} \chi^2(x) dx \leq \int_{-1}^{1} \chi^{'2} dx = \int_{-1}^{1} g(x) \chi(x) dx \leq \| g \|_{L^2} \| \chi \|_{L^2}$$

alors

$$\Rightarrow \| \chi \|_{L^2} \leq c \| g \|_{L^2}$$

puis ce prenant $\psi \in D(\Lambda)$, on voit que $-\chi^{''} = g$ en prenant $\psi = \chi^{''}$.

$$\int_{-1}^{1} \chi^{''2}(x) = - \int_{-1}^{1} g(x) \chi^{''}(x) dx$$

$$\| \chi \|_{H^2(\Lambda)}^2 \leq \| g \|_{L^2(\Lambda)} \| \chi^{''} \|_{L^2(\Lambda)} \leq \| g \|_{L^2(\Lambda)} \| \chi \|_{H^2(\Lambda)}$$

alors :

$$\|\chi\|_{H^2(\Lambda)} \leq c\|g\|_{L^2(\Lambda)} \tag{2.18}$$

L'argument clé de méthode est le calcul de

$$\int_{-1}^{1}(v - \pi_N^{1,0}(v))(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1}(v^{'} - (\pi_N^{1,0}v))(x)\chi(x)dx$$

D'après la définition de l'opérateur $\pi_N^{1,0}$ ceci implique que pour tout χ_N de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$:

$$\int_{-1}^{1}(v - \pi_N^{1,0}v)(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1}(v^{'} - (\pi_N^{1,0}v)^{'})(x)(\chi^{'} - \chi_N^{'})(x)dx$$

$$\leq \|v - \pi_N^{1,0}v\|_{H^1(\Lambda)}\|\chi^{'} - \chi_N^{'}\|_{H^1(\Lambda)}$$

on choisit $\chi_N = \pi^{1,0}\chi$ et on applique l' inégalité (2.6) avec $m = 2$

$$\leq cN^{-1}\|v - \pi_N^{1,0}v\|_{H^1(\Lambda)}\|\chi\|_{H^2(\Lambda)} \leq cN^{-1}\|v - \pi_N^{1,0}v\|_{H^1(\Lambda)}\|g\|_{L^2(\Lambda)}$$

on utilise la méthode classique de dualité d'Aubin-Nische

$$\|v - \pi_N^{1,0}v\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-1}\|v - \pi_N^{1,0}v\|_{H^1(\Lambda)} \leq cN^{-1}N^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)}$$

alors

$$\|v - \pi_N^{1,0}v\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)}$$

on peut bien entendu être intéresse par l'approximation de fonction qui ne s'annule par en± 1 soit v une telle fonction. L'espace $H^1(\Lambda)$ étant continu dans l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Lambda}$ on a en particulier

$$|v(-1)| + |v(1)| \leq \sup|v(1)| \leq c\|v\|_{H^1(\Lambda)}$$

On pose

$$\tilde{v}(x) = v(x) - v(1)\frac{1-x}{2} - v(1)\frac{1+x}{2} \tag{2.19}$$

de sorte que, d'après l'inégalité précédente, on a pour tout entier $m \geq 1$

$$\|\tilde{v}\|_{H^m(\Lambda)} \leq c\|v\|_{H^m(\Lambda)}. \tag{2.20}$$

De plus, la fonction $\tilde{v}$ appartient à $H^m(\Lambda)$, ce qui permet de donne la définition ci-dessous.
■

2.2.3 Le projection $\tilde{\pi}_N^1$

Définition 2.2.7 *On définit l'opérateur $\tilde{\pi}_N^1$ sur $H^1(\Lambda)$ la façon suivante :*

pour toute fonction v de $H^1(\Lambda)$, on pose

$$(\tilde{\pi}_N^1 v)(x) = (\pi_N^{1,0}\tilde{v})(x) + v(-1)\frac{1-x}{2} + v(1)\frac{1+x}{2} \tag{2.21}$$

où la fonction $\tilde{v}_N$ est définie :

$$\tilde{v}(x) = v(x) - v(-1)\frac{1-x}{2} - v(1)\frac{1+x}{2} \tag{2.22}$$

On constante alors l'identité :

$$v - \tilde{\pi}_N^1 v = \tilde{v} - \pi_N^{1,0}\tilde{\pi}$$

Corollaire 2.2.8 *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$ on ait*

$$|v - \tilde{\pi}_N^1 v|_{H^1(\Lambda)} + N\|v - \tilde{\pi}_N^1 v\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.23}$$

Preuve. on constate que d'après la définition :

$$\varphi - \tilde{\pi}_N^1 \varphi = \tilde{v} - \pi_N^{1,0}\tilde{v}$$

$$\begin{aligned}\|v - \tilde{\pi}_N^1 v\|_{H^1(\Lambda)} + N\|v - \tilde{\pi}_N^1 v\|_{L^2(\Lambda)} &\leq cN^{1-m}\|\tilde{v}\|_{H^m(\Lambda)} + cN^{1-m}\|\tilde{v}\|_{H^m(\Lambda)} = cN^{1-m}\|\tilde{v}\|_{H^m(\Lambda)} \\ &\leq cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)}\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.9 *Il faut noter que l'opérateur $\tilde{\pi}_N^1$ n'est pas l'opérateur de projection orthogonale dans $H^1(\Lambda)$(c'est pourquoi il est surmonté d'un symbole ˜). Toutefois s'avère important, car il possédé la propriété de conserver les valeurs aux extrémité de l'intervalle.*

2.2.4 Le projection i_N

C'est l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux points Gauss-Lobatto : pour fonction v dans $\mathbf{C}^0(\overline{\Lambda})$, $i_N v$ est l'unique polynôme de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ qui coïncide avec v aux $(N+1)$ points $\xi_0, \xi_1 ... \xi_N$.

Corollaire 2.2.10 *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$, on ait :*

$$\|v - i_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m} \|v\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.24}$$

Preuve. La démonstration de la corollaire est basé sur la majoration suivant :
pour toute v de $H_0^1(\Lambda)$, on ait

$$\|i_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c(\|v\|_{L^2(\Lambda)} + N^{-1}|v|_{H^1(\Lambda)}) \tag{2.25}$$

On note que, pour tout polynôme v_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$, $i_N v$ coïncide avec v_N. On suppose en outre que $v - v_N$ s'annule en ± 1 et en appliquant la majoration(2.25)à la fonction $v - v_N$ on obtient

$$\|i_N(v - v_N)\|_{L^2(\Lambda)} \leq c(\|v - v_N\|_{L^2(\Lambda)} + N^{-1}|v - v_N|_{H^1(\Lambda)})$$

d'où l'inégalité

$$\|v - i_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c(\|v - v_N\|_{L^2(\Lambda)} + N^{-1}|v - v_N|_{H^1(\Lambda)})$$

On choisit finalement v_N égal à $\tilde{\pi}_N v$, ce polynôme coïncide bien avec v en ± 1, on obtient

$$\|v - i_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c(\|v - \tilde{\pi}_N v\|_{L^2(\Lambda)} + N^{-1}|v - \tilde{\pi}_N v|_{H^1(\Lambda)}) \tag{2.26}$$

et on a l'inégalité suivante :

$$N\|v - \tilde{\pi}_N v\|_{L^2(\Lambda)} + |v - \tilde{\pi}_N v|_{H^1(\Lambda)}) \leq cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.27}$$

on applique l'inégalité(2.27)sur(2.26)on obtient la résultat cherchée. ■

Théorème 2.2.11 *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$, on ait :*

$$|v - i_N v|_{H^1(\Lambda)} \leq cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda)} \tag{2.28}$$

Preuve. Lorsqu'on applique le lemme 1.15 et la proposition 1.14 à la fonction $i_N v - \tilde{\pi}_N^1 v = i_N(\varphi - \tilde{\pi}_N^1\varphi)$, on obtient grâce à une inégalité triangulaire

$$|v - i_N v|_{H^1(\Lambda)} \leq c(N \int_{-1}^{1} (v - \tilde{\pi}_N^1 v)^2(x)(1 - x^2)^{-1}dx)^{\frac{1}{2}} + |v - \tilde{\pi}_N^1 v|_{H^1(\Lambda)}) \tag{2.29}$$

Le corolaire 1.9 permet de majorer immédiatement le second terme

$$|\varphi - \tilde{\pi}_N^1\varphi|_{H^1(\Lambda)} \leq cN^{i-m}\|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}. \tag{2.30}$$

Pour estime le première, On appelle de l'opérateur $\tilde{\pi}_N^1$: en particulier, on a l'identité $v - \tilde{\pi}_N^1 v = \tilde{v} - \tilde{\pi}_N^1\tilde{v}$, où la fonction v est définie en (1.11) et appartient à $H_0^1(\Lambda)$. On déduit alors le lemme 1.5 que la fonction $\tilde{v}(1 - x^2)^{-1}$ appartient à $L^2(\Lambda)$ et, la polynôme forment un sous-espace dense de $L^2(\Lambda)$, on peut écrire la décomposition

$$\tilde{v}(x) = (1 - x^2)\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{v}^{*n} L_n'(x).$$

L'équation différentielle (2.2) et la formule (1.8) permettent de vérifie facilement que

$$\tilde{\pi}_N^1\tilde{\varphi}(x) = (1 - x^2)\sum_{n=1}^{N-1} \tilde{\varphi}^{*n} L_n'(x).$$

On calcule, en utilisant une fois de plus (2.2),

$$\int_{-1}^{1} (\varphi - \tilde{\pi}_N^1\varphi)^2(x)(1 - x^2)^{-1}dx = \sum_{n=N}^{\infty} (\tilde{\varphi}^{*n})^2 \int_{-1}^{1} L_n'(x)^2(1 - x^2)dx$$

$$= \sum_{n=N}^{\infty} (\tilde{\varphi}^{*n})^2 n(n+1)\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

et, on minorant $n(n+1)$ par N^2, on en déduit

$$\int_{-1}^{1} (\varphi - \tilde{\pi}_N^1\varphi)^2(x)(1 - x^2)^{-1}dx \leq N^{-2} \sum_{n=N}^{\infty} (\tilde{\varphi}^{*n})^2 n(n+1)\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} = N^{-2}|\tilde{\varphi} - \tilde{\pi}_N^{1,0}\tilde{\varphi}|^2_{H^1(\Lambda)}$$

c'est-à-dire

$$\int_{-1}^{1}(\varphi-\tilde{\pi}_N^1\varphi)^2(x)(1-x^2)^{-1}dx \leq N^{-2}|\tilde{\varphi}-\tilde{\pi}_N^{1,0}\tilde{\varphi}|^2_{H^1(\Lambda)}$$

cette dernière inégalité, combinée avec (1.25) et (1.26), donne le résultat. ■

Corollaire 2.2.12 *Il existe une constante c positive telle que, pour toute fonction v de $H^1(\Lambda)$, on ait*

$$\|i_N v\|_{H^1(\Lambda)} \leq c\|v\|_{H^1(\Lambda)}$$

.

Preuve. Pour toute fonction v de $H^1(\Lambda)$, on ait

$$\|i_N v\|_{H^1(\Lambda)} = \|v - i_N v - v\|_{H^1(\Lambda)} \leq \|v - i_N v\|_{H^1(\Lambda)} + \|v\|_{H^1(\Lambda)}$$

d'après la définition de l'opérateur i_N et on a $v - i_N v \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$ où $v = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n L_n$, la famille $(L_n)_n$ des polynômes de Legendre on applique la relation :

$$|v - i_N v|_{H^1(\Lambda)} \leq N(\int_{-1}^{1}(v-i_N v)^2(x)(1-x^2)^{-1}dx)^{\frac{1}{2}}$$

On a

$$|v - i_N v|^2_{H^1(\Lambda)} \leq N^2\int_{-1}^{1}v^2(x)(1-x^2)^{-1}dx + N^2\int_{-1}^{1}i_N^2 v(1-x^2)^{-1}dx$$

et on a

$$|v - i_N v|^2_{H^1(\Lambda)} \leq c\int_{-1}^{1}v^2(x)(1-x^2)^{-1}dx + cN^{-1}|v|_{H^1(\Lambda)}$$

donc

$$\|i_N v\|_{H^1(\Lambda)} \leq c\|v\|_{H^1(\Lambda)}.$$

■

2.3 Approximation et interpolation polynômiales dans un carré

Dans ce qui suit, on note Ω l'ouvert $]-1,1[^2$. Le but de ce paragraphe est d'établir des majorations, de la distance dans un espace $H^k(\Omega)$ où $k=0,1$ d'une fonction de régularité connue à un certain espace de polynômes. on présente les démonstrations uniquement dans le cas $d = 2$. On désigne par (x, y) le point générique de Ω dans ce cas. Les démonstrations reposent essentiellement sur les résultats de la Section 1, utilisés sur chaque variable avec un argument de "tensorisation". Ceci signifie que l'on va faire appel à la propriété suivante, en dimension $d = 2$ par exemple,

$$\begin{aligned}L^2(\Omega) &= \{v : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega v^2(x,y)dxdy < +\infty\}\\ &= \{v : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R}; \int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1} v^2(x,y)dy)dx < +\infty\}\\ &= \{v : \Lambda \to L^2(\Lambda); \int_{-1}^{1} \|v(x,.)\|^2_{L^2(\Lambda)}dx < +\infty\}\\ &= L^2(\Lambda; L^2(\Lambda)).\end{aligned}$$

De la même façon, on voit facilement que

$$H^1(\Omega) = L^2(\Lambda; H^1(\Lambda)) \cap H^1(\Lambda; L^2(\Lambda))$$

car

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) | \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, ..., n\}$$

Mini de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u^2 dx + \sum_{i=0}^{n} \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx$$

Alors

$$H^1(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}, \ \int_\Omega v^2(x,y)dxdy < \infty, \ \int_\Omega (\frac{\partial v}{\partial x})^2 dxdy < \infty, \ \int_\Omega (\frac{\partial v}{\partial y})^2 dxdy < \infty\}$$

$H^1(\Omega) = \{v : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R},$

$$\int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1} v^2(x,y)dy)dx < \infty, \ \int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1} (\frac{\partial v}{\partial x})^2 dy)dx < \infty, \int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1} (\frac{\partial v}{\partial y})^2 dx)dy < \infty\}$$

$H^1(\Omega) = \{v : \Lambda \times \Lambda \to L^2(\Lambda),$

$$\int_{-1}^{1} \|v(x,.)\|^2_{L^2(\Lambda)}dx < \infty, \int_{-1}^{1} \|\frac{\partial v}{\partial x}(x,.)\|^2_{L^2(\Lambda)}dx < \infty, \int_{-1}^{1} \|\frac{\partial v}{\partial y}(.,y)\|^2_{L^2(\Lambda)}dy < \infty\}$$

$H^1(\Omega) = \{\upsilon : \Lambda \times \Lambda \to L^2(\Lambda),$

$$\int_{-1}^{1} \|\upsilon(x,.)\|^2_{L^2(\Lambda)} dx < \infty, \int_{-1}^{1} |\frac{\partial \upsilon}{\partial x}(x,.)|^2_{H^1(\Lambda)} dx < \infty, \int_{-1}^{1} |\frac{\partial \upsilon}{\partial y}(.,y)|^2_{H^1(\Lambda)} dy < \infty\}$$

Alors

$$H^1(\Omega) = H^1(\Lambda; L^2(\Lambda)) \cap L^2(\Lambda; H^1(\Lambda))$$

On donne une version générale du résultat énoncé ci-dessus, qui sera de grande importance dans ce qui suit.

Lemme 2.3.1 *Pour tout entier $m \geq 0$ et pour tout entier r, $0 \leq r \leq m$, l'espace $H^m(\Omega)$ est inclus avec injection continue dans l'espace $H^r(\Lambda; H^{m-r}(\Lambda^{d-1}))$.*

Preuve. c'est une conséquence immédiate de l'inégalité

$$\|\upsilon\|^2_{H^r(\Lambda; H^{m-r}(\Lambda))} = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{r} \|(\frac{\partial^k \upsilon}{\partial x^k})(x,.)\|^2_{H^{m-r}(\Lambda)} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{r} (\int_{-1}^{1} \sum_{\ell=0}^{m-r} (\frac{\partial^{k+\ell} \upsilon}{\partial x^k \partial y^\ell})^2 (x,y) dy) dx$$

$$\leq \int_{\Omega} \sum_{k+\ell=0}^{m} (\frac{\partial^{k+\ell} \upsilon}{\partial x^k \partial y^\ell})^2 (x,y) dx dy = \|\upsilon\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

■

Lemme 2.3.2 *Pour tout entier $m \geq 0$, on a l'égalité*

$$H^m(\Omega) = L^2(\Lambda; H^m(\Lambda^{d-1})) \cap H^1(\Lambda; L^2(\Lambda^{d-1})). \tag{2.31}$$

Preuve.
le même démonstration plus haut généraliser de

$$H^1(\Omega) = L^2(\Lambda; H^1(\Lambda)) \cap H^1(\Lambda; L^2(\Lambda)).$$

On a

$$H^m(\Omega) = \{\upsilon | \upsilon \in L^2(\Omega),\ D^\alpha \upsilon \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m\}$$

ou $D^\alpha \upsilon = \dfrac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_d}\upsilon}{\partial x_1^{\alpha_1}+...+\partial x_1^{\alpha_d}}$

$$H^m(\Omega) = \{\upsilon : \Lambda\times\Lambda^{d-1} \to \mathbb{R}, \quad \int_{-1}^{1}(\int_{\Lambda^{d-1}}(D^\alpha\upsilon)^2(x_1,...,x_d)dx_1...dx_{d-1})dx_d < +\infty, \quad |\alpha| \le m\}$$

$$H^m(\Omega) = \{\upsilon : \Lambda \to L^2(\Lambda^{d-1}), \quad \int_{-1}^{1}\|D^\alpha\upsilon\|^2_{L^2(\Lambda^{d-1})}dx_d < +\infty, \qquad |\alpha| \le m\}$$

$$H^m(\Omega) = \{\upsilon : \Lambda \to L^2(\Lambda^{d-1}), \quad \int_{-1}^{1}\|\upsilon\|^2_{H^m(\Lambda^{d-1})}dx_d < +\infty\}$$

alors

$$H^m(\Omega) = L^2(\Lambda; H^m(\Lambda^{d-1})) \cap H^m(\Lambda; L^2(\Lambda^{d-1})).$$

■

2.3.1 Le projection Π_N

Notation 2.3.3 *On note Π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$.*

Dans ce qui suit, en dimension $d = 2$, le symbole $^{(x)}$ ou $^{(y)}$ après un opérateur monodimensionnel indiquera que l'on fait agir cet opérateur sur le variable x ou y respectivement. Étant donnée une fonction w de $L^2(\Lambda^2)$, on par exemple pour presque tout y dans Λ :

$$\int_\Lambda (w(x,y) - \pi_N^{(x)}w(x,y))L_n(x)dx = 0, \quad 0 \le n \le N$$

On applique cette formule avec w remplacé par $\pi_N^{(y)}w$ et on en déduit, pour $0 \le m \le N$ et $0 \le n \le N$

$$\int_{\Lambda^2}(w(x,y) - \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}w(x,y))L_m(x)L_n(y)dxdy = 0, \quad 0 \le n \le N$$

$$= \int_\Lambda L_n(y)(\int_\Lambda(w(x,y) - \pi_N^{(x)}\circ\pi_N^{(y)}w(x,y))L_m(x)dx)dy = \int_\Lambda L_n(y)(\int_\Lambda(w(x,y)\pi_N^{(y)}w(x,y))L_m(x)dx)dy$$

$$= \int_\Lambda L_m(x)(\int_\Lambda (w(x,y)\pi_N^{(y)} w(x,y))L_n(y)dy)dx = 0 \tag{2.32}$$

Comme $\pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ et que les $L_m(x)L_n(y)$, $0 \leq m, n \leq N$, forment une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ on obtient l'identité :

$$\Pi_N = \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}$$

On peut facilement vérifier que les opérateurs $\Pi_N = \pi_N^{(x)}$ et $\pi_N^{(y)}$ commutent.

Théorème 2.3.4 *Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction w de $H^m(\Lambda^2)$, on ait :*

$$\|w - \Pi_N w\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq cN^{-m}\|w\|_{H^m(\Lambda^2)} \tag{2.33}$$

Preuve. on a

$$\|w - \Pi_N w\|_{L^2(\Omega)} = \|w - \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)} w\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}$$
$$\leq \|w - \pi_N^{(x)} w\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|\pi_N^{(x)}(w - \pi_N^{(y)} w)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}.$$

Pour majorer le premier terme, on applique le Théorème (2.2.2) par rapporte à la variable x :

$$\|w - \pi_N^{(x)} w\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} \leq cN^{-m}\|w\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))}.$$

Pour majorer le second terme, on utilise la continuité de l'opérateur π_N de l'espace $L^2(\Lambda)$ dans lui-même, puis on applique le Théorème (2.2.2) par rapport à la variable y :

$$\|\pi_N^{(x)}(w - \pi_N^{(y)} w)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} \leq \|w - \pi_N^{(y)} w\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} \leq cN^{-m}\|w\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}.$$

On conclut en regroupant ces deux estimations et en utilisant le Lemme (2.3.1) pour $r = m$ et pour $r = 0$. Comme précédemment, on s'intéresse à l'approximation de fonction de $H_0^1(\Omega)$ par des polynômes de l'espace $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$. ■

2.3.2 Le projection $\Pi_N^{1,0}$

Notation 2.3.5 *On note $\Pi_N^{1,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$ pour le produit scalaire associé à la norme $|.|_{H^1(\Omega)}$.*

Les propriétés d'approximation de l'opérateur $\Pi_N^{1,0}$ vont être étudiées en deux temps.

Théorème 2.3.6 *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction w de $H^m(\Lambda^2) \cap H_0^1(\Lambda^2)$ on ait :*

$$\|w - \Pi_N^{1,0} w\|_{H^1(\Lambda^2)} \leq cN^{1-m} \|w\|_{H^m(\Lambda^2)} \tag{2.34}$$

Preuve. Le résultat étant évident pour $m = 1$, on peut supposer la fonction w dans $H^m(\Lambda^2) \cap H_0^1(\Lambda^2)$, $m \geq 2$. On a

$$|w - \Pi_N^{1,0} w|_{H^1(\Lambda^2)} = \inf_{w_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)} |w - w_N|_{H^m(\Lambda^2)},$$

il suffit donc de trouve un polynôme w_N de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ tel que

$$|w - w_N|_{H^m(\Lambda^2)} \leq cN^{1-m} \|w\|_{H^m(\Lambda^2)}. \tag{2.35}$$

D'après le Lemme(2.3.1), la fonction w appartient à $H^1(\Lambda; H^1(\Lambda))$ et même, puisqu'elle s'annule sur $\partial\Omega$, à $H_0^1(\Lambda; H_0^1(\Lambda))$. On choisit alors $w_N = \pi_N^{1,0(x)} \circ \pi_N^{1,0(y)} w$, qui appartient bien sur à $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$. Comme on a

$$|w - w_N|^2_{H^1(\Lambda^2)} = \|(\frac{\partial}{\partial x})(w - w_N)\|^2_{L^2(\Lambda^2)} + \|(\frac{\partial}{\partial y})(w - w_N)\|^2_{L^2(\Lambda^2)},$$

et puisque la définition de w_N est symétrique en x et en y, il suffit de majorer par exemple $\|(\frac{\partial}{\partial x})(w - w_N)\|_{L^2(\Omega)}$. On fait appel pour cela à l'inégalité triangulaire

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})(w - w_N)\|_{L^2(\Lambda^2)}$$

$$\leq \|(\frac{\partial}{\partial x})(w - \pi_N^{1,0(x)} w)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|(\frac{\partial}{\partial x})\pi_N^{1,0(x)}(w - \pi_N^{1,0(y)} w)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}$$

On utilise alors la majoration (2.14) par rapport à la variable x dans le premier terme, et la continuité de l'opérateur $\pi_N^{1,0}$ de $H_0^1(\Lambda)$ dans lui-même dans le second terme. On obtient

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})(w - w_N)\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq cN^{1-m} \|w\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|(\frac{\partial}{\partial x})(w - \pi_N^{1,0(y)} w)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}.$$

Comme l'opérateur $\pi_N^{1,0(y)}$ commute avec la dérivation en x, ceci s'écrit

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})(w - w_N)\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq cN^{1-m} \|w\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|\frac{\partial w}{\partial x} - \pi_N^{1,0(y)} \frac{\partial w}{\partial x}\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))},$$

et on utilise la majoration (2.15) par rapport à la variable y

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})(w - w_N)\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq cN^{1-m}\|w\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + cN^{1-m}\|\frac{\partial w}{\partial x}\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}$$

alors la conclusion

$$\|(\frac{\partial}{\partial x})(w - w_N)\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq cN^{1-m}\|w\|_{H^m(\Lambda^2)}.$$

■

Théorème 2.3.7 *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction w de $H^m(\Lambda^2) \cap H_0^1(\Lambda^2)$ on ait :*

$$\|w - \Pi_N^{1,0} w\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq cN^{-m}\|w\|_{H^m(\Lambda^2)} \tag{2.36}$$

Preuve. Là encore, on utilise la méthode de dualité d'Aubin-Nitsche, grâce à l'égalité :

$$\|w - \Pi_N^{1,0} w\|_{L^2(\Lambda^2)} = \sup_{g \in L^2(\Lambda^2)} \frac{\int_{\Lambda^2}(w - \Pi_N^{1,0} w)(x)g(x)}{\|g\|_{L^2(\Lambda^2)}}. \tag{2.37}$$

Pour toute fonction g de $L^2(\Lambda^2)$, on considère la solution u dans $H_0^1(\Lambda^2)$ du problème

$$\forall w \in H_0^1(\Lambda^2), \int_{\Lambda^2}(gradu)(x).(gradw)(x)dx = \int_{\Lambda^2} g(x)w(x)dx$$

Puisque Λ^2 est un ouvert convexe, on peut démontrer que la fonction u appartient en fait à $H^2(\Lambda^2)$ et vérifie

$$\|u\|_{H^2(\Lambda^2)} \leq c\|g\|_{L^2(\Lambda^2)}. \tag{2.38}$$

Grâce à la définition de l'opérateur $\Pi_N^{1,0}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda^2}(w - \Pi_N^{1,0} w)(x)g(x)dx &= \int_{\Lambda^2}(grad(w - \Pi_N^{1,0} w))(x).(gradu)(x)dx \\
&= \int_{\Lambda^2}(grad(w - \Pi_N^{1,0} w))(x).(grad(u - \Pi_N^{1,0} u))(x)dx \\
&\leq |w - \Pi_N^{1,0} w|_{H^1(\Lambda^2)}|u - \Pi_N^{1,0} u|_{H^1(\Lambda^2)}.
\end{aligned}$$

On utilise

$$\int_{\Lambda^2}(w - \Pi_N^{1,0} w)(x)g(x)dx \leq cN^{-1}|w - \Pi_N^{1,0} w|_{H^1(\Lambda^2)}\|g\|_{L^2(\Lambda^2)}.$$

La formule (2.37) et le Théorème(2.3.6) permettent alors de conclure. ■

2.3.3 Le projection $\mathcal{I}_N$

C'est le projection de Lagrange aux points de Gauss-Lobatto sur le carré : pour un w dans $\mathbf{C}^0(\overline{\Lambda^2})$, $\mathcal{I}_N w$ est l'unique polynôme de $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ qui coïncide avec w aux $(N+1)^2$ points (ξ_i, ξ_j) pour tout couple (i, j) dans $0, 1, ..., N^2$. On peut dire, de façon équivalente, $\mathcal{I}_N = i_N^{(y)} \circ i_N^{(x)}$.

Théorème 2.3.8 *Pour tout entier $m \geq 2$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction w de $H^m(\Lambda^2)$, on a :*

$$\|w - \mathcal{I}_N w\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq cN^{-m} \|w\|_{H^m(\Lambda^2)} \tag{2.39}$$

Preuve. On a

$$w - \mathcal{I}_N w = (w - i_N^{(x)} w) + (i_N^{(y)} w - w) + (w + i_N^{(x)} w - i_N^{(y)} w - \mathcal{I}_N w)$$

$$= (w - i_N^{(x)} w) + (i_N^{(y)} w - w) + (id + i_N^{(x)}) \circ (id - i_N^{(y)}) w$$

$$\|w - \mathcal{I}_N w\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq \|w - i_N^{(x)} w\|_{L^2(\Lambda; L^2(\Lambda)} + \|i_N^{(y)} w - w\|_{L^2(\Lambda; L^2(\Lambda)} + \|(id + i_N^{(x)}) \circ (id - i_N^{(y)}) w\|_{L^2(\Lambda; L^2(\Lambda)}$$

On applique le corollaire(2.2.10)par rapport à la variable x dans le premier et le troisième termes, puis par rapport à la variable y dans le second et le troisième termes on obtient :

$$\|w - \mathcal{I}_N w\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq cN^{-m} \|w\|_{H^m(\Lambda; L^2(\Lambda))} + cN^{-m} \|w\|_{H^m(\Lambda; L^2(\Lambda))} + cN^{-m} \|w\|_{H^1(\Lambda; H^{m-1}(\Lambda))}$$

Grâce au lemme (2.3.1) on déduit la majoration cherché. ■

Pour l'opérateur d'interpolation $\mathcal{I}_N$, on a également une estimation d'erreur dans l'espace $H^1(\Lambda^2)$

Théorème 2.3.9 *Pour tout entier $m \geq d$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction w de $H^m(\Lambda^2)$, on a :*

$$\|w - \mathcal{I}_N w\|_{H^1(\Lambda^2)} \leq cN^{1-m} \|w\|_{H^m(\Lambda^2)} \tag{2.40}$$

Preuve. On remarque d'abord que, puisque la définition de l'opérateur $\mathcal{I}_N$ est symétrique par rapport aux variables x et y, il suffit de majorer par exemple la quantité $\|\frac{\partial}{\partial x}(w - \mathcal{I}_N w)\|_{L^2(\Lambda^2)}$. On écrit d'abord l'inégalité triangulaire

$$\|\frac{\partial}{\partial x}(w - \mathcal{I}_N w)\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq \|\frac{\partial}{\partial x}(w - i_N^{(x)} w)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|\frac{\partial}{\partial x} i_N^{(x)}(w - i_N^{(y)} w)\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))} \quad (2.41)$$

On applique le Théorème(2.28)et le Corollaire(2.2.12) aux deux termes du membre de droite de (2.41) et on utilise le fait que l'opérateur i_N^y commute avec la dérivation par rapport à x. ce qui donne

$$\|\frac{\partial}{\partial x}(w - \mathcal{I}_N w)\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq c(N^{1-m}\|w\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + \|(id - i_N^{(y)})\frac{\partial w}{\partial x})\|_{L^2(\Lambda;L^2(\Lambda))}). \quad (2.42)$$

puis on applique le Corollaire (2.24) sur (2.42), on obtient

$$\|\frac{\partial}{\partial x}(w - \mathcal{I}_N w)\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq c(N^{1-m}\|w\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + N^{1-m}\|\frac{\partial w}{\partial x}\|_{L^2(\Lambda;H^{m-1}(\Lambda))})$$

$$\|\frac{\partial}{\partial x}(w - \mathcal{I}_N w)\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq c(N^{1-m}\|w\|_{H^m(\Lambda;L^2(\Lambda))} + N^{1-m}\|w\|_{H^1(\Lambda;H^{m-1}(\Lambda))}) \quad (2.43)$$

on utilise lemme (2.3.1)sur le deuxième terme de droit

$$\|\frac{\partial w}{\partial x}\|_{L^2(\Lambda;H^{m-1}(\Lambda))} \leq \|w\|_{H^m(\Lambda^2)} \quad (2.44)$$

On remplace (2.44) dans (2.43)on obtient le résultat cherché. ■

Chapitre 3

Méthode spectrale pour le problème de Dirichlet

On s'intéresse à l'étude de la discrétisation spectrale des équations de Laplace munies de conditions aux limites de Dirichlet homogène (2.2) sur le carré Λ^2,on écrit le problème discret et on prouve qu'il admet une solution unique. puis on établit des estimations a priori entre la solution des problèmes exact et discret. Dans un dernière temps, on présente les outils nécessaires à l'implémentation de la méthode de discrétisation. On introduit donc une approximation du produit scalaire de $L^2(\Lambda^2)$:

$$(u,v)_N = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u(\xi_i,\xi_j)v(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j \tag{3.1}$$

3.1 Problème discret

On définie l'espace d'approximation comme suit :

$$X_N = \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2), \text{ où } \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2) = \left\{v \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2), v = 0 \;\; sur \;\; \partial\Lambda^2\right\}. \tag{3.2}$$

Avec un tel choix, X_N est bien contenu dans $H_0^1(\Lambda^2)$.

Donc on remplace l'intégration mathématique par une intégration numérique basée sur

$(N+1)^2$ points ;le produit scalaire (f,v) est remplacé par le produit scalaire :

$$(f,v)_N = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} f(\xi_i,\xi_j)v(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j \tag{3.3}$$

est la forme bilinéaire $a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)$ est remplacée par la forme bilinéaire

$$a_N(u_N, v_N) = (\nabla u_N, \nabla v_N)_N \tag{3.4}$$

Alors on obtient le problème discret :

$$\begin{cases} Trouver\ \ u_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)\ \ tel\ que \\ a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N, \quad \forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2) \end{cases} \tag{3.5}$$

3.1.1 Existence et unicité

L'analyse numérique de ce problème repose sur les propriétés de la forme bilinéaire $a_N(.,.)$, énoncées dans le proposition suivant

Proposition 3.1.1 *La forme $a_N(.,.)$ satisfait les propriétés de continuité :*

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N(\Omega), \forall v_N \in \mathbb{P}_N(\Omega), a_N(u_N, v_N) \leq 3^{d-1}|u_N|_{H^1(\Omega)}|v_N|_{H^1(\Omega)} \tag{3.6}$$

et d'ellipticité :

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N(\Omega), a_N(v_N, v_N) \geq |v_N|^2_{H^1(\Omega)} \tag{3.7}$$

Alors le problème (3.5) admet une solution unique u_N dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$.

Preuve.
Là encore on effectue la démonstration en dimension $d = 2$ pour simplifier les notations. En utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz dans la définition (3.1) on voit que

$$(u,v)_N \leq \left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u^2(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} v^2(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

donc que

$$(u,v)_N \leq (u,v)_N^{\frac{1}{2}}(u,v)_N^{\frac{1}{2}}$$

On est donc ramène à prouver que

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N(\Omega), |u_N|^2_{H^1(\Omega)} \leq a_N(u_N, v_N) \leq 3^{d-1}|u_N|_{H^1(\Omega)}|v_N|_{H^1(\Omega)} \tag{3.8}$$

pour tout u_N dans $\mathbb{P}_N(\Omega)$, on a

$$a_N(u_N,u_N) = (\nabla u_N, \nabla u_N)_N = \int_\Lambda\int_\Lambda |\nabla u_N|^2 dxdy = \int_\Lambda\int_\Lambda (\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_N}{\partial y^2})dxdy$$

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_N}{\partial y^2}\right)(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{\partial u_N}{\partial x}\right)^2(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{\partial u_N}{\partial y}\right)^2(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j$$

On remarque alors que $\frac{\partial u_N}{\partial x}$ est un polynôme de degré $\leq N-1$ par rapport à x, de sorte que la propriété d'exactitude permet de remplacer la formule de quadrature appliquée raisonnement symétrique pour $(\frac{\partial u_N}{\partial x})^2$ par l'intégrale (mais uniquement par rapport à la variable x). En tenant un raisonnement symétrique pour $\frac{\partial u_N}{\partial y}$, on obtient

$$a_N(u_N,u_N) = \sum_{j=0}^{N}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial u_N}{\partial x}\right)^2(x,\xi_j)\rho_j dx + \sum_{i=0}^{N}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial u_N}{\partial y}\right)^2(\xi_i,y)\rho_i dy \tag{3.9}$$

On applique le corollaire(1.3.3)par rapport à la variable y dans le premier terme et par rapport à la variable x dans le second, et on obtient les inégalité(3.8). On en déduit immédiatement que le problème (3.5) est bien posé. ■

Théorème 3.1.2 *Pour toute fonction f continue sur $\overline{\Lambda^2}$, le problème (3.5)admet une solution unique. De plus, cette solution vérifie*

$$\|u_N\|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c\|\mathcal{I}_N f\|_{L^2(\Lambda^2)} \tag{3.10}$$

Preuve. Comme $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ est inclus dans $H_0^1(\Lambda^2)$, la continuité et l'ellipticité sur $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ de la forme $a_N(.,.)$ résultent de la proposition précédente, combinée avec l'inégalité de Poincaré-Friedrichs. Comme l'espace $\mathbb{P}_N^0((\Lambda^2))$ est de dimension finie, la forme linéaire :$v_N \to (f,v_N)_N$ est nécessairement continue sur $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ donc d'après Lax-Milgram dit alors que le problème (3.5)admet une solution unique. Pour obtenir l'inégalité de stabilité (3.10), on choisit v_N égal à u_N dans l'énoncé du problème(3.5) on utilise les propriétés de l'opérateur $\mathcal{I}_N$:

$$|u_N|^2_{H^1(\Lambda^2)} \leq a_N(u_N, u_N) = (f, u_N)_N = (\mathcal{I}_N f, u_N)_N$$

Puis on applique le corollaire(1.3.3)par rapport à chaque variable x et y, ce qui donne :

$$|u_N|^2_{H^1(\Lambda^2)} \leq (u_N, u_N)_N^{\frac{1}{2}}(\mathcal{I}_N f, \mathcal{I}_N f)_N^{\frac{1}{2}} \leq 3^2\|\mathcal{I}_N f\|_{L^2(\Lambda^2)}\|u_N\|_{L^2(\Lambda^2)}$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on en déduit l'inégalité désirée. ∎

3.1.2 Estimation d'erreur

Théorème 3.1.3 *On suppose la solution u du problème(2.3) dans H^m pour un entier $m \geq 1$ et la donnée f dans $H^r(\Lambda^2)$ pour un entier $r \geq 2$. Alors, pour le problème discret(3.5), on a la majoration d'erreur*

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c(N^{1-m}\|u\|_{H^m(\Lambda^2)} + N^{-r}\|f\|_{H^r(\Lambda^2)}) \tag{3.11}$$

Preuve. On va étudier l'erreur entre les solutions des problèmes(2.3)et (3.5).Pour cela, la discrétisation étant conforme, on utilise la majoration qui s'écrit :

$$\|u-u_N\|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c(\inf_{v_N\in\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)}(\|u-v_N\|_{H^1(\Lambda^2)}+\sup_{w_N\in\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)}\frac{(a-a_N)(v_N,w_N)}{\|w_N\|_{H^1(\Lambda^2)}}+\sup_{w_N\in\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)}\frac{(f,w_N)-(f,w_N)_N}{\|w_N\|_{H^1(\Lambda^2)}}) \tag{3.12}$$

L'idée pour majorer les deux premier termes consiste approcher u dans $\mathbb{P}^0_{N-1}(\Lambda^2)$. En effet, on constate aisément que

$$\inf_{v_N\in\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)}\|u - v_N\|_{H^1(\Lambda^2)} \leq \inf_{v_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}^0(\Lambda^2)}\|u - v_{N-1}\|_{H^1(\Lambda^2)}, \tag{3.13}$$

et en outre, pour tout $v_N \in \mathbb{P}^0_{N-1}(\Lambda^2)$ et tout $w_N \in \mathbb{P}^0_N(\Lambda^2)$, le polynôme $\nabla v_N \nabla w_N$ est dans $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda^2)$, donc $a(v_N, w_N) - a_N(v_N, w_N) = 0$

$$\forall w_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2), \ \ (a - a_N)(v_{N-1}, w_N) = 0. \tag{3.14}$$

Pour majorer le dernier terme, on déduit de la propriété d'exactitude de la formule de quadrature que, pour tout f_{N-1} dans $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda^2)$,

$$(f,w_N)-(f,w_N)_N=\int_\Lambda f(x)w_N(x)dx-(f,w_N)_N=\int_\Lambda (f-f_{N-1})(x)w_N(x)dx-(f-f_{N-1},w_N)_N$$

Par définition de l'opérateur d'interpolation $\mathcal{I}_N$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$(f,w_N)-(f,w_N)_N \leq (\|f-f_{N-1}\|_{L^2(\Lambda^2)}+3^2\|\mathcal{I}_N-f_{N-1}\|_{L^2(\Lambda^2)})\|w_N\|_{L^2(\Lambda^2)}$$

on obtient donc la majoration

$$\sup_{w_N\in\mathbb{P}_N(\Lambda^2)} \frac{(f,w_N)-(f,w_N)_N}{\|w_N\|_{H^1(\Lambda^2)}}) \leq c(\|f-\mathcal{I}_N f\|_{L^2(\Lambda^2)}+\inf_{f_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda^2)}\|f-f_{N-1}\|_{L^2(\Lambda^2)}). \tag{3.15}$$

En insérant (3.13),(3.14)et(3.15)dans(3.12)on obtient l'estimation

$$\|u-u_N\|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c(\inf_{v_{N-1}\in\mathbb{P}^0_{N-1}(\Lambda^2)}\|u-v_{N-1}\|_{H^1(\Lambda^2)}+\|f-\mathcal{I}_N f\|_{L^2(\Lambda^2)}+\inf_{f_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda^2)}\|f-f_{N-1}\|_{L^2(\Lambda^2)}). \tag{3.16}$$

L'erreur entre les solutions exacte et discrète est donc bornée par la somme d'une erreur d'approximation sur la solution, d'une erreur d'approximation et d'interpolation sur la donnée.

Dans le dernière inégalité, on choisit v_{N-1} égal à $\Pi^{1,0}_{N-1}u$ et f_{N-1} égal à $\Pi_{N-1}f$ on obtient :

$$\|u-u_N\|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c(\|u-\Pi^{1,0}_{N-1}u\|_{H^1(\Lambda^2)}+\|f-\mathcal{I}_N f\|_{L^2(\Lambda^2)}+\|f-\Pi_{N-1}f\|_{L^2(\Lambda^2)}). \tag{3.17}$$

Finalement,

$$\|u-u_N\|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c(N^{1-m}\|u\|_{H^m(\Lambda^2)}+N^{-r}\|f\|_{H^r(\Lambda^2)}). \tag{3.18}$$

■

Théorème 3.1.4 *Sous les hypothèses du théorème précèdent, pour le problème discret(3.5)on a la majoration d'erreur*

$$\|u-u_N\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq c(N^{-m}\|u\|_{H^m(\Lambda^2)}+N^{-r}\|f\|_{H^r(\Lambda^2)}) \tag{3.19}$$

Preuve. On a

$$\|u-u_N\|_{L^2(\Lambda^2)} = \sup_{t\in L^2(\Lambda^2)} \frac{\int_{\Lambda^2}(u-u_N)(x,y)t(x,y)dxdy}{\|t\|_{L^2(\Lambda^2)}}. \tag{3.20}$$

Pour toute fonction t dans $L^2(\Lambda^2)$, on résout le problème :

$$\begin{cases} \quad Trouver\ \ w\ dans\ H_0^1(\Lambda^2)\ \ tel\ que \\ \forall v\in H_0^1(\Lambda^2), \quad a(w,v) = \int_{\Lambda^2} t(x,y)v(x,y)dxdy \end{cases} \tag{3.21}$$

et on rappelle voir remarque(2.1.2)que,l'ouvert Λ^2 étant convexe, la solution w appartient à $H^2(\Lambda^2)$ et vérifie :

$$\|w\|_{H^2(\Lambda^2)} \le c\|t\|_{L^2(\Lambda^2)} \tag{3.22}$$

On voit que

$$\int_{\Lambda^2}(u-u_N)(x,y)t(x,y)dxdy = a(u-u_N,w) \tag{3.23}$$

On utilise la formule(3.14), on obtient pour tout polynôme w_{N-1} de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$

$$\int_{\Lambda^2}(u-u_N)(x,y)t(x,y)dxdy = a(u-u_N,w) + (a-a_N)(u-u_N,w_{N-1})$$

$$= a(u-u_N,w) + a(u-u_N,w_{N-1}) - a_N(u-u_N,w_{N-1})$$

$$= a(u-u_N,w) + a(u,w_{N-1}) - a(u_N,w_{N-1}) - a_N(u,w_{N-1}) + a_N(u_N,w_{N-1})$$

$$= a(u-u_N,w) + (f,w_{N-1}) - (f,w_{N-1})_N + (a_N-a)(u_N,w_{N-1})$$

$$= a(u-u_N,w) + \int_{\Lambda^2} f(x,y)w_{N-1}(x,y)dxdy - (f,w_{N-1})_N$$

d'après utilise la formule(3.14)et la propriété de Cauchy-Schwarz on en déduit immédiatement que

$$\int_{\Lambda^2}(u-u_N)(x,y)t(x,y)dxdy \le c(|u-u_N|_{H^1(\Lambda^2)}|w-w_{N-1}|_{H^1(\Lambda^2)} + \|f-\mathcal{I}_N f\|_{L^2(\Lambda^2)}|w_{N-1}|_{H^1(\Lambda^2)}).$$

On choisit alors w_{N-1} égal à $\Pi_{N-1}^{1,0}w$ et on utilise le propriété d'erreur de $\Pi_{N-1}^{1,0}$ et de $\mathcal{I}_N$ on obtient

$$\int_{\Lambda^2}(u-u_N)(x,y)t(x,y)dxdy \le c(|u-u_N|_{H^1(\Lambda^2)}|w-\Pi_{N-1}^{1,0}w|_{H^1(\Lambda^2)} + \|f-\mathcal{I}_N f\|_{L^2(\Lambda^2)}|\Pi_{N-1}^{1,0}w|_{H^1(\Lambda^2)})$$

$$\Rightarrow \int_{\Lambda^2} (u-u_N)(x,y)t(x,y)dxdy \le c(N^{-1}|u-u_N|_{H^1(\Lambda^2)}\|w\|_{H^2(\Lambda^2)} + N^{-r}\|f\|_{H^r(\Lambda^2)}|w|_{H^1(\Lambda^2)})$$

on combinent cette dernière estimation avec (3.20)et(3.22)et on utilisant le théorème président

$$\frac{\int_{\Lambda^2}(u-u_N)(x,y)t(x,y)dxdy}{\|t\|_{L^2(\Lambda^2)}} \le c(N^{-1}|u-u_N|_{H^1(\Lambda^2)}\frac{\|w\|_{H^2(\Lambda^2)}}{\|t\|_{L^2(\Lambda^2)}} + N^{-r}\|f\|_{H^r(\Lambda^2)}\frac{|w|_{H^1(\Lambda^2)}}{\|t\|_{L^2(\Lambda^2)}})$$

alors on a

$$\|u-u_N\|_{L^2(\Lambda^2)} \le c(N^{-m}\|u\|_{H^m(\Lambda^2)} + N^{-r}\|f\|_{H^r(\Lambda^2)}).$$

■

Régularité de la solution
On démontre le problème (2.2), on considère une fonction v satisfaisant à : $v \in C^2(\Lambda)$

Remarque 3.1.5 *On peut donner une autre interpolation du problème (3.5)comme suit.*

3.1.3 Description de l'implémentation

En dimension $d = 2$ par exemple, on obtient par les mêmes arguments que la formule (3.9). Montrons d'abord que, pour tout u_N,$v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$, on a :

$$a_N(u_N, v_N) = -\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \Delta u_N(\xi_i,\xi_j)v_N(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j \tag{3.24}$$

Autrement dit, il s'agit de voir que l'intégration par parties "discrète"fonctionne dans ce cas. Pour cela, on remarque que, si u_N et v_N appartiennent à $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$, donc le produit u_Nv_N dans $\mathbb{P}_{2N}(\Lambda^2)$,leur dérivées partielles premières par rapport à une des variables sont de degré $\le 2N-1$ par rapport à cette variable, de sorte que qu'en utilisant la propriété d'exactitude de Gauss-Lobatto, on peut écrire

$$a_N(u_N, v_N) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{\partial u_N}{\partial x}\frac{\partial v_N}{\partial x} + \frac{\partial u_N}{\partial y}\frac{\partial v_N}{\partial y}\right)(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j$$

$$= \sum_{j=0}^{N}\int_{\Lambda}\left(\frac{\partial u_N}{\partial x}\frac{\partial v_N}{\partial x}\right)(x,\xi_j)dx\rho_j + \sum_{i=0}^{N}\int_{\Lambda}\left(\frac{\partial u_N}{\partial y}\frac{\partial v_N}{\partial y}\right)(\xi_i,y)dy\rho_i$$

Soit maintenant u_N,$v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$, on intègre par parties l'expression ci-dessus, puis on retourne à l'intégration discrète :

$$a_N(u_N, v_N) = -\sum_{j=0}^{N} \int_\Lambda \left(\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} v_N \right)(x, \xi_j) dx \rho_j - \sum_{i=0}^{N} \int_\Lambda \left(\frac{\partial^2 u_N}{\partial y^2} v_N \right)(\xi_i, y) dy \rho_i$$

$$= -\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} v_N + \frac{\partial^2 u_N}{\partial y^2} v_N \right)(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j$$

On en déduit

$$a_N(u_N, v_N) = -(\Delta u_N, v_N)_N$$

Soit l_j, $\quad 0 \leq j \leq N$, les polynômes de Lagrange associés aux points ξ_j (c'est-à-dire les polynômes de $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ qui valent 1 en ξ_j et s'annulent en ξ_k, $0 \leq k \leq N, \quad k \neq j$).Les l_j, $1 \leq j \leq N-1$ forment une base de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. une base de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ est donc donnée par les $l_i(x)l_j(y), \quad 1 \leq i, j \leq N-1$, en dimension $d = 2$. L'équation (3.5)est satisfaite pour tout v_N dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ si et seulement si elle est satisfaite pour tout élément de cette base. En utilisant la formule précédente et le fait que les point ρ_j,$1 \leq j \leq N-1$, sont positifs, on voit en dimension $d = 2$ par exemple qu'elle est satisfaite pour v_N égal à $l_i(x)l_j(y)$ si est seulement si

$$-\Delta u_N(\xi_i, \xi_j) = f(\xi_i, \xi_j)$$

.

De même, le fait que u_N s'annule sur $\partial\Lambda^2$ se traduit par les fait que u_N s'annule en $N+1$ points sur chaque côté, en $(N+1)^2$ points sur chaque face. Par ces arguments, on obtient une formulation équivalente du problème(3.5), pour la grille Ξ

Trouver u_N dans $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u_N(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \Xi \cap \Omega, \\ u_N(x, y) = 0 & (x, y) \in \Xi \cap \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.25}$$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié l'équation de poison avec condition aux limite de Dirichlet homogène où nous avons fait la recherche des solutions dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ qui a une dimension infini.

Nous passons ensuite à les espaces des polynômes $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$ de dimension fini à l'aide de la méthode de Galerkin pour obtenir le problème discret, celle-ci, on va l'étudie par la méthode de la discrétisation spectrale, qui s'appuie à l'implémentation du problème dans les points de collocation de Gauss-Lobatto $(\xi_0, ..., \xi_N)$, où nous avons cherché la solution approchée et son unicité.

Enfin, nous avons estimée l'erreur entre la solution exacte et approchée en utilisant les propriétés des opérateurs $\Pi_N^{1,0}$, $\mathcal{I}_N$.

Bibliographie

[1] M. Azaiez- Calcul de la pression dans le problème de Stokes pour des fluides visqueux incompressibles par une méthode spectrale de collocation, These, Paris-Sud (1990).

[2] M. Azaiez, M. Dauge et Y. Maday- Méthodes Spectrales et des éléments Spectraux Université Paul Sabatier F-31062 Toulouse Cedex, France(1993).

[3] C. Bernardi et Y. Maday-Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques, Mathématiques et Applications 10, SMAI, Springer-Verlag, Paris (1992).

[4] C. Bernardi, Y. Maday et F.Rapeti-Discrétisations variationnelles de problème aux limites elliptique, Mathématiques et Applications 45, Springer, Paris(2004).

[5] C. Bernardi and Y. Maday-Spectral, Spectral Element and Mortar Element Methods, University of Durharn (2000).

[6] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni and T.A. Zang-Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).

[7] M. Dauge Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains, Lecture Notes in Mathematics 1341, Springer-Verlag (1988).

[8] P. Grisvard-Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Pitman (1985).

[9] Y. Maday and A.T. Patera-Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations, in State of the Art Surveys in Computational Mechanics, A.K. Noor ed. (1989), 71-143.

[10] G.N. Milstein, Numerical integration of stochastic differential equations, Math-ematies and its Applieations v.313, Kluwer Academic Publishers,(1994).

[11] E.M.Rønquist-Optimal Spectral Element Methods for the unsteady three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, Ph.D. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA.(1988).

ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة مسألة ديريكلي المتجانسة ، بطريقة التقسيم الطيفي وهذا في فضاء $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ ، من أجل هذا استخدمنا جذورمشتق كثير الحدود ليجندر $(\xi_1,\dots,\xi_{N-1})$ كثيرات الحدود .

الهدف من هذا العمل هو الحصول على احسن حل تقريبي .

الكلمات المفتاحية: كثير الحدود ليجندر، معادلة لابلاس، شرط ديريكلي، التقسيم الطيفي.

Résumé :

Dans ce mémoire nous avons étudié un problème de Dirichlet homogène on utilisant la méthode de discrétisation spectrale dans l’espace des polynômes $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$, pour ce là on a utilisé les racines de dérivé des polynômes de Legendre $(\xi_1,\dots,\xi_{N-1})$.

Le but de ce travail est d’ obtenir à la meilleur solution approche .

Mots clés **:** Polynôme de Legendre, Equation de Laplace, Condition de Dirichlet, Discrétisation de spectrale.

Abstract :

In this memory we studied a homogeneous Dirichlet problem is using the spectral discretization method in the space of polynomials $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$, for there were used derivative roots of Legendre polynomials $(\xi_1,\dots,\xi_{N-1})$.

The aim of this study is to obtain the best solution approach.

Keys words: Legendre polynomial, Laplace equation, Dirichlet condition, Spectal discretization.