UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :khoukhou sabah

Thème

Étude de quelques problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires

Version de : 01/06/2016

Devant le jury composé de :

M. Abbassi Hossine	M. A. UKMO université-Ouargla	Président
M. Tellab. Brahim	M. A. UKMO université-Ouargla	Rapporteur
M.Mammeri.Mohammed	M. A. UKMO université-Ouargla	Examinateur(1)
M. Bencheikh. Abdelkrim	M. A. UKMO université-Ouargla	Examinateur(2)

l'année universitaire :2015/2016

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère "Zohra" rahimaha elahe,
A mon cher père "Ahmed"
Qui m'ont aide à affronter les difficultés,
A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.
A mes très chères soeurs et mons frères.
A toute ma famille.
A tous les amis.
Pour chacun des mentionné mon coeur et oublié mon stylo .
A tous.

Remerciements

En premier lieu, je tient à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant, de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .
Je tient à exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire, **M : TELLAB Brahim**, pour ces conseils, et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .
Je remercier sincèrement les membres du jury :
M. :Abbassi Hossine, d'avoir accepté la présidence du jury .
Aussi je remercier vivement
M.Mammeri.Mohammed et d'avoir accepté l'examinateur (1) de ce travail.
Et **M. : Bencheikh Abdelkrim** d'avoir accepté l'examinateur (2) de ce travail .
Je les remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail .
Il est important pour moi de remercier ma famille :qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .
Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de KASDI Merbah-Ouargla .
Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donnés .
Merci à tous ceux qui ont contribué, de prés ou de loin, à l'aboutissement de ce travail .

Table des matières

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est un sujet qui n'est pas nouveau. Il généralise la notion de la différentiation et l'intégration d'ordre entier à la différentiation et l'intégration d'ordre non entier. Le sujet est aussi vieux que le calcul différentiel et remonte à l'époque quand Libniz, Gauss, Newton ont inventé ce type de calcul. A la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle où plusieurs mathématiciens, comme par exemple P.S. Laplace (1812), J.B. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), A.K. Grünwald (1867-1872) et A.V. Letnikov (1868-1872) ont contribué à ce sujet (pour plus de détails, consulter [3],[6],[7],[8], [9], [10],[11]). Ces dernières années, il y a eu un développement considérable concernant l'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire, (voir [1], [12], [13], [14], [15]).

De nombreuses définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégration fractionnaire. Pour plus de détails sur ce sujet on pourra consulter ([1], [2], [3], [4]).
Le calcul fractionnaire a plusieurs domaines d'applications, par exemples, en viscoélasticité, théorie du contrôle, equation de diffusion, électricité, biologie, électromagnétiques,... (voir [8],[10],[16],[17]).

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'étude de quelques problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires fractionnaires.

Ce mémoire se décompose de trois châpitres partagés de la manière suivante :

Premier chapitre : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions spécifiques ainsi que quelques définitions et propriétés sur les dérivées et les intégrales fractionnaires utiles tout au long de ce mémoire.

Deuxième chapitre : Dans ce châpitre, nous étudions quelques théorèmes d'existence et d'unicité sur l'espace de fonctions sommables et l'espace de fonctions continues.

Troisième chapitre : Dans ce châpitre, Ce châpitr est consacré à l'étude de la non-existence de solutions des quelques problèmes aux limites fractionnaires.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

1.1 fonction élémentaires

1.1.1 La fonction Gamma et ses propriétés

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, z > 0 \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

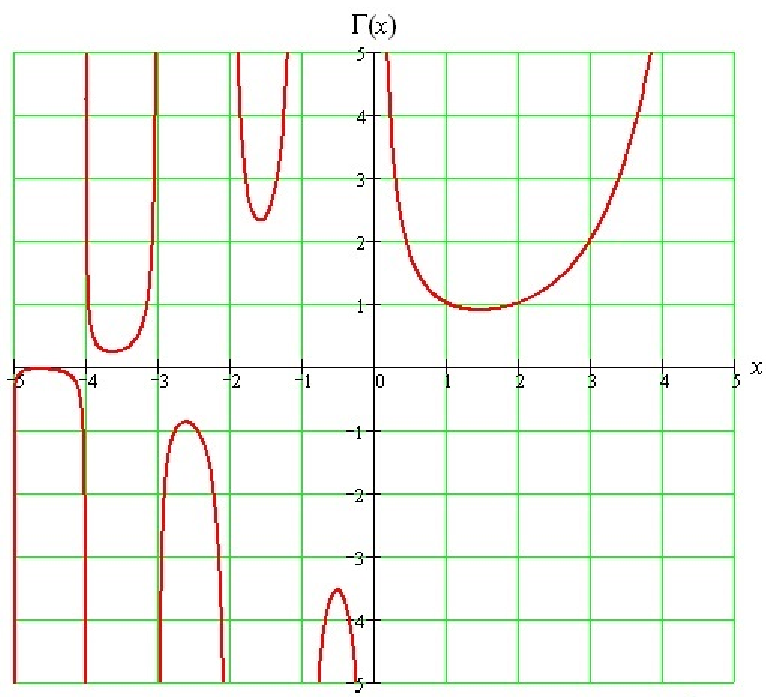

FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction gamma

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.2}$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par partie

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt = \Big[-t^z e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z).$$

La fonction gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$, et en utilisant (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!, \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\
\ldots & \quad .... \quad \ldots \quad \ldots \\
\Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n! \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
De la définition (1.1) nous avons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt.$$

Si nous posons $t = y^2$, alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy. \tag{1.4}$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx. \tag{1.5}$$

Si nous multiplions ensemble (1.4) et (1.5) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy. \tag{1.6}$$

L'équation (1.6) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}drd\theta = \pi. \tag{1.7}$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

L'équation fonctionnelle (1.2) entraine pour les entiers relatifs n (voir [5])

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\\ \Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),\\ \Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9...(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),\end{aligned}$$

et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

1.1.2 La fonction Bêta

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est définie par une intégrale définie. Sa définition est donnée par :

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x,y\in\mathbb{R}_+ \tag{1.8}$$

La fonction de Bêta peut également définie en termes de la fonction Gamma :

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,y\in\mathbb{R}_+ \tag{1.9}$$

1.1.3 La fonction d'erreur

La définition de la fonction d'erreur est donnée par :

$$Erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt, \quad x\in\mathbb{R}_+ \tag{1.10}$$

La fonction d'erreur complémentaire est une fonction étroitement liée qui peut être écrit en termes de la fonction d'erreur de la manière suivante :

$$Erfc(x)=1-Erf(x) \tag{1.11}$$

De la formule (1.10) en résulte que $Erf(0)=0$ et $Erf(\infty)=1$.

1.1.4 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est nommée d'après un mathématicien suédois qui la défini en 1903. Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, e^x, et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire. Les représentations de la fonction Mittag-Leffler à un et à deux paramètres peuvent être définies en terme d'une série de puissances :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha>0, \tag{1.12}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha>0,\beta>0. \tag{1.13}$$

De la définition (1.13), il en résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).$$

En effet, par définition on a,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{xx^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x). \end{aligned} \tag{1.14}$$

La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simples. Par exemple,

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \\ E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x-1}{x} \\ E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x). \end{aligned}$$

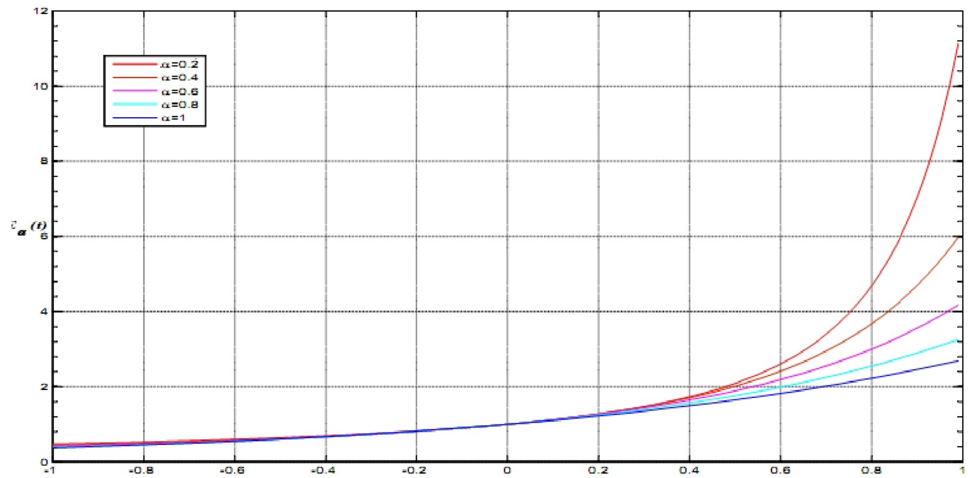

FIGURE 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

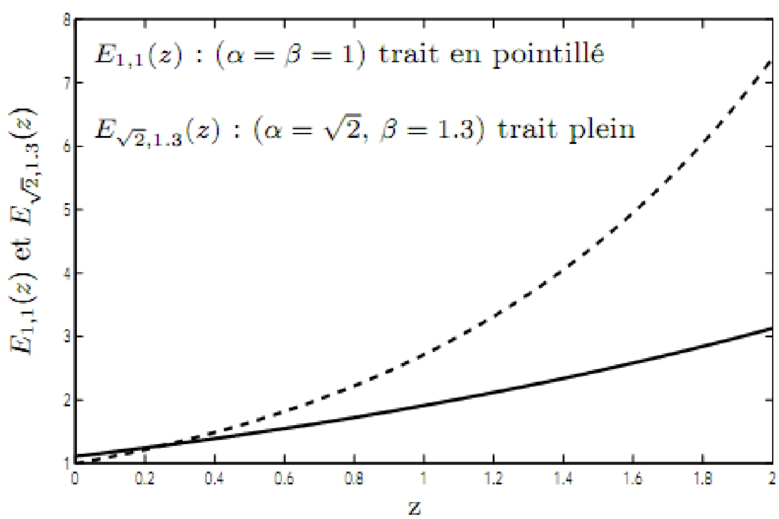

FIGURE 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

1.2 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on considère l'intégrale :

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)$$

Plus généralement le n-ème itéré de l'opérateur I peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} I^{(n)}f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ..... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t). \end{aligned} \tag{1.15}$$

pour tout entier n.
Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann a rendu compte que le second membre de (1.15) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel donc de définir l'intégration fractionnaire .

1.3 Intégrales d'ordre arbitraire

Soit $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, b pouvant être fini ou infini.
Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t)dt \right) ds.$$

Le théorème de Fubini, nous donne :

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

en itérant, on arrive à :

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau.$$

1.4 Intégrale et dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.4.1 *Soit $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale définie par la formule suivante :*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.16}$$

où α est un nombre réel ou complexe.

Remarque 1.4.1

La formule (1.16) est une généralisation de la n-ième primitive avec un ordre de primitivation α non entier.

Remarque 1.4.2

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire sous forme de produit de convolution de la fonction puissance $g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$.

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = g_\alpha(t) \star f(t).$$

1.4.1 Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ où $\beta > -1$.

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variable $\tau = a + (t-a)s$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

La relation (1.17) montre que l'intégrale frctionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par

$${}_a^R D_t^{-\alpha} C = I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha.$$

Et en particulier, si $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} {}^{R}_{a}D_t^{-\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\ {}^{R}_{a}D_t^{-\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\ {}^{R}_{a}D_t^{-\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}. \end{aligned}$$

proposition 1.4.1

Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a,b])$.

$$\text{i)} \quad I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad (\mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \mathrm{Re}(\beta) > 0) \tag{1.18}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{d}{dt}(I_a^{\alpha} f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 1 \tag{1.19}$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} (I_a^{\alpha} f)(t) = f(t), \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{1.20}$$

Preuve :
i) Pour la demonstration on utilise la fonction Bêta d'Euler. En effet :

$$\begin{aligned} [I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f)](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^{\beta} f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds, \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$$[I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right] d\tau.$$

Le changement de variable $s = \tau + (t-\tau)\mu$, nous donne :

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

D'où

$$[I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t)$$

ii) Pour justifier la deuxième identité on utilise les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation fondamentale de la fonction gamma d'Euler :

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$.
iii) Pour la dernière identité, on considère la fonction $f \in C^0([a,b))$, on a

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De la relation (1.17) on peut écrire :

$$(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \longrightarrow 1 \ quand \ \alpha \to 0^+.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\left|(I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a,b)$ qui nous permet d'écrire :

$$\forall t, \tau \in [a,b), \ \ \forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0 : \ \ |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \varepsilon,$$

ce qui entraine :

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha}. \qquad (1.22)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} (|f(\tau)| + |f(t)|) d\tau \\
&\leq 2 \sup_{\xi \in [a,t]} |f(\xi)| \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \ \ \forall t \in [a,b) \\
&= 2M \left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \right), \ \text{où} \ M = \sup_{\xi \in [a,t]} |f(\xi)|. \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

Une combinaison de (1.21), (1.22) et (1.23) nous donne :

$$\begin{aligned}
\left|(I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)\right| &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)],
\end{aligned}$$

en faisant tendre α vers 0^+, on obtient :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left|(I_a^\alpha f)(t)-\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right|\leq\varepsilon$$

autrement dit :

$$\left|\lim_{\alpha\to 0^+}(I_a^\alpha f)(t)-f(t)\right|\leq\varepsilon,\ \ \forall\varepsilon>0,$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}(I_a^\alpha f)(t)=f(t)$$

■

1.4.2 Dérivées d'ordre arbitraire

Définition 1.4.2

Soit $\alpha\in[m-1,m[$ avec $m\in\mathbb{N}^\star$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par

$$\begin{aligned}({}_a^RD_t^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m[(I_a^{m-\alpha}f)(t)] && (1.24)\\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t(t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau,\ \ m-1\leq\alpha<m.\end{aligned}$$

1.4.3 Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Calculons la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)=(t-a)^\beta$.
En utilisant (1.17) on peut écrire

$$\begin{aligned}{}_a^RD_t^\alpha(t-a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta+m-\alpha}\right],\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m(t-a)^{\beta+m-\alpha}, && (1.25)\end{aligned}$$

on sait que

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m(t-a)^{\beta+m-\alpha} = (\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (1.26)$$

Par substitution de (1.26) dans (1.25) on obtient :

$$\begin{aligned}{}_a^RD_t^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. && (1.27)\end{aligned}$$

Remarque 1.4.3

i) La formule de dérivation (1.27) se réduit pour $\alpha = 1$ à

$$ {}_a^R D_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^\beta. \tag{1.28}$$

ii) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on on arrive au résultat suivant :

$$ {}_a^R D_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

c'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle ni constante ! mais on a

$$ {}_a^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Définition 1.4.3 ***(Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)***

$$\forall t > a, \quad {}_a^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Définition 1.4.4 ***(Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)***

$$\forall t > a, \quad {}_a^R D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Les deux définitions précédentes utilisent le passé de f, c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $a < \tau < t$. Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur de f, c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $t < \tau < b$. On définit ensuite les deux opérateurs suivants :

Définition 1.4.5 ***(Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)***

$$\forall t < b, \quad {}_t^R D_b^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau-t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

Définition 1.4.6 ***(Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)***

$$\forall t < b, \quad {}_t^R D_b^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \int_t^b (\tau-t)^{m-\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}_a^R D_t^\alpha f(t)$ et ${}_t^R D_b^\beta f(t)$ sont définies.

1.5 Dérivée fractionnaire de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville mène à des conditions contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = a$.

Une certaine solution de ce problème a été proposée par M. Caputo.

Définition 1.5.1 *Soient $p \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^\star$ avec $n-1 \leq p < n$ et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a,b]$. La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :*

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right). \end{aligned}$$

1.5.1 Relation avec la dérivée Riemann-Liouville

[3] Soient $p \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^\star$ avec $n-1 \leq p < n$. Si ${}_a^C D_t^p f(t)$ et ${}_a^R D_t^p f(t)$ existent, alors on a :

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}, \tag{1.29}$$

de (1.29), on déduit que

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t),$$

si $f^{(k)} = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

1.5.2 Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

[3] Si f est une fonction continue, alors :

$$ {}_a^C D_t^p I_a^p f(t) = f(t) \tag{1.30}$$

et

$$ I_a^p \, {}_a^C D_t^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}. \tag{1.31}$$

Ce qui preuve que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse droit.

1.5.3 Dérivées de quelques fonctions usuelles au sens de Caputo

• **La dérivée de la fonction** $f(t) = (t-a)^\alpha$
Soient n un nombre entier et p un nombre non entier avec $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > n-1$. Alors

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau-a)^{\alpha-n},$$

d'où
$$ {}_{a}^{C}D_t^p(t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau. $$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ nous arrivons à :

$$
\begin{aligned}
{}_{a}^{C}D_t^p(t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_0^1 (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}
$$

• **La dérivée d'une fonction constante** [3]
La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit : ${}_{a}^{C}D_t^p C = 0$.

Chapitre 2

Quelques théorèmes d'existence et d'unicité pour des équations différentielles fractionnaires ordinaires

Ce Châpitre est consacré à prouver l'existence et l'unicité de solutions de quelques problèmes de Cauchy, pour des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire sur un intervalle borné, dans des espaces de fonctions sommables et de fonctions continues.

2.1 Préliminaires

Définition 2.1.1 *Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$. les intégrales fractionnaires d'ordre α à gauche et à droite de Riemann-Liouville sont définies respectivement par :*

$$(I^{\alpha}_{a^+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (x > a) \tag{2.1}$$

et

$$(I^{\alpha}_{b^-} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad (x < b). \tag{2.2}$$

Définition 2.1.2 *On définit l'équation intégrale non linéaire de Volterra du deuxième espèce par la formule suivante :*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (x-a)^{\alpha - k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}}, \qquad (x > a) \tag{2.3}$$

Définition 2.1.3 *On définit l'espace $L^{\alpha}(a, b)$ pour $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$, par :*

$$L^{\alpha}(a, b) = \left\{ y(x) \in L(a, b) : (D^{\alpha}_{a^+} y)(x) \in L(a, b) \right\} \tag{2.4}$$

Dans cette définition, $L(a, b) = L^1(a, b)$ est l'espace de fonctions sommables sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.1.4 *On dit que la fonction $f(x,y)$ est lipschitzienne de rapport $k>0$ par rapport à y si, $\forall x \in [a,b]$ et $\forall y_1, y_1 \in D \subset \mathbb{C}$, on a :*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|, \tag{2.5}$$

où k ne dépend pas de x.
• *Si $0 \leq k \leq 1$, on dit que f est une contraction.*

Théorème 2.1.1 ***(Théorème du point fixe de Banach)*** *Soient U un espace de Banach et $T : U \longrightarrow U$ une application contractante. Alors T admet un point fixe i.e.*

$$\exists! x \in U : Tx = x.$$

Théorème 2.1.2 *Soit T une application définie sur un espace de Banach U telle que T^N soit une contraction sur U pour un entier positif N. Alors T admet un point fixe unique*

Lemme 2.1.1 *L'opérateur d'intégration fractionnaire I^{α}_{a+}avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) > 0)$ est borné sur $L^1(a,b)$ et on a :*

$$\|I^{\alpha}_{a^+} g\|_1 \leq \frac{(b-a)^{Re(\alpha)}}{Re(\alpha)\Gamma(\alpha)} \|g\|_1. \tag{2.6}$$

En particulier, pour $\alpha > 0$, l'estimation (2.6) prend la forme suivante :

$$\|I^{\alpha}_{a^+} g\|_1 \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|g\|_1. \tag{2.7}$$

Preuve : Pour la prouve, on renvoit à [1]

■

2.2 Equivalence du problème de Cauchy et de l'équation intégrale de Volterra

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (D^{\alpha}_{a+} y)(x) = f(x, y(x)), \quad (\alpha > 0) \\ \\ (D^{\alpha-k}_{a+} y)(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad (k = 1, ..., n = -[-\alpha]) \end{cases} \tag{2.8}$$

Théorème 2.2.1 *Soient $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$, G un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in L(a,b)$ pour tout $y \in G$. Alors $y(x) \in L(a,b)$ satisfait la première et la deuxième relations dans* (2.8) *si et seulement si $y(x)$ satisfait l'équation intégrale (2.3).*

Preuve : Pour la preuve, on pourra consulter [1]

■

2.3 Problème de Cauchy pour une équation différentielle fractionnaire de Riemann-Liouville dans l'espace de fonctions sommables

2.3.1 Existence et unicité de solutions du problème de Cauchy

Dans ce paragraphe, nous établissons l'existence et l'unicité de solutions d'un problème de Cauchy dans l'espace $L^{\alpha}(a,b)$.

Théorème 2.3.1 *Soient $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$. Soit G un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in L(a,b)$ pour tout $y \in G$ et f Lipschitzienne de rapport k par rapport à y. Alors, il existe une solution unique $y(x)$ du problème de Cauchy* (2.8) *dans l'espace $L^{\alpha}(a,b)$.*

Preuve :
D'après le théorème 2.2.1, Pour prouver l'existence d'une solution $y(x) \in L(a,b)$ du problème (2.8), il suffit de prouver l'existence d'une solution $y(x) \in L(a,b)$ de l'équation intégrale non linéeaire de Volterra (2.3).
Pou cela, nous appliquons une méthode connue à l'équation intégrale (2.3) et nous prouvons d'abord le premier résultat sur une partie de l'intervalle $[a,b]$. (voir [18]).
L'équation intégrale (2.3) a un sens sur tout intervalle $[a,x_1] \subset [a,b]$ $(a < x_1 < b)$.
On choisit maintenant x_1 tel que

$$k\frac{(x_1-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{2.9}$$

et on prouve l'existence d'une solution $y(x) \in L(a,x_1)$ de l'équation intégrale (2.3) sur l'intervalle $[a,x_1]$.
Pour cela, nous appliquons le théorème du point fixe de Banach dans l'espace $L(a,x_1)$ qui est un espace métrique complet pour la distance

$$d(y_1,y_2) = \|y_1-y_2\|_1 = \int_a^{x_1} |y_1(x)-y_2(x)|dx \tag{2.10}$$

Réécrivons l'équation intégrale (2.3) sous la forme $y(x) = (Ty)(x)$, où

$$(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t,y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \tag{2.11}$$

avec

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}(x-a)^{\alpha-k}. \tag{2.12}$$

Pour appliquer le théorème du point fixe de Banach, nous devons prouver les hypothèses suivants :
• Si $(y(x) \in L(a,x_1)$, alors $(Ty)(x) \in L(a,x_1)$.
• Pour tout $y_1, y_2 \in L(a,x_1)$, on a :

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_1 \leq \lambda\|y_1-y_2\|_1, \quad \lambda = k\frac{(x_1-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.13}$$

De (2.12), il vient $y_0 \in L(a, x_1)$.
Puisque $f(x, y) \in L(a, b)$, alors par le lemme $(2.1.1)$ avec $b = x_1$ et $g(t) = f(t, y(t))$, l'intégrale dans le coté droit de (2.12) est également dans $L(a, x_1)$ et par conséquent

$$(Ty)(x) \in L(a, x_1).$$

Maintenant, nous prouvons l'estimation (2.13).
Une combinaison de (2.11), (2.12) et (2.9), en utilisant la condition de Lipschitz (2.5) et la relation (2.7) (avec $b = x_1$ et $g(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)))$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\|_{L(a,x_1)} &\leq \|I^{\alpha}_{a+}\big[f(x, y_1(x) - f(x, y_2(x)\big]\|_{L(a,x_1)} \\ &\leq k\|I^{\alpha}_{a+}\big[y_1(x) - y_2(x)\big]\|_{L(a,x_1)} \\ &\leq k\frac{(x_1 - a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}\|y_1(x) - y_2(x)\|_{L(a,x_1)}, \end{aligned}$$

d'où la relation (2.13) est démontrée.
En tenant compte de la condition (2.13) et le fait que $0 < \lambda < 1$, alors par le théorème $(2.1.1)$, on déduit qu'il existe une solution $y^{\star}(x) \in L(a, x_1)$ de l'équation intégrale (2.3) dans l'intervalle $[a, x_1]$.
Par le théorème $(2.1.1)$, la solution $y^{\star}$ est obtenue comme une limite de la suite convergente $T^m y_0^{\star}(x)$, autrement dit :

$$\lim_{m\to+\infty} \|T^m y_0^{\star} - y^{\star}\|_{L(a,x_1)} = 0, \tag{2.14}$$

où, $y^{\star}(x)$ est une fonction quelconque dans $L(a, b)$.

Si au moins un $b_k \neq 0$ dans la condition initiale de notre problème de Cauchy (2.6), Alors, nous pouvons prendre $y_0^{\star}(x) = y_0(x)$ avec $y_0(x)$ est définie par (2.12).
En exploitant (2.12), alors la suite $(T^m y_0^{\star})(x)$ sera définie par la relation de récurrence :

$$(T^m y_0^{\star})(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t, (T^{m-1}y_0^{\star})(t))}{(x - t)^{1-\alpha}}dt. \quad (m = 1, 2, ...) \tag{2.15}$$

Si nous posons $(y_m(x) = T^m y_0^{\star})(x)$, alors la dernière relation prend la forme :

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t, y_{m-1}(t))}{(x - t)^{1-\alpha}}dt, \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{2.16}$$

et (2.14) peut s'écrire sous la forme :

$$\lim_{m\to\infty} \|y_m - y^{\star}\|_{L(a,x_1} = 0. \tag{2.17}$$

Cela signifie que nous pouvons appliquer en fait la méthode des approximations successives pour trouver une solution unique $y^{\star}(x)$ de l'équation intégrale (2.3) sur l'intervalle $[a, x_1]$.
Ensuite, nous considérons l'intervalle $[x_1, x_2]$, où $x_2 = x_1 + h_1$ avec $h_1 > 0$ tels que $x_2 < b$.
Réécrivons l'équation intégrale (2.3) sous la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^x \frac{f(t, y(t))}{(x - t)^{1-\alpha}}dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)}(x - a)^{\alpha-k} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_1} \frac{f(t, y(t))}{(x - t)^{1-\alpha}}dt \end{aligned} \tag{2.18}$$

Etant donné que la fonction $y(t)$ est définie de manière unique sur l'intervalle $[a, x_1]$, la dernière intégrale peut être considérée comme une fonction connue et la dernière équation peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x} \frac{f(t, y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} d; t \tag{2.19}$$

où $y_{01}(x)$ est une fonction connue définie par :

$$y_{01}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (x-a)^{\alpha - k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x_1} \frac{f(t, y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \tag{2.20}$$

En utilisant les mêmes arguments comme ci-dessus, nous déduisons qu'il existe une solution unique $y^\star(x) \in L(x_1, x_2)$ de l'équation intégrale (2.3) sur l'intervalle $[x_1, x_2]$
Prenons de même l'intervalle suivant $[x_2, x_3]$ où $x_3 = x_2 + h_2$, $(h_2 > 0)$ tels que $x_3 < b$.
En répétant ce processus, nous concluons qu'il existe une solution unique $y^\star(x) \in L(a, b)$ de l'équation intégrale (2.3) sur l'intervalle $[a, b]$.
Par conséquent, il existe une solution unique $y(x) = y^\star(x) \in L(a, b)$ de l'équation intégrale de Volterra (2.3) et donc du problème de Cauchy (2.6).
Pour compléter la démonstration du théorème $(2.3.1)$, nous devons montrer qu'une telle solution unique $y(x) \in L(a, b)$ appartient à l'espace $L^\alpha(a, b)$.
Conformément à (2.4), il suffit de prouver que $D^\alpha_{a+}y)(x) \in L(a, b)$.
Par la démonstration ci-dessus, la solution $y(x) \in L(a, b)$ est une limite de la suite $y_m(x) \in L(a, b)$, i.e.

$$\lim_{m \to \infty} \|y_m - y\|_1 = 0, \tag{2.21}$$

avec le choix de certains y_m sur chaque intervalle $[a, x_1], ..., [x_{L-1}, b]$.
Par (2.3) et (2.5), nous obtenons :

$$\|D^\alpha_{a+}y_m - D^\alpha_{a+}y\|_1 = \|f(x, y_m) - f(x, y)\|_1 \leq \|y_m - y\|_1. \tag{2.22}$$

Ainsi, par (2.21), nous arrivons à :

$$\lim_{m \to \infty} \|D^\alpha_{a+}y_m - D^\alpha_{a+}y\|_1 = 0,$$

et par conséquent,

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) \in L(a, b).$$

Car $y(x) \in L(a, b)$ et $(D^\alpha_{a+}y)(x) \in L(a, b)$ alors la solution $y(x) \in L^\alpha(a, b)$.
Ceci achève la démonstration du théorème $2.3.1$.

■

2.4 Problème de Cauchy pour une équation différentielle fractionnaire de Riemann-Liouville dans l'espace de fonctions continues

Définition 2.4.1 *Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et soit $m \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^m(\Omega)$ l'espace de fonctions f m-fois continûment différentiables sur Ω pour la norme :*

$$\|f\|_{C^m} = \sum_{k=0}^{m} \|f^{(k)}\|_C = \sum_{k=0}^{m} \max_{x\in\Omega} |f^{(k)}(x)|, \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{2.23}$$

En particulier, pour $m = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ est l'espace de fonctions continues sur Ω pour la norme :

$$\|f\|_C = \max_{x\in\Omega} |f(x)|. \tag{2.24}$$

Définition 2.4.2 *Pour $n - 1 < \alpha \leq n$ $(n \in \mathbb{N})$, on définit l'espace $C^\alpha_{n-\alpha}[a, b]$ par :*

$$C^\alpha_{n-\alpha}[a, b] = \big\{y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b] : (D^\alpha_{a^+}y)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]\big\}, \tag{2.25}$$

où $C_{n-\alpha}[a, b]$ désigne l'espace de fonctions continues défini par :

$$C_{n-\alpha}[a, b] = \big\{g(x) : (x - a)^{n-\alpha}g(x) \in C[a, b]; \|g\|_{C_{n-\alpha}} = \|(x - a)^{n-\alpha}g(x)\|_C\big\}. \tag{2.26}$$

En particulier, si $\alpha = n$ $(n \in \mathbb{N})$, l'espace $C^n_0[a, b]$ coincide avec l'espace $C^n[a, b]$ de fonctions g continûment différentiables jusqu'à l'ordre n sur $[a, b]$, i.e. $C^n_0[a, b] = C^n[a, b]$.

Lemme 2.4.1 *[1] Si $\gamma \in \mathbb{R}$ $(0 \leq \gamma < 1)$, alors l'opérateur d'intégration fractionnaire $I^\alpha_{a^+}$ avec $(\alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0)$ est borné dans l'espace $C_\gamma[a, b]$ et on a :*

$$\|I^\alpha_{a^+}g\|_{C_\gamma} \leq (b - a)^\alpha \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha - \gamma)} \|g\|_{C_\gamma} \tag{2.27}$$

Lemme 2.4.2 *[1] Soient $\gamma \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, $g \in C_\gamma[a, c]$ et $g \in C_\gamma[c, b]$. Alors, $g \in C_\gamma[a, b]$ et*

$$\|g\|_{C_\gamma[a,b]} \leq \max\big(\|g\|_{C_\gamma[a,c]}, \|g\|_{C_\gamma[c,b]}\big).$$

Théorème 2.4.1 *Soit $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$, G un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x, y) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ pour tout $y \in G$.*
Supposons que $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$. Alors, $y(x)$ est solution du problème (2.8) si et seulement si, $y(x)$ satisfait vérifie l'équation intégrale de Volterra (2.3).

Preuve : Pour la preuve, on renvoit à [1]

■

2.4.1 Existence et unicité de solutions du problème de Cauchy

Dans ce paragraphe, nous établissons l'existence d'une solution unique du problème de Cauchy (2.8) dans l'espace $C^{\alpha}_{n-\alpha}[a,b]$.

Théorème 2.4.2 *Soient $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$, G un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ pour tout $y \in G$ et f lipschitzienne en y de rapport k. Alors, le problème de Cauchy (2.8) admet une solution unique $y(x)$ dans l'espace $C^{\alpha}_{n-\alpha}[a,b]$.*

Preuve :
Premièrement, nous prouvons l'existence d'une solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$. D'après le théorème 2.4.1, il suffit de démontrer l'existence d'une solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ de l'équation intégrale de Volterra (2.3).
Pou cela, d'une manière analogue que celle utilisée au théorème 2.3.1, l'équation intégrale (2.3) a un sens dans n'importe quel intervalle $[a,x_1] \subset [a,b]$ $(a < x_1 < b)$.
On choisit x_1, de telle sorte que :

$$k(x_1 - a)^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(2\alpha - n + 1)} < 1, \tag{2.28}$$

et on preuve l'existence d'une solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,x_1]$ de l'équation intégrale (2.3) sur l'intervalle $[a,x_1]$.
Pour cela nous utilisons le théorème du point fixe de Banach dans l'espace $C_{n-\alpha}[a,b]$ qui est complet pour la distance

$$d(y_1,y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} = \max_{x\in[a,x_1]} |(x-a)^{n-\alpha}[y_1(x) - y_2(x)]|. \tag{2.29}$$

Nous réécrivons l'équation intégrale (2.3) sous la forme :

$$y(x) = (Ty)(x) \tag{2.30}$$

où T est l'opérateur défini par (2.11) et $y_0(x)$ la fonction définie par (2.12). Pour appliquer le théorème du point fixe de Banach, nous devons prouver les deux assertions suivantes :
1) Si $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,x_1]$, alors $(Ty)(x) \in C_{n-\alpha}[a,x_1]$.
2) Pour tout $y_1, y_2 \in C_{n-\alpha}[a,x_1]$, on a :

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} \leq \lambda\|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]}, \quad \lambda = k(x_1 - a)^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(2\alpha - n + 1)}. \tag{2.31}$$

Il résulte de (2.12) que $y_0(x) \in C_{n-\alpha}[a,x_1]$.
Puisque $f(x,y(x)) \in C_{n-\alpha}[a,x_1]$, alors par le lemme $2.4.1$ (avec $\gamma = n - \alpha, b = x_1$ et $g(t) = f(t,y(t))$), l'intégrale dans le côté droit de (2.11) appartient aussi à $C_{n-\alpha}[a,x_1]$, et par conséquent $(Ty)(x) \in C_{n-\alpha}[a,x_1]$.
Maintenant, nous prouvons l'estimation (2.31).
Par (2.12) et (2.1), en utilisant la condition de Lipschitz et en appliquant la relation (2.27) (avec $\gamma = n - \alpha, b = x_1$ et $g(x) = f(x,y_1(x)) - f(x,y_2(x))$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} &\leq \|I^{\alpha}_{a^+}[\|f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} \\ &\leq k\|I^{\alpha}_{a^+}[\|y_1(t) - y_2(t)\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} \\ &\leq k(x_1 - a)^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(2\alpha - n + 1)\alpha}\|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

ceci, termine la preuve de l'estimation (2.31).
Donc par le théorème 2.1.2, il existe une solution unique $y^\star(x) = y_0^\star(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$ de l'équation intégrale (2.3) sur l'intervalle $[a, x_1]$. et cette solution $y^\star(x)$ est la limite de la suite convergente $(T^m y_0^\star)(x)$ autrement dit :

$$\lim_{m\to+\infty} \|T^m y_0^\star - y^\star\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} = 0, \tag{2.33}$$

où $T^m y_0^\star(x)$ est une fonction quelconque dans $C_{n-\alpha}[a, x_1]$.
Si au moins un $b_k \neq 0$, à la condition initiale du problème (2.8), on peut prendre $y_0^\star(x) = y_0(x)$, où $y_0(x)$ est définie par (2.12).
La relation (2.33) peut se réécrire sous la forme :

$$\lim_{m\to+\infty} \|y_m^\star - y\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} = 0, \tag{2.34}$$

où

$$y_m(x) = (T^m y_0^\star)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, (T^{m-1}y_0^\star)(t))dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{2.35}$$

Ensuite, nous considérons l'intégrale $[x_1, x_2]$, avec $x_2 = x_1 + h_1$ et $h_1 > 0$ tels que $x_2 < b$.

Réécrivons l'équation (2.3) sous la forme (2.16) où $y_{01}(x)$ définie par (2.17) et la fonction connue
En utilisant les mêmes arguments, nous déduisons qu'il existe une solution unique $y_1^\star(x) \in C_{n-\alpha}[x_1, x_2]$ de l'équation (2.3) dans l'intervalle $[x_1, x_2]$. En prenant l'intervalle $[x_2, x_3]$ où $x_3 = x_2 + h_2$ et $h_2 > 0$ tels que $x_3 < b$. En répétant ce processus nous constatons qu'il existe une unique solution $y(x)$ de l'équation (2.3) telle que $y(x) = y^{\star k}(x)$ et $y^{\star k}(x) \in C_{n-\alpha}[x_{k-1}, x_k]$ où $(k = 1, ..., L)$ et $a = x_0 < x_1 < ... < x_l = b$.

Alors par lemme $2.4.2$, il existe une solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$.
Donc, il existe une solution unique $y(x) = y^\star(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ de l'équation intégrale de volterra (2.3) et donc du problème de Cauchy (2.8) .
Nous devons démontrer maintenant qu'une telle solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ appartient à l'espace $C^\alpha_{n-\alpha}[a, b]$.
Conformément à la définition $2.4.2$, il suffit de prouver que $(D^\alpha_{a+}y)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$. Par la preuve ci-dessus solution $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ est une limite de la suite $y_m(x)$, où $y = (T^m y_0^\star)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|y_m - y\|_{C_{n-\alpha}[a,b]} = 0 \tag{2.36}$$

avec le choix d'un certain y_m sur chaque intervalle $[a, x_1]....[x_{L-1}, b]$ et par (2.3) et (2.5) nous avons :

$$\begin{aligned} \|D^\alpha_{a+}y_m - D^\alpha_{a+}y\|_{C_{n-\alpha}[a,b]} &= \|f(x, y_m) - f(x, y)\|_{C_{n-\alpha}[a,b]} \\ &\leq k\|y_m - y\|_{C_{n-\alpha}[a,b]}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Alors par (2.36), on déduit que :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|D^{\alpha}_{a^+} y_m - D^{\alpha}_{a^+} y\|_{C_{n-\alpha}[a,b]} = 0.$$

i.e.

$$(D^{\alpha}_{a^+} y)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b].$$

Car $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ et $(D^{\alpha}_{a^+} y)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ alors la solution $y(x) \in C^{\alpha}_{n-\alpha}[a, b]$.
Ceci termine la preuve de notre théorème.

■

Exemple 2.4.1 *Considérons l'équation différentielle d'ordre α suivante :*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \lambda(x-a)^{\beta}[y(x)]^2, (x > a, \ \ \lambda, \ \ \beta \in \mathbb{R}, \ \ \lambda \neq 0). \tag{2.38}$$

On montre directement que si $(\alpha + \beta < 1)$, alors cette équation admet la solution exacte :

$$y(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\lambda\Gamma(1-2\alpha-\beta)}(x-a)^{-(\alpha+\beta)} \tag{2.39}$$

et cette solution appartient à l'espace $L(a, b)$.
Dans ce cas, le membre droit de l'équation (2.38) prend la forme

$$f[x, y(x)] = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\lambda\Gamma(1-2\alpha-\beta)}\right]^2 (x-a)^{-(2\alpha+\beta)} \tag{2.40}$$

et cette fonction, d'une manière générale, ne fait pas partie de l'espace $L(a, b)$. Si nous supposons que $(2\alpha + \beta < 1)$, alors le membre droit de l'équation (2.38) appartient à l'espace $L(a, b)$ et, puisque $(\alpha + \beta < 2\alpha + \beta)$, alors $(\alpha + \beta < 1)$, et l'équation (2.38) admet la solution exacte (2.39) qui appartient à $L(a, b)$.

Application numérique

Soit l'équation différentielle suivante :

$$(D^{\alpha}_{a^+}y)(x) = \lambda(x-a)^{\beta}[y(x)]^2 (x > a, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0). \tag{2.41}$$

Si $(\alpha + \beta < 1)$ cette équation admet la solution exacte

$$y(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\lambda\Gamma(1-2\alpha-\beta)}(x-a)^{-(\alpha+\beta)}. \tag{2.42}$$

Donc, nous donnons quelques valeurs pour le calcule de cette solution en Matlab. On prend quatre cas :

premier Cas : si

- ▷ $\lambda = 1$
- ▷ $\alpha = 1/2$
- ▷ $\beta = 1/4$
- ▷ $a = 0$

alors la solution est :

$$y(x) = -0.7397x^{3/4} \tag{2.43}$$

Deuxième Cas : si

- ▷ $\lambda = 2$
- ▷ $\alpha = 1/4$
- ▷ $\beta = 1/3$
- ▷ $a = 1$

alors la solution est :

$$y(x) = 0.1911(x-1)^{7/12} \tag{2.44}$$

Troisième Cas : si

- ▷ $\lambda = 1/2$
- ▷ $\alpha = 1/3$
- ▷ $\beta = 1/2$
- ▷ $a = 2$

alors la solution est :

$$y(x) = -1.6437(x-2)^{5/6} \tag{2.45}$$

Quatrième Cas : si

- ▷ $\lambda = 3$
- ▷ $\alpha = 1/5$
- ▷ $\beta = 1/6$
- ▷ $a = 3$

alors la solution est :

$$y(x) = 0.2311(x-3)^{3/4} \tag{2.46}$$

Programme Matlab :

Maintenant, nous effectuons un petit programme en Matlab illustrant la dernière application numérique.

```
clc;
clear;
syms x;
%%function  y =y(x);
lambda = input('lambda=');
alpha =input('alpha=');
b = input('beta=');
a=input('a=');
v=gamma(1-alpha-b);
disp('v=');disp(v);
w=lambda*gamma(1-2*alpha-b);
disp('w=');disp(w);
L=v/w;
disp('L=');disp(L);
%%function Gamma
%func y(x);
if (alpha+b<1)
      disp('existe une solution unique du problème');
    y= L*(x-a)^(-alpha-b);
    %exact;
   %% pretty(y);
    disp('y(x)=');disp(y);

else
    disp('acunt réponse');%%n existe pas de solution);
end

ezplot(y,[0, 4]);
```

Chapitre 3

Quelques problèmes de non-existence pour des équations différentielles fractionnaires ordinaires

Ce châpitre est consacré à l'étude de la non-existence globale de solutions de quelques problèmes aux limites fractionnaires non linéaires, en appliquant une méthode basée sur les fonctions tests.

3.1 Présentation du problème 1

Dans ce châpitre, on s'intéresse premièrement, au problème fractionnaire aux limites suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0|t}u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u) = \mid u \mid^{p} + f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $D^{\alpha}_{0|t}$ désigne la dérivée d'ordre arbitraire $\alpha \in [0,1]$ au sens de Caputo, $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ avec $\beta \in [1,2]$, est le Laplacien fractionnaire de puissance $(\frac{\beta}{2})$, tel que

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}v(x,t) = \mathfrak{F}^{-1}(\mid \xi \mid^{\beta} \mathfrak{F}(v)(\xi))(x,t),$$

3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous donnons quelques définitions utiles le long de ce châpitre.

Définition 3.2.1 *Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville sont définies respectivement par :*

$$(D^{\alpha}_{0|t}\phi)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\phi(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha}}d\sigma,$$

pour $\phi \in L^1(0,T)$, et

$$(D^{\alpha}_{t|T}\phi)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^T \frac{\phi(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha}}d\sigma,$$

Γ *est la fonction d'Euler.*

La dérivée fractionnaire de Caputo est définie par :

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t}\phi)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\phi'(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha}}d\sigma,\ \phi' \in L^1(0,T).$$

Donc, nous pouvons écrire :

$$(D^{\alpha}_{0|t}g)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{g(0)}{t^{\alpha}} + \int_0^t \frac{g'(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha}}d\sigma\right]$$

et

$$(D^{\alpha}_{t|T}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(t)}{(T-t)^{\alpha}} + \int_t^T \frac{f'(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha}}d\sigma\right].$$

Ce qui donne la relation entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t}\phi(t) = D^{\alpha}_{0|t}[\phi(t) - \phi(0)].$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^T f(t)(D^{\alpha}_{0|t}g)(t)dt = \int_0^T (D^{\alpha}_{t|T}f)(t)g(t)dt.$$

Maintenant, nous donnons une définition concernant la formulation faible du problème (3.1)

Définition 3.2.2 *Soit Q_T un ensemble défini par $Q_T = (0,T)\times\mathbb{R}^N$, une fonction $u \in L^1_{loc}(Q_T)$ est une solution locale du problème (3.1) définie sur Q_T, $0 < T < +\infty$, si $u \in L^p_{loc}(Q_T)$ telle que :*

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} u_0(x)D^{\alpha}_{t|T}\varphi(x,t)dxdt + \int_{Q_T} \mid u \mid^p \varphi(x,t)dxdt + \int_{Q_T} \varphi(x,t)f(x,t)dxdt \\ = &\int_{Q_T} u(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi(x,t)dxdt + \int_{Q_T} uD^{\alpha}_{t|T}\varphi(x,t)dxdt \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.3 Énnoncé des résultas

Théorème 3.3.1 *Soient $N > 1$, $p > 1$ et $\int_{Q_T} f(x,t)dxdt > 0$.Si :*

$$1 < p \leq p_c = \frac{\beta + \alpha N}{\alpha N + \beta(1-\alpha)},$$

alors le problème (3.1) n'admet pas de solution faible non triviale.

Preuve :

La démonstration du théorème se fait par contradiction.
Supposons qu'il existe une solution globale non négative u. La solution u existe dans $(0, T^\star)$ pour tout $T^* > 0$ quelconque. Soit T et R deux réels tels que $0 < TR^{\frac{\beta}{\alpha}} < T^\star$.
Soit $\Phi \in C_0^2(\mathbb{R}_+)$, une fonction décroissante telle que :

$$\Phi(y) = \begin{cases} 1 & si \;\; y \leq 1, \\ 0 & si \;\; y \geq 2, \end{cases}$$

et $0 \leq \Phi \leq 1$.

Nous choisissons

$$\varphi(x,t) = \Phi\left(\frac{\mid x \mid^2 + t^\theta}{R^2}\right)$$

telle que :

$$\int_{Q_T} \mid (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \mid^{\frac{p}{p-1}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}} < +\infty \text{ and } \int_{Q_T} \mid D^\alpha_{t\backslash T} \varphi \mid^{p'} \varphi^{-\frac{p'}{p}} < +\infty.$$

Pour estimer le membre droit de la relation (3.2) sur $Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}$, On utilise l'inégalité de Young. Alors, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi dxdt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u\varphi^{\frac{1}{p}} ((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi)^{\frac{-1}{p}} dxdt \\ &\leq \varepsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \mid u \mid^p \varphi dxdt + C(\varepsilon) \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \mid (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \mid^{\frac{p}{p-1}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}} dxdt \end{aligned} \tag{3.3}$$

d'une manière analogue

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u D^\alpha_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}} \varphi dxdt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u\varphi^{\frac{1}{p}} (D^\alpha_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}} \varphi) \varphi^{\frac{-1}{p}} dxdt \\ &\leq \varepsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \mid u \mid^p \varphi dxdt + C(\varepsilon) \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \mid D^\alpha_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}} \varphi \mid^{p'} \varphi^{\frac{-p'}{p}} dxdt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour ε assez petit, (3.2),(3.3) et (3.4) donnent :

$$\begin{aligned} &\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} f\varphi dxdt + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \mid u \mid^p \varphi dxdt \leq \\ &C(\varepsilon)\left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \mid (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \mid^{\frac{p}{p-1}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}} dxdt + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \mid D^\alpha_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}} \varphi \mid^{p'} \varphi^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nous posons :

$$\varphi(x,t)=\varphi(Ry,R^{\frac{2}{\theta}}\tau)=\chi(y,\tau),$$

avec

$$t=R^{\frac{2}{\theta}}\tau,\ \ x=Ry,\ \ dxdt=R^{N+\frac{2}{\theta}}dyd\tau$$

et nous définissons Ω par :

$$\Omega=\{(y,\tau)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+,\mid y\mid^2+\tau^\theta<2\}.$$

Nous estimons le premier terme du membre droit de l'inégalité (3.5), i.e.

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}}\mid(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi\mid^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{-\frac{1}{p-1}}dxdt.$$

Nous savons que :

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_N^2}$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\partial\chi}{\partial y_1}\times\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=\frac{1}{R}\times\frac{\partial\chi}{\partial y_1}$$

alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)&=\frac{\partial}{\partial y_1}\times\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\chi}{\partial y_1}\times\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)\\&=\frac{1}{R^2}\times\frac{\partial^2\chi}{\partial y_1^2}\\&=R^{-2}\times\frac{\partial^2\chi}{\partial y_1^2}.\end{aligned}$$

Un calcul similaire donne :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}=R^{-2}\times\frac{\partial^2\chi}{\partial y_2^2},\ldots\ldots\ldots\ldots,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_N^2}=R^{-2}\times\frac{\partial^2\chi}{\partial y_N^2}$$

alors,

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_N^2}=R^{-2}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y_2^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{\partial^2\chi}{\partial y_N^2}\right)$$

i.e.

$$\Delta\varphi=R^{-2}\Delta\chi,$$

donc nous avons :

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi=R^{-\beta}(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\chi.$$

Par substitution on trouve :

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}}\mid(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi\mid^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{-\frac{1}{p-1}}dxdt&=\int_\Omega R^{\frac{-\beta p}{p-1}}\mid(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\chi\mid^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-1}{p-1}}R^{N+\frac{2}{\theta}}dyd\tau\\&=R^{\frac{-\beta p}{p-1}+N+\frac{2}{\theta}}\int_\Omega\mid(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\chi\mid^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-1}{p-1}}dyd\tau.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Maintenant, on passe au deuxième terme du membre droit de (3.5), i.e.

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \mid D^{\alpha}_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}\varphi \mid^{p'} \varphi^{\frac{-p'}{p}} dxdt.$$

Par définition nous avons :

$$D^{\alpha}_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}\varphi = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{t}^{TR^{\frac{2}{\theta}}} \frac{\varphi(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha}}d\sigma, \tag{3.7}$$

nous effectuons le changement de variables :

$$u = \frac{\sigma}{R^{\frac{2}{\theta}}} \quad c'est - -dire: \quad \sigma = uR^{\frac{2}{\theta}},$$

alors,

$$d\sigma = R^{\frac{2}{\theta}}du$$

et

$$\sigma = t \Longleftrightarrow u = \frac{t}{R^{\frac{2}{\theta}}} = \tau$$

$$\sigma = TR^{\frac{2}{\theta}} \Longleftrightarrow u = T.$$

En substituant le dernier changement de variables dans (3.7) on obtient :

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}\varphi &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{R^{\frac{2}{\theta}}}\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{T}\frac{\varphi(u)}{(R^{\frac{2}{\theta}}u - R^{\frac{2}{\theta}}\tau)^{\alpha}}R^{\frac{2}{\theta}}du \\
&= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{R^{\frac{2}{\theta}}}\frac{1}{R^{\frac{2\alpha}{\theta}}}R^{\frac{2}{\theta}}\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{T}\frac{\varphi(u)}{(u-\tau)^{\alpha}}du \\
&= R^{\frac{-2\alpha}{\theta}}\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{T}\frac{\varphi(u)}{(u-\tau)^{\alpha}}du \\
&= R^{\frac{-2\alpha}{\theta}}D^{\alpha}_{\tau|T}\chi,
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \mid D^{\alpha}_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}\varphi \mid^{p'} \varphi^{\frac{-p'}{p}} dxdt &= \int_{\Omega} R^{\frac{-2\alpha p'}{\theta}} \mid D^{\alpha}_{\tau|T}\chi \mid^{p'} \varphi^{\frac{-p'}{p}} R^{N+\frac{2}{\theta}}dyd\tau \\
&= R^{\frac{-2\alpha p'}{\theta}+N+\frac{2}{\theta}}\int_{\Omega} \mid D^{\alpha}_{\tau|T}\chi \mid^{p'} \varphi^{\frac{-p'}{p}} dyd\tau.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Égalisons les deux puissances de R dans (3.6) et (3.8) on trouve :

$$\frac{\beta p}{p-1} = \frac{2\alpha p'}{\theta}$$

i.e.

$$\theta = \frac{2\alpha}{\beta}.$$

substituons (3.6) et (3.8) dans (3.5) il vient :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} f\varphi \; + \; \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u |^p \varphi \leq CR^{\gamma} \tag{3.9}$$

où

$$C = C(\varepsilon)\int_{\Omega}\left\{ | (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi |^{\frac{p}{p-1}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}} + | D^{\alpha}_{\tau|T}\chi |^{p'} \varphi^{\frac{-p'}{p}}\right\} dyd\tau,$$

et

$$\gamma = \frac{-\beta p}{p-1} + N + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Remarquons que la dernière expression donne l'exposant critique du problème (3.1),

$$\frac{\beta + \alpha N}{\alpha N + \beta(1-\alpha)}$$

Ce qui nous permet de distinguer deux cas

premièr cas :
Pour $\gamma < 0$ i.e. $(P < P_c)$, on fait tendre R vers $+\infty$, et en appliquant (3.9) on arrive à :

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+} f + \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+} | u |^p \leq 0,$$

ce qui contrédit l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+} f > 0$
deuxième cas :
Pour $\gamma = 0$ i.e. $(P = P_c)$, la relation (3.9) devient :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} f\varphi + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u |^p \varphi \leq C \;\; i.e. \quad \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u |^p \varphi \leq C,$$

la convergence de l'intégrale $\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u |^p \varphi$ est don assurée.
Maintenant, on pose :

$$C_R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \; : \; R^2 \leq | x |^2 + t^{\theta} \leq 2R^2\},$$

alors,

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{C_R} | u |^p \varphi dxdt = 0. \tag{3.10}$$

En utilisant (3.2), il vient :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} f\varphi + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u |^p \varphi \leq \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u || (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi | \, dxdt + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u || D^{\alpha}_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}\varphi | \, dxdt. \tag{3.11}$$

Par l'inégalité de Hölder, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u || (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} | dxdt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u | \varphi^{\frac{1}{p}} | (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} | \varphi^{\frac{-1}{p}} dxdt \\ &\leq \left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u |^p \varphi dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi |^{\frac{p}{p-1}} \varphi^{\frac{-1}{p-1}} dxdt\right)^{\frac{p-1}{p}},\end{aligned}$$

ou sous une autre forme :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u || (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} | dxdt \leq \left(\int_{C_R} | u |^p \varphi\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} | (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\chi |^{\frac{p}{p-1}} \chi^{\frac{-1}{p-1}} dyd\tau\right)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{3.12}$$

si on applique une deuxième fois l'inégalité de Hölder on trouve l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u || D^{\alpha}_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}\varphi | dxdt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u | \varphi^{\frac{1}{p}} | D^{\alpha}_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}\varphi | \varphi^{\frac{-1}{p}} dxdt \\ &\leq \left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u |^p \varphi\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | D^{\alpha}_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}\varphi |^{p'} \varphi^{\frac{-p'}{p}} dxdt\right)^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

i.e.

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u || D^{\alpha}_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}\varphi | dxdt \leq \left(\int_{C_R} | u |^p \varphi\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} | D^{\alpha}_{t|T}\chi |^{p'} \chi^{\frac{-p'}{p}} dyd\tau\right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{3.13}$$

où

$$\Omega_1 = \{(y,\tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \ : \ 1 \leq | y |^2 + \tau^\theta \leq 2\},$$

par substitution de (3.12) et (3.13) dans (3.11), il vient :

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} f\varphi + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} | u |^p \varphi &\leq \left(\int_{C_R} | u |^p \varphi\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} | (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\chi |^{\frac{p}{p-1}} \chi^{\frac{-1}{p-1}} dyd\tau\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &+ \left(\int_{C_R} | u |^p \varphi\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} | D^{\alpha}_{t|T}\chi |^{p'} \chi^{\frac{-p'}{p}} dyd\tau\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Appliquant (3.10) à la dernière expression avec $R \to +\infty$ on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f + \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} | u |^p \leq 0$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f \leq 0$$

donc on arrive à une contradiction avec l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f > 0$, ce qui termine la démonstration.

■

3.4 Présentation du problème 2

Deuxième on s'intéresse au système différentielle fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0|t}u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u) = \mid v \mid^{p} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ D^{\delta}_{0|t}v + (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}(v) = \mid u \mid^{p} + g(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

où
$D^{\alpha}_{0|t}$ désigne la dérivée d'ordre arbitraire $\alpha \in [0,1]$ au sens de Caputo
et $D^{\delta}_{0|t}$ désigne la dérivée en t d'ordre arbitraire $\delta \in [0,1]$ au sens de Caputo
$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ où $\beta \in [1,2]$, est le Laplacien fractionnaire de puissance $(\frac{\beta}{2})$, et $(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}$ où $\gamma \in [1,2]$, est le Laplacien fractionnaire de puissance $(\frac{\gamma}{2})$
$Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$

3.5 Préliminaires

Définition 3.5.1 *On définit la formulation faible du système (3.14) sur Q_T telle que $Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$ comme suit :*

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} u_0(x) D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_1(x,t)dxdt + \int_{Q_T} \mid v \mid^{p} \varphi_1(x,t)dxdt + \int_{Q_T} \varphi_1(x,t)f(x,t)dxdt \\ = & \int_{Q_T} u(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1(x,t)dxdt + \int_{Q_T} uD^{\alpha}_{t|TR}\varphi_1(x,t)dxdt \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} v_0(x) D^{\delta}_{t|TR}\varphi_2(x,t)dxdt + \int_{Q_T} \mid u \mid^{q} \varphi_2(x,t)dxdt + \int_{Q_T} \varphi_2(x,t)g(x,t)dxdt \\ = & \int_{Q_T} v(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\varphi_2(x,t)dxdt + \int_{Q_T} uD^{\delta}_{t|TR}\varphi_2(x,t)dxdt \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.6 Énoncé des resultas

Théorème 3.6.1 *Soit $N > 1, p > 1$ et $\int_{Q_T} f(x,t)dxdt > 0$, $\int_{Q_T} g(x,t)dxdt > 0$.*

si $1 < N \leqslant \max\left\{ \dfrac{\frac{\delta}{q} + \alpha - (1 - \frac{1}{pq})}{\dfrac{(p-1)\delta}{pq\gamma} + \dfrac{(q-1)\alpha}{q\beta}} ; \dfrac{\dfrac{\alpha}{p} + \delta - (1 - \dfrac{1}{pq})}{\dfrac{(q-1)\alpha}{pq\beta} + \dfrac{(p-1)\delta}{p\gamma}} \right\}.$

Alors le système n'admet pas de solution faible non triviale.

Preuve :

On procède toujours par contradiction. On pose :

$$\varphi_j(x,t)=\phi\Big(\frac{t^2+|x|^{2\theta_j}}{R^2}\Big);\quad j=1,2.$$

où $R>0,\theta_1=\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $\theta_2=\dfrac{\gamma}{\delta}$ En appliquant l'inégalité de Hölder aux formulations faibles (3.15) et (3.16) on trouve les estimations suivantes :

$$\int_{Q_{TR}} u|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1| \leqslant \left(\int_{Q_{TR}}|u|^q\varphi_2\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{Q_{TR}}|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1|^{\frac{q}{q-1}}\varphi_2^{-\frac{1}{q-1}}\right)^{\dfrac{q-1}{q}} \tag{3.17}$$

et

$$\int_{Q_{TR}} u|D^\alpha_{t/TR}\varphi_1| \leqslant \left(\int_{Q_{TR}}|u|^q\varphi_2\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{Q_{TR}}|D^\alpha_{t/TR}\varphi_1|^{\frac{q}{q-1}}\varphi_2^{-\frac{1}{q-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \tag{3.18}$$

Par conséquent,

$$\int_{Q_{TR}}|v|^p\varphi_1+\int_{Q_{TR}}f\varphi_1\leqslant\left(\int_{Q_{TR}}|u|^q\varphi_2\right)^{\frac{1}{q}}.A \tag{3.19}$$

où

$$A=\left(\int_{Q_{TR}}|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1|^{\frac{q}{q-1}}\varphi_2^{-\frac{1}{q-1}}\right)^{\dfrac{q-1}{q}}+\left(\int_{Q_{TR}}|D^\alpha_{t/TR}\varphi_1|^{\frac{q}{q-1}}\varphi_2^{-\frac{1}{q-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

de la même manière, on trouve les estimations suivantes :

$$\int_{Q_{TR}} u|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_2| \leqslant \left(\int_{Q_{TR}}|v|^p\varphi_1\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{Q_{TR}}|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_2|^{\frac{p}{p-1}}\varphi_1^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\dfrac{p-1}{p}} \tag{3.20}$$

et

$$\int_{Q_{TR}} v|D^\alpha_{t/TR}\varphi_2| \leqslant \left(\int_{Q_{TR}}|v|^p\varphi_1\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{Q_{TR}}|D^\alpha_{t/TR}\varphi_2|^{\frac{p}{p-1}}\varphi_1^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{3.21}$$

et par conséquent :

$$\int_{Q_{TR}}|u|^q\varphi_2+\int_{Q_{TR}}g\varphi_2\leqslant\left(\int_{Q_{TR}}|v|^p\varphi_1\right)^{\frac{1}{p}}.B \tag{3.22}$$

où

$$B=\left(\int_{Q_{TR}}|(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\varphi_2|^{\frac{p}{p-1}}\varphi_1^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\int_{Q_{TR}}|D^\delta_{t/TR}\varphi_2|^{\frac{p}{p-1}}\varphi_1^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

En exploitant les inégalités (3.19) et (3.22), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{TR}} |v|^p\varphi_1 + \int_{Q_{TR}} f\varphi_1 &\leqslant \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q\varphi_2\right)^{\frac{1}{q}}.A \\
&\leqslant \left[\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\varphi_1\right)^{\frac{1}{p}}.B\right]^{\frac{1}{q}}.A \\
&= \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\varphi_1\right)^{\frac{1}{pq}}.B^{\frac{1}{q}}.A.
\end{aligned}$$

Alors

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\varphi_1\right)^{1-\frac{1}{pq}} + \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\varphi_1\right)^{-\frac{1}{pq}} \int_{Q_{TR}} f\varphi_1 \leqslant B^{\frac{1}{q}}.A. \tag{3.23}$$

D'un façon analogue, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{TR}} |u|^q\varphi_2 + \int_{Q_{TR}} g\varphi_2 &\leqslant \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\varphi_1\right)^{\frac{1}{p}}.B \\
&\leqslant \left[\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q\varphi_2\right)^{\frac{1}{p}}.A\right]^{\frac{1}{p}}.B \\
&= \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q\varphi_2\right)^{\frac{1}{pq}}.A^{\frac{1}{p}}.B.
\end{aligned}$$

i.e.

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q\varphi_2\right)^{1-\frac{1}{pq}} + \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q\varphi_2\right)^{-\frac{1}{pq}} \int_{Q_{TR}} g\varphi_2 \leqslant A^{\frac{1}{p}}.B \tag{3.24}$$

En effectuant le changement de variables $t = R\tau, x = R^{\frac{\alpha}{\beta}}y$ dans A, puis à l'aide de (3.19) et (3.22) nous arrivons à l'estimation suivante :

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\varphi_1\right)^{1-\frac{1}{pq}} + \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\varphi_1\right)^{-\frac{1}{pq}} \int_{Q_{TR}} f\varphi_1 \leqslant C\left(R^{-l_1}\right)^{\frac{1}{q}} R^{-l_2}$$

i.e.

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\varphi_1\right)^{1-\frac{1}{pq}} + \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\varphi_1\right)^{\frac{1}{pq}} \int_{Q_{TR}} f\varphi_1 \leqslant CR^{-(m\frac{l_1}{q}+l_2)} \tag{3.25}$$

Où

$$l_1 = \delta - (\frac{p-1}{p})(\frac{\delta}{\gamma}N+1)$$

,

$$l_2 = \alpha - \frac{q-1}{q}(\frac{\alpha}{\beta}N+1).$$

Lorsque $\frac{l_1}{q} + l_2 \geqslant 0$ nous obtenons la valeur critique pour la première équation du système (3.14),

$$N \leqslant \frac{\frac{\delta}{q} + \alpha - (1 - \frac{1}{pq})}{\frac{(p-1)\delta}{pq\gamma} + \frac{(q-1)\alpha}{q\beta}}. \tag{3.26}$$

En utilisant le changement de variables $t = R\tau, x = R^{\frac{\delta}{\gamma}}$ dans B puis à l'aide de (3.22) nous arrivons à l'estimation suivante :

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \varphi_2\right)^{1-\frac{1}{pq}} + \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \varphi_2\right)^{-\frac{1}{pq}} \int_{Q_{TR}} g\varphi_2 \leqslant C\left(R^{-t_1}\right)^{\frac{1}{p}} R^{-t_2}$$

i.e.

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \varphi_2\right)^{1-\frac{1}{pq}} + \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \varphi_2\right)^{\frac{1}{pq}} \int_{Q_{TR}} g\varphi_2 \leqslant CR^{-(m\frac{t_1}{p}+t_2)} \tag{3.27}$$

où

$$t_1 = \alpha - (\frac{q-1}{q})(\frac{\alpha}{\beta}N + 1)$$

$$t_2 = \delta - \frac{p-1}{p}(\frac{\delta}{\gamma}N + 1).$$

Lorsque $\frac{t_1}{p} + t_2 \geqslant 0$ et grâce à (3.22) on obtient la deuxième valeur critique de la deuxième équation du système (3.14)

$$N \leqslant \frac{\frac{\alpha}{p} + \delta - (1 - \frac{1}{pq})}{\frac{(q-1)\alpha}{pq\beta} + \frac{(p-1)\delta}{p\gamma}}$$

Sou les condition ci-dessus, en faisant tendre $R \longrightarrow +\infty$ dans (3.25), nous obtenons :

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \varphi_1\right)^{1-\frac{1}{pq}} + \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \varphi_1\right)^{\frac{1}{pq}} \int_{Q_{TR}} f\varphi_1 \leqslant 0 \tag{3.28}$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \varphi_2\right)^{1-\frac{1}{pq}} + \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \varphi_2\right)^{\frac{1}{pq}} \int_{Q_{TR}} g\varphi_2 \leqslant 0. \tag{3.29}$$

Donc l'inégalité (3.28) conduit à la contradiction $\int_{Q_{TR}} f \leqslant 0$ et l'inégalité (3.29) conduit à la contradiction $\int_{Q_{TR}} g \leqslant 0$, ce qui signifie que le système ne peut pas admettre une solution faible non triviale.

■

Conclusion

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires, elles peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science.
Dans ce mémoire on a étudie quelques problèmes aux limites pour des équation différentielles fractionnaires.
Le premier problème porte sur l'existence et l'unicité de solutions de quelques problèmes de Cauchy pour des équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire sur un intervalle borné, dans des espaces de fonctions sommables et de fonctions continues.
Le deuxième problème sur la non-existence globale de solutions de quelques problèmes aux limites fractionnaires non linéaires, pour cela en appliquant une méthode basée sur les fonctions de tests et les exposants critiques.

Bibliographie

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam, 2006.

[2] B. Ross, (1977) Developement of Fractional Calculus 1695-1900. Historia Math 4 : 75-89.

[3] I. Podlubny, Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering, vol. 198. New York/London : Springer ;1999.

[4] K.B. Oldham,J. Spanier, (1974). The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order. Academic Press ? Inc.

[5] M. Abramowitz and I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, (1964).

[6] A. M. A. El-Sayed, Fractional order evolution equations, J. Fract. Calc. 7 (1995), 89-100.

[7] A. M. A. El-Sayed, Fractional order diffusion-wave equations, Intern. J. THeo. Physics, 35 (1996), 311-322.

[8] R. Hifler, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.

[9] A. A. Kilbas and S. A. Mazran, Nolinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuosly differentiable functions, Differential Equations, 41 (2005), 84-89.

[10] F. Minardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statitical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Minardi, Eds), Springer-Verlag, Wien, (1997), 291-348.

[11] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations, Jhon Wiley, New York, 1993.

[12] S. G. Samko, A. A. Kilbas and Marchev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[13] D. Delbosco and L. Rodino, Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Appl. 204 (1996), 609-625.

[14] C. Yu and G. Gao, Existence of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 310 (2005), 26-29.

[15] S. Abbas and M. Benchohra, Partial hyperbolic differential equations with finite delay involving the Caputo fractional derivative, Commun. Math. Anal. 7 (2009), 62-72.

[16] L. Gaul, P. Klein and S. Kempfle, Damping description involving fractional operators, Mech. systems Signal Processing 5 (1991), 81-88.

[17] W. G. Glokle and T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of selfsimilar protein dynamics, Biophys. J. 68 (1995), 46-53

[18] A. Kolmogorov, S. Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. $2^{\text{ème}}$ edition, Editions Mir-Moscou. 1973.

[19] K. Deng, H. A. Levine, The role of critical exponents in Blow-up theorems : the sequel, J Math Anal Appl 243(2000) 85-126.

[20] M. Guedda, M. Kirane, A note on nonexistence of global solutionsto a nonlinear integral equation, Bull Belg Math Soc Simon Stevin 6(1999)491-497.

[21] M. Guedda, M. Kirane, Criticality for some evolution equations. Differential Equations 37(2001)540-550.