UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : SALHI Manel

Sous la direction $M.$

TELLAB Brahim

Thème

Applications de quelques théorèmes du point fixe pour la résolution des équations différentielles fractionnaires

Version de : 29/05/2016

Devant le jury composé de :

M.Mammeri Mohammed	M. A. UKMO université-Ouargla	Président
M.Kouidri Mohammed	M. A. UKMO université-Ouargla	Examinateur
M. Tellab Brahim	M. A. UKMO université-Ouargla	Rapporteur

l'année universitaire :2015/2016

Dédicace

__A__vec unénorme plaisir, un coeur ouvert et une immense joie.
__Q__ue je dédie ce mémoire
__A__ mes trés chers, respectueux et mangnifiques parents ma mére et mon pére,
__Q__ui m'ont soutenus tout au long de ma vie.
__P__ar leur patience, leur amourset leur encouragement .
__A__ mes fréres,
__A__ mes seours,
__A__ toute ma famille,
__A__ tout mes amis,
__A__ tout mes enseignants, pour leur utiles consiels, leur patience et leur persévérance.

Remerciements

Mon premier remerciemment va à Allah soubhanahou wa tahala.
***J**e tenais à remercier vivement mon encadreur de mémoire ,**Mr TELLAB Brahim**, pour ces conseils, son encouragement et sa disponibilété dans ce travaile .*
***J**e remercie égalemant **Mr Kouidri Mohammed** et **Mr Mammeri Mohammed** pour leur consiels et leur écoute durant l'élaberation de ce mémoire*
***I**l est important pour moi de remercier ma famille : mon père , ma mère , mon frère et mes soeurs , qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .*
***I**l est important pour moi de remercier tous mes amis (Khoukhou sabeh et Guermit djamilla nour el imen).*
***I**l est important pour moi de remercier tous enseignants d'université de **KASDI Merbah - Ouargla**.*

Notations

- ► ϵ,ε,λ des petites paramètres positives.
- ► $\sigma(\epsilon)$ La distribution de Dirac.
- ► $\mathbb{N}$: corps des naturels .
- ► $\mathbb{R}$: corps des réels.
- ► $\mathbb{R}_+$: corps des réels positives.
- ► $\mathbb{C}$: corps des complexe.
- ► $Re(\alpha)$: la partie réels de nombre $\alpha \in \mathbb{C}$.
- ► $[0, T]$: l'intervalle fermé $0 \leqslant t \leqslant T$.
- ► $[a, b]$: l'intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$.
- ► $L_1([a, b])$: l'espace des fonctions intégrable pour la mesure de Lebesgue dx .
- ► $C^0([a, b])$: l'espace des fonctions 0 fois continue différentiable [a,b].

Table du figure

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet prèsque aussi ancien que le calcul différentiel classique, ces origines remontent à la fin du $17^{\text{ième}}$ (voir [1]), l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ pour désigner la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé en 1695 dans une lettre à l'Hôpital, l'Hôpital a répondu, que signifie $\frac{d^n}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Cette lettre est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire.

De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature. Plusieurs mathématiciens ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20-ième siècle, citons à titre d'exemple :

P.S. Laplace(1812), J.B.J. Fourier(1822), N.H. Abel(1823-1826), J. Liouville(1832-1873), B. Riemann(1847), H. Holmgren(1865-1867), A.K. Grunwald(1867-1872), A.V. Letnikov(1868-1872), H. Laurent(1884), P.A. Nekrassov(1888), A. Krug(1890), J. Hadamard(1892), O. Heaviside(1892-1912), S. Pincherle(1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood(1917-1928), H. Weyl(1917), P. Levy (1923), A. Marchaud(1927), H.T. Davis(1924-1936), A. Zygmund(1935-1945), E.R. Amour(1938-1996), H. Kober(1940), D.V. Widder(1941), M. Riesz(1949)

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe un rôle très important.

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base qui montrent l'existence des solutions dans divers types d'équations. La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire car elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence et d'unicité dans nombreux problèmes non linéaires.

La méthode du point fixe est associée aux noms de plusieurs mathématiciens célèbres tels que Cauchy, Liouville, Lipschitz, et Picard. En fait, les précurseurs de la théorie du point fixe approché sont explicites dans les travaux de Picard. Toutefois, c'est le mathématiciens polonais Stefan Banach, qui est crédité sur le placement d'une idée abstraite.

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peut plus de 30 ans, elle a été objet de quelques conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à

K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

De nombreuses définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégration fractionnaire. Pour plus de détails sur ce sujet on poura consulter ([2], [3], [4]).

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'étude de quelques problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires fractionnaires.

Ce mémoire se décompose de trois châpitres partagés de la manière suivante :

Premier châpitre : Dans ce châpitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions spécifiques et quelques approches sur les dérivées fractionnaires utiles tout au long de ce mémoire.

Deuxième chápitre : Ce châpitre est consacré pour la présentation de quelques théorèmes du point fixe utils pour nos applications à la troisième chápitre .

Troisième châpitre : Dans ce châpitre, nous étudions quelques résultats d'existences et d'unicité pour des équations différentielles fractionnaires en utilisant la théorie du point fixe.

Chapitre 1

Eléments du calcul fractionnaire

1.1 fonctions élémentaires du calcul fractionnaire

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$, qui est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \quad z > 0; Re(z) > 0. \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

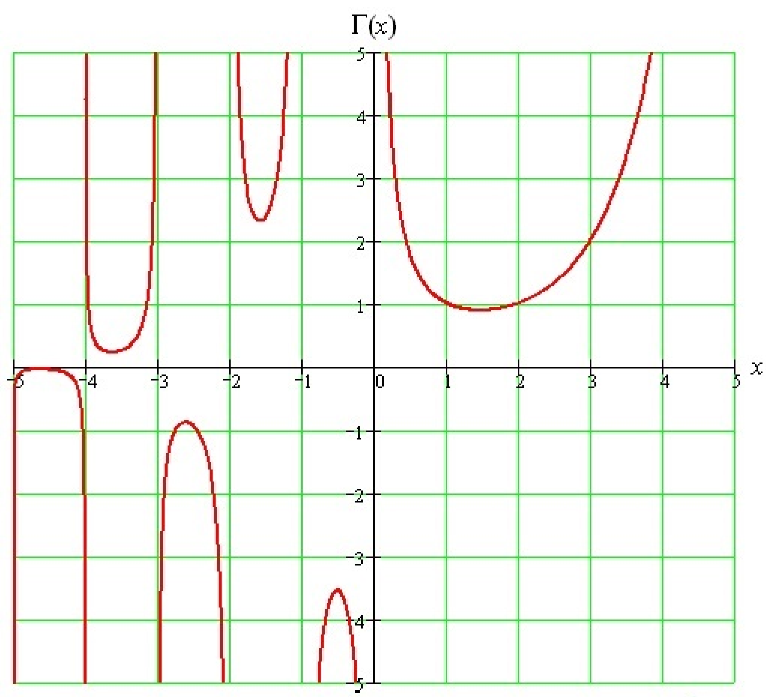

FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction gamma

La fonction Gamma $\Gamma(z)$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z > 0 \tag{1.2}$$

qui se démontre par une intégration par parties, en effet :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \Big[-t^z e^{-t} \Big]_{t=0}^{t=+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$, et en utilisant (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ \ldots & \quad \ldots. \quad \ldots \quad \ldots \\ \Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n! \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nous montrons maintenant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
De la définition (1.1) nous avons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Si nous posons $t = y^2$, alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.4}$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{1.5}$$

Si nous multiplions ensemble (1.4) et (1.5) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \tag{1.6}$$

L'équation (1.6) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi. \tag{1.7}$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

L'équation fonctionnelle (1.2) entraine pour les entiers relatifs positifs n (voir [5])

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \\
\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9...(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),
\end{aligned}$$

et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

1.1.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta est définie par une intégrale définie de la façon suivante :

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \quad p,q \in \mathbb{R}_+ \tag{1.8}$$

La fonction de Bêta peut aussi être définie en termes de la fonction Gamma :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p,q \in \mathbb{R}_+ \tag{1.9}$$

1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est nommée d'après un mathématicien suédois qui l'a défini en 1903. Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, e^x, et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire. Les représentations de la fonction Mittag-Leffler à un et à deux paramètres peuvent être définies en terme d'une série de puissances :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha > 0, \tag{1.10}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.11}$$

De la définition (1.11), il en résult que :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).$$

En effet, par définition on a,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)} \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x). \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simples. Par exemple,

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \\
E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x-1}{x} \\
E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x).
\end{aligned}$$

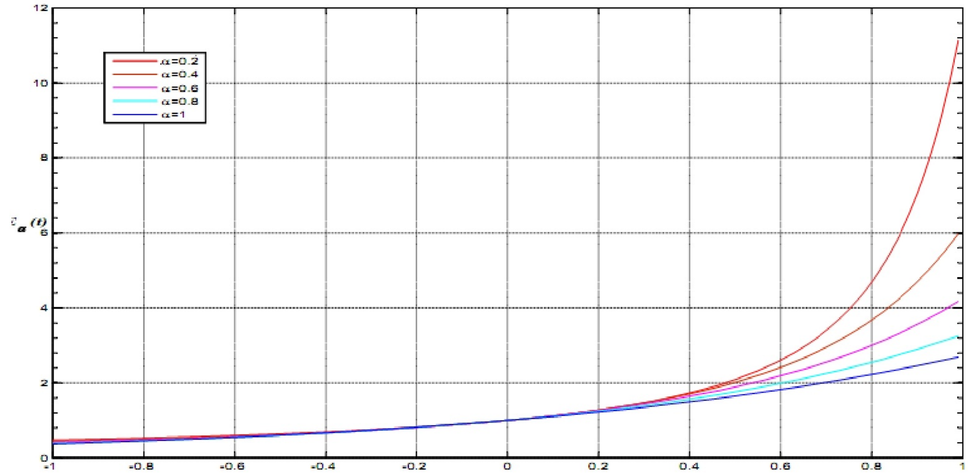

FIGURE 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

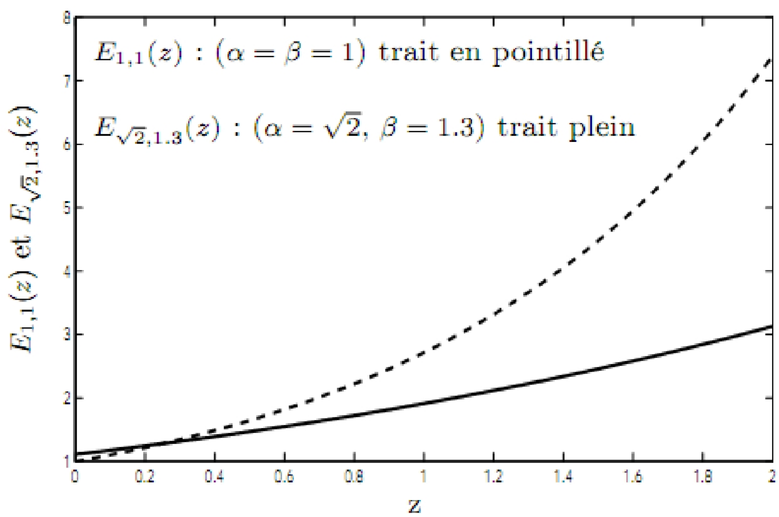

FIGURE 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

1.2 Dérivée et intégrale fractionnaires de Riemann-Liouville

1.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f est définie par la formule suivante :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.13}$$

où α est un nombre réel positif.

Théorème 1.2.1 *Soient $f \in L_1[a, b]$ et $\alpha > 0$, alors l'intégrale $I_a^\alpha f(t)$ existe pour tout $t \in [a, b]$ et la fonction $I_a^\alpha f$ elle même est un élément de $f \in L_1[a, b]$.*

Preuve :
Pour la démonstration, on renvoit à [6].

Théorème 1.2.2 *Soient $\alpha, \beta > 0$ et $\phi \in L_1[a, b]$. Alors*

$$I_a^\alpha I_a^\beta \phi(x) = I_a^{\alpha+\beta} \phi(x),$$

Pour tout $x \in [a, b]$.

Preuve :
On a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} \phi(\tau) d\tau dt$$

,
pour tout $x \in [a, b]$.
Par la théorème Fubini, On obtient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} \phi(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \phi(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} dt d\tau \end{aligned}$$

En effectuant subsutitution $t = \tau + s(x - \tau)$, on arrive à :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \phi(\tau) \int_0^1 [(x-\tau)(1-s)]^{\alpha-1}.[s(x-\tau)]^{\beta-1}(x-\tau) ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \phi(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds d\tau \end{aligned}$$

D'aprés la définition de la fonction Béta, on a $\displaystyle\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, et par la suite on aura :

$$I_a^\alpha I_a^\beta \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \phi(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = I_a^{\alpha+\beta} \phi(x).$$

Exemple 1.2.1

$$
\begin{aligned}
I_a^{\alpha}(t-a)^n &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^n d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+n}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^n dx \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}(t-a)^{\alpha+n}. \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

En prenant $\alpha = 0.5, n = 1$ et $a = 0$, on obtient :

$$
I_0^{0.5}t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}t^{1.5}.
$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2 *Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$. Alors la dérivée fractionnaire d'ordre p ($n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I_a^{n-p} f(t)). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Exemple 1.2.2 *Dans cet exemple on va calculer la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^\alpha$ Soient $n-1 \leq p < n$ et $\alpha > -1$. Alors on a :*

$${}_a^R D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau.$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^\alpha ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\beta(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 *En générale, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle ni constante, mais elle est définie par :*

$${}_a^R D_t^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}.$$

1.2.3 Propriétés

1. Composition avec les intégrales fractionnaires[3]

• ${}_a^R D_t^p (I_t^p f(t)) = f(t)$. Autrement dit, l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, et en générale on a

$${}_a^R D_t^p (I_t^q f(t)) = {}_a^R D_t^{p-q} f(t).$$

En particulier, si $p - q < 0$, on écrit souvent

$${}_a^R D_t^{p-q} f(t) = I_t^{q-p} f(t).$$

• $${}_a^R D_t^{-p} \left({}_a^R D_t^q f(t) \right) = {}_a^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{k=1}^{m} \left[{}_a^R D_t^{q-k} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}, \quad (m-1 \leq q < m).$$

C'est-à-dire que la différentiation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en général.

2. Composition avec les dérivées d'ordre entier[3]

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a^RD_t^p f(t)\right) = {}_a^RD_t^{n+p} f(t)$$

et

$${}_a^RD_t^p\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = {}_a^RD_t^{n+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}.$$

On déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

3. Composition avec les dérivées fractionnaires[3]
Pour $m-1 \leq q < m$ et $n-1 \leq q < n$, on a :

$${}_a^RD_t^p\left({}_a^RD_t^q\right) = {}_a^RD_t^{p+q} - \sum_{k=1}^{m} \left[{}_a^RD_t^{q-k} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(-p-k+1)}$$

et

$${}_a^RD_t^q\left({}_a^RD_t^p\right) = {}_a^RD_t^{p+q} - \sum_{k=1}^{n} \left[{}_a^RD_t^{p-k} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)}.$$

Donc, les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ${}_a^RD_t^p$ et ${}_a^RD_t^q$ ne commutent que dans le cas trivial $p = q$ ou si

$$\left[{}_a^RD_t^{p-k} f(t)\right]_{t=a} = 0, \text{pour tout } k = 1, 2, ..., n$$

et

$$\left[{}_a^RD_t^{q-k} f(t)\right]_{t=a} = 0, \text{pour tout } k = 1, 2, ..., m.$$

proposition 1.2.1

Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a,b])$.

$$\text{i)} \quad I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad (\mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0) \tag{1.16}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{d}{dt}(I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 1 \tag{1.17}$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{\alpha \longrightarrow 0^+}(I_a^\alpha f)(t) = f(t), \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{1.18}$$

Preuve :
i) Pour la demonstration on utilise la fonction Bêta d'Euler . En effet :

$$\begin{aligned}
[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(I_a^\beta f)(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds,
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} ds \right] d\tau.$$

Le changement de variable $s = \tau + (t-\tau)\mu$, nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu \\
&= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t)$$

ii) Pour justifier la deuxième identité on utilise les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation fondamentale de la fonction gamma d'Euler :

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

iii) Pour la dernière identité, on considère la fonction $f \in C^0([a,b])$, on a

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De la relation (1.14) on peut écrire :

$$(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \longrightarrow 1 \ \ quand \ \ \alpha \to 0^+.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\left|(I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t)d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau. \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a, b]$ qui nous permet d'écrire :

$$\forall t, \tau \in [a, b), \ \ \forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0 : \ \ |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \varepsilon,$$

ce qui entraine :

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \frac{\varepsilon\delta^\alpha}{\alpha}. \qquad (1.20)$$

D'autre part,où $M = \sup_{\xi\in[a,t]} |f(\xi)|$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1}(|f(\tau)|+|f(t)|)d\tau \\
&\leq 2\sup_{\xi\in[a,t]}|f(\xi)|\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau, \ \ \forall t\in[a,b] \\
&= 2M\left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha}\right), \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Une combinaison de (1.19), (1.20) et (1.21) nous donne :

$$\begin{aligned}
\left|(I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)\right| &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}[\varepsilon\delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[\varepsilon\delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)],
\end{aligned}$$

en faisant tendre α vers 0^+, on obtient :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left|(I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)\right| \leq \varepsilon$$

autrement dit :

$$\left|\lim_{\alpha\to 0^+}(I_a^\alpha f)(t) - f(t)\right| \leq \varepsilon, \ \ \forall\varepsilon > 0,$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}(I_a^\alpha f)(t) = f(t)$$

■

1.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville mène à des conditions contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = a$.

Une certaine solution de ce problème a été proposée par M. Caputo.

Définition 1.3.1 *Soient $p \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^\star$ avec $n-1 \leq p < n$ et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in [a,b]$. La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :*

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right). \end{aligned}$$

1.3.1 Lien avec la dérivée Riemann-Liouville[3]

Soient $p \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^\star$ avec $n-1 \leq p < n$. Si ${}_a^C D_t^p f(t)$ et ${}_a^R D_t^p f(t)$ existent, alors on a :

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}, \tag{1.22}$$

de (1.22), on déduit que

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t),$$

si $f^{(k)} = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

1.3.2 Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire[3]

Si f est une fonction continue, alors :

$$ {}_a^C D_t^p I_a^p f(t) = f(t) \tag{1.23}$$

et

$$ I_a^p {}_a^C D_t^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}. \tag{1.24}$$

Alors on déduit que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse droit en général.

Exemple 1.3.1 • ***La dérivée de la fonction*** $f(t) = (t-a)^{\alpha}$
Soient n *un nombre entier et* p *un nombre non entier avec* $0 \leq n-1 < p < n$ *et* $\alpha > n-1$. *Alors :*

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n},$$

d'où

$${}_a^C D_t^p (t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau.$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ *nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_t^p (t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit :*

$${}_a^C D_t^p C = 0.$$

Chapitre 2

Quelques théorèmes du point fixe

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit aussi le théorème de l'application contractante, c'est la base de la théorie du point fixe. Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe unique pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même.

Définition 2.1.1 *Soient (X, d) un espace métrique complet et T une application de X dans X. On dit que T est une application Lipschitizienne s'il existe une constante positive k telle que l'on ait :*

$$\forall x, y \in X : \ d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

• *Si $k < 1$, T est appelée contraction.*

Théorème 2.1.1 *Soit T une application continue sur un espace de Banach X. alors les assertions suivantes sont vraie :*
1) S'il existe $x, y \in X$ tels que

$$\lim_{n \to +\infty} T^n(x) = y,$$

alors y est un point fixe de T, i.e. $T(y) = y$.
2) Si $T(X)$ est un ensemble compact dans X et pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $x_\epsilon \in X$ tel que

$$\|T(x_\epsilon) - x_\epsilon\| < \epsilon,$$

alors T admet un point fixe.

Preuve :
1) Soit $y_n = T^n(x)$, $n = 1, 2, ...$ Si T est une application continue, alors

$$T(y) = T(\lim_{n \to +\infty} y_n) = \lim_{n \to +\infty} T(y_n) = \lim_{n \to +\infty} y_{n+1} = y,$$

ce qui preuve la première assertion.
2) Supposons que les hypothèses de 2) sont remplies. Alors pour $n = 1, 2, ...$ on a $x_n \in X$ tel que :

$$\|T(x_n) - x_n\| < \frac{1}{n}. \tag{2.1}$$

$T(X)$ est un ensemle compact implique qu'il existe une sous suite convergente $(T(x_{n_k}))_{n=1}^{+\infty}$ de $(T(x_n))_{n=1}^{+\infty}$ de limite x. Alors en exploitant (2.1) et le fait que T est continue, on déduit que x est un point fixe de T.

■

Théorème 2.1.2 ***(Théorème du point fixe de Banach)***[7] *Soient X un espace de Banach et $T : X \longrightarrow X$ une application contractante. Alors T admet un point fixe unique, autrement dit :*

$$\exists! x \in X : \; Tx = x.$$

Preuve :
Existence
Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_n = T(x_n), & n \geq 1 \\ x_0 \in X \end{cases}$$

On démontre que (x_n) est une suite de Cauchy dans X.
Pour $m < n$, on a :

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_{m+1} - x_m\| + \|x_{m+2} - x_{m+1}\| + ... + \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Puisque T est une contraction, alors :

$$\|x_{p+1} - x_p\| = \|Tx_p - Tx_{p-1}\| \leq k\|x_p - x_{p-1}\|, \;\; \textit{pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq (k^m + k^{m+1} + ...k^{n-1})\|x_1 - x_0\| \\ &\leq k^m(1 + k + ... + k^{n-m-1})\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{k^m}{1-k}\|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

On déduit que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans X.
Puisque T est continue, alors :

$$x = \lim_{x\to+\infty} x_n = \lim_{x\to+\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{x\to+\infty} x_{n-1}) = Tx.$$

Donc, x est un point fixe de T.
Unicité
Supposons que $Tx = x$ et $Ty = y$. Alors :

$$\|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|,$$

puisque $k < 1$, on déduit que $\|x - y\| = 0$ c'est-à-dire $x = y$,
d'où l'unicité du point fixe de T.

■

Le théorème du point fixe de Banach se généralise de la manière suivante :

Théorème 2.1.3 *Soit T une application sur un espace de Banach X telle que T^N soit une contraction sur X pour un entier positif N. Alors T admet un point fixe unique.*

Preuve :
Le théorème du point fixe de Banach implique qu'il existe un point fixe pour T^N.
Appelons x_0 ce point fixe. Maintenant, il suffit de noter que :

$$\|T(x_0) - x_0\| = \|T^N(T(x_0)) - T^N(x_0)\| \leq k\|T(x_0) - x_0\|$$

ceci implique que $T(x_0) = x_0$ car $0 < k < 1$.
L'unicité est clair puisque un point fixe de T est également un point fixe pour T^N.

■

2.1.1 Théorème du point fixe de Brouwer

Soient $N \geq 1$, $R > 0$ et $f \in C(B_R, B_R)$ avec $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq R\}$.
(on muni $\mathbb{R}^N$ d'une norme notée $\|.\|$) Alors f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in B_R$ tel que : $f(x) = x$.

Définition 2.1.2 *On dit qu'un espace topologique X a la propriété du point fixe si toute application continue $T : X \to X$ possède un point fixe.*

Théorème 2.1.4 ***(Théorème du point fixe de Brouwer)****[8] Soit B_n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^N$. La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

2.1.2 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour la démonstration de l'existence d'un point fixe d'une application continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 2.1.5 ***(Théorème du point fixe de Schauder)****[8] Soient K un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach X et $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.*

Preuve :
Soit $T : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, alors T est uniformément continue. Donc pour ε fixé, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on a :

$$\| x - y \| \leq \delta \Longrightarrow \| T(x) - T(y) \| \leq \varepsilon,$$

de plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K; c'est-à-dire,$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$.

Si on pose $L := vect(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact

convexe de dimension finie.
Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : X \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} 0 & si \parallel x - x_j \parallel \geq \delta \\ \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & si\ non \end{cases}$$

Il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle en dehors. On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et par la suite on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)},$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.
Posons maintenant, pour $x \in K$,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j).$$

La fonction g est continue (somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^* (car g est un barycentre des $T(x_j)$).
Si on prend la restriction $g/K^* : K^* \to K^*$, (d'après le théorème de Brouwer) g possède un point fixe $y \in K^*$.
De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \Big(T(y) - T(x_j) \Big). \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\parallel y - x_j \parallel < \delta$, et par suite $\parallel T(y) - T(x_j) \parallel < \varepsilon$. Donc, on a pour tout j

$$\begin{aligned} \parallel T(y) - y \parallel &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \parallel T(y) - T(x_j) \parallel \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier , m on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\parallel T(y_m) - y_m \parallel \leq 2^{-m}$. Et puisque K est compact, alors de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$, c'est-à-dire y^* est un point fixe de T sur K.

■

Pour les applications, la généralisation suivante s'avère utile.

Théorème 2.1.6 ***(Théorème du point fixe de Schauder généralisé)****[8] soit F un ensemble fermé convexe sur un espace de Banach X et soit $T : F \to F$ une application continue telle que $T(F)$ est un sous-ensemble relativement compacte de F. Alors T admet un point fixe.*

Théorème 2.1.7 *Supposons que T est une application continue entre deux espace de banach X et Y. Si K est un ensemble compact dans X alors, $T(K)$ est un ensemble compact dans Y.*

Preuve :
Soit $T : X \to Y$ une application continue et soit K un ensemble compact dans X. supposons une suite arbitraire $(y_n) \subset T(K)$. Alors il existe une suite $(x_n) \subset K$ telle que $T(x_n) = y_n$ pour tout n. Puisque K est compact, alors il existe une sous-suite (x_{n_k}) convergente de (x_n) dans K, i.e. il existe un élément $x \in K$ tel que $x_{n_k} \to x$ quand $k \to +\infty$. De plus, puisque T est continue, nous avons

$$x_{n_k} \to x \Rightarrow y_{n_k} = T(x_{n_k}) \to T(x) \in T(K).$$

Ceci temine la preuve.

■

Soit $T : X \to Y$ une application entre deux espaces de Banach. Les différents notions de continuité utilisées dans ce chapitre sont : T est dite
• **Continue :** si pour tout $x \in X$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(x, \epsilon)$ tel que quelque soit $y \in X$:

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T(y) - T(x)\|_Y < \epsilon.$$

• **Uniformement continue sur** A **:** $(A \in X)$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tel que quelque soient $x, y \in A$ nous avons :

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T(y) - T(x)\|_Y < \epsilon.$$

Si $T_\lambda : X \to Y$, $(\lambda \in \Lambda)$, un ensemble d'applications entre deux espaces de Banach.
T_λ est dite
• **Equicontinue sur** A **:** $(A \in X)$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tel que quelque soient $x, y \in A$ et quelque soit $\lambda \in \Lambda$ nous avons :

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T_\lambda(y) - T_\lambda(x)\|_Y < \epsilon.$$

Théorème 2.1.8 ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)****[9] Soit $A \subset C(K, \mathbb{R}^n)$, $(K = [a, b] \subset \mathbb{R})$.
A est relativement compact (i.e, $\bar{A}$ est compact) si et seulement si :*
1. A est uniformément borné.
2. A est équicontinu.
• On rappelle qu'une fonction f est uniformément bornée dans A s'il existe un constante $M > 0$ telle que :

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| \leq M, \quad \forall f \in A$$

2.1.3 Théorème du point fixe de Kranoselskii

On a vu précédement deux théorèmes principaux de la théorie du point fixe à savoir le théorème de Schauder el théorème de l'application contractane de Banach. Kranoselskii a combiné ces deux théorème.

Théorème 2.1.9 ***(Théorème du point fixe de Kranoselskii)****[10]*
Soit F un ensemble non vide, fermé, et convexe d'un espace de Banach X. T_1 et T_2 sont deux applications de F dans X telles que :
1. $T_1(x) + T_2(y) \in F, \ \forall x, y \in F,$
2. T_1 est une contraction,
3. T_2 est compacte et continue.
Alors, $T_1 + T_2$ admet un point fixe dans F, autrement dit, il existe $x \in F$ tel que $T_1(x) + T_2(x) = x$.

Preuve :
Supposone que les applications T_1 et T_2 satisfont les hypothèses du théorème. En particulier, il existe $k \in (0, 1)$ tel que :

$$\|T_1(x) - T_1(y)\| \leq k\|x - y\|, \ \ x, y \in F.$$

Ceci donne :

$$\|(I - T_1)(x) - (I - T_1)y)\| \geq \|x - y\| - \|T_1(x) - T_1(y)\| \geq (1 - k)\|x - y\|,$$

et

$$\|(I - T_1)(x) - (I - T_1)y)\| \leq \|x - y\| + \|T_1(x) - T_1(y)\| \leq (1 + k)\|x - y\|.$$

Par conséquent, $I - T_1 : F \to (I - T_1)(F)$ est un homémorphisme et $(I - T_1)^{-1}$ existe, puisque $(I - T_1)(F)$ est continue. De plus on remarque que pour tout $y \in F$, l'équation

$$x = T_1(x) + T_2(y)$$

a une solution unique $x \in F$ selon le théorème du point fixe de Banach. De cette dernière équation nous concluons que $T_2(y) \in (I - T_1)(F)$ pour tout $y \in F$ et que $(I - T_1)^{-1}T_2 : F \to F$ est bien définie comme étant une application continue. Puisque T_2 est une application compacte, il s'ensuit que $(I - T_1)^{-1}T_2 : F \to F$ est aussi une application compacte. Finalement, le théorème du point fixe de Schauder généralisé nous garantit la conclusion du théorème.

■

Pour plus de détails, nou recommandons toute personne intéressée par les théorèmes du point fixe de parcourir le livre [7] par Smart où des résultats suplémentaires et beaucoup plus de références peuvent être trouvées.

Chapitre 3

Etude de l'existence et l'unicité de solutions d'une équation différentielle fractionnaire

Dans ce châpitre, nous étudions l'existence et l'unicité de solutions pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions intégrales aux limites .
Nos resultats sont basés sur l'application de deux théorèmes du point fixe.
• Le théorème du point fixe de Banach.
• Le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

3.1 Présentation du problème

Nous considérons l'équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions intégrales aux limites :

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \;\; t \in J = [0, 1], \tag{3.1}$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s)ds \tag{3.2}$$

$$y(1) = \int_0^1 (1-s)^{\beta-1}y(s)ds \tag{3.3}$$

où $^{C}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α,
$1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue .

3.2 Préliminaires

Pour l'étude de nos problèmes, nous avons besoin de quelques définitions et propriétés de calcul fractionnaire. (Pour plus de détails on renvoit par exemple à [2],[3],[11],[12]).

Lemme 3.2.1 ([12]) *soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle*

$$^{C}D^{\alpha}h(t) = 0$$

admet une solution

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1},$$

$c_i \in \mathbb{R}$ *,$i = 1, ..., n$ et $n = [\alpha] + 1$,($[\alpha]$ est la partie entiére de α).*

Lemme 3.2.2 ([12]) *soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha}\, ^{C}D^{\alpha} = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}, \tag{3.4}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$,$i = 1, ..., n$ et $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 3.2.3 *Soit $1 < \alpha \leq 2$ et soit $h : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue . Alors, le problème au limites :*

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = h(t), \;\; t \in J \tag{3.5}$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s)ds \tag{3.6}$$

$$y(1) = \int_0^1 (1-s)^{\beta-1}y(s)ds \tag{3.7}$$

admet une solution unique définie par :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_s^1 (1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)dr - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right)(1-s)^{\alpha}\right]h(s)ds.$$

D'ou

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right), \quad \gamma_2 = \left(1 - \frac{1}{\beta(\beta+1)}\right).$$

Preuve :

En appliquant le lemme(3.2.2), le problème (3.5)-(3.7) se réduit à une équation intégrale équivalente :

$$\begin{aligned} y(t) &= I_0^{\alpha}h(t) + c_0 + c_1 t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + c_0 + c_1 t, \end{aligned} \tag{3.8}$$

pour certaines constantes $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.
En intégrant et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y(s)ds &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} h(\tau)d\tau \right) ds + c_0 + \frac{c_1}{2} \\
\textbf{Fubini} &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_s^1 \left((s-\tau)^{\alpha-1} h(\tau)d\tau \right) ds + c_0 + \frac{c_1}{2} \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{(s-\tau)^{\alpha}}{\alpha} \Bigg|_{\tau=s}^{\tau=1} \right) h(s)ds + c_0 + \frac{c_1}{2} \\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha}}{\alpha} h(s)ds + c_0 + \frac{c_1}{2} \\
&= \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau)d\tau + c_0 + \frac{c_1}{2}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

En appliquant (3.8), on trouve :

$$y(0) = c_0,$$

et par (3.9), nous arrivons à

$$y(0) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau)d\tau + c_0 + \frac{c_1}{2}.$$

Alors,

$$c_1 = -2\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau)d\tau \qquad (3.10)$$

Maintenant, nous opérons (3.7) et (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} y(s)ds = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_0^s (1-s)^{\beta-1}(s-r)^{\alpha-1} h(r)drds \\
&+ c_0 \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds + c_1 \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} sds
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s)ds + c_0 + c_1 = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_0^s (1-s)^{\beta-1}(s-r)^{\alpha-1} h(r)drds \\
&+ c_0 \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds + c_1 \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} sds.
\end{aligned}$$

Aprés la simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s)ds + c_0 + c_1 = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_s^1 (1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} h(r)drds \\
&+ \frac{c_0}{\beta} + \frac{c_1}{\beta(\beta+1)},
\end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\left(1-\frac{1}{\beta}\right)c_0+\left(1-\frac{1}{\beta(\beta+1)}\right)c_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_s^1(1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)drds$$
$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds \tag{3.11}$$

Si on pose $\gamma_1=(1-\frac{1}{\beta})$, et $\gamma_2=(1-\frac{1}{\beta(\beta+1)})$,alors (3.11) devient :

$$\gamma_1c_0+\gamma_2c_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^s(1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)drds-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

En utilisant (3.10), on obtient :

$$c_0=\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_s^1(1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)drds-\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds$$
$$+\frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha}h(s)ds \tag{3.12}$$

Une combinaison de (3.8), (3.10) et (3.12), nous donne :

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds+\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_s^1(1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)drds$$
$$-\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds+\left[\frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)}-\frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right]\int_0^1(1-s)^{\alpha}h(s)ds$$

i.e.

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds+\int_0^1\left[\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_s^1(1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)dr-\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)}-\frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right)(1-s)^{\alpha}\right]h(s)ds$$

■

3.3 Résultat d'existence et d'unicité

Notre premier résultat d'existence est basé sur le théorème de l'application contractante de Banach.

Théorème 3.3.1 *Supposons que la fonction $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue et qu'il existe une constante $L>0$ telle que*

$$(H_1):|f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y|,\ \ t\in[0,1],\ \ x,y\in\mathbb{R}.$$

Si $LA<1$, alors le problème aux limites (3.1)-(3.3) admet une solution unique, où

$$A=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{B(\beta,\alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)}+\frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)}+\frac{2}{\Gamma(\alpha+2)}. \tag{3.13}$$

Preuve :
On définit l'opérateur F, lorsque $t \in [0,1]$ par :

$$(Fy)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds + \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} \int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} dr \right.$$
$$\left. - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \alpha \Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right)(1-s)^{\alpha} \right] f(s,y(s))ds \tag{3.14}$$

Posons $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t,0)| = M$ et montrons que $FB_\rho \subset B_\rho$, où $B_\rho = \{y \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) : \ \|y\| \leq \rho\}$ et $\rho \geq \frac{MA}{1-LA}$. Soient $y \in B_\rho$, $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\|(Fy)(t)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} &\left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \right. \\
&+ \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))drds \\
&+ \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} f(s,y(s))ds \\
&\left. + \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} f(s,y(s))ds \right\} \\
\leq \sup_{t\in[0,1]} &\left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Big(|f(s,y(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)| \Big) ds \right. \\
&+ \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} \Big(|f(s,y(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)| \Big) drds \\
&+ \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \Big(|f(s,y(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)| \Big) ds \\
&+ \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} \Big(|f(s,y(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)| \Big) ds \\
&\left. + \frac{2}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} \Big(|f(s,y(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)| \Big) ds \right\}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

On pose $u = \dfrac{s-r}{1-s}$,i.e, $(1-r) = (1-u)(1-s)$, $dr = (1-s)du$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} drds &= \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} ds \int_0^1 (1-u)^{\beta-1} u^{\alpha-1} du \\
&= \frac{B(\beta,\alpha)}{\alpha+\beta}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Par substitution dans (3.15), et aprés la simplifications, on trouve :

$$\begin{aligned}
\|(Fy)(t)\| &\leq (L\rho + M) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{B(\beta,\alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} \right\} \qquad (3.17) \\
&\leq (L\rho + M)A \leq \rho, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $FB_\rho \subset B_\rho$,
Maintenant, supposons que $x, y \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$, alors on obtient :

$$\begin{aligned}
\|(Fx)-(Fy)\| \leq & \sup_{t\in[0,1]}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds\right.\\
& + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|drds\\
& + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds\\
& + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds\\
& \left. + \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha}|f(s,x(s)-f(s,y(s))|ds\right\}\\
& \leq L\|x-y\|\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{B(\beta,\alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)}+\frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)}\right.\\
& \left. + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)}\right\}\\
& = LA\|x-y\|
\end{aligned}$$

Puisque par hypothèse on a $0 < LA < 1$, alors F est une contraction.
En utilisant le principe de l'application contractante de Banach, on déduit que le problème (3.1)-(3.3) admet une solution unique.

■

Exemple 3.3.1 *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$^{C}D^{\frac{4}{3}}y(t) = \frac{1}{t^3+3}\frac{|x|}{2+|x|} + \ln^2(1+t) \tag{3.19}$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s)ds \tag{3.20}$$

$$y(1) = \int_0^1 (1-s)^{\frac{-2}{3}}y(s)ds \tag{3.21}$$

Dans cet exemple, $\alpha = \frac{4}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$ *et* $f(t,x) = \frac{1}{t^3+3}\frac{|x|}{2+|x|} + \ln^2(1+t)$.
On a :

$$\begin{aligned}
|f(t,x)-f(t,y)| &= \frac{1}{t^3+3}\frac{|x|}{2+|x|} - \frac{1}{t^3+3}\frac{|y|}{2+|y|}\\
&= \frac{e^{\frac{6}{5}}}{4}|x-y|\\
&= \frac{1}{t^3+3}\left(\frac{|x|}{2+|x|}-\frac{|y|}{2+|y|}\right)\\
&\leq \frac{1}{t^3+3}\left(\frac{|x|-|y|}{2}\right)\\
&\leq \frac{1}{6}|x-y|.
\end{aligned}$$

Alors, $L = \frac{1}{6}$.
Un calcul simple, nous donne $LA = 0,65843166... < 1$, *et par le théorème du point fixe de Banach, on déduit que le problème (3.19)-(3.21) admet une solution unique*

Programme Matlab

```
a=input('a=');
b=input('b=');
L=input('L=');
disp('L=');disp(L);
i=(1-(1./b.*(b+1)));
disp('i=');disp(i);
r=(1-(1./b));
disp('r=');disp(r);
 A
=(1./gamma(a+1))+(beta(b,a)/(abs(r).*(a+b).*gamma(a)))+(1
./(abs(r).*gamma(a+1)))+((2.*abs(i))./(abs(r).*gamma(a+2)
))+(2./gamma(a+2));
disp('A='); disp(A);
if (L.*A <1)
 disp('admet une solution uniaue');
else
    disp('aucune solution');
end
```

```
a=4./3

b=1./3

L=1./6

 L=0.1667

i = -3

r=-2

A=3.9498

admet une solution unique
```

Théorème 3.3.2 *soit* $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction continue et qui satisfait la condition* (H_1) *et :*

$$(H_2) : |f(t,x)| \leq \mu(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1] et \mu \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}^+)$$

Supposons que :

$$L\left\{\frac{B(\beta,\alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)}\right\} < 1. \tag{3.22}$$

Alors,le problème aux limites (3.1)-(3.3) admet une solution unique.

Preuve :
$\sup_{t\in[0,1]} |\mu(t)| = \|\mu(t)\|$.
On pose : $\rho^* \geq \|\mu\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{B(\beta,\alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} \right\}$
et $B_{\rho^*} = \{y \in \mathscr{C}([0,1],\}) : \|y\| \leq \rho^*\}$, On définit les deux opérateurs P et Q on B_{ρ^*} par :

$$(Py)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds, \quad t \in [0,1]$$

$$\begin{aligned}
(Qy)(t) &= \frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))dsdr \\
&- \frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \\
&+ \frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} f(s,y(s))ds \\
&- \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} f(s,y(s))ds, \quad t \in [0,1]
\end{aligned}$$

Soit $x, y \in B_{\rho^*}$, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
\|Px + Qy\| &\leq \frac{\|\mu\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{\|\mu\|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}drds \\
&- \frac{\|\mu\|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds + \frac{2|\gamma_2|\|\mu\|}{|\gamma_1|\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} f(s,y(s))ds \\
&- \frac{2\|\mu\|}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha}ds \\
&\leq \|\mu\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{B(\beta,\alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} \right\} \\
&\leq \rho^*
\end{aligned}$$

Alors, $Px + Qy \in B_{\rho^*}$
on a aussi :

$$\|Q(x) - Qy\| \leq L\|x-y\|\|\left\{ \frac{B(\beta,\alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} \right\}$$

En exploitant (3.22), nous conculons que Q est un contraction.
D'après la définition de l'opérateur P, on en déduit que la continuité de f implique celle de P. En plus, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|Px\| &\leq \|\mu\| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
&\leq \frac{\|\mu\|}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Ce qui implique P est uniformément borné. Maintenant, on trouve P est compact. Nous avons :

$$\begin{aligned}(Py)(t_1)-(Py)(t_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds-\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\right.\\ &\left.-\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\right)\end{aligned}$$

En tenant compte de la condition (H_1), on pose $f^*=\sup\limits_{(t,x)\in[0,1]\times B_{\rho^*}}|f(t,x)|$.

Alors, nous écrivons :

$$\begin{aligned}|(Py)(t_1)-(Py)(t_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]f(s,y(s))ds\right.\\ &\left.+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\right|\\ &\leq \frac{f^*}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]ds+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\right|,\end{aligned}$$

un simple calcul nous amène à :

$$|(Py)(t_1)-(Py)(t_2)|\leq\frac{f^*}{\Gamma(\alpha+1)}|t_2^\alpha-t_1^\alpha|. \tag{3.24}$$

Le deuxième membre de (3.24) est indépendant de y et tend vers zéro lorsque $t_2-t_1\longrightarrow 0$ est équicontinue. En utilisant le théorème d'Ascoli-Arzelà, nous déduisons que P est compact dans B_{ρ^*}. Ainsi, tous les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnoselskii sont satisfaits. Ce qui implique que le problème aux limites (3.1)-(3.3)a une solution unique [0,1].

■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions intégrales aux limites, Les résultats d'existence et d'unicité sont prouvés en utilisant les théorèmes du point fixe .
Pour cela, nous avons commencé par des préliminaires où nous avons rappelé quelques notions des dérivées fractionnaires comme la dérivée fractionnaire de Riemann-liouville et de Caputo, et quelques outils de base du calcul fractionnaire avec quelques proprietés.
Par la suite, nous avons énoncé quelques définitions et théorèmes du point fixe que nous aurons besoin par la suite, ainsi que les démonstrations détaillées, qui nous ont permis de prouver l'existence et l'unicité de solutions.

Bibliographie

[1] B. Ross, The Development of Fractional Calculus, Historia Math. 4 (1977), 75-89.

[2] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam,2006.

[3] I. Podlubny, Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering, vol. 198. New York/London :Springer ;1999.

[4] K.B. Oldham,J. Spanier, (1974). The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order. Academic Press ? Inc.

[5] M. Abramowitz and I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, (1964).

[6] J. Dieudonné, Cancul infinitésimal, Hermann, Paris, 1968.

[7] D.R. Smart, Fixed Point Théorems, Cambridge Univ. Press 1973.

[8] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorems, Springer-Verlag, New york Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.

[9] J. K. Hale and S. Verduyn, Introduction to Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[10] R. P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He, Existence of fractional neutral functional differential équations, Comput. Math. Appl. 59 (3) (2010), 1095-1100.

[11] S. G. Samko, A. A .Kilbas, O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives : theory and applications. Amesterdam : Gordon and Breach ; 1993[Engl. Trans. from the Russian eddition 1987].

[12] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations, Elect. J. Diff. Equat. 2006(2006), No. 36, pp. 1-12.

Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié l'éxsistence et l'unicité de solution pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions intégrales aux limites,en particulier, on a présenté l'éxistence et l'unicité pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caput.

Pour ceci nous avons utilisé le théorème du point fixe de Banach et le théorème du point fixe de krasnoseliskii .

Abstract

In this paper we studied the exsistence and uniqueness of solution to a nonlinear fractional differential equation with integral condition boundary, in particular, it presented the existence and uniqueness for certain classes of differential equations of fractional order in the sense of Caputo.

For this we used the fixed point theorem and the theorem of Banach's fixed point krasnoseliskii.

ملخص

في هذه المذكرة، درسنا الوجود والوحدانية لحلول المعادلات التفاضلية ذات مشتقات الكسرية الغير خطية ، مرفقة بشروط تسمح بايجاد الحلول بطريقة النقطة الصامدة.

وفي هذا العمل مثلا،أثبتنا الوجود و الوحدانية لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية لكابيتووذلك بإستعمال نظرية النقطة الثابتة و نظرية كراسنوسلسكي.