



**UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA**  
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la  
Matière

N° d'ordre :  
N° de série :

**DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**  
**MASTER**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Modélisation et Analyse Numérique**

**Par : Malika ZAHAF**

**Thème**

# Sur quelques opérateurs d'enrichissement

**Soutenu publiquement le : 21/05/2015**

**Devant le jury composé de :**

Mezabia Mohamed Elhadi	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Ghezal Abderrazek	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Merabet Ismail	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

---

# DÉDICACES

---

Je dédie ce mémoire à :

Mon *père*.

Ma chère *Mère*,

qui a oeuvré pour ma réussite, par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mes frères, *Mohamed, Imad*.

Ma soeur *Sonia*, qui a donner tous les moyennes pour continue le Master et leur encouragement continue.

Je le dédie également à mes amis(e)s qui ont su être là quand j'en avais besoin : *Souta Djamai, Zidi Abderahmane, Boudeffa Hossam, Bouyahia Abdenour, Boughefa Mohamed Sedik, Beda Leila, Bekhouch Rania, Ataouat Mohamed, Tabet Lokman*.

A tous ceux qui m'ont aimé.

---

# REMERCIEMENT

---

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à M<sup>r</sup> **MERABET ISMAIL**, doctorant à l'université de Kasdi Merbah Ouargla, pour avoir accepté de diriger ces travaux. Je le remercie infiniment pour avoir toujours été présent par ses conseils, ses encouragements et sa gentillesse. Je voudrai aussi le remercier pour sa disponibilité et du temps consacré à mon travail de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail.

Je voudrais remercier chaleureusement M<sup>r</sup> **Chacha Djamel Ahmed** , Professeur à l'université de Kasdi Merbah Ouargla, qui m'encouragée et conseillée pour terminer mes études.

J'adresse mes plus vifs remerciements et j'exprime ma profonde gratitude à M<sup>r</sup> **Mezabia Mohamed Elhadi** , M.A.Université de Kasdi Merbah Ouargla, lequel m'a fait le grand honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse.

Je me sens redevable auprès de M<sup>r</sup> **Ghazal Abderrazek** , M.A.Université

---

de Kasdi Merbah Ouargla, lequel, en dépit de leur nombreuse occupation, ont bien accepté d'examiner ce travail.

Merci également **M<sup>r</sup>. M.Meflah**, M.C.Université de Kasdi Merbah Ouargla et aussi a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de près ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

---

# TABLE DES MATIÈRES

---

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Préliminaires	1
<b>1 Espaces de Sobolev <math>H^m(\Omega)</math></b>	<b>5</b>
1.1 Définitions . . . . .	5
1.2 Densité et injections . . . . .	9
1.3 Théorème de trace . . . . .	10
1.4 Équivalence des normes . . . . .	11
1.5 Approximation polynomiale . . . . .	13
1.5.1 Polynôme de Taylor et de Sobolev . . . . .	13
1.5.2 Représentation d'erreur . . . . .	14
1.5.3 Le potentiel de Riesz . . . . .	17
1.5.4 Lemme de Deny-Lions . . . . .	18
1.5.5 Lemme de Bramble-Hilbert . . . . .	20
<b>2 Notion d'élément fini en 2D</b>	<b>22</b>

---

2.1	Introduction . . . . .	22
2.2	Éléments Finis en 2D . . . . .	25
2.2.1	L'élément d'Hermite . . . . .	25
2.2.2	Éléments finis d'Argyris . . . . .	27
2.2.3	L'élément HCT . . . . .	28
2.3	Maillages . . . . .	29
2.4	Résultats d'approximation . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Opérateurs d'enrichissement</b>	<b>36</b>
3.1	Introduction . . . . .	36
3.2	L'opérateur $E_h$ . . . . .	37
3.3	L'opérateur $\tilde{E}_h$ . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Éléments finis continus/discontinus</b>	<b>46</b>
4.1	Un problème modèle d'ordre quatre . . . . .	46
4.2	Formulation du problème par méthode SIP . . . . .	49
4.3	Le problème discret . . . . .	53
4.4	Estimation d'erreur a priori . . . . .	56
4.4.1	L'estimation concrète . . . . .	56
4.4.2	Poste-Traitement . . . . .	56

---

---

# NOTATIONS

---

- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$  : Le gradient d'un vecteur  $v$ .
- $D^2 v = \nabla^2 v = \begin{pmatrix} \partial_x^2 v & \partial_{yx} v \\ \partial_{xy} v & \partial_y^2 v \end{pmatrix}$  : La matrice Hessienne
- $D^2 w : D^2 v = \sum_{i,j=1}^2 w_{x_i x_j} v_{x_i x_j}$  : Le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^4$ .
- $|v|_{2, \omega} = \left( \sum_{\alpha=2} \|D^\alpha v\|_{0, \omega} \right)^{1/2}$ .
- $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- $\llbracket v \rrbracket = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+$ .
- $\{v\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}$ .
- $\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = n \cdot (\nabla^2 v) n$ .
- $\left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot n$ .
- $Osc_2(f) = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - f_T\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

---

# INTRODUCTION

---

Pendant les dernières années, la simulation numérique apparaît comme un outil très important : elle permet de réaliser autant d'expérience que voulu, et de modifier les paramètres physiques, dans les seules limites du logiciel. Ainsi la simulation numérique permet de réduire le nombre d'expériences nécessaires. Elle permet aussi parfois de faire des expériences qui seraient trop coûteuses, impossibles à réaliser, ou même dangereuses.

En calcul de structure, l'outil de base pour la simulation numérique est la méthode des éléments finis. Introduite dans les années 50, elle a été largement diffusée dans le monde industriel dans les années 1960-70 grâce à de nombreux travaux, citons notamment le livre de Zienkiewicz. D'un autre côté, les travaux de nombreux mathématiciens ont permis d'établir le formalisme mathématique nécessaire pour cette méthode. Citons notamment les livres de Ciarlet ([7]) et Strang et Fix , parus pendant les années 1970. Tous ces livres font encore office de références, de nos jours. La méthode des éléments finis est incontournable dans la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Ces équations possèdent de nombreuses applications dans la modélisation de phénomènes naturels, notamment en physique, en chimie et en biologie, les chercheurs sont souvent intéressés à obtenir une approximation

numérique précise de leur solution.

Ce mémoire reprend un travail effectué durant mon circuit d'études de Master 2 en Analyse numérique et modélisation.

Ce mémoire se divise en quatre chapitres.

Le premier chapitre regroupe quelques rappels sur les espaces de Sobolev.

Les espaces de Sobolev jouent un rôle fondamental dans la théorie variationnelle des équations aux dérivées partielles, ainsi que dans la théorie des éléments finis. Ces connaissances sont nécessaires pour maîtriser la base mathématique mais il est tout à fait possible de n'en retenir que les principaux résultats de projections et en omettant la partie analyse des espaces de Sobolev pour une pratique élémentaire des éléments finis, et on a complété par l'analyse de l'erreur d'interpolation dans l'espace de Sobolev.

Le second chapitre nous commençons par présenter quelques rappels sur les méthodes des éléments finis. Après l'introduction de quelques notations et quelques premières remarques sur le maillage.

On cherche à construire des espaces d'éléments finis possédant plus de régularité que la continuité globale et l'appartenance à  $H^1(\Omega)$  pour cela nous avons fait appel aux éléments finis de classe  $C^0$  (élément fini d'Hermite) et il est aussi possible de revenir à des triangulations conformes et d'obtenir la régularité  $C^1$  et  $H^2$  par la construction d'éléments finis Argyris, HCT complet. Ensuite, la partie suivante pour évaluer les erreurs d'interpolation, on va d'abord considérer le cas d'un maillage régulier.

Le troisième chapitre le plus important, présente comment on construit des fonctions globalement de classe  $C^1$  et polynomiale par morceaux à partir des fonctions qui sont seulement continues et à l'utilisation de l'opérateur d'interpolation qui résulte dans le contexte de la méthode des éléments finis.

L'opérateur d'enrichissement  $E_h$  a été introduit pour la première fois dans le contexte de la méthode des décomposition des domaines pour les méthodes des éléments finis non conformes classiques. Les estimations concernant cet opérateur ont été obtenu par l'utilisation des estimations discrètes élémentaires. L'opérateur  $E_h$  a un grand avantage par rapport à l'interpolé de Lagrange et celui de Clément. En effet, l'opérateur de Lagrange d'une fonction ne peut être défini que si la fonction en considération est continue. Par contre l'opérateur de Lagrange a une propriété très importante; c'est le fait qu'il présente une projection, i.e.,

$$\Pi_h(\Pi_h v) = \Pi_h v.$$

En fin, le dernier chapitre est consacré à l'étude mathématique du problème Bi-Laplacien, nous proposons le type formulation variationnelle de problème continu. Pour la discrétisation, nous utilisons la méthode " $C^0$  Symmetric Interior Penalty Method".

---

# ESPACES DE SOBOLEV $H^m(\Omega)$

---

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et propriétés concernant les espaces de Sobolev pour plus de détails voir Brézis, Brenner-Scott. ([9, 11])

## 1.1 DÉFINITIONS

---

---

On adoptera dans ce qui suit les notations suivantes :

$\Omega$  désignera un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'espace des distributions définies sur  $\Omega$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$$

un multi-indice et on notera

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

**Définition 1.1.1** *On note  $H^1(\Omega)$  l'ensemble des éléments qui satisfont :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \right\}. \tag{1.1}$$

Plus généralement on introduit les espaces suivants :

**Définition 1.1.2** Pour  $m \in \mathbb{N}$

$$H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad |\alpha| \leq m\}. \quad (1.2)$$

Les dérivées étant prises au sens des distributions.  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx. \quad (1.3)$$

La norme associée à ce produit scalaire

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Par convention,  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ . Enfin, pour  $m \geq 1$ , nous introduisons la semi-norme

$$|u|_{m,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}, \quad (1.5)$$

de sorte que

$$\|u\|_{m,\Omega} = (\|u\|_{m-1,\Omega}^2 + |u|_{m,\Omega}^2)^{1/2}. \quad (1.6)$$

On définit l'espace  $H_0^1(\Omega)$  comme le noyau de  $\gamma_0$ , i.e.,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

**Corollaire 1.1.3**  $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ , i.e. l'espace  $H_0^1(\Omega)$  muni de sa norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ , est un espace de Hilbert.

**Preuve.** Le sous-espace  $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$  de Hilbert  $H^1(\Omega)$  est fermé par définition, et donc c'est un Hilbert. Comme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  est une norme équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  sur  $H_0^1(\Omega)$ , on en déduit que  $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$  est un Hilbert. ■

**Définition 1.1.4** Soit un entier  $m \geq 1$ . On note

$$H_0^m = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)},$$

et  $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'$ , le dual de  $H_0^m(\Omega)$ , équipé de la norme

$$\forall f \in H^{-m}(\Omega), \quad \|f\|_{-m,\Omega} = \sup_{u \in H_0^m, u \neq 0} \frac{\langle f, u \rangle_{H^{-m}(\Omega), H_0^m(\Omega)}}{\|u\|_{m,\Omega}}.$$

**Proposition 1.1.5 .**

i) Si  $m \geq m'$ ,  $H^m(\Omega)$  est contenu, avec injection continue, dans  $H^{m'}(\Omega)$ .

ii)  $H^m(\Omega)$  munit du produit scalaire (1.3) est un espace de Hilbert.

**Preuve.** La partie i) est évidente, car si  $m \geq m'$ ,

$$\|u\|_{m',\Omega} \leq \|u\|_{m,\Omega}.$$

Pour prouver la partie ii) Nous rappelons tous d'abord que les espaces  $L^p$  se sont des espaces complets (voir Brézis), et pour démontrer (ii) il suffit de montrer que  $H^m(\Omega)$  est complet pour la norme  $\|u\|_{m,\Omega}$ . Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy dans  $H^m(\Omega)$ . Alors  $(u_n)_n$  de Cauchy dans  $H^m$ ,

donc

$$(u_n)_n \text{ et } (D^\alpha u_n)_n \text{ de Cauchy dans } L^2(\Omega),$$

mais L'espace  $L^2$  est complet (Riez).

Alors

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2. \\ D^\alpha u_n \longrightarrow w \text{ dans } L^2. \end{cases} \quad (1.7)$$

On a  $u_n \in H^m(\Omega)$ , donc

$$\int_{\Omega} D^\alpha u_n \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_n D^\alpha \varphi,$$

par passage à la limite  $n \rightarrow \infty$  on obtient

$$\int_{\Omega} w \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

$$\int_{\Omega} D^\alpha u \varphi = \int_{\Omega} w \varphi.$$

Alors  $D^\alpha u \in L^2$ ,  $D^\alpha u = w$ ,

donc  $u \in H^m(\Omega)$ , ce qui signifie  $H^m$  est complet. ■

**Théorème 1.1.6** (Analogie du Théorème de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée dans  $H^1(\Omega)$ , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans  $H^1(\Omega)$ .

**Remarque 1.1.7** Si  $\Omega$  est lipschitzien,  $(H^1(\Omega))'$  est différent de  $H^{-1}(\Omega)$  et ne s'identifie pas à un sous-espace de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Exemple, l'application  $v \mapsto \int_{\partial\Omega} v d\sigma$  est dans  $(H^1(\Omega))'$ , mais est nulle sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ , alors que ce n'est évidemment pas l'application nulle. On dit que  $(H^1(\Omega))'$  n'est pas un espace de distributions. Par contre, si  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , alors  $(H^1(\mathbb{R}^d))' = H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ .

## 1.2 DENSITÉ ET INJECTIONS

---



---

**Théorème 1.2.1**  $C^\infty(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H^m(\Omega)$  pour tout  $m \geq 0$ .

**Preuve.** . Voir ([10]). ■

**Théorème 1.2.2** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière Lipschitzienne et soit  $m$  et  $k$  deux entiers satisfaisant  $k - m > 1$ . Alors il existe une constante  $C$  tel que pour tout  $u \in H^k(\Omega)$  nous avons :

$$\|D^m u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{k,\Omega}. \quad (1.8)$$

De plus, il existe une fonction de classe  $C^m$  égale presque partout à  $u$  dans l'espace  $L^2(\Omega)$ .

**Preuve.** . Voir ([1]). ■

**Théorème 1.2.3** 1. Pour  $d \geq 2$ , l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$  est continue pour tout nombre réel  $p$  qui satisfait à la fois  $1 \leq p < \infty$  et  $p \leq p_0$ , ou  $p_0$  vérifie

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$$

et cette injection est compacte pour tout  $p < p_0$ .

2. Pour  $d \geq 1$ , l'injection de  $H^m(\Omega)$  dans  $C^n(\bar{\Omega})$  est continue pour tout  $n$  et  $m$ , tels que

$$\frac{1}{2} < \frac{m-n}{d}.$$

**Preuve.** . Voir ([1]). ■

---



---

**1.3 THÉORÈME DE TRACE**


---



---

Le but de cette section est de donner un sens mathématique à la valeur d'une distribution  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  sur la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

**Théorème 1.3.1** *Théorème de trace*

1.  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ .
2. Supposons que le domaine  $\Omega$  est suffisamment régulier (de classe  $C^1$ , par exemple), alors on définit l'opérateur de trace  $\gamma_0$  par

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C^0(\bar{\partial\Omega}) \\ u &\mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \end{aligned} \tag{1.9}$$

L'application linéaire  $\gamma_0$  définie par (1.9) se prolonge par continuité à une application linéaire et continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , i.e., il existe une constant  $c$  tel que :

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{1,\Omega}, \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.10}$$

**Preuve.** Pour simplifier, nous démontrons le résultat pour le cas :

$$\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$$

$$|v(x, 0)|^2 = -2 \int_0^\infty v(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy$$

En utilise l'inégalité  $2ab \leq a^2 + b^2$ , on obtient :

$$|v(x, 0)|^2 \leq \int_0^\infty (|v(x, y)|^2 + \left| \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right|^2) dy$$

Nous intégrons par rapport à  $x$  on obtient ainsi,

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

■

**Théorème 1.3.2** *Formule de Green*

$\forall u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega),$

$$-\int_{\Omega} \Delta uv \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} v \partial_n u.$$

---



---

## 1.4 ÉQUIVALENCE DES NORMES

---



---

**Lemme 1.4.1** (*Poincaré*).

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . Alors, il existe une constante strictement positive  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  et telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2}. \quad (1.11)$$

**Preuve.** Nous démontrons l'inégalité (1.4.1) pour les éléments de  $C_0^\infty(\Omega)$ . Soit  $a, b$  deux réels tels que  $\Omega \subset ]a, b[ \times ]a, b[$ . Alors

$$u(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial u(t, x_2)}{\partial t} dt.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial u(t, x_2)}{\partial t} \right|^2 dt \\ &\leq \int_a^b |\nabla(u)|_{L^2}^2 \\ &\leq (b-a)^{1/2} \|\nabla(u)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \|\nabla(u)\|_{L^2}^2.$$

Par argument de densité le résultat reste vrai pour les éléments de  $H_0^1(\Omega)$ . En effet, si  $u \in H_0^1(\Omega)$  il existe  $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n - u|^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^2 = 0. \quad (1.12)$$

Ce qui implique,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^2 = \int_{\Omega} |u|^2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

Puisque,

$$\int_{\Omega} |u_n(x)|^2 dx \leq C \|\nabla(u_n)\|_{L^2}^2 \implies \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \|\nabla(u)\|_{L^2}^2.$$

■

**Corollaire 1.4.2** *soit  $\Omega$  un ouvert de  $R^n$  borné dans au moins une direction de l'espace.*

*Alors la semi-norme*

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2},$$

*est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$  équivalente à la norme usuelle induite par celle de  $H^1(\Omega)$ .*

**Preuve.**

Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ . La première inégalité

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (|v|^2 + |\nabla v|^2) dx \right)^{1/2},$$

est évident. D'autre part, l'inégalité de Poincaré Lemme 1.4.1 conduit à

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (c+1) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = (c+1)|v|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

ce qui prouve que  $|v|_{H_0^1(\Omega)}$  est une norme équivalente à  $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ . ■

**Lemme 1.4.3** *Sur  $H_0^2(\Omega)$ , l'application  $v \mapsto \|\Delta v\|_{0,\Omega} = |v|_{2,\Omega}$  est une norme équivalente à la norme canonique  $\|v\|_{2,\Omega}$ , i.e., il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \quad c\|v\|_{2,\Omega} \leq \|\Delta v\|_{0,\Omega}.$$

*De plus, nous avons caractérisation*

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega), \gamma_0(v) = 0, \gamma_1(v) = 0\}.$$

---

## 1.5 APPROXIMATION DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

---

Dans cette section nous nous intéressons à la construction du polynôme analogue à celui de Taylor (qui est défini pour des fonctions de classe  $C^k$ ), mais pour les fonctions qui appartiennent à des espaces de Sobolev.

### 1.5.1 Polynôme de Taylor et de Sobolev

Nous commençons par la définition du polynôme de Taylor. Soit  $u \in C^{m-1}(\mathbb{R}^N)$ .

**Définition 1.5.1** *Le polynôme de Taylor d'ordre  $m$  évalué au point  $y$  est donné par*

$$T_y^m u(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y) (x - y)^\alpha, \quad (1.13)$$

**Définition 1.5.2** *(Fonction de troncature) On appelle fonction de troncature toute fonctions qui satisfait les propriétés*

1.  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$
2.  $\int_{\mathbb{R}^N} \phi dx = 1$

L'exemple suivant montre l'existence de fonctions de troncature. Soit la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-(1/(1-\|x\|^2))} & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

et soit

$$c = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx.$$

Alors la fonction  $\phi = \frac{\varphi}{c}$  est une fonction de troncature.

**Définition 1.5.3** *Soit  $u \in H^{m-1}(\Omega)$ ,  $B \subset\subset \Omega$ ,  $m \geq 1$ . Le polynôme de Sobolev d'ordre  $m$  évalué au point  $x$  est donné par*

$$Q^m u(x) = \int_B T_y^m u(x) \phi(y) dy. \quad (1.14)$$

**Proposition 1.5.4** pour tout  $\alpha$  telle que  $|\alpha| \leq m - 1$

$$D_x^\alpha T_y^m u(x) = T_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x) \quad \forall u \in C^{|\alpha|}(\Omega). \quad (1.15)$$

Dans cas générale, si la fonction  $u$  est dans l'espace Sobolev,  $D^\alpha u$  est dan sens généralise. Donc on défini le polynôme de fonction

**Définition 1.5.5** Soit  $u \in H^{m-1}(\Omega)$ ,  $B \subset\subset \Omega$ ,  $m \geq 1$

$$Q^m u(x) = \int_B T_y^m u(x) \phi(y) dy. \quad (1.16)$$

**Proposition 1.5.6** pour tout  $\alpha$  telle que  $|\alpha| \leq m - 1$

$$D_x^\alpha Q_y^m u(x) = Q_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x) \quad \forall u \in C^{|\alpha|}(\Omega), \quad (1.17)$$

*Preuve.* si  $u \in C^\infty(\Omega)$ , alors

$$\begin{aligned} D_x^\alpha Q_y^m u(x) &= \int_B D_x^\alpha T_y^m u(x) \phi(x) dy \\ &= \int_B T_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x) \phi(x) dy \\ &= Q_y^{m-|\alpha|} D_x^\alpha u(x). \end{aligned}$$

■

## 1.5.2 Représentation d'erreur

Pour  $f \in C^m([0, 1])$ , on a

$$f(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + m \int_0^1 \frac{1}{m!} s^{m-1} f^{(m)}(1-s) ds$$

soit  $u \in C^m$ . Pour  $x \in \Omega$  et  $y \in B$ , on définit  $f(s) = u(y + s(x - y))$ , par des calcul direct on conclu que

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(s) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y + s(x - y)) (x - y)^\alpha. \quad (1.18)$$

**Définition 1.5.7** *Le reste d'ordre  $m$  est défini par*

$$R^m u(x) = u(x) - Q^m(x). \quad (1.19)$$

**Proposition 1.5.8** *Le reste  $R^m u(x)$  satisfait :*

$$R^m u(x) = m \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_x} k(x, z) D^\alpha u(z) dz, \quad (1.20)$$

avec  $z = x + s(y - x)$ ,  $k_\alpha(x, z) = \left(\frac{1}{\alpha!}\right)(x - z)^\alpha k(x, z)$  et

$$|k(x, z)| \leq C \left(1 + \frac{|x - x_0|}{\rho}\right)^n |z - x|^{-n}. \quad (1.21)$$

**Preuve.** Pour  $z = x + s(y - x)$ , en utilise le changement de variable,

$$dsdy = s^{-n} dsdz$$

Soit  $A = \{(z, s) : s \in (0, 1], |(1/s)(z - x) + x - x_0| < \rho\}$ .

On note

$$(z, s) \in A : \frac{|z - x|}{|x - x_0| + \rho} < s, \quad (1.22)$$

alors

$$(x - y)^\alpha = s^{-m}(x - z)^\alpha \text{ si } |\alpha| = m, \quad (1.23)$$

a partir de (1.5.1) et (1.18) on obtient

$$R^m u(x) = \sum_{|\alpha|} \int \int \chi_A(z, s) \phi\left(x + \frac{(z - x)}{s}\right) \times \frac{m}{\alpha!} s^{-n-1} (x - z)^\alpha D^\alpha u(z) ds dz. \quad (1.24)$$

Donc

$$\begin{aligned} R^m u(x) &= m \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_x} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(z) (x - z)^\alpha \times \left[ \int_0^1 \phi\left(x + \frac{(z - x)}{s}\right) \chi_A(z, s) s^{-n-1} ds \right] dz \\ &= m \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_x} k_\alpha(x, z) D^\alpha u(z) dz. \end{aligned}$$

Si on prend

$$k(x, z) = \int_0^1 \phi\left(x + \frac{(z - x)}{s}\right) \chi_A(z, s) s^{-n-1} ds,$$

et

$$k_\alpha(x, z) = (1/\alpha!)(x - z)^\alpha k(x, z).$$

Il reste de montré l'estimation (1.21) pour  $k(x, z)$

Soit  $t = |z - x|/(|x - x_0| + \rho)$ . Alors

$$\begin{aligned} |k(x, z)| &= \left| \int_0^1 \chi_A(z, s) \phi(x + (1/s)(z - x)) s^{-n-1} ds \right| \\ &\leq \int_t^1 |\phi(x + (1/s)(z - x))| s^{-n-1} ds \quad (\text{d'après (1.22)}) \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty(B)} \frac{s^{-n}}{n} \Big|_t^1 \\ &\leq (1/n) \|\phi\|_{L^\infty(B)} t^{-n} \\ &= (1/n) \|\phi\|_{L^\infty(B)} (\rho + |x - x_0|)^n |z - x|^{-n} \\ &\leq C \rho^{-n} (\rho + |x - x_0|)^n |z - x|^{-n} \\ &= C \left(1 + \frac{1}{\rho} |x - x_0|\right)^n |z - x|^{-n}. \end{aligned}$$

■

### 1.5.3 Le potentiel de Riesz

Nous avons tiré des limites pour le reste  $R^m$  En termes d'un "Potentiel Riesz". Dans cette sous-section, nous tirons des limites diverses pour de tels potentiels.

**Lemme 1.5.9** *Soit  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $m > n/p$ . Alors*

$$\int_{\Omega} |z - x|^{-n+m} |f(z)| dz \leq C_p d^{m-n/p} \|f\|_{L^p}. \quad (1.25)$$

**Preuve.**

Premièrement, pour  $p = 1$  et  $m \geq 2$ . alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x - z|^{-n+m} |f(z)| dz &\leq \| |x - z|^{-n+m} \|_{L^\infty(\Omega)} \|f\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq d^{-n+m} \|f\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

2<sup>me</sup> on prend  $p = 2$  et  $m > n/2$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x - z|^{-n+m} |f(z)| dz &\leq \left( \int_{\Omega} |x - z|^{2(-n+m)} \right)^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)} && \text{(Cauchy - Shwartz)} \\ &\leq C \left( \int_0^d r^{(-n+m)n+1} dr \right) \|f\|_{L^2(\Omega)} && \text{(Coordonnées polaires)} \\ &= C (d^{(-n+m)2+n})^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C d^{m-(n/2)} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

■

### 1.5.4 Lemme de Deny-Lions

Le lemme de Deny-Lions donne un premier résultat d'approximation dans les espaces Sobolev.

**Notation :** Pour tout entier  $k \geq 0$ ,  $\mathbb{P}_k$  est l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égal à  $k$ . Pour tout entier  $m$ , puisque  $\Omega$  est borné,  $\mathbb{P}_k \subset H^m(\Omega)$  et on peut définir l'espace quotient  $H^m(\Omega)/\mathbb{P}_k$ , qui est un espace de Hilbert pour la norme quotient

$$\|f\|_{H^m(\Omega)/\mathbb{P}_k} = \inf_{p \in \mathbb{P}_k} \|f + p\|_{m,\Omega}. \quad (1.26)$$

**Lemme 1.5.10** (*Deny-Lions*)

*On suppose que  $\Omega$  est lipschitzien et connexe. Pour tout entier  $k \geq 0$ , il existe une constante  $C$  telle que*

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k, \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k} \leq C|v|_{k+1,\Omega}. \quad (1.27)$$

**Preuve.**

1. La première des choses est de se débarrasser de la norme quotient dans (1.26). Pour cela, il suffit de construire un représentant convenable de la classe de  $v$ . Soit  $\Pi$  l'opérateur de projection orthogonale sur  $\mathbb{P}_k$  pour la norme de  $L^2(\Omega)$  : pour tout  $v \in L^1(\Omega)$ ,  $\Pi v \in \mathbb{P}_k$  est défini par

$$\int_{\Omega} (\Pi v - v)q dx = 0, \forall q \in \mathbb{P}_k. \quad (1.28)$$

C'est un système linéaire carré dont la dimension est celle de  $\mathbb{P}_k$ . Il admet une solution unique,  $\Pi v$ . De plus,  $\Pi v$  vérifie  $\Pi(\Pi v) = \Pi v$  et  $\|\Pi v\|_{0,\Omega}$ . Alors

$$\|v\|_{H^{k+1}(\Omega)/\mathbb{P}_k} \leq \|v - \Pi v\|_{k+1,\Omega} = (\|v - \Pi v\|_{k,\Omega}^2 + |v|_{k+1,\Omega}^2)^{1/2}. \quad (1.29)$$

Comme  $\Pi(v - \Pi v) = 0$ , il suffit de montrer qu'il existe une constante  $D$  telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega), \text{ telle que } \Pi v = 0, \|v\|_{k,\Omega} \leq D|v|_{k+1,\Omega}^2, \quad (1.30)$$

et on aura (1.5.10) avec  $C = (1 + D^2)^{1/2}$ .

2. On démontre (1) par l'absurde. si (1) est faux, on peut construire une suite  $v_n$  de  $H^{k+1}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|_{k+1, \Omega} = 0 \text{ et } \|v_n\|_{k, \Omega} = 1. \quad (1.31)$$

Comme  $v_n$  est bornée dans  $H^{k+1}(\Omega)$ , grâce à une extension du Théorème (1.1), on peut extraire de  $v_n$  une sous-suite, encore notée  $v_n$ , qui converge faiblement dans  $H^{k+1}(\Omega)$  (en fait le théorème (1.1) est valable pour des espaces de Banach réflexifs) : il existe  $v$  dans  $H^{k+1}(\Omega)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \text{ faiblement dans } H^{k+1}(\Omega). \quad (1.32)$$

Mais  $\Pi v_n = 0$ , i.e.  $\int_{\Omega} v_n q dx = 0$  pour tout  $p$  dans  $\mathbb{P}_k$ . Donc, en passant à la limite faible dans cette égalité, on a  $\int_{\Omega} v q dx = 0$  pour tout  $q$  dans  $\mathbb{P}_k$ , ce qui veut dire que  $\Pi v = 0$ .

D'autre part

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^{k+1} v_n \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (1.33)$$

Mais  $\partial^{k+1} v_n$  converge faiblement vers  $\partial^{k+1} v$  dans  $L^2(\Omega)$ . L'unicité de la limite entraîne que  $\partial^{k+1} v = 0$ . Alors (grâce à un résultat difficile), ceci entraîne que  $v \in \mathbb{P}_k$ . Donc  $\Pi v = v$ , et comme  $\Pi v = 0$ , ceci entraîne  $v = 0$ .

Enfin, comme l'injection de  $H^{k+1}(\Omega)$  dans  $H^k(\Omega)$  est compacte (ce qui est une extension facile de Théorème (1.2)), quitte à extraire une sous-suite,  $v_n$  converge vers  $v = 0$  dans  $H^k(\Omega)$ . Ceci contredit le fait que  $\|v_n\|_{k, \Omega} = 1$ .

**Remarques sur les hypothèses :** La contradiction ne s'obtient qu'à la fin, quand on s'est servi de la compacité de l'injection. Si on n'a pas cette compacité, on ne peut rien conclure. Cette injection est fautive si  $\Omega$  n'est pas borné et l'énoncé du théorème est faux dans ce cas car aucun polynôme de  $\mathbb{P}_k$  n'appartient à  $L^2(\Omega)$ .

La connexité de  $\Omega$  permet de conclure que si  $\partial^{k+1} v = 0$  alors  $v \in \mathbb{P}_k$ . Si  $\Omega$  n'est pas connexe, les polynômes ne sont pas les mêmes dans chaque composante connexe de  $\Omega$  et l'énoncé du théorème est faux. ■

### 1.5.5 Lemme de Bramble-Hilbert

Ce lemme peut être considéré comme une généralisation de Deny-Lions.

**Lemme 1.5.11** (*Bramble-Hilbert*)

$$|v - Q^m v|_{k,\Omega} \leq C d^{m-k} |v|_{m,\Omega}. \quad (1.34)$$

**Preuve.**

1. On suppose  $\text{diam}(\Omega) = 1$ . Alors pour tout  $u \in C^m(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ , on a

$$|v - Q^m v|_{W_p^k(\Omega)} \leq C |v|_{W_p^m(\Omega)} \quad \forall k = 0, 1, \dots, m. \quad (1.35)$$

Pour  $k = m$ ,

$$|u - Q^m u|_{W_m^k(\Omega)} = |u|_{W_m^k(\Omega)}.$$

Pour  $k = 0$ ,

$$\begin{aligned} \|u - Q^m u\|_{L^p(\Omega)} &= \|R^m u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq m \sum_{|\alpha|=m} \left\| \int_{\Omega} K_{\alpha}(x, z) D^{\alpha} u(z) dz \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq c(1 + 1/\rho)^n \sum_{|\alpha|=m} \left\| \int_{\Omega} |x + z|^{-n+m} D^{\alpha} u(z) dz \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq |u|_{W_p^m(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour  $0 \leq k \leq m$ ,

$$\begin{aligned} |u - Q^m u|_{W_p^k(\Omega)} &= |R^m u|_{W_p^k(\Omega)} \\ &\leq \left( \sum_{|\alpha|=k} \|R^{m-k} D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \\ &\leq C \left( \sum_{|\alpha|=k} |D^{\alpha} u|_{W_p^{m-k}(\Omega)} \right)^{1/p} \\ &\leq C |u|_{W_p^m(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

2. Pour un domaine général  $\Omega$ , on définit

$$\hat{\Omega} = \{\hat{x} = (1/d)x ; x \in \Omega\}.$$

Soit  $u \in W_p^m(\Omega)$  et  $\hat{u} \in W_p^m(\hat{\Omega})$  où  $\hat{u}(\hat{x}) = u(dx)$ .

Par un changement des variables, nous avons

$$|\hat{u}|_{W_p^m(\hat{\Omega})} = d^{m-n/p}|u|_{W_p^m(\Omega)} \quad \forall 0 \leq k \leq m.$$

Soit  $\hat{Q}^m \hat{u}(\hat{x}) = Q^m \hat{u}(x) = Q^m u(dx)$ . Alors

$$\begin{aligned} |\hat{u} - \hat{Q}^m \hat{u}|_{W_p^k(\hat{\Omega})} &\leq C |\hat{u}|_{W_p^m(\hat{\Omega})} \\ &= C d^{m-n/p} |u|_{W_p^m(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |\hat{u} - \hat{Q}^m \hat{u}|_{W_p^k(\hat{\Omega})} &= |\hat{u} - Q^m \hat{u}|_{W_p^k(\hat{\Omega})} \\ &= d^{k-n/p} |u - Q^m u|_{W_p^k(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

D'après (1.37) et (1.38), on obtient

$$|u - Q^m u|_{W_p^k(\Omega)} \leq C d^{m-k} |u|_{W_p^m(\Omega)} \quad \forall 0 \leq k \leq m.$$

■

---

# NOTION D'ÉLÉMENT FINI EN 2D

---

## 2.1 INTRODUCTION

---

---

L'idée de la MEF est de décomposer (on dit discrétiser) le domaine en un certain nombre de sous-domaines (les éléments). Les éléments recouvriront l'intégralité du domaine (de la frontière pour les éléments de frontière qui est une autre méthode) et sans chevauchement entre eux. De plus, on va chercher la fonction solution  $u$  comme étant interpolée par des solutions définis sur chaque élément. Le problème étant interpolé sur les éléments, on se doute que le nombre éléments va jouer sur la qualité de cette approximation de la solution. On se doute également que, comme on résout un problème comportant des dérivées, c'est plutôt dans les endroits où la solution va varier vite qu'il sera nécessaire de raffiner le maillage. On veillera également à ce que les éléments ne soient pas trop distordus. Des critères dits « de forme » existent. Néanmoins, dans certains cas il est possible de violer allègrement ces critères tout en obtenant une très bonne approximation de la solution. Bien que la MEF soit théoriquement généralisable à toutes les dimensions d'espace et à tous les ordres de dérivation, dans la pratique, l'augmentation de ces paramètres accroît de

manière dramatique la difficulté et on se contente de résoudre des problèmes limités à trois dimensions en espace et deux ordres de dérivation. Nous avons dit vouloir interpoler le problème sur chaque élément. Pour ce faire, il faut prendre une base sur chaque élément. Plusieurs choix sont possibles, mais en général, les fonctions de base utilisées pour les éléments finis sont dites interpolantes, c'est-à-dire que les valeurs nodales sont les valeurs des grandeurs inconnues aux noeuds, et que c'est à partir de ces valeurs que l'on effectue l'interpolation. La méthode la plus simple consiste à utiliser les polynômes de Lagrange. Dans cette méthode les fonctions de base valent 1 à un noeud du maillage et 0 à tous les autres. La fonction de base  $i$  est alors la fonction valant 1 au sommet  $i$  et 0 sur les autres noeuds et qui est polynomiale sur chaque élément. Il y a autant de fonctions de base par élément que de nombre de noeuds. On appelle élément la donnée d'une géométrie (souvent polygonale en 2D, polyédrique en 3D) et de fonctions de base associées à cette géométrie. D'autres solutions peuvent exister pour les fonctions de base. Par exemple, les éléments finis d'Hermite ont la particularité d'avoir deux fonctions de base associées à chaque noeud. La valeur de la solution est alors ajustée avec la première fonction alors que la deuxième permet d'ajuster la valeur de la dérivée. Ce type de fonctions de base peut avoir un intérêt pour la résolution de certaines EDP (telle que l'équation des plaques en MMC), même si elle nécessite d'avoir deux fois plus de fonctions pour un maillage donné.

**Définition 2.1.1** *Un élément fini est la donnée d'un triplet  $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  tel que :*

- $\mathcal{T}$  est une partie compacte, connexe, d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^2$ .
- $\mathcal{P}$  un espace vectoriel de fonctions définies sur  $\mathcal{T}$ .
- $\mathcal{N}$  est un ensemble de  $n_f$  formes linéaires  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  agissant sur les fonctions de  $\mathcal{P}$  telle que l'application :

$$p \mapsto (\varphi_1(p), \dots, \varphi_N(p)),$$

*soit un isomorphisme.*

*Les formes linéaires  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  sont appelées degrés de liberté locaux.*

Il est implicitement, supposé que les  $\varphi_i$ , appartiennent à un espace dual d'un grand espace, e.g, un espace de Sobolev.

**Définition 2.1.2** *Il existe  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , dans  $\mathcal{P}$  telles que  $\varphi_i(p_i) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq N$ , et on a*

$$\forall p \in \mathcal{P}, p = \sum_{i=1}^N \varphi_i(p) p_i.$$

*Les fonctions  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , sont appelées fonctions de base de l'élément fini  $\mathcal{T}$ .*

---

## 2.2 QUELQUES EXEMPLES D'ÉLÉMENTS FINIS EN 2D

---

Nous introduisons deux classes d'éléments finis communément utilisés dans l'approximation conforme par éléments finis des problèmes de plaques et de coques minces. La première classe  $C^0$  utilise la famille d'interpolation d'Hermite, et la deuxième  $C^1$  présenterons par les deux familles d'interpolations de Hsieh-Clough-Tocher complet et l'élément d'Argyris.

### 2.2.1 L'élément d'Hermite

**Définition 2.2.1** Soit  $\mathcal{P} = \mathbb{P}^3$ , on utilise  $\bullet$  pour désigner l'évaluation de la fonction en un point et  $\odot$  pour l'évaluation du gradient.

Soit

$$\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_{10}\}$$

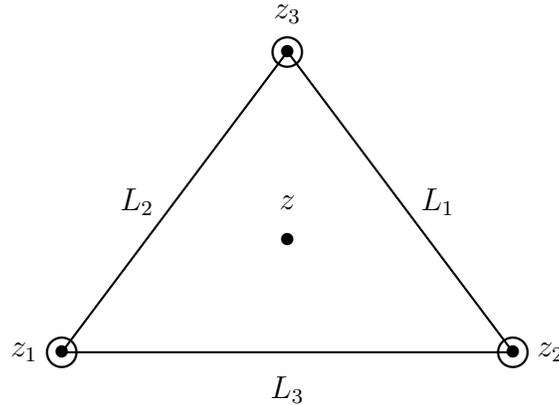


FIGURE 2.1 – Élément d'Hermite.

**Proposition 2.2.2** Soit  $p \in \mathbb{P}^3$ . Si

$$N_i(p) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, 10.$$

Alors,  $p = 0$ .

**Preuve.** Soit  $L_1, L_2$  et  $L_3$  être des fonction linéaires non négligeable qui définissent les bords du triangles.

Supposons que le polynôme  $P \in \mathcal{P}^3$ ,  $N_i(P) = 0$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 10$ . La restriction  $P$  sur  $L_1$ , nous avons de  $z_2$  et  $z_3$  sont les racines doubles de  $P$  depuis  $P(z_2) = 0, P'(z_2) = 0$  et  $P(z_3) = 0, P'(z_3) = 0$ , où notons la différentiation sur la ligne droite  $L_1$ .

Mais le seul polynômes du degrés trois dans une variable avec quatre racines est le polynôme zéro. D'où

$P \equiv 0$  sur  $L_1$ . De même  $P \equiv 0$  sur  $L_2$  et  $L_3$ .

Nous pouvons donc d'écrire  $P = cL_1L_2L_3$ . Mais

$$0 = P(z_4) = cL_1(z_4)L_2(z_4)L_3(z_4) \implies c = 0,$$

car  $L_i(z_4) \neq 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ . ■

## 2.2.2 Éléments finis d'Argyris

**Définition 2.2.3** On définit l'élément fini d'Argyris par le triplet  $(T, \mathcal{P}_6, \mathcal{N})$

où  $\mathcal{P} = \mathbb{P}^6$ , en utilise  $\bullet$  pour désigne l'évaluation de la fonction en un point,  $\odot$  pour l'évaluation du gradient et  $\odot$  pour l'évaluation des trois dérivées secondes,  $\bullet \rightarrow$  désigne la valeur de la dérivée suivant la normale.

Soit

$$\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_{22}\}$$

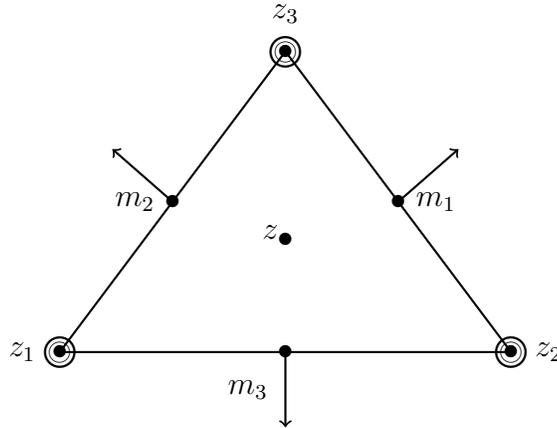


FIGURE 2.2 – Élément de Argyris.

**Proposition 2.2.4** Soit  $p \in \mathbb{P}^6$ . Si

$$N_i(p) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, 22.$$

Alors,  $p = 0$ .

**Preuve.**

$$p = qL_1L_2L_3, \quad \deg(q) = 2$$

$$\partial_{L_i}L_i = 0, \quad L_i(z_3) \neq 0, i = 1, 2$$

$$\partial_{L_1}\partial_{L_2}p(z_3) = 0 \implies q(z_3)L_3(z_3)\partial_{L_1}L_2\partial_{L_2}L_1 = 0,$$

alors,  $q(z_3) = 0$ , de la même façon  $q(z_1) = q(z_2) = 0$ .

$$L_1(m_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} p(m_1) = 0 \implies q(m_1) = 0.$$

■

### 2.2.3 Élément de Hsieh-Clough-Tocher

Les éléments finis de Hsieh-Clough-Tocher sont du type macro-élément (voir figure 2.3). En effet, chaque triangle  $T$  est subdivisé en trois sous-triangles en ajoutant un point interne au triangle, et l'espace d'approximation  $\mathcal{P}$  est un sous-espace des polynômes de degré 3 sur chaque sous-triangle  $T_i$ , convenablement assemblés pour que la fonction discrète sur le triangle  $T = \cup_{i=1}^3 T_i$  appartient à  $C^1(T)$ .

Soit  $K$  un triangle de sommet  $z_1, z_2, z_3$  et soit  $z$ , un point interne au triangle  $T$ . Nous notons  $T_i$  les triangles de sommets  $z, z_{i+1}, z_{i+2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Soit

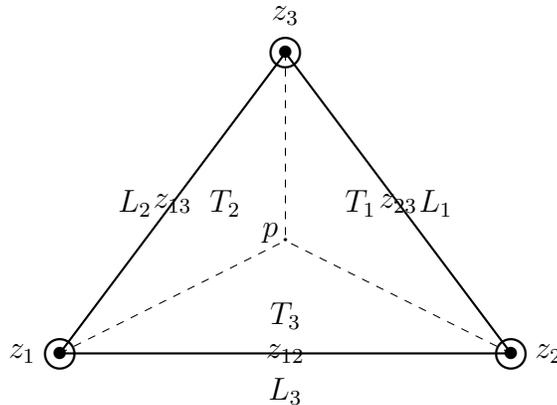


FIGURE 2.3 – L'élément HCT.

$$\mathcal{P} = \left\{ p \in C^1(T); p \in \mathbb{P}^3(T_i), \quad i = 1, 2, 3 \right\},$$

où  $\mathbb{P}^3(T_i)$  est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 3 sur  $T_i$ . Soit en fin

$$\mathcal{N} = \left\{ p(z_i), \frac{\partial p}{\partial x_1}(z_i), \frac{\partial p}{\partial x_2}(z_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial p}{\partial n}(a_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq 3 \right\},$$

l'ensemble des degrés de liberté.

**Définition 2.2.5** on définit l'élément fini HCT-C par le triplet  $(T, P_T, N)$ .

---

## 2.3 MAILLAGES

---

### Définition 2.3.1 (Triangulation)

Un maillage ou triangulation est un recouvrement du polygone  $\Omega$  par des triangles. En notant  $\{T_1, \dots, T_{N_e}\}$  ces triangles, on a donc

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_e} T_i.$$

On dit que la triangulation est admissible si pour tout  $i \neq j$ , l'ensemble  $T_i \cap T_j$  est soit vide, soit réduit à un point qui est un sommet à la fois de  $T_i$  et de  $T_j$ , soit égal à un segment qui est une arête à la fois de  $T_i$  et de  $T_j$ .

Par la suite, les triangles  $T_i$  sont appelés mailles et les arêtes des triangles sont appelées faces.

Pour tout  $1 \leq i \leq N_e$ , nous notons  $h_i$  le diamètre de la maille  $T_i$  (défini comme la plus grande des longueurs des arêtes de  $T_i$ ) et nous posons

$$h = \max_{1 \leq i \leq N_e} h_i.$$

Ce paramètre caractérise la finesse globale du maillage.

Nous notons  $\{s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,3}\}$  les trois sommets de la maille  $T_i$ . En regroupant tous ces sommets, nous obtenons un ensemble de points de cardinal noté  $N_s$  et dont les éléments, appelés sommets du maillage, sont numérotés sous la forme  $\{s_1, \dots, s_{N_s}\}$ .

De plus nous supposons l'existence d'un élément de référence  $\bar{T}$  défini par :

$$\hat{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}. \quad (2.1)$$

Les transformations affines générant le maillage s'expriment sous la forme

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad F_T(\hat{x}) = A_T \hat{x} + b_T, \quad \hat{x} \in \hat{T}. \quad (2.2)$$

Introduisons maintenant quelques quantités géométrique caractérisant un maillage

**Définition 2.3.2** (*Quantités géométriques*).

Pour tout  $T \in \mathcal{T}_h$ , on note

$$h_T = \text{diam}(T).$$

$$\rho_T = \sup\{\text{diam}(S) \mid S \text{ boule contenue dans } T\}.$$

**Définition 2.3.3** (*Famille de triangulations régulière*)

Une famille de triangulations  $\mathcal{T}_h$ ,  $h > 0$  est dite régulière s'il existe une constante  $\sigma_0 \geq 1$  telle que

$$\forall h > 0, \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \sigma_T = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\rho_T} < \sigma_0. \quad (2.3)$$

**Lemme 2.3.4** *Supposons (2.2). On a*

$$|\det(A_T)| = \frac{|T|}{|\hat{T}|} \quad (2.4)$$

$$\|A_T\| \leq \frac{h_T}{\rho_{\hat{T}}} \quad (2.5)$$

$$\|A_T^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_T}. \quad (2.6)$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} |T| &= \int_T dx = \int_{\hat{T}} |\det A_T| d\hat{x} \\ &= |\det A_T| \int_{\hat{T}} d\hat{x} \\ &= |\det A_T| |\hat{T}|. \end{aligned}$$

avec  $|\det A_T| = \frac{|T|}{|\hat{T}|}$ .

On utilise la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne

$$\|A_T\| = \sup_{\hat{x} \neq 0} \frac{\|A_T \hat{x}\|}{\|\hat{x}\|},$$

on pose  $\hat{x} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$  et  $\|\hat{x}\| = \rho_{\hat{T}}$  ( $\rho_{\hat{T}}$  le rayon de boule inscrite dans  $\hat{T}$ ).

$$\begin{aligned}
\|A_T\| &= \sup_{\hat{x}=\rho_{\hat{T}}} \frac{\|A_T(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)\|}{\rho_{\hat{T}}} \\
&= \sup_{\hat{x}=\rho_{\hat{T}}} \frac{\|A_T\hat{x}_2 + b_T - A_T\hat{x}_1 - b_T\|}{\rho_{\hat{T}}} \\
&= \sup_{\hat{x}=\rho_{\hat{T}}} \frac{\|F_T(\hat{x}_1) - F_T(\hat{x}_2)\|}{\rho_{\hat{T}}} \\
&= \frac{1}{\rho_{\hat{T}}} \sup_{\hat{x}=\rho_{\hat{T}}} \|x_1 - x_2\| \\
&\leq ch_T.
\end{aligned}$$

$$\|A_T^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A_T^{-1}x\|}{\|x\|}.$$

On pose  $x = x_1 - x_2$  et  $\|x\| = \rho_T$  ( $\rho_T$  le rayon de boule inscrite dans  $T$ ).

$$\begin{aligned}
\|A_T^{-1}\| &= \sup_{x=\rho_T} \frac{\|A_T^{-1}(x_1 - x_2)\|}{\rho_T} \\
&= \sup_{x=\rho_T} \frac{\|A_T^{-1}x_2 + b_T - A_T^{-1}x_1 - b_T\|}{\rho_T} \\
&= \sup_{x=\rho_T} \frac{\|F_T(x_1) - F_T(x_2)\|}{\rho_T} \\
&= \frac{1}{\rho_T} \sup_{x=\rho_T} \|x_1 - x_2\| \\
&\leq h_T \frac{1}{\rho_T}.
\end{aligned}$$

On à de (2.3)  $\sigma_T = \frac{h_T}{\rho_T} < \sigma_0$ .

Alors

$$\frac{1}{\rho_T} < \frac{\sigma_0}{h_T}.$$

On obtient

$$\|A_T^{-1}\| \leq ch_T^{-1}.$$

■

**Lemme 2.3.5** (Inégalité de trace discrète)  $\forall T \in \mathcal{T}_h, e \in \partial T$  et  $\forall v \in \mathcal{P}^k(T)$  il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  tel que

$$|e| \left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{0,e}^2 \leq C \|\nabla v\|_{0,T}^2. \quad (2.7)$$

**Preuve.**

Nous passons au triangle de référence  $\hat{T}$ . On utilise le fait que les normes sont équivalentes en dimension finie donc on

$$\|\partial\hat{v}/\partial n\|_{0,\hat{e}} \leq \|\nabla_{\hat{x}}\hat{v}\|_{0,\hat{T}}.$$

On a d'une part

$$\|\partial\hat{v}/\partial n\|_{0,\hat{e}}^2 = |e| \|\partial v/\partial n\|_{0,e}^2,$$

d'autre part on a <sup>1</sup> :

$$\|\nabla_{\hat{x}}\hat{v}\|_{0,\hat{T}}^2 = \frac{\|A_T\|^2}{|\det(A_T)|} \|\nabla_x v\|_{0,T}^2 \sim \|\nabla_x v\|_{0,T}^2.$$

■

---

<sup>1</sup>si le maillage  $\mathcal{T}_h$  est régulier, i.e.,  $\exists\sigma_0$ , tel que  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ ,  $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma_0$

## 2.4 RÉSULTATS D'APPROXIMATION

---

Dans la section précédente on a examiné quelques éléments finis, avec lesquels on peut construire des sous-espace (de dimension fini) des espaces de Sobolev par l'introduction de ce qu'on appelle l'opérateur d'interpolation local.

**Définition 2.4.1** *Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  un élément fini. Soit  $\{p_i : 1 \leq i \leq k\} \subset \mathcal{P}$  la base dual de  $\mathcal{N}$ . Si la fonction  $v$  est telle que tous les  $\varphi_i \in \mathcal{N}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , sont bien définies, alors l'interpolé local est défini par*

$$\Pi_T v := \sum_{i=1}^k \varphi_i(v) p_i. \quad (2.8)$$

On introduit l'opérateur d'interpolation linéaire continu

$$\Pi_T(v) : H^{l+1}(T) \longrightarrow H^m(T),$$

avec  $0 \leq m \leq l$

**Théorème 2.4.2** *Il existe une constante  $C$  telle que :*

$$|v - \Pi_T(v)|_{H^m(T)} \leq C.h^{l+1-m}.|v|_{H^{l+1}(T)} \quad \forall v \in H^{l+1}(T),$$

où

$$|v|_{H^{l+1}(T)} := \|v^{(l+1)}\|_{L^2(T)}.$$

### 1. Cas des éléments de Hermite

En raisonnant de manière analogue, il faut que  $v$  soit de classe  $C^1$  pour que  $\Pi_T(v)$  soit bien défini dans le cas des éléments de Hermite. Il faut donc que  $l + 1 \geq 2$ .

Alors  $l + 1 = 2$ ,  $m = 1$  :

$$|v - \Pi_T(v)|_{H^1(T)} \leq C.h.|v|_{H^2(T)}$$

### 2. Cas des éléments d'Argyris

Dans ce cas,  $\Pi_T(v)$  n'est bien défini que si  $v$  est de classe  $C^2$ , donc pour des  $v \in H^{l+1}$  avec  $l + 1 \geq 3$ .

nous avons donc :  $l + 1 = 3$ ,  $m = 2$  :  $|v - \Pi_T(v)|_{H^2(T)} \leq C.h.|v|_{H^3(T)}$ .

De façon générale, les éléments finis  $C^1$  ne rentrent pas dans la classe des familles d'éléments finis affines. Ceci est dû au fait que les dérivées normales à certains noeuds sont utilisées, soit dans la définition de l'espace  $\mathcal{P}$  (pour les triangles de Hermite, et HCT-R), soit comme des degrés de liberté (triangle de HCT-C).

**Définition 2.4.3** On dit qu'une famille de triangles de Hsieh-Clough-Tocher  $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  est régulière si les conditions qui suivent sont simultanément vérifiées :

- (i) Il existe une constante  $\sigma$  telle que  $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma$  pour tout  $T$ .
- (ii) La quantité  $h_T$  tend vers zéro.
- (iii) Soit  $\hat{T}$  un triangle de sommets  $\hat{z}_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Notons  $F_T$  l'unique transformation affine du plan qui vérifie  $F_T(\hat{z}_i) = z_i$  (cf. figure (2.4)). Alors le point  $\hat{z} = F_T^{-1}(z)$  appartient à un sous-ensemble compact fixé  $\hat{B}$  de  $Int(\hat{T})$ <sup>2</sup>.

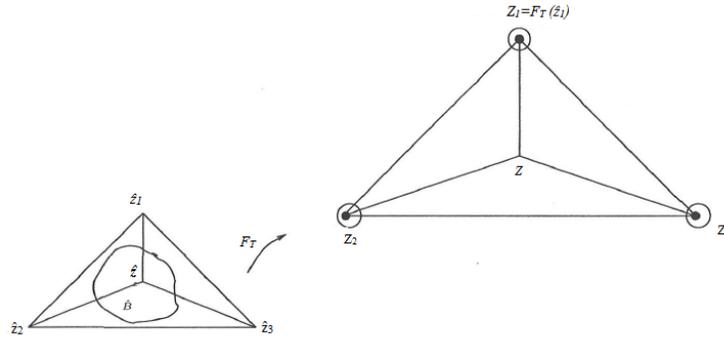


FIGURE 2.4 – Dans une famille régulière d'éléments de Hsieh-Clough-Tocher, tous les points  $\hat{z} = F_T^{-1}(z)$  appartient à un sous-ensemble compact fixé  $\hat{B}$  de  $Int(\hat{T})$

Les conditions (i) et (ii) ci-dessus sont les conditions usuelles de régularité des familles affines d'éléments finis. La condition supplémentaire (iii) exprime précisément de quelle manière le point  $z$  doit varier dans  $T$ .

<sup>2</sup>l'intérieur de  $T$ .

**Théorème 2.4.4** *Étant donné une famille régulière d'éléments de Hsieh-Clough-Tocher complet  $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ , il existe une constante  $C$  indépendante de  $T$  telle que*

$$|v - \Pi_T^{HCTc} v|_{m,T} \leq Ch_T^{4-m} |v|_{4,T} \text{ pour } m = 0, 1, 2, \quad (2.9)$$

*pour toute fonction  $v \in H^4(T)$ .*

**Preuve.** Voir ([7]) [Ch.6, page 344]. ■

---

# OPÉRATEURS D'ENRICHISSEMENT

---

## 3.1 INTRODUCTION

---

---

Pour les problèmes elliptiques d'ordre 4, si les données sont suffisamment régulières, alors la solution du problème est aussi régulière et dans ce cas l'utilisation des méthodes conformes donne des bons résultats, mais ceci exige l'utilisation des éléments de classe  $C^1$  ce qui est difficile en dimension 2 et de plus en dimension 3.

Dans ce chapitre nous introduisons " les opérateurs d'enrichissement " ou de "moyennisation d'Oswald" ([11]) pour construire des fonctions globalement de classe  $C^1$  (Argyris, Hsieh-Clough-Tocher) et polynomiale par morceaux à partir des fonctions qui sont seulement continues (Lagrange par exemple).

Ces opérateurs mesurent la distance entre l'espace des éléments finis de classe  $C^0$  et l'espace  $H^2$ . ([5, 4])

---

## 3.2 UN OPÉRATEUR D'ENRICHISSEMENT BASÉ SUR HCT

---

### Notation et définitions

Pour toute la suite  $\Omega$  désigne un ouvert borne régulier de  $R^2$ , de frontière  $\partial\Omega$ .

$\mathcal{T}_h$  une triangulation régulier de  $\Omega$ ,  $\mathcal{E}_h$  est l'ensemble des arêtes,  $\mathcal{E}_h^i$  est l'ensemble des arêtes intérieurs,  $\mathcal{E}_h^b$  est l'ensemble des arêtes bord.  $\mathcal{N}_h$  est l'ensemble des noeuds.  $\mathcal{T}_x$  est l'ensemble des triangles ayant le noeud  $x$  comme sommet.

Soient

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_{h/T} \in P^k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

$$\|v\|_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{1,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|[[v]]\|_{0,e}^2.$$

La construction de  $E_h$  utilisant l'élément finis Hsieh-Clough-Tocher par l'espace  $W_h \subset H_0^2(\Omega)$ . Les degrés de liberté de  $w \in W_h$  sont (i) les valeurs du dérivées de  $w$  jusqu'à l'ordre 1 au sommet intérieurs et (ii) les valeurs de la dérivées normale de  $w$  aux points milieu du bord au  $\mathcal{E}_h^i$ .

Il existe un opérateur  $E_h : V_h \rightarrow H_0^2(\Omega)$  cet opérateur est défini par :  
soit  $v \in V_h$ , est défini  $w = E_h v$ ,

$$w(x) = v(x) \quad \text{si } x \text{ une sommet intérieur.} \quad (3.1)$$

pour  $x \in \mathcal{T}_h$

$$(\nabla w(x)) = \frac{1}{|\mathcal{T}_x|} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \nabla v_T. \quad (3.2)$$

Pour  $m_e$  un point centre du borne de  $\mathcal{E}_h^i$  défini par :

$$\frac{\partial w}{\partial n}(m_e) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\partial v_T}{\partial n}(m_e). \quad (3.3)$$

**Lemme 3.2.1**

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^{-4} \|v - E_h v\|_{L_2(T)}^2 + h_T^{-2} |v - E_h v|_{H^1(T)}^2 + |v - E_h v|_{H^2(T)}^2) \\ \leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[ \frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \quad \forall v \in V_h. \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Preuve.** Soit  $T \in \mathcal{T}_h$  arbitraire, a partir de la forme (3.1)

$$h_T^{-4} \|v - E_h v\|_{L_2(T)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{V}_T} |\nabla(v_T - E_h v)|^2 + \sum_{T \in \mathcal{M}_T} \left| \frac{\partial(v_T - E_h v)}{\partial n} \right|^2. \quad (3.5)$$

Où  $\mathcal{V}_T$  est l'ensemble des trois sommets de  $T$  et  $\mathcal{M}_T$  est l'ensemble des points médians de les 3 bords du  $T$ .

Soit  $x \in \mathcal{V}_T$  qui est intérieur  $\Omega$ , nous avons par (3.2).

$$\nabla(v_T - E_h v) = \frac{1}{|\mathcal{T}_x|} \sum_{T' \in \mathcal{T}_x} [\nabla v_T - \nabla v_{T'}]. \quad (3.6)$$

D'autre part, à un sommet  $x \in \mathcal{V}_T$  dans  $\partial\Omega$ , nous avons

$$\nabla(v_T - E_h v) = (\nabla v_T). \quad (3.7)$$

On prend la dérivé a partir de (3.6)et (3.7) celui.

$$\sum_{x \in \mathcal{V}_h} |\nabla(v_T - E_h v)|^2 \leq C \sum_{x \in \mathcal{V}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_x} \frac{1}{|e|} \left\| \left[ \frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L^2(e)}^2. \quad (3.8)$$

Où  $\mathcal{E}_x$  est l'ensemble des bords  $\mathcal{E}_h$ ,  $x$  en commun.

De même nous avons

$$\sum_{x \in \mathcal{M}_T} \left| \frac{\partial(v_T - E_h v)}{\partial n} \right|^2 \leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \frac{1}{|e|} \left\| \left[ \frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L^2(e)}^2. \quad (3.9)$$

Où  $\mathcal{E}_x$  est l'ensemble des 3 bords du  $T$ . On obtient finalement a partir de (3.7), (3.8), (3.9),

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-4} \|v_T - E_h v\|_{L_2(T)}^2 \leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[ \frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L^2(e)}^2.$$

Le reste des évaluations dans (3.4) suivant alors des évaluations inverses standard .

Le corollaire suivant est immédiat par des évaluations inverses standard. ■

**Corollaire 3.2.2**

$$E_h(v) \leq C\|v\|_h, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.10)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \partial(v - E_h(v))/\partial n_e \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \leq C\|v\|_h^2, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.11)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \partial(v - E_h(v))/\partial t_e \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \leq C\|v\|_h^2, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.12)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|} \|\{\{\partial(v - E_h(v))/\partial n_e\}\}\|_{L^2(e)}^2 \leq C\|v\|_h^2, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.13)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|^3} \|\{\{\partial(v - E_h(v))/\partial n_e\}\}\|_{L^2(e)}^2 \leq C\|v\|_h^2, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.14)$$

**Preuve.**

1 .On montre l'inégalité de stabilité

$$\begin{aligned} |E_h v|_{H^2(\Omega)}^2 &\leq \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |E_h v - v|_{H^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 \right) \\ &\leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|E_h v - v\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 \right) \\ &\leq C \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \frac{\partial v}{\partial n} \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 \right) \\ &\leq \|v\|_h^2. \end{aligned}$$

2 . Pour l'inégalité (3.11) est évidente, car  $E_h$  est de classe  $C^1$ .

$$\|\llbracket \frac{\partial E_h(v)}{\partial n_e} \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 = 0.$$

$$3 . \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \partial(v - E_h(v))/\partial t_e \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 = 0.$$

Car la dérivé tangentielle d'un élément de Lagrange est continue,  $\frac{\partial v}{\partial t_e} = 0$ . De même pour

$$\|\llbracket \partial E_h(v)/\partial t_e \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 = 0.$$

4 . Montrons celle sur la moyenne :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|e|} \|\{\{\partial(v - E_h(v))/\partial n_e\}\}\|_{L^2(e)}^2 &\leq |e|^{-2} \|v - E_h(v)\|_{L^2(e)}^2 \\
&\leq |e| \|\llbracket \frac{\partial v}{\partial n} \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \\
&\leq \frac{1}{|e|} \|\llbracket \frac{\partial v}{\partial n} \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \quad \text{car } |e| < 1 \\
&\leq \|v\|_h^2.
\end{aligned}$$

5 .Pour montrer l'inégalité (3.14) on utilise le Lemme suivant :

**Lemme 3.2.3**  $\forall T \in \mathcal{T}_h, e \in \partial T, \forall v \in \mathcal{P}^k$ , il existe une constante  $h \leq C|e|$ , tel que

$$\|v\|_{L^2(e)}^2 \leq C|e| \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2.$$

**Preuve.** On a

$$\|v\|_{L^2(e)}^2 = \int_e v^2 ds = h \int_{\hat{e}} \hat{v}^2 d\hat{s}.$$

Avec  $x = A\hat{x} + b$  et  $dx = |\det A| d\hat{x}$ .

On utilise l'inégalité de trace sur le triangle de référence  $\hat{T}$ , on obtient

$$\|v\|_{L^2(e)}^2 \leq Ch \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\hat{T})}^2, \quad (3.15)$$

mais

$$\begin{aligned}
\|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\hat{T})}^2 &= \int_{\hat{T}} |\nabla \hat{v}|^2 d\hat{x} \\
&= \int_T |A \nabla v|^2 |\det A|^{-1} dx.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|v\|_{L^2(e)}^2 \leq Ch \frac{\|A\|^2}{|\det A|} \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2,$$

mais  $\frac{\|A\|^2}{|\det A|} \approx 1$ , donc

$$\|v\|_{L^2(e)}^2 \leq Ch \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\hat{T})}^2,$$

et puisque le maillage est régulière :  $\exists C, h \leq C|e| \implies \|v\|_{L^2(e)}^2 \leq C|e| \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2$ . ■

On prend  $w = v - E_h v$ ,  $\forall v \in V_h$ , Alors

$$\frac{1}{|e|} \|w\|_{L^2(e)}^2 \leq |w|_{H^1(T)}^2.$$

Un calcul direct

$$\begin{aligned} \frac{1}{|e|^3} \|w\|_{L^2(e)}^2 &\leq |e|^{-4} |w|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq |e|^{-1} \left\| \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \\ &\leq \|v\|_h. \end{aligned}$$

■

---

### 3.3 L'OPÉRATEUR D'ENRICHISSEMENT

---

Dans cette section nous construirons les opérateurs qui relient les éléments fins de classe  $C^0$  de Lagrange, par les éléments fins de classe  $C^1$  de Argyris.

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\Omega$ , avec  $h$  est le diamètre de  $\mathcal{T}$ , et  $\tilde{V}_h \subset H^1(\Omega)$  l'espace d'éléments finis  $P_k$  de Lagrange ( $k \geq 2$ ) associé au  $\mathcal{T}_h$ .

L'espace  $\tilde{V}_h$  est défini par  $\{\tilde{v}_h \in C^0(\bar{\Omega}) : \tilde{v}_{h/T} \in P^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$

On considère l'opérateur d'enrichissement  $\tilde{E}_h : \tilde{V}_h \rightarrow \tilde{W}_h$  qui définit par :

Soit  $p$  un noeud

$$(\tilde{E}_h v)(p) = v(p). \quad (3.16)$$

à un noeud  $p$ , la fonction  $\tilde{E}_h$  satisfait

$$\begin{cases} [\nabla(\tilde{E}_h v)] = \frac{1}{|\mathcal{T}_p|} \sum_{T \in \mathcal{T}_p} (\nabla v_T)(p). \\ [\nabla^2(\tilde{E}_h v)] = \frac{1}{|\mathcal{T}_p|} \sum_{T \in \mathcal{T}_p} (\nabla^2 v_T)(p). \end{cases} \quad (3.17)$$

En conclusion, à un point  $p \in \partial T$  où la dérivée normal est un degré de liberté pour l'élément fini d'Argyris, on définit

$$\frac{\partial \tilde{E}_h v}{\partial n}(p) = \frac{1}{|\mathcal{T}_e|} \sum_{T \in \mathcal{T}_e} \frac{\partial v_T}{\partial n}(p). \quad (3.18)$$

#### Lemme 3.3.1

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^{-4} \|v - \tilde{E}_h v\|_{L^2(T)}^2 + h_T^{-2} |v - \tilde{E}_h v|_{H^1(T)}^2 + |v - \tilde{E}_h v|_{H^2(T)}^2) \\ & \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \left\| \left[ \frac{\partial v}{\partial n_e} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \right), \quad \forall v \in \tilde{V}_h. \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Preuve.** Soit  $T \in \mathcal{T}_h$ , a partir de (3.3) et le transformation affine <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} h_T^{-4} \|v - \tilde{E}_h v\|_{L^2(T)}^2 &= \sum_{z \in \nu_T} (|\nabla(v_T - \tilde{E}_h v)|^2 + h_T^2 |\nabla^2(v_T - \tilde{E}_h v)|^2) \\ &\quad + \sum_{z \in \mathcal{N}_h} \left| \frac{\partial(v_T - \tilde{E}_h v)}{\partial n} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

où  $\mathcal{N}(T)$  est l'ensemble des six sommets sur  $\partial T$  avec la dérivée normale est un degré de liberté. Les premiers et les troisième sommes du (3.20) peuvent être estimés comme dans la preuve du Lemme (3.4), il reste la deuxième somme.

D'après l'inégalité (3.17) nous avons

$$\nabla^2(v_T - \tilde{E}_h v) = \frac{1}{|\mathcal{T}_z|} \sum_{T' \in \mathcal{T}_z} \nabla^2(v_{T'} - v_T). \quad (3.21)$$

Il suit alors du transformation affine

$$\sum_{z \in \nu_T} h_T^2 |\nabla^2(v_T - \tilde{E}_h v)|^2 \leq C \sum_{T' \in \mathcal{T}_z} |v_{T'}|_{H^2(T)}^2.$$

■

La preuve du lemme est complétée par les arguments utilisé en Lemme (3.4).

**Corollaire 3.3.2** *Nous avons*

$$|\tilde{E}_h v|_{H^2(\Omega)} \leq C \|v\|_h \quad \forall v \in \tilde{V}_h. \quad (3.22)$$

Soit  $\Pi_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow \tilde{V}_h$  l'opérateur d'interpolation de Lagrange. Satisfait l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}} (h_T^{-4} \|w - \Pi_h w\|_{L^2(T)}^2 + h_T^{-2} |w - \Pi_h w|_{H^1(T)}^2 + |\Pi_h w|_{H^2(T)}^2) \\ \leq C |w|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

D'ailleurs, nous avons

$$\Pi_h(\tilde{E}_h v) = v \quad \forall v \in \tilde{V}_h. \quad (3.24)$$

<sup>1</sup>changement de triangle de référence  $\hat{T}$  vers le triangle  $T$

**Preuve.**

On commence par inégalité de stabilité (3.22), on a

$$\begin{aligned} |\tilde{E}_h v|_{H^2(\Omega)}^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v - \tilde{E}_h v|_{H^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 \\ &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [h^{-4} \|v - \tilde{E}_h v\|_{L^2(T)}^2 + |v|_{H^2(T)}^2] \lesssim \|v\|_h. \end{aligned}$$

Depuis  $\Pi_h(\tilde{E}_h v)$  et  $v$  ont des dof's identiques, un avantage d'utiliser un parent  $C^1$  dans la construction de l'opérateur d'enrichissement. Le résultat (3.24) montre que la composition  $\tilde{E}_h \circ \Pi_h$  se comporte comme un Opérateur quasi-interpolation . ■

**Lemme 3.3.3** *Nous avons, pour  $s \geq 2$ ,*

$$|\xi - \tilde{E}_h(\Pi_h \xi)|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\min(s,3)-2} |\xi|_{H^s(\Omega)} \quad \forall \xi \in H^s(\Omega). \quad (3.25)$$

**Preuve.** Soit  $T \in \mathcal{T}$  et

$$S(T) = \sum_{p \in \nu_T} \cup_{T' \in \mathcal{T}_p} T'$$

L'ensemble des triangles qui ont au moins un sommet commun avec  $T$ .

A partir de la définition de  $\tilde{E}_h$  cela

$$|\tilde{E}_h \Pi_h \xi|_{H^2(T)} \leq C \|\xi\|_{H^2(S(T))}.$$

(d'après les estimations utilisées dans les preuves du Lemme 3.1.1 et Lemme 3.2.1) et  $\tilde{E}_h(\Pi_h \xi) = \xi$  dans  $T$  si  $\xi \in P^2(S(T))$ . Par conséquent nous avons

$$|\xi - \tilde{E}_h(\Pi_h \xi)|_{H^1(T)} \leq Ch^{\min(s,3)-2} |\xi|_{H^s(\Omega)} \quad \forall \xi \in H^s(\Omega). \quad (3.26)$$

Par le Lemme de Bramble-Hilbert ([2, 8])

Pour achever la démonstration, nous faisons une sommation sur tous les triangles de  $\mathcal{T}$ .

L'estimation de  $\tilde{E}_h$  correspondante aux éléments  $P_k$  Lagrange donne :

$$|\xi - \tilde{E}_h(\Pi_h \xi)|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\min(s,k+1)-2} |\xi|_{H^s(\Omega)} \quad \forall \xi \in H^s(\Omega). \quad (3.27)$$

On note que les résultats pour  $\tilde{E}_h$  sont aussi valables pour les  $P_k$ -Lagrange, en prenant en considération les conditions aux limites, et elles peuvent être démontrées après une petite

modification des estimées pour les triangles de bord.(plus de détails dans ([6]) On utilise toujours  $\tilde{E}_h$  pour désigner l'opérateur d'enrichissement correspondant à les éléments de Lagrange  $P_k$  avec ou sans prendre en considération les conditions aux limites. ■

---

ÉLÉMENTS FINIS  
CONTINUS/DISCONTINUS

---

Ce chapitre est consacré à un exemple modèle qui montre l'utilité des opérateurs  $E_h$  et  $\tilde{E}_h$ .

---

**4.1 UN PROBLÈME MODÈLE D'ORDRE QUATRE**

---

Le problème pour le bi-Laplacien

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & x \in \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

(problème biharmonique sur (4.1) un domaine polygonal avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes ).

1. Ce problème peut être résolu numériquement en utilisant des méthodes conformes de classe  $C^1$ . La méthode d'éléments finis basée sur ces éléments (par exemple l'élément Argyris ou l'élément Bogner - Fox - Schmit est compliquée, et encore plus dans

la dimension trois .

2. Il est connu aussi qu'on peut résoudre le problème par des méthodes d'éléments finis non conforme (par exemple les éléments de Morly ).
3. La construction des méthode des éléments finis non conformes est aussi très compliquée et il n'est pas facile de démontrer la convergence de la méthode si elle est non conforme.
4. Elles utilisent des éléments d'ordre inférieur 1,2 mais ceci ne donne pas de très bonnes résultats si la solution est très régulière.
5. On sait très peu d'éléments 3D pour les problèmes d'ordre quatre.

Une autre alternative pour résoudre le problème est d'utiliser la formulation mixte qui consiste à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ such that} \\ \int_{\Omega} \sigma \mu \, dx - \int_{\Omega} \nabla \mu \cdot \nabla u \, dx = 0 \quad \forall \mu \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

En Ce formulation mixte, le problème biharmonique est divisé en deux problèmes d'ordre deux, nous avons seulement besoin d'utiliser des espaces d'éléments finis qui sont des sous-espaces d'éléments.  $H^1(\Omega)$ , i.e.,  $C^0$  éléments.

1. Il n'est pas facile de trouver des formulations mixtes corrects pour plus compliqués problèmes d'ordre quatre.
2. Dans la formulation mixte, nous utilisons un espace d'éléments finis pour l'inconnu  $\omega$  et un espace d'éléments finis pour u. la méthode mixte ne fonctionne que si la

paire d'éléments finis satisfait la Ladyzhenskaya - état Brezzi - Babuska.

Il N'est pas facile de trouver de telles paires d'éléments finis !

3. A la fin on a encore besoin de résoudre un problème de point de selle, ce qui est plus compliqué de résoudre un problème de SPD.

Les inconvénients des méthodes d'éléments finis classiques pour des problèmes d'ordre quatre con être surmontés par des méthodes de pénalité intérieur.

## 4.2 FORMULATION DU PROBLÈME PAR MÉTHODE SIP

---

Les inconvénients des méthodes d'éléments finis classiques pour des problème d'ordre quatre peuvent être surmontés par des méthodes de pénalisation intérieur. La méthode que nous somme entrain d'utiliser est la méthode "  $C^0$  Symmetric Interior Penalty Methode" en Anglais.

**Notation 4.2.1** Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation régulière de  $\Omega$ .

On considère l'espace des éléments finis continus de Lagrange :

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); v|_T \in \mathbb{P}_k(T), (k \geq 2), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \quad (4.3)$$

Alors il est claire que  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ .

Si  $e$  une arête intérieure commune de  $T^\pm$  (voir la figure 4.1).

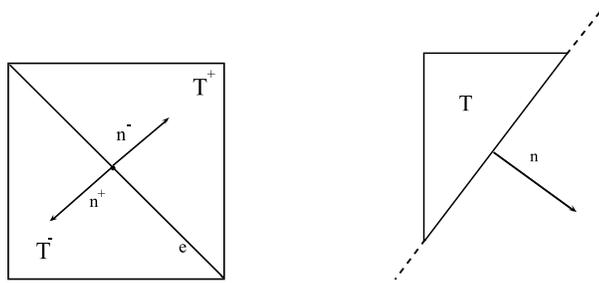


FIGURE 4.1 – deux triangles adjacents et un triangle du bord

Alors on définit le **saut** et la **moyenne** sur une arête intérieure  $e$  par :

$$[[v]] = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+ \quad \text{et} \quad \{v\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}.$$

Pour les problèmes d'ordre quatre on définit :

$$\left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = \mathbf{n} \cdot (\nabla^2 v) \mathbf{n}$$

Si  $e$  une arête du bord (voir la figure 4.1) alors

$$[[v]] = v_T \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \{\{\nabla v\}\} = \nabla v_T.$$

Du lemme (2.3.5) (puisque  $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot n$ ), on peut déduire facilement que :

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \| \{ \{ \nabla v \} \} \|_{0,e}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{1,T}^2. \quad (4.4)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \| \{ \{ \partial v^2 / \partial n^2 \} \} \|_{L_2(e)}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2. \quad (4.5)$$

La formulation variationnelle SIP est basé sur le résultat suivant :

**Lemme 4.2.2** *Soit  $u$  solution de (4.1), si  $u \in H^4(\Omega)$ ,  $v \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$ . Alors*

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds.$$

Où

$$\nabla^2 u : \nabla^2 v = \sum_{i,j=1}^2 \partial_{ij}^2 u \, \partial_{ij}^2 v.$$

**Preuve.** Nous avons (par intégration par parties) :

$$\begin{aligned} \int_T (\Delta^2 u) v \, dx &= \int_T \Delta(\Delta u) v \, dx \\ &= \int_{\partial T} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v \, ds - \int_T \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\partial T} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v \, ds - \int_{\partial T} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_T \Delta u \Delta v \, dx, \end{aligned}$$

mais on a :

$$\begin{aligned} \int_T \Delta u \Delta v \, dx &= \int_T (\partial_1^2 u + \partial_2^2 u)(\partial_1^2 v + \partial_2^2 v) \, dx \\ &= \int_T (\partial_1^2 u \partial_1^2 v + \partial_1^2 u \partial_2^2 v + \partial_2^2 u \partial_1^2 v + \partial_2^2 u \partial_2^2 v) \, dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_T \partial_1^2 u \partial_2^2 v \, dx &= \int_{\partial T} \partial_1^2 u \partial_2 v n_2 \, ds - \int_T \partial_2 \partial_1^2 u \partial_2 v \, dx \\ &= \int_{\partial T} \partial_1^2 u \partial_2 v n_2 \, ds - \int_{\partial T} \partial_2 \partial_1 u \partial_2 v n_1 \, ds + \int_T \partial_2 \partial_1 u \partial_1 \partial_2 v \, dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_T \partial_2^2 u \partial_1^2 v \, dx &= \int_{\partial T} \partial_2^2 u \partial_1 v n_1 \, ds - \int_T \partial_1 \partial_2^2 u \partial_1 v \, dx \\ &= \int_{\partial T} \partial_2^2 u \partial_1 v n_1 \, ds - \int_{\partial T} \partial_2 \partial_1 u \partial_1 v n_2 \, ds + \int_T \partial_2 \partial_1 u \partial_1 \partial_2 v \, dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_T \Delta u \Delta v dx &= \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v dx + \int_{\partial T} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\partial T} \partial_2 \partial_1 u \partial_2 v n_1 ds - \int_{\partial T} \partial_2 \partial_1 u \partial_1 v n_2 ds \\
&= \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v dx + \int_{\partial T} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\partial T} \partial_1 \partial_2 u n_1 \partial_2 v ds - \int_{\partial T} \partial_2 \partial_1 u n_2 \partial_1 v ds \\
&= \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v dx - \int_{\partial T} \frac{\partial(\partial_2 u)}{\partial n} \partial_2 v ds - \int_{\partial T} \frac{\partial(\partial_1 u)}{\partial n} \partial_1 v ds.
\end{aligned}$$

On note que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n} &= n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} = n_1 \frac{\partial}{\partial n} + n_2 \frac{\partial}{\partial t} \\
\frac{\partial}{\partial t} &= -n_2 \frac{\partial}{\partial x} + n_1 \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} = n_2 \frac{\partial}{\partial n} + n_1 \frac{\partial}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx = \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v dx + \int_{\partial T} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v ds - \int_{\partial T} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds - \int_{\partial T} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial t} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) ds.$$

Par sommation sur tous les triangles de  $\mathcal{T}_h$  en utilisant le fait que  $v$  est l'interpolé de Lagrange donc

$$[[v]]_e = \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \right] \right]_e = 0,$$

et le fait que  $u \in H^4(\Omega)$  donc

$$\left[ \left[ \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} \right] \right]_e = \left[ \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial t} \right] \right]_e = 0,$$

on obtient :

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds.$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} f v dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds,$$

et puisque  $u \in H^4(\Omega)$ , alors  $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \in H^1(\Omega)$  sa trace est continue sur chaque  $e$ , et donc on peut écrire :

$$\int_{\Omega} f v dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds,$$

et même sous forme symétrique :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \, dx &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \, ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] \, ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \, ds, \end{aligned}$$

puisque les deux derniers termes sont pratiquement nuls. ■

**Remarque 4.2.3** *Les termes de stabilisation ne s'annulent pas lorsqu'on se restreint sur les éléments de l'espace  $V_h$  car les dérivées suivant la normale de ces éléments est discontinue.*

---

### 4.3 LE PROBLÈME DISCRET

---

D'après le lemme précédent, si  $u$  est suffisamment régulière elle résout le problème variationnel suivant :

$$a_h(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_h \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} a_h(w, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 w : \nabla^2 v \, dx \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left( \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] + \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[ \left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] \right) ds \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \left[ \left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds. \end{aligned} \quad (4.7)$$

On définit les espaces de Sobolev suivants :

$$\begin{aligned} H^\ell(\Omega, \mathcal{T}_h) &= \{v \in L^2(\Omega) : v|_T \in H^\ell(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}. \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_h \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.8)$$

**Proposition 4.3.1** *Les deux quantités suivantes  $\|\cdot\|_h$  et  $|||\cdot|||_h$  définissent deux normes sur  $V_h$ . Ces deux normes sont équivalentes sur  $H^3(\Omega, \mathcal{T}_h)$ .*

$$\|v\|_h^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|\llbracket \partial v / \partial n \rrbracket\|_{L_2(e)}^2. \quad (4.9)$$

$$|||v|||_h^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{|e|}{\sigma} \|\{\{\partial v^2 / \partial n^2\}\}\|_{L_2(e)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|\llbracket \partial v / \partial n \rrbracket\|_{L_2(e)}^2.$$

**Preuve.** Il est clair que

$$\|v\|_h \leq |||v|||_h \quad \forall v \in H^3(\Omega, \mathcal{T}_h).$$

D'autre part, on d'après le lemme 2.3.5

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{|e|}{\sigma} \|\{\{\partial v^2 / \partial n^2\}\}\|_{L_2(e)}^2 \leq \frac{C}{\sigma} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2.$$

Ce qui implique que :

$$|||v|||_h \leq C \|v\|_h \quad \forall v \in H^3(\Omega, \mathcal{T}_h) \quad \forall v \in H^3(\Omega, \mathcal{T}_h).$$

■

### Propriété de la forme bilinéaire $a_h(.,.)$

a. La forme bilinéaire  $a_h(.,.)$  est continue

$$a_h(w, v) \leq 2\|w\|_h\|v\|_h \quad \forall v, w \in H^3(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (4.10)$$

**Preuve.** Nous avons

$$\begin{aligned} 2\left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right\} \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds \right| &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \left( \frac{|e|}{C} \left\| \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 + \frac{C}{|e|} \left\| \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right) \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w|_{2,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{C}{|e|} \left\| \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right\|_{L_2(e)}^2. \end{aligned}$$

(C est la constante apparait dans le lemme 2.3.5 ) et donc,

$$a_h(w, v) \leq C^* \|w\|_h \|v\|_h \quad \forall v, w \in H^3(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (4.11)$$

■

b. La forme bilinéaire  $a_h(.,.)$  est coercive

$$\begin{aligned} a_h(w, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 w : \nabla^2 v dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left( \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right\} \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] + \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right] \right) ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds. \end{aligned}$$

$$a_h(v, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\nabla^2 v|^2 dx + 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds.$$

**Lemme 4.3.2** Pour  $\sigma$  suffisamment grand  $a_h(.,.)$  est coercitive sur  $V_h$

$$a_h(v, v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_h^2 \quad \forall v \in V_h. \quad (4.12)$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} a_h(v, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\nabla^2 v|^2 dx + 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds \\ &= \|v\|_h^2 + 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que

$$2 \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds \right| \leq \frac{1}{2} \|v\|_h^2.$$

On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} 2 \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds \right| &\leq 2 \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \left\| \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \right\} \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e|^{-1} \left\| \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \left( C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e|^{-1} \left\| \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \delta C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 + \frac{1}{\delta} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e|^{-1} \left\| \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 + 2C \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e|^{-1} \left\| \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right\|_{L_2(e)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^2(T)}^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e|^{-1} \left\| \left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right\|_{L_2(e)}^2 = \frac{1}{2} \|v\|_h^2. \end{aligned}$$

■

---



---

## 4.4 ESTIMATION D'ERREUR A PRIORI

---



---

### 4.4.1 L'estimation concrète

**Théorème 4.4.1** *Soit  $f \in H^l(\Omega)$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) et  $u \in H^s(\Omega)$  avec  $s \in (2, l + 4]$  la solution du problème (4.1). Alors nous avons l'estimation d'erreur suivante*

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch^{\min(s, k+1)-2}. \quad (4.13)$$

Où  $u_h$  est la solution du problème approcher (4.8), avec  $k \geq 2$  est l'ordre de l'espace  $V_h$  de l'élément finis de Lagrange.

**Preuve.** D'après (4.3.1) et l'estimation d'erreur d'interpolation suivante ([12, 7]) Soit  $\Pi : C(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$  l'opérateur de Lagrange.

$$\begin{aligned} & h_T^{-2\gamma} \|\xi - \Pi_h \xi\|_{L^2(T)}^2 + h_T^{2(1-\gamma)} |\xi - \Pi_h \xi|_{H^1(T)}^2 + h_T^{2(2-\gamma)} |\xi - \Pi_h \xi|_{H^2(T)}^2 \\ & \leq C \|\xi\|_{H^s(T)}^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \xi \in H^s(T). \end{aligned}$$

On

$$\|u - \Pi_h u\|_h \leq Ch^{\min(s, k+1)-2}. \quad (4.14)$$

De plus, par l'estimation d'erreur standard pour projection orthogonal  $P_k(\Omega)$ , donc

$$Osc_k(f) = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - \bar{f}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \leq Ch^{2+\min(l, k+1)}. \quad (4.15)$$

De plus nous avons

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left[ \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h + Osc_j(f) \right].$$

■

### 4.4.2 Poste-Traitement

Soit  $\tilde{E}_h : V_h \rightarrow H_0^2(\Omega)$  l'opérateur d'enrichissement définit dans le chapitre précédent. La fonction d'élément finit  $C^1$  de  $\tilde{E}_h u_h$  obtenu à partir de  $u_h$  par le poste-traitement donne l'approximation de  $u$  dans l'espace  $H^2(\Omega)$ .

**Théorème 4.4.2** *Sous les hypothèse du Théorème (4.4.1), nous avons :*

$$|u - \tilde{E}_h u_h|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^{\min(s,k+1)-2}. \quad (4.16)$$

**Preuve.** On conclut à partir du corollaire (3.3.2), (3.3), Théorème (4.4.1) et (4.4.1) que

$$\begin{aligned} |u - \tilde{E}_h u_h|_{H^2(\Omega)} &\leq |u - \tilde{E}_h \Pi_h u|_{H^2(\Omega)} + |\tilde{E}_h(\Pi_h u - u_h)|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C(h^{\min(s,k+1)-2} + \|\Pi_h u - u_h\|_h) \\ &\leq C(h^{\min(s,k+1)-2} + \|\Pi_h u - u\|_h + \|u - u_h\|_h) \\ &\leq Ch^{\min(s,k+1)-2}. \end{aligned}$$

Donc la méthode de "C<sup>0</sup> interior penalty method" est aussi appropriée pour calculer les solutions approximatives pour le problème d'ordre quatre.

■

---

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

---

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la méthode de pénalisation intérieur ([3]) cette méthode peut être prolongée à des domaines et à des solutions non réguliers. En construisant une application  $E_h$  défini pour les éléments finis de classe  $C^0$ , qui envoie ces éléments à des éléments de classe  $C^1$ . Cette méthode "SIP" permet de construire une solution approchée de classe  $C^1$  par la procédure de post-traitement.

Les méthodes de "SIP" ont des avantages par rapport aux méthodes classiques finis non conformes d'éléments qui ne sont pas facile à implémentés. L'approche développée dans ce mémoire peut également être appliquée aux conditions aux limites générales et les problèmes d'interfaces limite.

Par conséquent, l'opérateur  $E_h$  joue un rôle essentiel dans l'estimation d'erreur.

Les méthodes "SIP" peuvent appliquée aux problèmes de perturbations singulières, problème d'ordre quatrième, problèmes non linéaires elliptiques ([4]).

La généralisation aux problème 3D et les systèmes d'équations aux dérivées partielles est mise comme une perspective.

---

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. Sobolev spaces, 2003.
- [2] J.H. Bramble and S.R. Hilbert. Estimation of linear functionals on sobolev spaces with applications to fourier transforms and spline interpolation. 1970.
- [3] J.H. Bramble and X. Zhang. Multigrid methods for the biharmonic problem discretized by conforming  $c^1$  finite elements on nonnested meshes. 1996.
- [4] S.C. Brenner. Convergence of nonconforming multigrid methods without full elliptic regularity. 1999.
- [5] S.C. Brenner. Two-level additive schwarz preconditioners for nonconforming finite elements. Contemporary Mathematics 180.
- [6] S.C. Brenner and L.-Y. Sung.  $c^0$  interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains. 2005.
- [7] P.G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. 1978.
- [8] T. Dupont and R. Scott. Polynomial approximation of functions in sobolev spaces. 1980.
- [9] H.Brezis. Analyse fonctionnelle. 1983.

- [10] P.A.RAVIAT and J.M.THOMAS. Introduction à l'analyse numérique des équation aux dérivées partielles.
- [11] Brenner S and Scott R. The mathematical theory of finite element methods. 2007.
- [12] M. Neilan S.C. Brenner and L.-Y. Sung. Isoparametric  $c^0$  interior penalty methods for plate bending problems on smooth domains. 2011.

## ملخص

في هذه المذكرة نهتم بدراسة تقنية " Oswald " لتشكيل دوال من الصنف  $C^1$  من خلال دوال مستمرة فقط.

هذه التقنية ذات تطبيقات عديدة خاصة في طريقة العناصر المنتهية.

بالأخذ بالاعتبار حالة مجال محدود منتظم  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  من الفئة  $C^{1,1}$ .

**الكلمات المفتاحية:** استقطاب , فراغ سوبولوف, تقدير الخطأ .

## Abstract

In this paper we look at the Oswald averaging technique for constructing functions globally  $C^1$  and piecewise polynomial class from functions that only continuous and use of operator interpolation resulting in context of the finite element method.

One considers the case of a smooth bounded domain

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  of class  $C^{1,1}$ .

**Keywords :** interpolation, space of sobolev, error estimate.