UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : Mellak Younes

Théme

Résolution des inéquations variationnelles par la méthode de pénalisation

Soutenu publiquement le : 02/06/2016

Devant le jury composé de :

Mr. Chacha Djamel Ahmed	Pr. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Merabet Smail	M.C.A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Ghezal Abderrazek	M.C.B. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Bensayah Abdallah	M.C.B. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédication

Je dédie ce travail à :

Mes parents

-A mes frères

et mes sœurs,et toute la famille

- A mes chers amies

- Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.

-Et a tous mes professeurs

Remerciement

Premièrement nous remercions le dieu notre créateur. Nous remercions particulièrement notre encadreur **Mr. Bensayah Abdallah** pour son aide précieuse, sa patience et ses encouragements. Nous voulons également remercier **Mr. Djamel Ahmed Chacha** pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire Nos remerciements vont également aux **Mr. Merabet Ismail** et **Mr. Ghazal Abdelrazak** honorer de leur présence ce jury. Nos remerciements s'adressent également à **Mr. Meflah Mabrouk**, Nos remerciements s'adressent également à tous ceux qui nous ont aidé et nous ont permis de faire ce travail.

Notations et Préliminaires

- V : espace de Hilbert muni du produit scalaire (.,.) et la norme associée $\|.\|_V$.

- K : est un ensemble non vide convexe fermé de V.

- $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire, continue et coercive sur $V \times V$
  continue : $\exists\, c > 0,\ \forall u, v \in V\ |a(u,v)| \leq c\|u\|_V\|v\|_V$.
  coercive : $\exists\, \alpha > 0\, \forall v \in V\ |a(v,v)| \geq \alpha\|v\|_V^2$.

- V' : l'espace dual de V.

- $\longrightarrow$ convergence forte.

- $\rightharpoonup$ convergence faible.

- En général, nous ne supposons pas $a(.,.)$ symétrique, puisque dans certaines formes bilinéaires non symétriques peuvent se produire naturellement.

Table des matières

Introduction

Un problème d'inéquation variationnelle englobe en les généralisant un certain nombre de problèmes classiques tels que la recherche d'un zéro d'une fonction, la recherche d'un point stationnaire d'un problème d'optimisation, le problème de complémentarité linéaire, etc. Le formalisme a d'abord été introduit pour analyser certaines équations aux dérivées partielles modélisant des problèmes avec contact ou avec frontière libre (problème de Signorini) avant de devenir un cadre formel autonome s'appliquant à des problèmes variés.
Le travail moderne sur la théorie des inégalités variationnelles a commencé avec les papiers pionniers de Signorini [[4]] et Fichera [5] Stampacchia [6] Lions et Stampacchia [8] et Brezis [[9],[10]], et a en outre été développé par l'école française et italienne de mathématiciens appliqués au cours de la dernière décennie(Par exemple Mosco [13], Glowinski [19], Lions et Tremolieres [18], Fichera [[5]], Duvaut et Lions [[21].]).Excellentes enquêtes de ces idées ont été apportées par Mosco [[16],[13]], Stampachia [[11]] et Lions [12] ; applications à une grande variété de problèmes sans limites sont discutées dans le livre de Duvaut et Lions [21]. Les méthodes numériques basées sur les inégalités variationnelles sont discutées par Glowinski, Lions et Tremolieres [18], et dans la monographie de Glowinski [[19],[2]] d'après Lions-Stampacchia [8] en 1967 on trouve L'IV d'une façon générale, et plus précise en 1968 les problèmes unilatéraux par Jacque-Louis Lions [22] qui permet de voir l'existence et l'unicité d'IVE, après en généralise les résultats à partir [2], qui sera ensuite également être utilisé pour étudier les problèmes de type parabolique [20] avec l'ouvrage de Duvaut et Lions[21], où on trouve des résultats de plus en plus généralise .
Ce mémoire est divisé en 3 chapitres.
Au début on commence ce mémoire par un chapitre qui contient les définitions et les résultats fondamentaux qui sont essentiels pour comprendre les chapitres suivants .

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de des inéquations variationnelles elliptiques 1^{re} et 2^{me} espace(existence et unicité) et leurs approximation .
Au chapitre troisième, on propose la méthode de pénalisation pour résoudre des inéquations variationnelles elliptiques non linéaire 1^{re} et 2^{me} espèce .
Enfin on clôture par une conclusion contenant les résultats essentiel et quelques perspectives .

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre, nous abordons certains concepts mathématiques que nous devrions connaître pour un usage dans notre thème.

1.1 Rappels

Définition 1 *Une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :*

$\forall (x, y) \in V^2 \qquad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Définition 2 *Une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe si :*

$\forall (x, y) \in V^2$, $x \neq y$, $\qquad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Définition 3 *Soit J une fonctionnelle convexe de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi continue inférieur faiblement (s.c.i) pour la topologie forte. Si v_n est une suite de V faiblement convergente vers v alors $J(v) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf J(v_n)$*

Définition 4 *Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue supérieurement sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes*

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}; \{u \in V, J(u) \geq \alpha\}$ *fermé.*
- *Si u_n est une suite de V faiblement convergente vers $\bar{u}$ alors :* $\lim_{n \to +\infty} \sup J(u) \leq J(\bar{u})$.

Définition 5 *Un ensemble C est dit convexe si :*

$$\forall x, y \in C \qquad \forall \lambda \in [0,1] \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

Définition 6 *Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup +\infty$ est semi-continue inférieurement sur V si :*

- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \{u \in V, J(u) \leq \alpha\}$ *est fermé.*

Définition 7 *Soit J une fonctionnelle de V dans $\bar{\mathbb{R}}$, convexe et semi-continue inférieurement. Soit K un sous-ensemble convexe, non vide et fermé de V. J est propre c'est-a-dire qu'il existe un élément v_0 de K tel que*
$J(v_0) < +\infty$.

Définition 8 *Soit l'espace V avec produit scalaire$(\cdot,\cdot)_V$ et la norme $\|\cdot\|_V$ .Soit $A : V \to V$*

(1) A est un opérateur monotone si :

$$(Au - Av, u - v)_V \geq 0, \forall u, v \in V \tag{1.1}$$

(2) A est un opérateur strictement monotone si

$$(Au - Av, u - v)_V > 0, \forall u, v \in V, u \neq v,$$

(3) A est fortement monotone s'il existe un constante $m > 0$ telle que :

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m \|u - v\|_V^2 . \forall u, v \in V$$

(4) A est un opérateur contractant si :

$$\|Au - Av\|_V \leq \|u - v\|_V . \forall u, v \in V$$

(5) A est Lipschitzienne continue s'il existe $M > 0$ telle que

$$\|Au - Av\|_V \leq M \|u - v\|_V , \forall u, v \in V$$

(6) A opérateur est hemicontinue si la fonction de valeur réelle

$\Phi \to (A(u + \Phi v), w)_V$ *est continue dans* $\mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in V$.

Proposition 9 *Soit $(V, (.,.)_V)$ est un espace de produit scalaire et soit $\phi : V \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable aux sens Gâteaux, les condition suivantes sont équivalentes :*

$$(a) \quad \phi \; est \; une \; fonction \; convexe; \tag{1.2}$$

$$(b) \quad \phi \; satisfait \; l'ingalit : \phi(v) - \phi(u) \geq (\nabla\phi(u), v - u)_V, \forall u, v \in V; \tag{1.3}$$

$$(c) \quad le \; gradient \; de \; \phi \; est \; un \; oprateur \; monotone \, i.e \; : (\nabla\phi(u) - \nabla\phi(v), u - v)_V \geq 0 \forall u, v \in V \tag{1.4}$$

Preuve. voire[[14]] ■

1.2 Les espaces fonctionnelles

1.2.1 L'espace $L^p(0,T;V)$

Soit un intervalle $[0,T] \subset \mathbb{R}$ (en général $T < +\infty$)et un espace de Banach V avec un norme $\|.\|_V$, on désigne par $L^P(0,T,V)$ l'espaces des classes de fonctions $t \longrightarrow f(t)$, qui sont mesurables à partir de $[0,T] \longrightarrow V$ pour la mesure dt et telles que :

$$\|f\|_{L^p(0,T,V)} = (\int_0^T \|f(x)\|_V^p dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty \qquad (p \neq +\infty)$$

$$\|f\|_{L^\infty(0,T,V)} = \sup_{t\in[0,T]} ess\|f(t)\|_V < +\infty$$

Les espaces $L^p(0,T,V)$ sont des espaces de Banach pour la première norme si $p \neq +\infty$, et pour la deuxième norme si $p = +\infty$.
Si V est un espace de Hilbert équipée avec un produit scalaire $(.,.)_V$, alors l'espace $L^2(0,T,V)$ est aussi un espace de Hilbert pour la produit scalaire :

$$(f,g)_{L^2(0,T,V)} = \int_0^T (f,g)_V dx$$

1.2.2 Les Espaces L^p

soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, pour p donné avec $1 \leq p < +\infty$ On désigne pour $L^p(\Omega)$ l'espaces des fonctions v mesurables sur Ω et telle que :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{1.5}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme(1.5)est un espace de Banach Pour $p = 2, L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondante a la norme(1.5)étant donné par

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx$$

On va identifier l'espace $L^p(\Omega)$ a son dual(ce qui n'est pas vrais dans d'autres cas, pour $p \neq 2$).

Pour $p = \infty$, $L^{\infty}(\Omega)$, est l'espace des(classes de) fonction v mesurables et essentiellement bornées sur Ω i.e.il existe une constant C telle que $|v(x)| \leq C$ p.p sur Ω. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sup ess_{x\in\Omega}|v(x)| = \inf \{C; |v(x)| \leq C \ \ p.p \ \ x \in \Omega\}$$

-La notion de convergence faible dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ devient comme suit :

- Si $1 \leq p < +\infty$, alors $v_n \rightharpoonup v$, faible dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ si :

$$\int_{\Omega} v_n(x), u(x)\, dx \longrightarrow \int_{\Omega} v(x), u(x) \ \ \forall u \ \in L^q(\Omega)((L^p)^{'} = L^q \ q \quad \text{est conjugué de } p)$$

- Si $p = \infty$, alors $v_n \rightharpoonup v$ faible étoile dans $L^{\infty}(\Omega)$ si :

$$\int_{\Omega} v_n(x)u(x)dx\, dx \longrightarrow \int_{\Omega} v(x)u(x)dx \ \ \forall u \ \in L^1(\Omega)$$

1.2.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on a $D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow D^{'}(\Omega)$, soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, C'est la définition de l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

$$W^{m,p} = \{v, D^{\alpha}v \in L^p(\Omega), \ \ pour \ \ |\alpha| \leq m\}$$

ou $D^{\alpha}v$ est la dérivée au sens des distributions pour tout $v \in L^p(\Omega)$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}v\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

- si $p = \infty$

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}v\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

De façon évidente, on a $W^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. La semi-norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{\dfrac{1}{p}}$$

- si p $\neq \infty$

$$|v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Dans le cas $p = 2$, on utilise la notation

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

Définition 10 *Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach, on dit que B_1 s'injecte d'une façon continue dans B_2 si $\|v\|_{B_2} \leq \|v\|_{B_1}$.*
On dit que B_1 s'injecte d'une façon compacte dans B_2, si l'image de tout borné de B_1 est relativement compact dans B_2.

Théorème 11 *(Rellich-Kondrachov)).On suppose Ω borné de classe C^1. On a*

(1)- si $p < N$, alors $W^{l,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

(2)- si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$,

(3)- si $p > N$, alors $W^{l,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, avec injections compactes .

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$avec injection compacte pour tout p.

Preuve. voir[1] ■

1.3 Théorème de Stampacchia

Théorème 12 *(Stampacchia) Soit V un espace de Hilbert et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V. Soit $K \neq 0$ un sous ensemble fermé et convexe de V. et L(.) de forme linéaire ,il existe un unique $u \in K$ telle-que*
$a(u, v-u) \geq L(v-u), \forall v \in K$
Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de K qui minimise la fonctionnelle $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$ pour tout v de K, en particulier :

$$\exists ! u \in K \quad J(v) = \min_{v \in K} J(u)$$

Preuve. voir. [1] ■

1.4 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 13 *Soit V un espace de Hilbert, pour tout $F \in V'$ (dual de V), il existe un unique $v \in V$ telle que :*

$$F(u) = (u, v), \quad \forall u \in V$$

et en plus :

$$\|F\|_{V'} = \|v\|_V$$

Théorème 14 *Soit V un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$. Soit K un partie convexe fermé non vide de V.*

Si $a(u, v)$ une forme bilinéaire qui soit

Continue sur $V \times V$: $\exists c > 0 \, \forall u, v \in V, \; | \, a(u, v) \, | \leq c\|u\|\|v\|$

Coercive sur V : $\exists \alpha > 0 \; \forall u \in V \;\; a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$

Si $L(.)$ une forme linéaire continue sur V

Sous ces conditions, il existe un unique u dans K tel que

$$\forall v \in K \;\; a(u, v - u) \geq L(v - u)$$

Preuve. voir [1] ■

1.5 Théorème de la Projection

Théorème 15 *(Projection sur un convexe fermé). Soit $K \subset V$ est un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in V$, il existe $u \in K$ unique tel que :*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$(u - f, u - v) \leq 0, \forall v \in K$$

On note $u = P_K f$= Projection de f sur K .

Preuve. voir [1] ■

Chapitre 2

Inéquations variationnelles elliptiques

Ce chapitre présente l'existence et l'unicité pour la solution des inéquations variationnelles de première et deuxième espèce.

2.1 Inéquations variationnelles elliptiques de 1^{ere} espèce

Définition 16 *On appelle inéquation variationnelle elliptique de 1*^{re}*espèce toute inéquation de la forme :*

$$(P)\begin{cases} \text{Trouver } \ u \in K \ \ tq \\ \\ a(u, v-u) \geq L(v-u) \ \ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

Théorème 17 *Si* $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *forme bilinéaire continue et coercive sur un espace vectoriel* V, $L(.) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *forme linaire sur* V *est* K *sous ensemble convexe non vide de* V *alors l'inéquation variationnelle (2.1) admet une solution unique .*

Preuve.

1 -L'unicité :

supposons u_1, u_2 solution de (2.1) Donc

$$a(u_1, v-u_1) \geq L(v-u_1) \;\; \forall v \in K \;\; ; v = u_2 \tag{2.2}$$

$$a(u_2, v-u_2) \geq L(v-u_2) \;\; \forall v \in K \;\; ; v = u_1 \tag{2.3}$$

On trouve

$$a(u_1, u_2-u_1) \geq L(u_2-u_1) \tag{2.4}$$

$$a(u_2, u_1-u_2) \geq L(u_1-u_2) \tag{2.5}$$

On additionnée (2.4) et (2.5) on trouve $a(u_2-u_1, u_1-u_2) \geq 0$ et a cette inéquation on trouve $a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq 0$ alors

$$C\|u_1-u_2\|_V^2 \leq a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq 0 \implies \|u_1-u_2\|_V = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2$$

d'où l'unicité .

2 -L'existence : On considère $(w, v-w) \geq \rho(-a(u, v-w) + L(v-w)) + (u, v-w) \;\; \rho \geq 0$, u fixé dans V.

$a(u,v) = (Au, v) \; et \; L(v) = (l, v)$ d'après Théorème de représentation de Riesz donc on a :

$$(w, v-w) \geq (-\rho Au + \rho l + u, v-w)$$

ou encore $(w-\tilde{u}, w-v) \leq 0 \;\forall v \in K$ avec $\tilde{u} = -\rho Au + \rho l + u$ donc $w = P_k\tilde{u}$ existe et unique.

On définit $T_\rho : u \longrightarrow w; T_\rho u = w$ Si $w = u$ alors w est solution du problème (2.1) donc on cherche si T_ρ admet un point fixe.

soit

$$w_1 = T_\rho u_1 \; alors \; (w_1-\tilde{u}_1, w_1-w) \leq 0 \forall v \in K \tag{2.6}$$

$$w_2 = T_\rho u_2 \; alors \; (w_2-\tilde{u}_2, w_2-v) \leq 0 \forall v \in K \tag{2.7}$$

On prend $v = w_2$ dans (2.6) et $v = w_1$ dans (2.7)donc on obtient :

$$(w_1-\tilde{u}_1, w_1-w_2) \leq 0 \tag{2.8}$$

$$(w_2 - \tilde{u}_2, w_2 - w_1) \leq 0 \tag{2.9}$$

(2.8)$\Longleftrightarrow (w_1, w_1 - w_2) \leq (\tilde{u}_1, w_1 - w_2)$
(2.9)$\Longleftrightarrow -(w_2, w_1 - w_2) \leq -(\tilde{u}_2, w_1 - w_2)$
d'où $(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \leq (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, w_1 - w_2)$ d'où

$$\|w_1 - w_2, w_1 - w_2\|^2 \leq \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\| \|w_1 - w_2\|^2$$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\| \leq \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\| = \|(-\rho A + I)(u_1 - u_2)\| \leq \|-\rho A + I\|_{\mathcal{L}(v)}.\|u_1 - u_2\|$$

$$\exists!\, un\ \rho \quad tq\ \|-\rho A + I\| \leq 1$$

On a :

$$\|(-\rho A + I)v\|_V^2 = ((-\rho A + I)v, (-\rho A + I)v) = \rho^2 (Av, Av) - 2\rho(Av, v) + (v, v) \leq$$

$$\leq \rho^2 \|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \|v\|^2 \leq$$
$$\leq \rho^2 \|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho\|A\|\|v\|^2 + \|v\|^2$$

On utilise la coercivité $(2\rho(Av, v) \leq -2\rho\alpha\|v\|^2)$ donc

$$\|(-\rho A + I)v\|_V^2 \leq (\rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \|v\|^2) \Longrightarrow \leq (\rho^2\|A\|^2 - 2\rho\alpha + 1)\|v\|^2$$

Pour $\rho \in \left]0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}\right[\Longrightarrow \|-\rho A + I\| < 1$

D'où $T_\rho(0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2})$est strictement contraction alors :

T_ρ admet un point fixe unique alors $w = u = T_\rho u$
- Par conséquent u vérifie (2.1)

■

2.1.1 Approximation interne d'inéquation variationnelle de première espèce

Approximation de V et K

Nous supposons que l'on nous donne un paramètre h converge vers 0 et une famille$\{V_h\}_h$ de sous-espaces fermés de V . Nous sommes également donné une famille $\{K_h\}_h$ sous-ensembles non vides convexes fermés de V avec K_h un V_h , $\forall h$ (en général nous ne faisons pas K_h supposer une valeur K) telle que $\{K_h\}_h$ satisfait aux deux conditions suivantes :
(i) Si $\{v_h\}_h$ est telle que $v_h \in K_h$, $\forall h \in \{V_h\}_h$ est borne en V.
(ii) Il existe $\chi \subset V$, $\bar{\chi} = K$ et $r_h : \chi \to K_h$ telle que $\lim\limits_{h\to 0} r_h v = v$ fortement dans V, $\forall v \in \bar{\chi}$.

Remarque 18

Si $K_h \subset K$, $\forall h$, alors (i) est trivialement satisfaite car K est faiblement fermé .

Remarque 19 $\bigcap\limits_h K_h \subset K$

Remarque 20 *La condition (ii) pour r_h est Il existe un sous-ensemble $\chi \subset V$ tel que $\chi = K$ et $r_h : \chi \to V_h$ avec le propriété que pour chaque $v \in \chi$, il existe $h_0 = h_0(v)$ avec $r_h v \in K_h$ pour tout $h \leq h_0(v)$ et $\lim\limits_{h\to 0} r_h v = v$ fortement en 0 .*

2.1.2 Approximation de problème (2.1)

Le problème approché du problème (2.1) est définie par

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver} u_h \in K_h \text{telle que} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h), \forall v_h \in K_h. \end{cases} \tag{2.10}$$

Théorème 21 *Le problème (P_h) admet une solution unique.*

Preuve. voir [19] ■

Résultats de la convergence

Théorème 22 *Sous les hypothèses ci-dessus sur K et K_h, on a*

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - u\|_v = 0$$

avec u_h la solution de (P_h) et u la solution de (P).

Preuve. voir[19]. ■

2.2 Inéquations variationnelles elliptiques de 2^{e}espèce

Définition 23 *On appelle Inéquation variationnelle elliptique de 2^{e}espèce toute inéquation de la forme*

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u)\ \forall v \in K$$

Théorème 24 *Soient V un espèce de Hilbert, $K \neq \emptyset$ convexe fermé de V $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre convexe et semi continue inférieurement $a(.,.)V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et de forme linéaire.*
Alors l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u)\ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.11}$$

Admet une solution unique.

Preuve.

1 -L'unicité :

Supposons u_1 et u_2 solution de(2.11) alors

$$a(u_1, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geq L(v - u_1)\ \forall v \in K \tag{2.12}$$

$$a(u_2, v - u_2) + j(v) - j(u_2) \geq L(, v - u_2)\ \forall v \in K \tag{2.13}$$

On pose $v = u_2$ puis $v = u_1$ respectivement dans (2.12) et (2.13) on trouve par sommation :

$$a(u_1, u_2 - u_1) + a(u_2, u_1 - u2) \geq L(u_2 - u_1) + L(u_1 - u_2)$$

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

$\Longrightarrow u_1 = u_2$, d'où l'unicité.

2 -L'existence :

On définit le problème auxiliaire pour u fixé dans K et $\rho > 0$

$$\begin{cases} \text{Trouver} w \in K \\ (w, v - w) + \rho j(v) - \rho j(w) \geq -\rho(a(u, v - w) - (f, v - w)) + (u, v - w)\ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.14}$$

Le problème (2.14) admet une solution unique (d'après le théorème de Weierstrass) $T_\rho : u \longmapsto w$ w solution du problème (2.14), on montre que T_ρ admet un point fixe. Il suffit de montrer que l'application T_ρ est strictement contractante c.à.d
$\|T_\rho(u_1) - T_\rho(u_2)\| \leq C\|u_1 - u_2\|\ \forall u_1, u_2 \in V,\ c < 1$
$\|w_1 - w_2\| \leq C\|u_1 - u_2\|\ tq\ w_i = T_\rho(u_1)\ , i = 1, 2$
Alors :

$$(w_1, v - w_1) + \rho j(v) - \rho j(w_1) \geq -\rho a(u_1, v - w_1) + \rho(f, v - w_1) + (u_1 - v - w_1) \tag{2.15}$$

$$(w_2, v - w_2) + \rho j(v) - \rho j(w_2) \geq -\rho a(u_2, v - w_2) + \rho(f, v - w_2) + (u_2 - v - w_2) \tag{2.16}$$

On prend $v = w_2$ et $v = w_1$ respectivement dans (2.15) et (2.16) on obtient

$$-\|w_1 - w_2\|^2 \geq \rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) - (u_1 - u_2, w_1 - w_2)$$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\|^2 \leq -\rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) - (u_1 - u_2, w_1 - w_2) \leq$$

$$\leq (-\rho A(u_1 - u_2) + (u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq ((-\rho A + I)(u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq$$
$$\leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|\|w_1 - w_2\|$$
$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\| \leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|$$

Alors $\exists \rho > 0 \;\; tq \;\; \|I - \rho A\| < 1$

$\|(I - \rho A)v\|^2 = (v - \rho Av, v - \rho Av) = (v, v) - 2\rho(Av, v) + \rho^2(Av, Av)$

$\leq \|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \rho^2\|Av\|^2$

On utilisant la coercivité $(Av, v) \geq \alpha\|v\|^2 \Longrightarrow -2\rho(Av, v) \leq -2\rho\alpha\|v\|^2$

alors $\|(I - \rho A)v\|^2 \leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2$

$\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho\|A\|^2)\|v\|^2$

si $\rho \in \left]0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}\right] \Longrightarrow 1 - 2\alpha\rho + \rho^2\|A\|^2 < 1$

$\Longrightarrow \|I - \rho A\| < 1$ alors T_ρ est strictement contractante $\Longrightarrow T_\rho$ admet un point fixe unique .

$T_\rho u = u = w$ d'où u vérifié le problème (2.11)

■

2.2.1 Approximation interne d'inéquation variationnelle de deuxième espèce

Avec les hypothèses sur V, $a(.;.)$, L, et $j(.)$, nous considérerons l'approximation de

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u); v \in V, u \in V$$

qui a une solution unique par le théorème (24).

Approximation de V

Soit d'un paramétré réel h tend vers 0 et une famille $\{V_h\}_h$ de sous-espaces fermés de V , nous supposons que $\{V_h\}_h$ satisfait :
(I) Il existe $U \subset V$ tel que $\bar{U} = V$, et pour chaque h, $r_h : U \to V_h$ telle que $\lim_{h\to 0} r_h v = v$ fortement en V, $\forall\ v \in U$.

Approximation de $j(.)$

Nous approximons de la fonction $j(.)$ par $(\{j_h\})_h$où pour chaque h, j_h satisfait

$$j_h : V_h \to \mathbb{R}. j_h \text{est convexe,s.c.i,et uniformément propre dans } h$$

La famille j_{h_h} est dit être uniformément propre dans h s'il existe $\lambda \in V\prime$ et $\mu \in \mathbb{R}$ telle que

$$j_h(v_h) \geq \lambda(v_h) + \mu, \forall v_h e V_h, \forall h.$$

De plus, nous supposons que $\{J_h\}_h$ satisfait :
(*)- Si $v_h \rightharpoonup v$ faiblement dans V, puis

$$\lim_{h\to 0} \inf j_h(v_h) \geq j(v) \ ,$$

(**)- $\lim_{h\to 0} \inf j_h(r_h v) = j(v), \forall v \in U$.

Remarque 25 *Dans toutes les applications que nous connaissons si $j(.)$ est fonctionnelle continue propre ,il est toujours possible de construire j_h continue satisfaisant à (*) et (**)*

.

Remarque 26 *Dans certains cas, nous avons pour $\forall v_h, \forall h$ $j_h(v_h) = j(v_h)$, (*) et (**) sont trivialement satisfaites.*

2.2.2 Approximation du problème (2.11)

Nous approximons (2.11) par

$$a(u_h, v_h - u_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h) \geq L(v_h - u_h), \forall v_h \in V_h, u_h \in V_h$$

.

Théorème 27 *LE problème (2.2.2) admet une solution unique.*

Preuve. [19] ■

Résultats de la convergence

Théorème 28 *Selon les hypothèses ci-dessus sur* $\{V_h\}_h$ *et* $\{j_h\}_h$ *nous avons*

$$\lim_{h \to 0} \|u_h - u\| = 0 \ , \ \lim_{h \to 0} j_h(u_h) = j(u)$$

Preuve. [19] ■

Chapitre 3

Méthode de pénalisation

Dans ce chapitre on va résoudre inéquation variationnelle elliptique 1^{re}et 2^{me}espèce par la méthode de pénalisation dans le cas non linéaire et dans cadre Hilbert.

3.1 Inéquations variationnelles du première espèce

Nous proposons une extension de l' existence et l'unicité des inéquations variationnelles. Soit V est un espace de Hilbert, $A : V \to V$ un opérateur et $K \subset V$ un sous-ensemble ;et notée $(.,.)_V$ le produit scalaire dans Hilbert. Nous considérons le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ telleque} \\ (Au, v-u)_V \geq 0, \forall v \in K \end{cases} \tag{3.1}$$

l'inéquation de forme (3.1) est appelée inéquation variationnelle elliptique du premier espèce

.

3.1.1 Problème de Pénalisation

Nous étudions maintenant l'unicité de la solution de l'inéquation variationnelle (3.1) en utilisant une méthode de pénalisation. On suppose dans ce qui suit $A : V \to V$ et nous considérons un β opérateur qui satisfait les conditions suivantes :

$$(a) \quad \beta : V \to V \text{ est un opérateur monotone lipschitzien} \tag{3.2}$$

$$(\beta v - \beta u, v - u)_V \geq 0 \forall u \in V, v \in V; \tag{3.3}$$

$$(b) \quad \beta u = 0_V \text{ ssi } u \in K. \tag{3.4}$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$ nous considérons le problème de trouver un élément u_ε telle que

$$u_\varepsilon \in V, (Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon), v) = 0. \;\; pour \;\; toutv \in V \tag{3.5}$$

Nous avons résultat de l'existence et l'unicité et de la convergence suivant :

Théorème 29 *Soit V un espace de Hilbert et soit $K \subset V$ un convexe fermée et non vide. Supposons que $A : V \to V$ est un opérateur strictement monotone lipschitzien continue, β est un opérateur qui satisfait (3.2-3.3-3.4) alors :*

(1). pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un élément unique u_ε qui vérifié l'équation non linéaire (3.5).

(2). u_ε solution de (3.5) converge fortement à la solution u de (3.1),c'est à dire :

$$u_\varepsilon \to u \;\; in \; V \;\; quand \; \varepsilon \to 0. \tag{3.6}$$

(3). il existe un élément unique u qui vérifie l'inéquation variationnelle(3.1).

La démonstration du (29) sera réalisé en plusieurs étapes,sur la base arguments de compacité et de monotonie. Nous supposons dans que ce suit les hypothèses du (3.2-3.4) attente. Nous utilisons c un constante positive qui ne dépend pas de ε. On commençe par l'unicité de la solution de l'équation non linéaire(3.5).

Lemme 1 *Pour chaque $\varepsilon > 0$,il existe un élément unique qui vérifié l'équation non linéaire (3.5).*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque A est strictement monotone et lipschitzien continue, par hypothèse (3.2-(a)) il en résulte que l'opérateur $v \to Av + \frac{1}{\varepsilon}\beta v$ est également un opérateur fortement monotone lipschitzien continue sur V. ■

Etape 1 : Estimation a priori

Ensuite,Nous pouvons faire l'estimation a priori sur la solution de l'é quation (3.5),qui impliquent le résultat de convergence suivant.

Lemme 2 *Il existe un élément $u \in V$ et un sous-suite $\{u_\varepsilon\}$ qui converge faiblement vers u,à savoir*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ quand } \varepsilon \to 0. \tag{3.7}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $v_0 \in K$. Nous utilisons (3.1) pour obtenir

$$(Au_\varepsilon, v_0 - u_\varepsilon)_V + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon, v_0 - u_\varepsilon)_V = 0$$

et donc

$$(Au_\varepsilon - Av_0, u_\varepsilon - v_0)_V = (Av_0, v_0 - u_\varepsilon)_V + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon, v_0 - u_\varepsilon)_V$$

Ensuite, en utilisant de (8-ii) et(3.3)-(b) et l'inéquation de Cauchy-Schwarz en déduit

$$m \|u_\varepsilon - v_0\|_V^2 \leq \|Av_0\|_V \|u_\varepsilon - v_0\|_V$$

et donc

$$\|u_\varepsilon - v_0\|_V \leq \frac{1}{m} \|Av_0\|_V \tag{3.8}$$

puisque

$$\|u_\varepsilon\| \leq \|u_\varepsilon - v_0\|_V + \|v_0\|_V$$

il résulte de (3.8) qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|u_\varepsilon\| \leq c \tag{3.9}$$

Et par conséquent,la suite $\{u_\varepsilon\}$ est bornée dans V. Lemme 2 est un conséquence du[théorème 1.19-[14]]. ■

Etape 2 :la convergence faible

Lemme 3 *L'ensemble de la suite $\{u_\varepsilon\}$ converge faiblement vers l'élément u dans V .*

Preuve. Examen attentif de la preuve du lemme 4 montre que si u est la limite faible d'une suite faiblement convergente de la suite $\{u_\varepsilon\} \subset V$, alors u satisfait l'inéquation variationnelle (3.1). Rappelons également que cette inéquation variationnelle a une solution unique et de plus,de preuve du lemme 2 que la suite $\{u_\varepsilon\}$ est bornée dans V. ■

Etape 3 : passage a la limite

Ensuite, nous étudions les propriétés de l'élément u d éfini dans le lemme 2.

Lemme 4 *L'élément u satisfait l'inéquation variationnelle(3.1) et Par ailleurs,le problème 7 admet unique solution.*

Preuve. Après lemme2,nous considérons la suite $\{u_\varepsilon\}$ telle que (3.7) vrais. Soit $\varepsilon > 0$ et soit v un élément arbitraire dans V ;nous utilisons (3.5) alors :

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_V + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_V = 0$$

ce qui implique l'opérateur A est lipschitzien ,et de (8-vi) en obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V \leq M \|u_\varepsilon\|_V \|v - u_\varepsilon\|_V + \|A0\|_V \|v - u_\varepsilon\|_V$$

Ensuite, nous utilisons (3.9) et l'inéquation précédente pour montrer qu'il existe une c constante positive qui dépend de v, mais est indépendante de ε telle que :

$$(\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V \leq C\varepsilon \tag{3.10}$$

Nous prenons maintenant $v = u$ dans (3.10), puis nous passons à la limite supérieure que $\varepsilon \to 0$ dans l'inéquation résultant pour obtenir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup(\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V \leq 0$$

Par conséquent, en utilisant l'hypothèse (3.2)-(a) et la convergence (3.7) on déduit que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf(\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V \leq (\beta u, u - v)_V, \forall v \in V. \quad (3.11)$$

D'autre part, l'inéquation (3.10) implique que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf(\beta u_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V \leq 0, \forall v \in V. \quad (3.12)$$

par sous traction les inéquations (3.11) et (3.12) de voir que

$$(\beta u, u - v)_V \leq 0 \forall, v \in V$$

Et prendre $v = u - \beta u$ dans cette inéquation donne

$$\|\beta u\|_V^2 \leq 0$$

On déduit que $\beta u = 0_V$ et, en utilisant l'hypothèse (3.4)-(c) nous obtenons :

$$u \in K \quad (3.13)$$

Ensuite,nous utilisons l'équation (3.5) tel que

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_V + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) = 0$$

et en utilisant l'hypothèse (3.3)-(b),nous trouvons que

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_V = \frac{1}{\varepsilon}(\beta u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \leq 0, \forall v \in K$$

en trouve De ce qui précède

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V \leq 0, \forall v \in K \quad (3.14)$$

Nous utilisons maintenant (3.13) et de prendre $v = u$ dans (3.14), puis nous passons à la limite supérieure que $\varepsilon \to 0$ dans l'inéquation résultant et utiliser la convergence faible(3.7). En conséquence, nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V \leq 0 \quad (3.15)$$

et en utilisant la définition 6,on trouve que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V \geq (Au, u - v)_V, \forall v \in V \tag{3.16}$$

D'un autre côté,en passant à la limite inférieure quand $\varepsilon \to 0$ in (3.14) les rendements

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V \leq 0, \forall v \in K. \tag{3.17}$$

Nous combinons maintenant les inéquations (3.16) et (3.17) voir que

$$(Au, u - v)_V \leq 0, \forall v \in K,$$

et donc

$$(Au, v - u)_V \geq 0, \forall v \in K \tag{3.18}$$

■

Il en résulte maintenant de (3.13) et (3.18) que u satisfait l'inéquation variationnelle (3.1), qui conclu de la première partie du lemme. Pour l'unicité de la solution en utilisant fortement monotonie de l'opérateur A et était déjà présenté dans la démonstration du théorème 29.

La dernière étape est fournie par le résultat de la convergence forte.

Etape 4 :la convergence forte

Lemme 5 *La suite $\{u_\varepsilon\}$ converge fortement vers l'élément u en V c'est a dire :*

$$u_\varepsilon \to u \ in \ V \ quand \ \varepsilon \to 0 \tag{3.19}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Nous prenons $v = u$ dans (3.16) tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V \geq 0$$

nous combinons cette inégalité avec (3.15) pour obtenir que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V = 0 \tag{3.20}$$

D'autre part, de la convergence faible de la suite $\{u_\varepsilon\}$ vers u, assure par le lemme 3,on a la résultat suivant :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(Au, u_\varepsilon - u)_V = 0 \tag{3.21}$$

Ensuite, A est un opérateur fortement monotone ,alors

$$m\left\|u_\varepsilon - u\right\|_V^2 \leq (Au_\varepsilon - Au, u_\varepsilon - u)_V$$

$$= (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V - (Au, u_\varepsilon - u)_V \tag{3.22}$$

■ La convergence (3.19) est maintenant une conséquence de (3.20) - (3.22). Nous pouvons maintenant facilement fournir la preuve du théorème 29. Preuve les points (1),(2) et (3) du théorème 29 sont des conséquences directes des lemmes 1,2 et 5, respectivement. L'intérêt dans le théorème 29 est double ;

En premier lieu, il offre l'existence et l'unicité de la solution à l'inégalité variationnelle (3.1).
Deuxième,il montre que la suite u_ε solution du problème (3.5) converge fortement vers la solution de (3.1) lorsque $\varepsilon \to 0$.

3.2 Inéquations variationnelle du deuxième espèce

Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ telleque} \\ (Au, v-u)_V + j(v) - j(u) \geq (f, v-u)_V, \forall v \in K \end{cases} \tag{3.23}$$

l'inéquation variationnelle de forme (3.23) est appelée inéquation variationnelle elliptique deuxième espèce. Dans l'étude de (3.23),nous considérons que les hypothèses suivantes : Soit :V un espace de Hilbert

$$K \text{ est un sous-ensemble non vide fermé convexe de } V, \tag{3.24}$$

$$A : K \to V \;\text{ est un operateur monotone lipschitzien continue} \tag{3.25}$$

$$j : K \to R \text{ est un fonction convexe semicontinue inferieure.} \tag{3.26}$$

3.2.1 Régularisation

Nous considérons maintenant l'inéquation variationnelle (3.23) dans le cas où $K = V$ et nous étudions l'unicité de solution en utilisant une méthode de régularisation Ainsi , nous supposons que :
$A : V \to V$, $j : V \to \mathbb{R}$ sont données et nous considérons le problème suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ telque} \\ (Au, v-u)_V + j(v) - j(u) \geq 0, \forall v \in V \end{cases} \tag{3.27}$$

Soit un paramétré $\varepsilon > 0$. Nous supposons également qu'il existe une famille de Fonctionnelles (j_ε) qui satisfait :

$(A).j_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$: est une fonction differentiable aux sens Gâteaux et convexe,pour chaque $\varepsilon > 0$. (3.28)

$(B).\nabla j_\varepsilon : V \to V$ est un opérateur lipschitzien continue,pour chaque $\varepsilon > 0$; (3.29)

$$\begin{cases} \text{soit } F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ |j_\varepsilon(v) - j(v)| \leq F(\varepsilon) \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(\varepsilon) = 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_\varepsilon \in V \text{ telleque} \\ Au_\varepsilon + \nabla j_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

Nous avons résultat de l'existence et l'unicité et de la convergence suivante.

Théorème 30 *Soit V un espace de Hilbert.on pose $A : V \to V$ est un opérateur fortement monotone lipschitzien continue, $j : V \to \mathbb{R}$, (j_ε) est un famille de fonctionnelles qui satisfait (3.24),(3.24) :*

(1)- pour chaque $\varepsilon > 0$,il existe un élément unique u_ε qui vérifié le équation non linéaire (3.31).

(2)- La solution de u_ε (3.31) converge fortement à la solution u (3.27),à savoir

$$u_\varepsilon \to u \textit{ dans } V \textit{ quand } \varepsilon \to 0$$

(3)- il existe un élément unique u qui vérifié l'inéquation variationnelle (3.27)

La preuve du théorème (30) sera réalisé en plusieurs étapes. Nous supposons dans ce qui suite que les hypothèses du théorème (30) attente ; De plus, nous utilisons C pour désigner une constante positive qui peut dépendre de A , mais il est indépendant de ε. Nous commençons avec l'unicité de la solution de l'équation non linéaire (3.31).

Lemme 6 *Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un élément unique qui vérifié l'équation non linéaire (3.31)*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$,en utilisant la différentiabilité aux sens gâteaux et l'hypothèse (3.28),et ∇j_ε l'opérateur gradient est monotone lipschitzien continue sur V. Par conséquent,étant donné que l'opérateur A est fortement monotone et lipschitzien continue,il en résulte que

$A+\nabla j_\varepsilon$ est opérateur également fortement monotone lipschitzien continue sur V. Ensuite, nous utilisons l'hypothèse de la convergence uniforme (3.30) pour obtenir la résultat suivant sur la fonctionnelle j. ■

Lemme 7 *La j fonctionnelle est convexe et faiblement semi continue inferieure.*

Preuve. Soit $u, v \in V$ et $\lambda \in [0,1]$. Nous utilisons la convexité de la fonction j_ε alors

$$j_\varepsilon(u+\lambda(v-u)) \leq (1-\lambda)j_\varepsilon(u)+\lambda j_\varepsilon(v)$$

pour chaque $\varepsilon > 0$,nous passons à la limite que $\varepsilon \to 0$ dans cette inéquation et l'utilisation(3.30) pour obtenir

$$j(u+\lambda(v-u)) \leq (1-\lambda)j(u)+\lambda j(v)$$

ce qui prouve la convexité de j. Ensuite, supposons que $u \in V$ et soit $\{u_n\}$ une suite d'élément de V tel que $u_n \to u$ dans V. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in N$ fixé.
Nous écrivons

$$j(u) = j(u) - j_\varepsilon(u) + j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_n) + j_\varepsilon(u_n) - j(u_n) + j(u_n)$$

Ensuite, nous utilisons l'hypothèse (3.30)-(a) pour obtenir

$$j(u) \leq j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_n) + j(u_n) + 2F(\varepsilon)$$

de manière équivalente

$$j(u) + j_\varepsilon(u_n) \leq j_\varepsilon(u) + j(u_n) + 2F(\varepsilon)$$

Nous passons à la limite inférieure de cette inéquation $n \to \infty$ Par conséquent, nous obtenir :

$$j(u) + \liminf_{n\to 0} j_\varepsilon(u_n) \leq j_\varepsilon(u) + \liminf_{n\to 0} j(u_n) + 2F(\varepsilon) \tag{3.32}$$

D'autre part, rappeler l'inéquation

$$j_\varepsilon(u) \leq \liminf_{n\to 0} j_\varepsilon(u_n) \tag{3.33}$$

La fonction$j_\varepsilon$est semi continue inférieure ,assurée par hypothèse (3.28) Maintenant combiner(3.32)et(3.33) alors

$$j(u) \leq \liminf_{n} j(u_n) + F(\varepsilon) \tag{3.34}$$

Enfin, nous passons à la limite (3.34) que $\varepsilon \to 0$ et utiliser l'hypothèse (3.30)-(b) de déduire que j est semi continue inferieure. ■

Etape 1 : Estimation a priori

,Nous pouvons faire l'estimation a priori sur la solution de l'équation (3.31), ce qui implique le résultat de convergence suivant.

Lemme 8 *Il existe un élément* $u \in V$ *et un sous-suite de la suite* $\{u_\varepsilon\}$*, qui converge faiblement vers* u *à savoir*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ quand} \varepsilon \to 0 \tag{3.35}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, nous utilisons (3.31) pour obtenir

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_V + (\nabla j_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_V = 0, \forall v \in V$$

on en déduit que :

$$(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_V + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 0, \forall v \in V \tag{3.36}$$

Nous utilisons $v = 0_V$ en (3.36) avec

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon)_V + j_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq j_\varepsilon(0_V)$$

Combinée cette inéquation avec les inéquations

$$\begin{aligned} j(u_\varepsilon) &\leq j_\varepsilon(u_\varepsilon) \\ j_\varepsilon(0_V) &\leq j(0_V) \end{aligned}$$

par la hypthèse (3.30)-(a) implique que

$$(Au_\varepsilon - A0_V, u_\varepsilon)_V + j(u_\varepsilon) \leq -(A0_V, u_\varepsilon)_V + j(0_V) - 2F(\varepsilon) \tag{3.37}$$

D'autre part, nous utilisons le lemme 7 et de j semi continuité inferieure et d'après théorème la représentation de Riesz et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$j(u_\varepsilon) \geq (\omega, u_\varepsilon) + \alpha \tag{3.38}$$

Par conséquent, la combinaison de(3.37)et(3.38)et en utilisant (8) et le Cauchy Schwarz, il en résulte que l'inéquation

$$m \|u_\varepsilon\|_V^2 \leq (\|A0_V\|_V \|\alpha\|_V) \|u_\varepsilon\|_V + |j(0_V)| + 2F(\varepsilon) + |\alpha|$$

Nous utilisons maintenant l'inéquation élémentaire

$$x, a, b \geq 0 \text{ et } x^2 \leq ax + b \Rightarrow x^2 \leq a^2 + 2b$$

et l'hypothèse (3.30-(b)) de déduire que la suite $\{u_\varepsilon\}$ est bornée dans V quand $\varepsilon \to 0$. ■

Etape 2 : la convergence faible

Lemme 9 *La suite $\{u_\varepsilon\}$ converge faiblement vers l'élément u dans V.*

Preuve. la preuve du lemme 10 montre que si$u$ est la limite faible d'une suite faiblement convergente de la suite $\{u_\varepsilon\} \subset V$, alors u satisfait l'inéquation variationnelle (3.27). Rappelons aussi que cette inéquation variationnelle admet une solution unique et d'ailleurs, il était montré dans la démonstration du lemme 8 que la suite $\{u_\varepsilon\}$ est bornée dans V. ■

Etape 3 : passage a la limite

Ensuite,nous étudions les propriétés de l'élément u défini dans le lemme suivant.

Lemme 10 *L'élément u satisfait l'inéquation variationnelle (3.27) et Par ailleurs, cette inéquation de solution unique .*

Preuve. Après lemme 8 nous considérons une suite$\{u_\varepsilon\}$ telle que(3.35) est vérifiée. Soit $\varepsilon > 0$, nous utilisons (3.36) avec $v = u$ tel que

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V \leq j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \tag{3.39}$$

On peut écrire

$$j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) = j_\varepsilon(u) - j(u) + j(u) - j(u_\varepsilon) + j(u_\varepsilon) - j_\varepsilon(u_\varepsilon)$$

et utiliser l'hypothèse (3.30)-(a) tel que

$$j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq j(u) - j(u_\varepsilon).$$

Ensuite, nous passons à la limite supérieure que $\varepsilon \to 0$ dans l'inéquation précédente et utiliser l'hypothèse (3.30)-(b) pour obtenir

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq j(u) - \liminf_{\varepsilon \to 0} j(u_\varepsilon)$$

Par conséquent, j est semi continue inférieure en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup j_\varepsilon(u) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq 0 \tag{3.40}$$

Enfin, en passant à la limite supérieure $\varepsilon \to 0$ in (3.39) et en utilisant (3.40) alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V \leq 0 \tag{3.41}$$

En utilisant maintenant (3.35),(3.41) et de la monotonie hemicontinue on déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V \geq (Au, u - v)_V, \forall v \in V \tag{3.42}$$

Ensuite, nous utilisons l'inéquation (3.36) tel que

$$j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V, \forall v \in V$$

et donc

$$j(v) + j_\varepsilon(v) - j(v) + j(u_\varepsilon) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq j(u_\varepsilon) + (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)_V, \forall v \in V. \tag{3.43}$$

Nous passons à la limite inférieure quand $\varepsilon \to 0$ dans (3.43) et utilisons l'hypothèse (3.30), j semi continue inférieure et de l'inéquation(3.42) Par conséquent, nous obtenir

$$j(v) \leq j(u) + (Au, u - v) \tag{3.44}$$

Il en résulte maintenant de (3.44) que u satisfait l'inéquation variationnelle (3.27), qui Conclu de la première partie du lemme.Pour l'unicité en utilisant la fortement monotonie de l'opérateur A et était déjà présenté dans la démonstration du théorème 30. ■
La dernière étape est fournie par la résultat de la convergence forte suivant.

Etape 4 :la convergence forte

Lemme 11 *La suite $\{u_\varepsilon\}$ converge fortement vers l'élément u dans V,*

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans } V \text{ quand } \varepsilon \to 0 \tag{3.45}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, nous prenons $v = u$ dans (3.42) alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V \geq 0$$

Nous combinaisons cette inéquation avec (3.41) pour obtenir que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V = 0 \tag{3.46}$$

D'autre part, de la convergence faible $\{u_\varepsilon\}$ vers u assure par le lemme 9, il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (Au, u_\varepsilon - u)_V = 0 \tag{3.47}$$

A un opérateur fortement monotone,alors

$$\begin{aligned} m \|u_\varepsilon - u\|_V^2 &\leq (Au_\varepsilon - Au, u_\varepsilon - u)_V && (3.48) \\ &= (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)_V - (Au, u_\varepsilon - u)_V && (3.49) \end{aligned}$$

La convergence (3.45) est maintenant une conséquence de (3.46) - (3.48), nous pouvons maintenant facilement fournir la preuve du théorème 30.

■

Preuve du théorème 30 Les points (1),(2) et (3) sont des conséquences direct des lemmes 6, 10 et 11 respectivement. il ya deux résultat de la le théorème 30 ;
En premier : l'existence et l'unicité de solution à l'inéquation variationnelle (3.27) ;
Deuxièmement, nous montre que la suite des solutions u_ε de problème (3.31) converge forte vers la solution de (3.27) quand $\varepsilon \to 0$.

Remarque 31

a - On peut démontre l'existence et l'unicité de problème(3.1) par propriétés d'opérateur.

b - On peut démontre l'existence et l'unicité de problème(3.23) par propriétés d'opérateur. voir [[14]].

Conclusion

Dans ce travail ,on a étudie l'existence et l'unicité d'inéquation variationnelle elliptique premier et deuxième espèce et résoudre d'inéquation variationnelle elliptique non linéaire par la méthode pénalisation
Pour les perspectives, il serait intéressant de trouver

1. L'existence et l'unicité d'IVE dans le cadre Banach

2. L'existence et l'unicité d'IV parabolique dans le cadre Banach

3. L'existence et l'unicité d'IV hyperbolique dans le cadre Banach

4. L'existence et l'unicité de quasi-variationnelle dans le cadre Banach

Bibliographie

[1] H.Brézes, Analyse fonctionnelle théories et application. Dunod 1999.

[2] R. Glowinski, Lectures on Numerical Methods For Non-Linear variational Problems. Bombay 1980.

[3] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solution of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, partt II, Comm.pure App. Math. 17(1965)35-92.

[4] A.Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atii Societa Italianna per il Progresso della Scienze, 1933.

[5] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964.

[6] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[7] Anca Capatina,Variational Inequalities and Frictional Contact Problems. Advances in Mechanics and Mathematics Volume 31.

[8] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967.

[9] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1, 1-168, 1972.

[10] H. Brézis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1, 115-175, 1968.

[11] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a Nato Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[12] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire Dunod, Paris, 1969.

[13] U. Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[14] M. Sofonea, A.Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics. London Mathematical Society Lecture Note Series : 398

[15] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[16] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[17] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières, Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.

[18] J. T. Oden and N. Kikuchi,Theory of Variational Inequalities with Applications to Problems of Flow Through Porous Media ,The University of Texas at Austin, Austin, TX 78712, U.S.A.

[19] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1984.

[20] Matthew Rudd and Klaus Schmitt, Variational Inequalities of Elliptic and Parabolic Type, Salt Lake City, Utah 84112-0090,May 20,2002.

[21] G.Duvaut J.L.Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Berlin Heidelberg New York,1976.

[22] Jacques-Louis Lions, Sur les Problèmes Unilatéral , Séminaire N. bourbaki, 1968-1969, exp. n350,p.<http ://archive.numdam.org/ARCHIVE/SB/SB-1968-1969-11-/SB-1968-1969-11-55-0/SB-1968-1969-11-55-0.>

ملخص

في هذا العمل قمنا بحل مسائل ذات قيود من صنف متراجحات,معرفة بمسائل متراجحات تغايرتية الشبيهة بالقطع الناقص من الصنف الأول و الصنف الثاني بطريقة المعاقبة.

كلمات مفتاحية : متراجحات تغايرتية الشبيهة بالقطع الناقص الصنف الأول, متراجحات تغايرتية الشبيهة بالقطع الناقص الصنف الثاني, طريقة المعاقبة طريقة الصقالة.

Abstract

In this work we solve problems with constrains of inequalities type formulated by variational inequality elliptic first and second kind by the penalty method, and study existence and uniqueness of solution.

Keywords :Penalty method, variational inequalities elliptic first kind, variational inequalities second kind, regularization.

Résumé

Dans ce travail on résoudre de problème avec contraintes de type inégalité formulés par d'inéquation variationnelle elliptique première et deuxième espèce par la méthode de la pénalisation,et étudié l'existence et l'unicité de solution.

Mots clés :Inéquations variationnelles elliptiques première espèce, Inéquations variationnelles elliptiques deuxième espèce, méthode de pénalisation, régularisation.