UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialété : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Mermoul Abdelfettah

Thème

Existence de solutions d'une inéquation variationnelle hyperbolique par la Méthode Roth

Soutenu publiquement le : 05/06/2016

Devant le jury composé de :

Chacha Djamal Ahmed	Pr. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Merabet Ismail	M.C.A université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Ghezal Abderrazek	M.C.B université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Bensayah Abdallah	M.C.B université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2015/2016

Dédication

Je dédie ce mémoire
A mes parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.
A mes grande-mères, mon grand-père pour sa douceur et sa gentillesse.
A mes s ?urs ainsi qu'à mes beaux frères pour leur tendresse, leur complicité et leur présence malgré la distance qui nous sépare.
A mes neveux parents pour toute l'affection qu'ils m'ont donnée et pour leurs précieux encouragements.
A ma femme, ma plus grande source de bonheur, j'espère que la vie lui réserve le meilleur.
A toute ma famille le ainsi qu'à mes amis.

Remerciement

Je tiens à remercier mon encadreur Monsieur ***Bensayah Abdallah*** *, docteur à l'Université Kasdi Merbah Ouargla. Sa rigueur scientifique, sa disponibilité et ses qualités humaines m'ont profondément touchée.*

Je tiens à remercier également à ma chère femme

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à tous mes camarades pour leurs encouragements et pour l'ambiance agréable tout au long de ce travaille et en particulier à ***Nadjari Mourad*** *pour sa présence dans les moments difficiles et grâce à qui j'ai passé d'excellents moments.*

Notations et conventions

— Ω : Un domaine ouvert borné de R^n .

— V : espace de Hilbert avec le produit scalaire (.,.) et la norme associée $\|.\|$.

— K : est un ensemble non vide convexe fermé de V.

— $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, continue et V-elliptique sur $V \times V$
$a(.,.)$ continue :$\exists\, c > 0\ \forall u, v \in V\ |a(u, v)| \leq c\|u\|_V\|v\|_V$.
$a(.,.)$ coercive :$\exists\, \alpha > 0\, \forall u, v \in V\ |a(u, u)| \geq \alpha\|u\|_V^2$.

— $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

— $\partial_{tt} = \dfrac{\partial}{\partial tt}$.

— $\nabla g = (\dfrac{\partial g}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial g}{\partial x_n})$.

— V' :l'espace dual de V.

— $\longrightarrow$ convergence forte.

— $\rightharpoonup$ convergence faible.

Table des matières

Introduction

Dans les cinquante dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil pertinent dans l'étude des problèmes non linéaires en physique et en mécanique. La théorie des inéquation variationnelles ont été faites a partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par Signorini [4] et Fichera [5]. La théorie mathématiques obtenus par Stampacchia [6], Lions et Stampacchia [7] et puis développés par : Brézis [8],[9], Stampacchia [10], Lions [11], Mosco [12], Kinderlehrer et Stampacchia[13], et pour lapproximation des inéquations variationnelles on rappelle, les contributions de Mosco [14], Glowinski, Lions et Trémolières [15] ou Glowinski [16].
Les inéquations variationnelles permettent souvent par une résolution approchée de proposer une modélisation des courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, la simulation numérique du comportement des gratte-ciel ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et ingénieurs, des avions, trains ou voitures á grandes vitesse pour leurs bureaux d'études concepteurs, mais aussi l'écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides.
Ce mémoire est divisé en 3 chapitres.
On début notre travail par un chapitre reprend de façon générale, les définitions, et les résultats fondamentaux qui seront essentiels pour comprendre les chapitres suivantes.
Le deuxième chapitre mentionne quelques-uns des résultats des études précédentes d'inégalité variationnelle parabolique et elliptique (l'existence et l'unicité).
Dans le dernier chapitre, nous avons étudié l'existence et l'unicité d'inégalité variationnelle hyperbolique.

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre, nous abordons certains concepts mathématiques que nous devrions connaître pour un usage dans notre thème.

1.1 Rappels

Définition 1.1.1 *Une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :*

$\forall (x, y) \in V^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Définition 1.1.2 *Une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe si :*

$\forall (x, y) \in V^2$, $x \neq y$, $\quad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Définition 1.1.3 *Soit J une fonctionnelle convexe de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi continue inférieur faiblement (s.c.i) pour la topologie forte. Si v_n est une suite de V faiblement convergente vers v alors $J(v) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \inf J(v_n)$*

Définition 1.1.4 *Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue supérieurement sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes*

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}; \{u \in V, J(u) \geq \alpha\}$ *fermé.*
- *Si u_n est une suite de V faiblement convergente vers $\bar{u}$ alors :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup J(u) \leq J(\bar{u})$.

Définition 1.1.5 *Un ensemble C est dit convexe si :*

$$\forall x, y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

Définition 1.1.6 *Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup +\infty$ est semi-continue inférieurement sur V si :*

— $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \{u \in V, J(u) \leq \alpha\}$ *est fermé.*

Définition 1.1.7 *Soit J une fonctionnelle de V dans $\bar{\mathbb{R}}$, convexe et semi-continue inférieurement. Soit K un sous-ensemble convexe, non vide et fermé de V. J est propre c'est-a-dire qu'il existe un élément v_0 de K tel que*
$J(v_0) < +\infty$.

Définition 1.1.8 *Soit l'espace V avec produit scalaire$(\cdot,\cdot)_V$ et la norme $\|\cdot\|_V$ .Soit $A : V \to V$*

(1) A est un opérateur monotone si :

$$(Au - Av, u - v)_V \geq 0, \forall u, v \in V \tag{1.1}$$

(2) A est un opérateur strictement monotone si

$$(Au - Av, u - v)_V > 0, \forall u, v \in V, u \neq v,$$

(3) A est fortement monotone s'il existe un constante $m > 0$ telle que :

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m \|u - v\|_V^2 .\forall u, v \in V$$

(4) A est un opérateur contractant si :

$$\|Au - Av\|_V \leq \|u - v\|_V .\forall u, v \in V$$

(5) A est Lipschitzienne continue s'il existe $M > 0$ telle que

$$\|Au - Av\|_V \leq M \|u - v\|_V , \forall u, v \in V$$

(6) A opérateur est hemicontinue si la fonction de valeur réelle

$\Phi \to (A(u+\Phi v), w)_V$ *est continue dans* $\mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in V$.

Proposition 1 *Soit* $(V, (.,.)_V)$ *est un espace de produit scalaire et soit* $\phi : V \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable aux sens Gâteaux, les condition suivantes sont équivalentes :*

$$(a) \quad \phi\ est\ une\ fonction\ convexe; \tag{1.2}$$

$$(b) \quad \phi\ satisfait\ l'ingalit : \phi(v) - \phi(u) \geq (\nabla\phi(u), v-u)_V, \forall u, v \in V; \tag{1.3}$$

$$(c) \quad le\ gradient\ de\ \phi\ est\ un\ oprateur\ monotone\, i.e\ : (\nabla\phi(u) - \nabla\phi(v), u-v)_V \geq 0 \forall u, v \in V \tag{1.4}$$

Preuve. voire[1] ■

1.2 Les espaces fonctionnelles

1.2.1 L'espace $L^p(0, T; V)$

Soit un intervalle $[0, T] \subset \mathbb{R}$ (en général $T < +\infty$)et un espace de Banach V avec un norme $\|.\|_V$, on désigne par $L^P(0, T, V)$ l'espaces des classes de fonctions $t \longrightarrow f(t)$, qui sont mesurables à partir de $[0, T] \longrightarrow V$ pour la mesure dt et telles que :

$$\|f\|_{L^p(0,T,V)} = (\int_0^T \|f(x)\|_V^p dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty \qquad (p \neq +\infty)$$

$$\|f\|_{L^\infty(0,T,V)} = \sup_{t\in[0,T]} ess\|f(t)\|_V < +\infty$$

Les espaces $L^p(0, T, V)$ sont des espaces de Banach pour la première norme si $p \neq +\infty$, et pour la deuxième norme si $p = +\infty$.
Si V est un espace de Hilbert équipée avec un produit scalaire $(.,.)_V$, alors l'espace $L^2(0, T, V)$ est aussi un espace de Hilbert pour la produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(0,T,V)} = \int_0^T (f, g)_V dx$$

1.2.2 Les Espaces L^p

soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, pour p donné avec $1 \leq p < +\infty$ On désigne pour $L^p(\Omega)$ l'espaces des fonctions v mesurables sur Ω et telle que :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{1.5}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme(1.5)est un espace de Banach Pour $p = 2, L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondante a la norme(1.5)étant donné par

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx$$

On va identifier l'espace $L^p(\Omega)$ a son dual(ce qui n'est pas vrais dans d'autres cas, pour $p \neq 2$).
Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$, est l'espace des(classes de) fonction v mesurables et essentiellement bornées sur Ω i.e.il existe une constant C telle que $|v(x)| \leq C$ p.p sur Ω. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup ess_{x\in\Omega}|v(x)| = \inf\{C; |v(x)| \leq C \;\; p.p \;\; x \in \Omega\}$$

-La notion de convergence faible dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ devient comme suit :

— Si $1 \leq p < +\infty$, alors $v_n \rightharpoonup v$, faible dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ si :

$$\int_\Omega v_n(x)u(x)\, dx \longrightarrow \int_\Omega v(x)u(x)\;dx \;\; \forall u \;\in L^q(\Omega)\, (L^p)^{'} = L^q \; q \quad \text{est conjugué de } p)$$

— Si $p = \infty$, alors $v_n \rightharpoonup v$ faible étoile dans $L^\infty(\Omega)$ si :

$$\int_\Omega v_n(x)u(x)dx\, dx \longrightarrow \int_\Omega v(x)u(x)dx \;\; \forall u \;\in L^1(\Omega)$$

1.2.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on a $D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow D^{'}(\Omega)$, soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, C'est la définition de l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

$$W^{m,p} = \{v, D^\alpha v \in L^p(\Omega), \;\; pour \;\; |\alpha| \leq m\}$$

ou $D^\alpha v$ est la dérivée au sens des distributions pour tout $v \in L^p(\Omega)$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

— si $p = \infty$

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

De façon évidente, on a $W^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. La semi-norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

— si p $\neq \infty$

$$|v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Dans le cas $p = 2$, on utilise la notation

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

Définition 1.2.1 *Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach, on dit que B_1 s'injecte d'une façon continue dans B_2 si $\|v\|_{B_2} \leq \|v\|_{B_1}$.*

On dit que B_1 s'injecte d'une façon compacte dans B_2, si l'image de tout borné de B_1 est relativement compact dans B_2.

Théorème 1 *(Rellich-Kondrachov)).On suppose Ω borné de classe C^1. On a*

(1)- si $p < N$, alors $W^{l,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

(2)- si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$,

(3)- si $p > N$, alors $W^{l,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, avec injections compactes .

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$avec injection compacte pour tout p.

Preuve. voir[1] ∎

1.3 Théorème de Stampacchia

Théorème 2 *(Stampacchia) Soit V un espace de Hilbert et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V. Soit $K \neq 0$ un sous ensemble fermé et convexe de V. et L(.) de forme linéaire ,il existe un unique $u \in K$ telle-que*

$a(u, v - u) \geq L(v - u)$, $\forall v \in K$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de K qui minimise la fonctionnelle $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \dfrac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ pour tout v de K, en particulier :

$$\exists! u \in K \quad J(v) = \min_{v \in K} J(u)$$

Preuve. voir. [1] ∎

1.4 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 3 *Soit V un espace de Hilbert, pour tout $F \in V'$ (dual de V), il existe un unique $v \in V$ telle que :*

$$F(u) = (u, v), \quad \forall u \in V$$

et en plus :

$$\|F\|_{V'} = \|v\|_V$$

Théorème 4 *Soit V un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$.*

Soit K un partie convexe fermé non vide de V.

Si $a(u, v)$ une forme bilinéaire qui soit

Continue sur $V \times V$: $\exists c > 0 \, \forall u, v \in V, \; | \, a(u, v) \, | \leq c\|u\|\|v\|$

Coercive sur V : $\exists \alpha > 0 \; \forall u \in V \;\; a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$

Si $L(.)$ une forme linéaire continue sur V

Sous ces conditions, il existe un unique u dans K tel que

$$\forall v \in K \;\; a(u, v - u) \geq L(v - u)$$

Preuve. voir [1] ■

1.5 Théorème de la Projection

Théorème 5 *(Projection sur un convexe fermé). Soit $K \subset V$ est un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in V$, il existe $u \in K$ unique tel que :*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$(u - f, u - v) \leq 0, \forall v \in K$$

On note $u = P_K f =$ Projection de f sur K .

Preuve. voir [1] ■

$$H^m(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega) : \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, w \in L^2(\Omega), 0 \leq \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq m \right\},$$

$$H_0^m(\Omega) = \text{ complite } C_0^\infty(\Omega) \text{ dans } H^m(\Omega),$$

$$H^{-m}(\Omega) = \text{ dual } H_0^m(\Omega),$$

$$H_{\Gamma_1}^1(\Omega) = \left\{ w \in H^1(\Omega) : w = 0 \text{ dans } \Gamma_1 \right\}$$

Pour s est réel positif ou nul, $H^s(\Omega)$ est définie par interpolation et $H^{-s}(\Omega)$ est le double de $H_0^s(\Omega)$. Nous désignons par $<,>$ l'appariement de dualité entre $H^{-\alpha}(\Omega)$ et $H^\alpha(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.
Ensuite, pour $g \in L^2(\Omega), h \in H^\alpha(\Omega), 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, nous avons $< g, h >= \int_\Omega ghdx.$
La forme bilinéaire $a(,)$ est définie par $a(g, h) = \int_\Omega \nabla g.\nabla hdx$ et

$$G = \left\{ w \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega) : w \geq \phi \quad \text{dans} \quad \Gamma_2 \right\}$$

où $\phi(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ et $\phi(x) \leq 0$ sur Γ_2.
Ensuite, nous définissons la fonction de distance d par $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$ et l'ensemble

$$V_\delta = \left\{ x \in \bar{\Omega} : d(x) < \delta \right\}$$

Soit δ_0 un nombre positif, tel que $1/\delta_0$ Bounds les principaux des courbures $\partial\Omega$. Étant donné que Ω est bornée et $\partial\Omega \in C^2$, il est connu que $d(x) \in C^2(V_{\delta_0})$; voir [[?]]. Nous avons également mis Ensuite,

$$U_\delta = \{x \in \Omega : d(x) < \delta\}$$

$$s_\delta = \{x \in \Omega : d(x) = \delta\}$$

alors s_δ est une C^2 surface pour $0 \leq \delta \leq \delta_0$. Nous allons utiliser les lemmes suivants tard.

Définition 1.5.1 *Soient X et Y sont des espaces de Banach, $X \subset Y$ avec enrobage espace continu,$C_s([0, T], X)$ est défini comme étant l'espace des fonctions $v : [0, T] \longrightarrow X$ tel que la fonction réelle d'une variable réelle*

$$t \longrightarrow \langle h, v(t) \rangle_{X', X}$$

est continue sur $[0, T]$ pour tout $h \in X'$.

Lemme 1 *Soient X et Y sous les conditions de la dernière définition*

1. *Si, en outre, X est un espace de Banach réflexif, alors*

$$L^\infty(0, T; X) \cap C([0, T]; Y) \subset C_s([0, T]; X).$$

2. *Soit U un autre espace de Banach tel que $X \subset U \subset Y$ est le plongement et $X \subset Y$ est compact. Si F est bornée dans $L^\infty(0, T; X)$ et $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\dot{f}; f \in \mathcal{F}\}$ est bornée dans $L^r(0, T; Y)$, avec $r > 1$ alors relativement compact $\mathcal{F}$ dans $C([0, T]; U)$.*

Preuve. *voir [11]* ∎

Lemme 2 ***(Gronwall)*** *Si* $(y_n), (f_n) et (g_n)$ *sont des suites non négatives et*

$$y_n \leq f_n + \sum_{0 \leq k < n} g_k y_k \text{ pour } n \geq 0, \tag{1.6}$$

alors

$$y_n \leq f_n + \sum_{0 \leq k < n} f_k g_k \exp\Big(\sum_{k < j < n} g_j\Big) \text{ pour } n \geq 0. \tag{1.7}$$

Chapitre 2

Inéquation variationnelles elliptique et parabolique

2.1 Inéquation variationnelles elliptique

2.1.1 Inéquation variationnelles elliptique de 1^{re}espèce

Définition 2.1.1 *On appelle inéquation variationnelle elliptique de 1^{re}espace est un' inéquation de la forme :*

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K\ \ tq \\ a(u, v-u) \geq L(v-u)\ \ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

tel que

* $K \subset V$ *espace de Hilbert.*

* $a(,)$ *forme bilinéaire sur* $V \times V$.

* $f \in V'$, V' *duale de* V.

* $L(v) = \langle f, v \rangle$.

Théorème 6 *Soit* V *espace de Hilbert sur* $\mathbb{R}$, *Si* $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *forme bilinéaire continue et coercive sur un espace vectoriel* V, $L(.) :\longrightarrow \mathbb{R}$ *forme linaire sur* V *est* K *sous ensemble convexe non vide de* V *alors l'inéquation variationnelle (2.1) admet une solution unique .*

Preuve.

1 L'unicité :

Supposons u_1, u_2 solution de (2.1) Alors

$$a(u_1, v - u_1) \geq L(v - u_1) \;\; \forall v \in K \tag{2.2}$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq L(v - u_2) \;\; \forall v \in K \tag{2.3}$$

On prend $v = u_2$ dans (2.2) et $v = u_1$ dans (2.2)
On obtient

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq L(u_2 - u_1) \tag{2.4}$$

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq L(u_1 - u_2) \tag{2.5}$$

On additionnée (2.4) et (2.5) on trouve $a(u_1, u_2 - u_1) + a(u_2, u_1 - u_2) \geq 0$ alors $a(u_2 - u_1, u_1 - u_2) \geq 0$ et a cette inéquation on trouve $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$ alors

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$
$$\Longrightarrow \|u_1 - u_2\|_V = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2$$

d'où l'unicité .

2 L'existence :

Soit $\rho > 0$ et soit le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} Trouver w \in K \\ (w, v - w) \geq \rho(-a(u, v - w) + L(v - w)) + (u, v - w) \forall v \in K \end{cases}$$

u fixé dans V.
$a(u, v) = (Au, v)$ *et* $L(v) = (l, v)$ d'après Théorème de représentation de Riez donc on a :

$$(w, v - w) \geq (-\rho Au + \rho l + u, v - w) \forall v \in K$$

On pose $F_{\rho,u} := \rho(-Au + l) + u$
On obtient

$$(w, v - w) \geq (F_{\rho,u}, v - w) \forall v \in K$$

D'aprés la théorème de projection w est existe et unique $w = P_k F_{\rho,u}$.
On définit $T_\rho : u \longrightarrow w$ pour $\rho > 0$ fixé $T_\rho u = w$ Si T_ρ admet un point fixé $T_\rho u = w$ alors u est solution de (2.1.1) alors solution de (2.1).
Donc il suffit de montrer que T_ρ est strictement contractantente C-à-d

$$\|T_{\rho,u_1} - T_{\rho,u_2}\| \leqq C\|u_1 - u_2\|$$
$$\|w_1 - w_2\| \leq C\|u_1 - u_2\|$$

Avec $C < 1$
$u_1 \longrightarrow w_1, \quad u_2 \longrightarrow w_2$

$$(w_1, v - w_1) \geq (F_{\rho,u_1}, v - w_1), \forall v \in K \tag{2.6}$$

$$(w_2, v - w_2) \geq (F_{\rho,u_2}, v - w_2), \forall v \in K \tag{2.7}$$

Donc pour $v = w_2$ dans (2.6) et $v = w_1$ dans (2.7)
On a
$(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \geq (F_{\rho,u_1} - F_{\rho,u_2}, w_1 - w_2)$
D'ou

$\|w_1 - w_2\|^2 \leq \|F_{\rho,u_1} - F_{\rho,u_2}\| \|w_1 - w_2\|^2$
$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\| \leq \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\| = \|(-\rho A + I)(u_1 - u_2)\| \leq \|-\rho A + I\|_{\mathcal{L}(v)}.\|u_1 - u_2\|$

$$\exists\, \rho > 0 \quad tq \; \|-\rho A + I\| \leq 1$$

On a :

$$\|(-\rho A + I)v\|_V^2 = ((-\rho A + I)v, (-\rho A + I)v) = \rho^2(Av, Av) - 2\rho(Av, v) + (v, v) \leq$$
$$\leq \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \|v\|^2 \leq$$
$$\leq \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho\|A\|\|v\|^2 + \|v\|^2$$

On utilise la coercivité $(2\rho(Av, v) \leq -2\rho\alpha\|v\|^2)$ donc

$$\|(-\rho A + I)v\|_V^2 \leq (\rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \|v\|^2) \Longrightarrow \leq (\rho^2\|A\|^2 - 2\rho\alpha + 1)\|v\|^2$$

Pour $\rho \in \left]0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}\right[\Longrightarrow \|-\rho A + I\| < 1$

D'où $T_\rho(0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2})$est strictement contraction alors :

T_ρ admet un point fixe unique alors $w = u = T_\rho u$
- Par conséquent u vérifie (2.1)

■

2.1.2 Inéquation variationnelles elliptique de 2^{e}espèce

Définition 2.1.2 *On appelle Inéquation variationnelle elliptique de 2^{e}espèce toute inéquation de la forme*

$$\begin{cases} Trouver \quad u \in K \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \; \forall v \in K \end{cases}$$

Théorème 7 *Soient V un espèce de Hilbert,$K \neq \emptyset$ convexe fermé de V $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre convexe et semi continue inférieurement $a(.,.)V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive*

$f \in V$

Alors l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K \\ \\ a(u, v-u) + j(v) + j(u) \geq (f, v-u)\ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.8}$$

Admet une solution unique.

Preuve.

1 L'unicité :

Supposons u_1 et u_2 solution de(2.8) alors

$$a(u_1, v-u_1) + j(v) - j(u_1) \geq (f, v-u_1) \quad \forall v \in K \tag{2.9}$$

$$a(u_2, v-u_2) + j(v) - j(u_2) \geq (f, v-u_2) \quad \forall v \in K \tag{2.10}$$

On prend $v = u_2$ dans (2.9) et $v = u_1$ dans (2.10)
On obtient

$$a(u_1, u_2-u_1) + j(u_2) - j(u_1) \geq (f, u_2-u_1) \quad \forall v \in K \tag{2.11}$$

$$a(u_2, u_1-u_2) + j(u_1) - j(u_2) \geq (f, v-u_2) \quad \forall v \in K \tag{2.12}$$

On trouve par sommation de (2.11) et (2.12) :

$$a(u_1, u_2-u_1) + a(u_2, u_1-u2) \geq (f, u_2-u_1) + (f, u_1-u_2)$$

$$\alpha \|u_1-u_2\|^2 \leq a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \|u_1-u_2\| = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2$$

D'où l'unicité .

2 L'existence :

On définit le problème auxiliaire pour u fixé dans K et $\rho > 0$

$$\begin{cases} Trouverw \in K \\ (w, v-w) + \rho j(v) - \rho j(w) \geq -\rho(a(u, v-w) - (f, v-w)) + (u, v-w)\ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.13}$$

Le problème (2.13) admet une solution unique (d'âpre le théorème de Weierstrass)
$T_\rho : u \longmapsto w$ w solution du problème (2.13),on montre que T_ρ admet un point fixe.
Il suffit de montrer que T_ρ est strictement contractant c.à.d
$\|T_\rho(u_1) - T_\rho(u_2)\| \leq C\|u_1-u_2\|\ \forall u_1, u_2 \in V.\ c < 1$
$\|w_1 - w_2\| \leq C\|u_1-u_2\|\ tq\ w_i = T_\rho(u_1)\ i = 1, 2$
Alors :

$$(w_1, v-w_1) + \rho j(v) - \rho j(w_1) \geq -\rho a(u_1, v-w_1) + \rho(f, v-w_1) + (u_1 - v - w_1) \tag{2.14}$$

$$(w_2, v-w_2) + \rho j(v) - \rho j(w_2) \geq -\rho a(u_2, v-w_2) + \rho(f, v-w_2) + (u_2 - v - w_2) \tag{2.15}$$

On prend $v = w_2$ et $v = w_1$ respectivement dans (2.14) et (2.15) on obtient

$$-\|w_1-w_2\|^2 \geq \rho a(u_1-u_2, w_1-w_2) - (u_1-u_2, w_1-w_2)$$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\|^2 \leq -\rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) - (u_1 - u_2, w_1 - w_2) \leq$$
$$\leq (-\rho A(u_1 - u_2) + (u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq ((-\rho A + I)(u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq$$
$$\leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|\|w_1 - w_2\|$$
$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\| \leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|$$

Alors $\exists \rho > 0?$ tq $\|I - \rho A\| < 1$

$\|(I - \rho A)v\|^2 = (v - \rho Av, v - \rho Av) = (v, v) - 2\rho(Av, v) + \rho^2(Av, Av) \leq$

$\leq \|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \rho^2\|Av\|^2$

On utilisant la coercivité $(Av, v) \geq \alpha\|v\|^2 \Longrightarrow -2\rho(Av, v) \leq -2\rho\alpha\|v\|^2$

alors $\|(I - \rho A)v\|^2 \leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 \leq$

$\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho\|A\|^2)\|v\|^2$

si $\rho \in \left]0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}\right] \Longrightarrow 1 - 2\alpha\rho + \rho^2\|A\|^2 < 1$

$\Longrightarrow \|I - \rho A\| < 1$ alors T_ρ est strictement contractante $\Longrightarrow T_\rho$ admet un point fixe unique .

$T_\rho u = u = w$ d'où u vérifié le problème (2.8)

■

2.2 Inéquation variationnelles parabolique

Soient V un espace de Hilbert et K sous ensemble de V.

2.2.1 Inéquation variationnelles parabolique de 1$^{\text{re}}$espèce

Définition 2.2.1 *On appelle inéquation variationnelle parabolique de 1reespèce tout inéquation de la forme : trouver $u \in K$ telle que*

$$\int_0^T (u^{'}(t), v(t) - u(t)) + \int_0^T a(u(t), v(t) - u(t)) \geq \int_0^T (f, v(t) - u(t)) \; \forall v \in K.$$

Théorème 8 *On suppose que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire coercive, soient K un convexe fermé de V et $L(.)$ une forme linéaire continue sur V, Il existe un élément u de K et un seul tel que*

$$\begin{cases} \textit{Trouver} \;\; u(t) \in K \;\; \textit{tel que} \\ \left[u^{'}(t), v - u\right] + [Au, v - u] \geq [f, v - u], \forall v(t) \in K \;\; p.p \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.16}$$

Preuve. voir ([16]) ∎

2.2.2 Inéquation variationnelle parabolique de 2$^{\text{e}}$espèce

Définition 2.2.2 *On appelle inéquation variationnelle de 2^{e}espèce tout inéquation de la forme trouver $u \in K$ telle que*

$$\int_0^T (u^{'}(t), v(t) - u(t)) + \int_0^T a(u(t), v(t) - u(t)) + \int_0^T j(v(t)) - \int_0^T j(u(t)) \geq \int_0^T (f, v(t) - u(t)) \, \forall v \in K \tag{2.17}$$

Théorème 9 *Soient V un espace de Hilbert , $K \neq \emptyset$ convexe fermé de V et $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre et semi-continue inférieurement $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive ,$f \in V$ alors l'inéquation variationnelle parabolique suivant*

$$\begin{cases} \textit{Trouver} \;\; u(t) \in K \;\; \textit{tel que} \\ \left[u^{'}(t), v - u\right] + [Au, v - u] + \int_0^T j(v) - \int_0^T j(u) \geq [f, v - u], \forall v(t) \in K \;\; p.p \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.18}$$

admet une solution unique.

Preuve. voir ([16]) ■

Chapitre 3

Inéquation variationnelle hyperbolique

3.1 Problème (P.C)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n \geq 2, \partial\Omega \in C^2$. Γ_1 et Γ_2 des sous ensembles disjoints non vides ouvertes, tel que : $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \bar{\Gamma_2} = \bar{\Gamma_1} \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1, \Gamma_2 \in C^2$, les fonctions $f(x,t), u_0(x)$ et $\phi(x)$ sont donnés.

Problème classique (P.C)

Considérons le problème $(P.C)$

Trouver u vérifiant

$$\ddot{u} - \Delta u = f \quad dans \quad \Omega \times \,]0, +\infty[, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x) \quad dans \quad \Omega, \tag{3.2}$$

$$u = 0 \quad dans \quad \Gamma_1 \times \,]0, +\infty[, \tag{3.3}$$

$$u(x,t) \geq \phi(x) \quad sur \quad \Gamma_2 \times \,]0, +\infty[, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} \geq 0, \quad (u - \phi)\frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad sur \quad \Gamma_2 \times \,]0, +\infty[. \tag{3.5}$$

où $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
$\phi \leq 0$ et $u_0 \geq \phi$ dans Γ_2.
$u(x,0) = u_0, \dot{u}(x,0) = u_1$ dans le temps initial.
$f \in W^{2,\infty}\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$.
$u_0, u_1 \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$.

3.2 Problème variationnelle (P.V)

Soit V l'espace définie par :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \ \mid \ v = 0 \ \text{ on } \ \Gamma_1\}$$

et

$$K = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \ \text{ dans } \ \Gamma_1 \ \text{ et } \ v \geq \phi \ \text{ dans } \ \Gamma_2\}$$

Théorème 10 *Si u la solution de $(P.C)$ alors u satisfait à la $(P.V)$ problème :*

$$(P.V) \begin{cases} \textit{Trouver } u \in K \textit{ tel que} \\ \langle \ddot{u}, v-u \rangle + a(u, v-u) \geq L(v-u) \forall v \in K. \\ u(x,0) = u_0, \dot{u}(x,0) = u_1, \end{cases} \tag{3.6}$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$
$$L(v) = \int_\Omega f v dx$$

Preuve. Faible formulation de (3.1)
Soit $(v-u) \in K$ une fonction de test, (3.1) a donné

$$\int_\Omega \ddot{u}(v-u)dx + \int_\Omega -\Delta u(v-u)dx = \int_\Omega f(v-u)dx$$

on a

$$\int_\Omega -\Delta u(v-u)dx = \int_\Gamma \nabla u.n(v-u)d\Gamma - \int_\Omega \nabla u.\nabla(v-u)dx$$

on a

$$\int_\Gamma \nabla u.n(v-u)d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \nabla u.n(v-u)d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \nabla u.n(v-u)d\Gamma \tag{3.7}$$
$$= \int_{\Gamma_2} \nabla u.n(v)d\Gamma \tag{3.8}$$

donc

$$\langle \ddot{u}, v-u \rangle + a(u, v-u) \geq L(v-u) \forall v \in K$$
$$u(x,0) = u_0, \dot{u}(x,0) = u_1, \forall v \in K$$

■

Remark. On peut écrire $(P.V)$ comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \ddot{u} v dx + a(u,v) = L(v) + \langle N, v_n \rangle, \forall v \in V. \\ \langle N, v_n - u_n \rangle \geq 0, \forall v \in V. \\ u(x,0) = u_0, \dot{u}(x,0) = u_1. \end{cases} \tag{3.9}$$

où $u_n = u.n, \partial_n u = \nabla u.n = N.n + T, N = \partial_n.u.n, T = \partial_n u - N.n$
où n représente l'unité extérieure normale.

Théorème 11 *Supposons que la solution u est assai régulier, alors u est une solution de $(P.C)$ si et seulement si u est une solution de $(P.V)$.*

Preuve. Prenant dans (3.6) $v = \phi$ pour tout $\phi \in D(\Omega)$ (puisque v est toujours dans V). On a trouvé que

$$\langle \ddot{u}, \phi \rangle + a(u,\phi) = L(\phi), \forall \phi \in D(\Omega) \tag{3.10}$$

alors, en utilisant la formule générale de Green dans (3.10), on obtient :

$$\int_\Omega (\ddot{u} - \Delta u - f)\phi dx = 0 \tag{3.11}$$

donc

$$\ddot{u} - \Delta u - f = 0 \; p.p \; dans \; \Omega \tag{3.12}$$

Prenant $v = \phi$ dans (3.6) pour tout $\phi \in D(\Omega \cup \Gamma_0)$.
Avec (3.10), nous trouvons $\langle T, \phi_T \rangle = 0 \; \forall T$ où $T = 0$ dans Γ_1 a.e. Après, nous prenons $v = u + \phi$ dans (3.6) avec $\phi \in D(\Omega \cup \Gamma_0)$ et $\phi_n \leq 0$ dans γ_0, nous trouvons $\langle N, \phi_n \rangle \geq 0$ avec donné $N \leq 0$ dans Γ_0. Nous trouvons $v_n = 0$ et $v_n = 2u_n$ dans (3.6), nous obtenions $\langle N, u_n \rangle = 0$ et $(N.u_n) \geq 0$ alors $(N.u_n) = 0$ dans Γ_0. ■

3.3 L'inégalité variationnelle de (P.V)

$$(I.V) \begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \ddot{u}(v-u)dx + a(u, v-u)dx \geq L(v-u) \; \forall v \in K. \\ u(x,0) = u_0, \dot{u}(x,0) = u_1, \end{cases} \tag{3.13}$$

Avec

$$L(v) = \int_\Omega f v dx.$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

3.4 L'existence de la solution

Définition 3.4.1 *La fonction $u(x,t)$ est une solution faible de l'inégalité variationnelle hyperbolique de$(P.V)$, si elle satisfait*

$$(P)\begin{cases} u \in L^{\infty}(0,T,K), \dot{u} \in L^{\infty}(0,T,L^{2}(\Omega)) \cap C([0;T]);H^{\frac{1}{2}}(\Omega)) \\ -\displaystyle\int_{0}^{T}(\dot{u},\dot{v}-\dot{u})dt+\int_{0}^{T}a(u,v-u)dt \\ \geq \displaystyle\int_{0}^{T}(f,v-u)dt-(\dot{u}(T),v(T)-u(T))+(\dot{u}(0),v(0)-u(0)) \\ \forall v \in L^{\infty}(0,T;V), \dot{v} \in L^{\infty}\left(0,T,L^{2}(\Omega)\right), v(t) \in k, p.p \in]0,T[, \\ u(x,0)=u_{0}, \dot{u}(x,0)=u_{1}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Théorème 12 *Sous les conditions suivantes :*

$f \in W^{2,\infty}\left(0,T,L^{2}(\Omega)\right)$ et $u_0 \in K, u_1 \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$.

Donc, il existe une solution u de la problème $(P.C)$ qui vérifie :

(i) $u \in L^{\infty}\left(0,T;H^{1}(\Omega)\right), u(t) \in K.$

(ii) $\dot{u} \in L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega)).$

Preuve. La démonstration de ce théorème est basée sur cinq étapes.

3.5 Étape 1 : Discrétisation de temps

Considérons une partition régulière de l'intervalle de temps $[0,T]$ dans I sous-intervalles. Inspiré sur la méthode de Newmark, nous vous proposons l'approximation suivante du problème (P^iV) a chaque instant $t=t_i; i \in 1,2,\dots I$.

Problème (P^iV) Trouver $u^i \in K, \dot{u}^i \in H^1(\Omega)$ et $\ddot{u}^i \in L^2(\Omega)$ satisfaisant à l'inégalité :

$$(P^{i}V)\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega}\left(\frac{\ddot{u}^{i}+\ddot{u}^{i-1}}{2}\right)(v-u^{i})dx+a\left(\frac{u^{i}+u^{i-1}}{2},v-u^{i}\right) \\ \qquad \geq L^{i}(v-u^{i}) \ \forall v \in k. \\ \qquad L^{i}(v)=\displaystyle\int_{\Omega}f^{i}vdx \\ \qquad f^{i}:=f(x,t_{i}), \end{cases} \tag{3.15}$$

La méthde de Newmark avec des paramètres $\beta=\frac{1}{4}, \gamma=\frac{1}{2}$ comme suit :

$$\begin{cases} u^{i}=u^{i-1}+\Delta t\dot{u}^{i-1}+\dfrac{\Delta t^{2}}{2}\dfrac{\ddot{u}^{i}+\ddot{u}^{i-1}}{2} \\ \dot{u}^{i}=\dot{u}^{i-1}+\Delta t\dfrac{\ddot{u}^{i}+\ddot{u}^{i-1}}{2}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Le calcul de $u^i, \dot{u}^i, \ddot{u}^i$

$$u^i = u^{i-1} + \Delta t \dot{u}^{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}$$

$$\dot{u}^i = \dot{u}^{i-1} + \Delta t \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}$$

alors,

$$\int_\Omega \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}(v - \dot{u}^i)dx + a\left(\frac{u^i + u^{i-1}}{2}, v - u^i, v - u^i\right) \geq L^i(v - u^i)$$

Nous avons

$$\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} = \frac{2}{\Delta t^2}(u^i - u^{i-1} - \Delta t \dot{u}^{i-1})$$

Donc

$$\frac{2}{\Delta t^2}\int_\Omega u^i(v-u^i)dx + \frac{1}{2}a(u^i, v-u^i) \geq \frac{2}{\Delta t^2}\int_\Omega (u^i + \Delta t \dot{u}^{i-1})(v-u^i)dx - a(u^{i-1}, v-u^i) + L^i(v-u^i), \forall v \in K$$

$$\gamma \int_\Omega u^i(v - u^i) + \beta\ a(u^i, v - u^i) \geq \tilde{L}(v - u^i), \forall v \in K.$$

$$\tilde{a}(u^i, v - u^i) \geq \tilde{L}(v - u^i), \forall v \in K.$$

Pour l'existence et l'unicité, on utilise le théorème de Stampacchia

vérification de Les hypothèses :
soient $u^{i-1} \in H^1(\Omega), \dot{u}^{i-1} \in H^1(\Omega)$ et $\ddot{u}^{i-1} \in L^2(\Omega)$
On a

$$\tilde{a}(u, v) = \int_\Omega uv\ dx + \frac{\Delta t^2}{4}a(u, v) \text{ (forme bilinéaire).}$$

Où $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx$, est une forme bilinéaire continue et coercive.

La continuité de $\tilde{a}(u, v)$

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(u, v)| &= |\int_\Omega uvdx + \frac{\Delta t^2}{4}a(u, v)| && (3.17)\\ &\leq \lambda_1(\|u\|_{L^2(\Omega)}.\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}) \text{ Cauchy-Schwarz} && (3.18)\\ &\leq \lambda_1(\|u\|_{H^1(\Omega)}.\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla u\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla v\|_{H^1(\Omega)}) && (3.19) \end{aligned}$$

La coercivité de $\tilde{a}(u, v)$

$$\begin{aligned} \tilde{a}(v, v) &\geq \lambda_2(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}) && (3.20)\\ &\geq \lambda_2(\|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{H^1(\Omega)}) \text{ Poincaré} && (3.21) \end{aligned}$$

et

$$\tilde{L}(v) = \frac{\Delta t^2}{2}L^i(v) + \int_\Omega (u^{i-1} + \Delta t \dot{u}^{i-1})vdx - \frac{\Delta t^2}{4}a(u^{i-1}, v).$$

Où $L^i(v) = \int_\Omega f^i v\ dx \leq \|f^i\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}$ est linéaire et continue grâce à l'intégralité de Cauchy Schwarz.

La continuité de $\tilde{L}(v)$

$$\left|\tilde{L}(v)\right| = \left|\frac{\Delta t^2}{2}L^i(v) + \int_\Omega (u^{i-1} + \Delta t\dot{u}^{i-1})v\ dx - \frac{\Delta t^2}{4}a(u^{i-1}, v)\right| \tag{3.22}$$

$$\leq c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|u^{i-1}\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\dot{u}^{i-1}\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u^{i-1}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{3.23}$$

$$\leq c\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|u^{i-1}\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\dot{u}^{i-1}\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla u^{i-1}\|_{H^1(\Omega)}\|\nabla v\|_{H^1(\Omega)}\right) \tag{3.24}$$

$K = \{v \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega),\ v \geq \varnothing \text{ sur } \Gamma_2\}$ est un sous ensemble fermé et convexe de $H^1(\Omega)$.
Donc toutes les conditions de Stampacchia sont satisfaites, et par conséquent il existe un unique $u^i \in K$ telle que

$$\tilde{a}(u^i, v - u^i) \geq \tilde{L}(v - u^i)\ \forall v \in K.$$

Algorithme

1. Au moment initial $t = 0, u^0 = u(0) = u_0, u^1 = \dot{u} = u_1, \ddot{u}^0 = \Delta u_0 + f^0, f^0 = f(0)$.
2. Pour chaque pas t_i, donné $u^{i-1}, \dot{u}^{i-1}, \ddot{u}^{i-1}$ nous obtenons u^i comme la solution unique de problème variationnelle

$$\int_\Omega u^i(v - u^i)dx + \frac{\Delta t^2}{4}a(u^i, v - u^i) \geq \tilde{L}(v - u^i), \forall v \in K$$

qui a une solution unique.
3. Enfin, on obtient $\dot{u}^i, \ddot{u}^i$ par la méthode de Newmark.

3.6 Étape 2 : Solution approximative du problème (P.C)

Premières approximations

Dans cette étape, plusieurs séquences sont construites à partir de la solution du problème d'approximation $(P^iV), 1 \leq i \leq I$, lorsque $I \longrightarrow \infty$. Pour ce faire, nous définissons sur chaque sous-intervalle $[T_{i-1}, t_i)$, les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} h^I(t) &= u^{i-1} + \dot{u}^{i-1}(t - t_{i-1}) + \left(\frac{\ddot{u}^{i-1} + \ddot{u}^i}{4}\right)(t - t_{i-1})^2 \forall t \in [_{i-1}, t_i); \\ h^I(T) &= u^I, \dot{h}^I(T) = \dot{u}^I. \end{aligned} \tag{3.25}$$

$h^I(t_{i-1}) = u^{i-1}, h^I(t_i) = u^i$ on peut voir que $h^I(t) \in C^1(0, T; H^1(\Omega))$ et h^I est C^2 en tout sous-intervalle (t_{i-1}, t_i).

$$\dot{h}^I(T) = \dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}(t - t_{i-1}), t \in [t_{i-1}, t_i). \tag{3.26}$$

Pour tout $i = 0, \ldots, I, \dot{h}^I(t_i) = u^i$
$\ddot{h}^I(t_i) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, tel que

$$\ddot{h}^I = \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}t \in [t_{i-1}, t_i). \tag{3.27}$$

a l'instant t_i on obtient pour tout $i = 0, \ldots, I$

$$\lim_{t \to t_i} h^I(t) = u^{i-1} + \dot{u}^i \Delta t + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \Delta t^2 = u^i = h^I(t_i) \tag{3.28}$$

$$\lim_{t \to t_i} \dot{h}^I(t) = \dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \Delta t = \dot{u}^i = \dot{h}^I(t_i) \tag{3.29}$$

alors $h^I(t) \in C(0, T; H^1(\Omega))$.

Remark. Il n'y a aucune garantie que $h^I \in K$ pour tout $t \in [0, T]$.

Autre approximation

Maintenant, on choisit quatre autres approches à une solution du problème $(P.C)$ qui sont aussi convergents lorsque $I \to \infty$. Nous définissons :

$$l^I(t) = u^{i-1} + \frac{u^i + u^{i-1}}{\Delta t}(t - t_{i-1}), \forall t \in [t_{i-1}, t^i) \tag{3.30}$$

$$h_*^I(t) = h^i = \frac{u^i + u^{i-1}}{2}, \forall t \in [t_{i-1}, t^i) \tag{3.31}$$

$$h_\sharp(t) = \dot{u}^i, \forall t \in [t_{i-1}, t^i) \tag{3.32}$$

$$u_*^I(t) = u^i, \forall t \in [t_{i-1}, t^i) \tag{3.33}$$

Remarque. On note dans ce cas, $l^I(t), h_*^I(t), u_*^I(t)$ dans K pour tout $t \in [0, T]$.

3.7 Étape 3 : A priori estimations

Pour obtenir des estimations a priori le lemme suivant.

Lemme 3 *soient $u^i, \dot{u}^i$ et $\ddot{u}^i$ la solution de problème $(P^iV), 1 \leq i \leq I$ et h^I définie par (3.25) pour tout sous-intervalle (t_{i-1}, t_i) de $(0, T)$ vérifier*

$$\int_{t^{i-1}}^{t^i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \dot{h}^I(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_{t^{i-1}}^{t^i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(h^I(t), h^I(t)) dt \leq L^i(u^i - u^{i-1}) \tag{3.34}$$

avec

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

Preuve. On prend $v = u^{i-1}$ dans (3.15), pour obtenir :

$$\int_\Omega (\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}) \frac{u^i - u^{i-1}}{2} dx + a\left(u^i + u^{i-1}, \frac{u^i - u^{i-1}}{2}\right) \leq L^i(u^i - u^{i-1}). \tag{3.35}$$

Premièrement, nous réécrivons le premier membre de l'équation (3.35) en terme de $h^I(t)$. Utilisant (3.35), nous pouvons prouver

$$\frac{u^i - u^{i-1}}{2} = \frac{\Delta t}{2}\dot{u}^{i-1} + \frac{\Delta t^2}{4}\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \tag{3.36}$$

$$u^i + u^{i-1} = 2u^{i-1} + \Delta t\dot{u}^{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta t}{2}\int_\Omega(\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}).\dot{u}^{i-1}dx + \frac{\Delta t^2}{4}\int_\Omega(\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}).\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}\right)dx \\ +\frac{\Delta t^2}{2}a\left(u^{i-1}, \frac{\Delta t^2}{4}\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}\right)\right) + \frac{\Delta t^3}{4}a\left(\dot{u}^i, \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}\right) \\ +\frac{\Delta t^4}{4}a\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4}, \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}\right) + \Delta t a(u^{i-1}, \dot{u}^{i-1}) + \frac{\Delta t^2}{2}a(\dot{u}^{i-1}, \dot{u}^{i-1}) + \\ \frac{\Delta t^3}{4}a\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}, \dot{u}^i\right) \leq L^i(u^i, u^{i-1}).\end{aligned}$$

Maintenant, le premier élément de cette expression, correspond à (3.35), on obtient

$$\int_{t^{i-1}}^{t^i}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\dot{h}^I(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_{t^{i-1}}^{t^i}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(h^I(t), h^I(t))dt$$

$h^I(t), t \in [t_{i-1}, t_i)$

$$\left\|\dot{h}^I(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega\left(\dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}(t - t_{i-1})\right).\left(\dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}(t - t_{i-1})\right)dx$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\dot{h}^I(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2})\left(\dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}(t - t_{i-1})\right)dx$$

$$\int_\Omega\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\dot{h}^I(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt = \Delta t\int_\Omega\dot{u}^{i-1}\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}dx + \frac{\Delta t^2}{2}\int_\Omega\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}\right)^2dx \tag{3.38}$$

et, dans $[t_{i-1}, t_i)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(h^I(t), h^I(t)) = \int_\Omega\nabla\dot{h}^I(t).\nabla\dot{h}^I(t)dx = \int_\Omega\nabla\left(\dot{u}^{i-1} + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}(t - t_{i-1})\right).$$

$$\begin{aligned}\nabla\left(u^{i-1} + \dot{u}^i(t - t_{i-1}) + \frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4}(t - t_{i-1})^2\right)dx = \int_\Omega\nabla\dot{u}^{i-1}.\nabla u^{i-1}dx \\ +\int_\Omega\nabla\dot{u}^{i-1}.\nabla\dot{u}^{i-1}(t - t_{i-1})dx + \int_\Omega\nabla\dot{u}^{i-1}.\nabla\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4}\right)(t - t_{i-1})^2dx \\ +\int_\Omega\nabla\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}\right).\nabla u^{i-1}(t - t^{i-1})dx \\ +\int_\Omega\nabla\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}\right).\nabla\dot{u}^{i-1}(t - t^{i-1})^2dx \\ +\int_\Omega\nabla\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2}\right).\nabla\left(\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{4}\right)(t - t_{i-1})^3dx.\end{aligned} \tag{3.39}$$

alors,

$$\int_{t_i}^{t_{i-1}} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(h^I(t),h^I(t))dt = \Delta t\int_\Omega \nabla\dot{u}^{i-1}.\nabla u^{i-1}dx$$

$$\frac{\Delta t^2}{2}\int_\Omega \nabla\dot{u}^{i-1}.\nabla u^{i-1}dx + \frac{\Delta t^3}{3}\int_\Omega \nabla\dot{u}^{i-1}.\nabla\left(\frac{\ddot{u}^i+\ddot{u}^{i-1}}{4}\right)dx.$$

$$+\frac{\Delta t^2}{2}\int_\Omega \nabla\left(\frac{\ddot{u}^i+\ddot{u}^{i-1}}{2}\right).\nabla u^{i-1}dx$$

$$+\frac{\Delta t^3}{3}\int_\Omega \nabla\left(\frac{\ddot{u}^i+\ddot{u}^{i-1}}{2}\right).\nabla\dot{u}^{i-1}dx$$

$$+\frac{\Delta t^4}{4}\int_\Omega \nabla\left(\frac{\ddot{u}^i+\ddot{u}^{i-1}}{2}\right).\nabla\left(\frac{\ddot{u}^i+\ddot{u}^{i-1}}{4}\right)dx$$

De (3.35)-(3.39), nous trouvons le résultat. ■

Proposition 2 *Soit h^I définir avec (3.39), alors*

1. $\|h(t_k)\|_{H^1(\Omega)}$ *est borné par un constant dépend de I et k, $1 \le k \le I$*

2. h^I *et $\dot{h}^I$ sont limitées dans $C(0,T;L^2(\Omega))$ avec une constante indépendant de I.*

Preuve. Pour tout k tell que $1 \le k \le I$

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\dot{h}^I(t)\ \right\|^2_{L^2(\Omega)}dt = \frac{1}{2}\left(\left\|\dot{h}^I(t_k)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \left\|\dot{h}^I(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(h^I(t),h^I(t))dt = \frac{1}{2}(a(h^I(t_k),h^I(t_k)) - a(h^I(0),h^I(0)))$$

Puis par lemme(3) , et $1 \le k \le I$

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\dot{h}^I(t_k)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + a(h^I(t_k),h^I(t_k))\right) \le \frac{1}{2}\left(\left\|\dot{h}^I(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + a((h^I(0),h^I(0))\right) + \sum_{i=1}^{k}L^i(u^i-u^{i-1}). \tag{3.40}$$

Maintenant, nous obtenons supérieure né pour la cote second mandat adroite (3.40) ; il donne que

$$u^i + u^{i-1} = h^I(t_i) - h^I(t_{i-1}) \tag{3.41}$$

alors

$$\sum_{i=1}^{k}L^i(u^i-u^{i-1}) = \sum_{i=1}^{k}L^i(h^I(t_i),h^I(t_{i-1})) \tag{3.42}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k}(L^i - L^{i+1})(h^I(t_i))\right) + L^k(h^I(t_k) + L^1(h^I(0)); \tag{3.43}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
|L^i(h(t_k))| &\leq \left|\int_\Omega f^i h(t_k)\right| && (3.44)\\
&\leq \|f\|_2 \|h(t_k)\|_2 && (3.45)\\
&\leq \left(\|f\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}\right) \|h(t_k)\|_{H^1(\Omega)} && (3.46)\\
&\leq C_1 \|h(t_k)\|_{H^1(\Omega)} && (3.47)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
|L^i(h(t_k)) - L^{i+1}(h(t_k))| &\leq \|f^i - f^{i+1}\|_2 \|h(t_k)\|_2 && (3.48)\\
&\leq \left(\left\|\dot{f}\right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}\right) \|h(t_k)\|_{H^1(\Omega)} && (3.49)\\
&\leq C_2 \|h(t_k)\|_{H^1(\Omega)}. && (3.50)
\end{aligned}
$$

on prend la valeur absolu de (3.42), et on utilise (3.44) et (3.48)l'application de l'inégalité de Hölder

$$
\left|\sum_{i=1}^{k} L^i(u^i - u^{i-1})\right| \leq C_1 \Delta t \sum_{i=1}^{k} \|h^I(t_i)\|_{H^1(\Omega)} + C_2 \left(\|h^I(t_k)\|_{H^1(\Omega)} + \|h^I(0)\|_{H^1(\Omega)}\right).
$$

lorsque C_1, C_2 sont des constants positives. Ainsi, de (3.40) ce implique que :

$$
\begin{aligned}
&\left(\left\|\dot{h}^I(t_k)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + a(h^I(t_k), h^I(t_k))\right) \leq \left(\left\|\dot{h}^I(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + a(h^I(0), h^I(0))\right) && (3.51)\\
&+ 2\left(C_2 \Delta t \sum_{i=0}^{k-1} \|h(t_i)\|_{H^1(\Omega)} + C_1 \left(\|h^I(t_K)\|_{H^1(\Omega)} + \|h^I(0)\|_{H^1(\Omega)}\right)\right). && (3.52)
\end{aligned}
$$

Maintenant, comme la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercitif alors il existe des constantes positives C_1, C_2 et C_3 indépendantes de I et k tel que :

$$
\|h^I(t_k)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_1 + C_2 \|h^I(t_k)\|_{H^1(\Omega)} + C_3 \Delta t \sum_{i=0}^{k-1} \|h^I(t_i)\|_{H^1(\Omega)}, \tag{3.53}
$$

pour tout $1 \leq k \leq I$.
Supposons que $C_1 > 1$ alors

$$
\|h^I(t_k)\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 + C_2 + C_3 \Delta t \sum_{i=0}^{k-1} \|h^I(t_i)\|_{H^1(\Omega)}, \tag{3.54}
$$

l'application de l'inégalité Grönwall discrète (voir Lions [11]), on obtient

$$
\|h^I(t_k)\|_{H^1(\Omega)} \leq C e^T, C \in \mathbb{R}^+. \tag{3.55}
$$

Alors $h^I(t_k)$ borné dans $H^1(\Omega)$ par une constante indépendante de I et k. De (3.52) on obtient que $\dot{h}^I$ est borné dans $L^2(\Omega)$ par une constante indépendante de I et k. Par conséquence, $\dot{h}^I$ linéaire par morceau

$$
\left\|\dot{h}^I(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq max\left\{\left\|\dot{h}(t_{i-1})\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \left\|\dot{h}(t_i)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} \forall t \in [t_{i-1}, t_i]
$$

alors $h^I(t)$ borné dans $L^2(\Omega)$, borné dans $C(0,T;L^2(\Omega))$, alors

$$h^I(t) = h^I(0) + \int_0^t \dot{h}^I(s)ds.$$

Ensuite, il est difficile de prouver $h^I(t)$ borné dans $C(0,T;L^2(\Omega))$ par constante indépendante de I pour tout $t \in (0,T)$. ■

Corollaire 1 *Soit h^I définie par (3.25) il existe des sous-suites, nous notons avec I, lorsque $I \to +\infty$ on obtient*

$$h^I \rightharpoonup h \; faible * \; dans \; L^\infty(0;T;L^2(\Omega)) \tag{3.56}$$

$$\dot{h}^I \rightharpoonup \dot{h} \; faible * \; dans \; L^\infty(0;T;L^2(\Omega)) \tag{3.57}$$

Preuve. lorsque $L^\infty(0;T;L^2(\Omega)) = [L^1(0;T;L^2(\Omega))]'$ et $L^1(0;T;L^2(\Omega))$ séparable Banach, le résultat est directement voir (Brézis [1]),noter que la limite de $\dot{h}^I$ et $\dot{h}$, est unique dans $D'(0;T;[L^2(\Omega)]_{faible})$ (voir [11] Lions). ■

Une autre estimation a priori

Proposition 3 *Soient $l_I(t), h_*^I(t), h_\sharp^I(t)$ et $u_*^I(t)$ définir par (3.25)-(3.30) alors*

1. $\|h_*^I(t)\|_{H^1(\Omega)}$ *et* $\|u_*^I(t)\|_{H^1(\Omega)}$ *sont bornées par une constante indépendante de I pour tout $t \in [0;T]$.*

2. $\|l^I(t)\|_{H^1(\Omega)}$, $\left\|\dot{l}^I(t)\right\|_{L^2(\Omega)}$ *et* $\left\|h_\sharp^I(t)\right\|_{L^2(\Omega)}$ *sont bornées par une constante indépendante de I pour tout $t \in [0,T]$.*

3. $\ddot{h}^I$ *est bornée dans $L^\infty(0;T;H^{-1}(\Omega))$.*

Preuve. De la définition h^I nous avons $u^i = h^I(t_i)$ pour tout $0 \le i \le 2^I$,

$$h_*^I(t) = \frac{h^I(t_i) + h^I(t_{i-1})}{2}, \forall t \in [t_{i-1};t_i) \tag{3.58}$$

et

$$u_*^I(t) = \dot{u}^I(t_i)\forall t \in [t_{i-1};t_i) \tag{3.59}$$

et $h_*^I \in L^\infty(0;T;H^1(\Omega))$ et $u_i \in H^1(\Omega)$ pour tout i,et

$$\|h_*^I\|_{H^1(\Omega)} = \left\|\frac{h^I(t_i) + h^I(t_{i-1})}{2}\right\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{1}{2}\left(\|h^I(t_i)\|_{H^1(\Omega)} + \|h^I(t_{i-1})\|_{H^1(\Omega)}\right); \forall t \in [t_{i-1};t_i) \tag{3.60}$$

■

alors le résultat par la proposition (2) $h_*^I(t)$ est borné dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ par constante indépendante de I. Le même, $u_*^I(t)$ est borné dans $L^\infty(0;T;H^1(\Omega))$ par une constante indépendante de I. Maintenant , l^I linéaire par morceau

$$\|l^I(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq \max\{\|l^I(t_{i-1})\|_{H^1(\Omega)}, \|l^I(t_i)\|_{H^1(\Omega)}\}\forall t \in [t_{i-1}, t_i],$$

et $l^I(t_k) = h^I(t_k)$ et $\|h^I(t_k)\|_{H^1(\Omega)}$ sont bornés par une constante indépendante de l et k, $\|l^I(t)\|_{H^1(\Omega)}$ est borné par une constante indépendante de I. Pour prouver que $\dot{l}^I$ est borné

$$\dot{l}^I(t) = \frac{u^i + u^{i-1}}{\Delta t},$$

par (3.36) et (3.25) peut être réécrite comme :

$$\dot{l}^I(t) = \dot{u}^{i-1} = \frac{\Delta t}{2}\frac{\ddot{u}^i + \ddot{u}^{i-1}}{2} = \frac{\dot{h}^I(t_{i-1}) + \dot{h}^I(t_i)}{2} \;\forall t \in [t_{i-1}, t_i).$$

Alors

$$\left\|\dot{h}^I(t)\right\|_{L^2(\Omega)} = \left\|\frac{\dot{h}^I(t_{i-1}) + \dot{h}^I(t_i)}{2}\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.61}$$

Ainsi, encore une fois par la proposition (2), $\left\|\dot{h}^I(t)\right\|_{L^2(\Omega)}$ est bornées par une constante indépendante de I pour tout $t \in (0,T)$. Toutefois

$$\|h_\sharp^I\|_{L^2(\Omega)} = \left\|\dot{h}^I(t_i)\right\|_{L^2(\Omega)}, \;\forall t \in [t_{i-1}, t_i).$$

Finale, du bornitude $\ddot{h}^I$ en $\in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ en effet , On obtient comme résultat direct de la bornitude précédente et l'équation peuvent être écrites en termes $\ddot{h}^I$ et h_*^I comme

$$\ddot{h}^I - \Delta(h_*^I) = f_0^I \in \Omega. \tag{3.62}$$

tel que $f_0^I(t) = f(0)$ pour tout $t \in [t_{i-1}, t_i)$.

3.8 Étape 4 : Convergence des solutions approximatives

Corollaire 2 *Soient $l^I(t), h_*^I(t), h_\sharp^I(t)$ et $u_*^I(t)$ défini par (3.30)-(3.33) respectivement . alors il y a égale séquence dépend de l'indice I comme $I \longrightarrow \infty$alors il existe séquence nous obtenons les convergences suivantes*

$$l^I \rightharpoonup l \;faible * dans\; L^\infty(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.63}$$

$$\dot{l}^I \rightharpoonup \dot{l} \;faible * dansL^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.64}$$

$$h_*^I \rightharpoonup h_* \;faible * dansL^\infty(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.65}$$

$$u_*^I \rightharpoonup u_* \;faible * dansL^\infty(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.66}$$

$$h_\sharp^I \rightharpoonup h_\sharp \;faible * dansL^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.67}$$

$$\ddot{h}^I \rightharpoonup \ddot{h} \;faible * dansL^\infty(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.68}$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du corollaire (1). ■

Corollaire 3 *Soient $\dot{h}^I$ et l^I défini par (3.25) et (3.30) respectivement. Alors il existe sous -suites, égale notée avec l'index I, tel que $I \longrightarrow \infty$*

$$l^I \longrightarrow l \text{ dans } C([0,T];H^{\beta}(\Omega)) \cap C_s([0,T];H^1(\Omega)),\ 0 \leq \beta \leq 1 \tag{3.69}$$

$$\dot{h}^I \longrightarrow \dot{h} \text{ dans } C([0,T];H^{\alpha}(\Omega)) \cap C_s([0,T];L^2(\Omega)),\ -1 \leq \alpha \leq 0 \tag{3.70}$$

éventuellement après un changement sur un ensemble de mésure nulle.

Preuve. La preuve de ce résultat est une conséquence de la bornitude de $\dot{h}^I, \ddot{h}^I, l$ et $\dot{l}$ et le lemme (1). ■

L'unicité des limites faible $*$

Dans cette partie, nous allons montrer que tous les termes (3.56), (3.65), (3.68) et (3.69) sont égaux $h = l = h_* = u_*$. Alors, à partir (3.56) et en utilisant la formule Barrow C^1les fonctions $[t_{i-1};t_i]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|h^I(t) - h_*^I(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \frac{h^I(t)}{2} + \frac{h^I(t)}{2} - \frac{h^I(t_{i-1})}{2} - \frac{h^I(t_i)}{2} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\| \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t} \dot{h}^I(s)ds - \int_{t}^{t_i} \dot{h}^I(s)ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left\| \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t} \dot{h}^I(s)ds \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t} \dot{h}^I(s)ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \Delta t \left\| \dot{h}^I(s) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

où $I \longrightarrow \infty$. Pour tout h et h_* sont égaux à $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et que $h_* \in L_\infty(0,T;H^1(\Omega))$ comme $\dot{h} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$.De même, il est démontré que h et u_*sont égales à $H^1(\Omega)$. De plus, et ensuite $\dot{l}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$,

$$\begin{aligned}
\|l^I(t) - u_*^I(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \|l^I(t) - l^I(t_i)\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\| \int_{t}^{t_i} \dot{l}^I(s)ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \Delta t \left\| \dot{l}^I(s) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

où $I \longrightarrow \infty$. De même, il est démontré que $\dot{h}$ et $\dot{h}_\sharp$ coïncider avec $L_2(\Omega)$.$Alors, l = u_* = h_* = h$. Désormais, on note cette limite par u. En résumé, nous avons montré les convergences suivantes.

Théorème 13 *Soient* $h^I, l^I, h^I_*, h^I_\sharp et u^I_*$ *sont donnés par(3.25), (3.30) (3.31), (3.32) et (3.33) respectivement. Alors il existe u tel que*

$$l^I \rightharpoonup u \ faible * dans L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.71}$$

$$\dot{l}^I \rightharpoonup \dot{u} \ faible * dans L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.72}$$

$$\dot{l}^I_* \rightharpoonup u \ faible * dans L^\infty(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.73}$$

$$l^I_* \rightharpoonup u \ faible * dans L^\infty(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.74}$$

$$u^I_* \rightharpoonup u \ faible * dans L^\infty(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.75}$$

$$h^I_\sharp \rightharpoonup \dot{u} \ faible * dans L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.76}$$

$$\nabla(h^I_*) \rightharpoonup \nabla(u) \ faible * dans L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.77}$$

D'autre part, nous avons la limite

$$\lim_{I\to+\infty}(h^I - h^I_*) = 0 \tag{3.78}$$

$$\lim_{I\to+\infty}(h^I - u^I_*) = 0 \tag{3.79}$$

$$\lim_{I\to+\infty}(l^I - l^I_*) = 0 \tag{3.80}$$

formatent dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Corollaire 4 *Soit* h^I *et* l^I *sont donnés par (3.26),(3.30). Alors il existe u tel que*

$$\dot{h}^I \longrightarrow \dot{u} \ dans \ C([0,T];H^\alpha(\Omega)) \cap C_s([0,T];L^2(\Omega))), \ -1 \le \alpha \le 0 \tag{3.81}$$

$$l^I \longrightarrow u \ dans \ C([0,T];H^\beta(\Omega)) \cap C_s([0,T];H^1(\Omega), \ 0 \le \beta \le 1 \tag{3.82}$$

Preuve. De Corollairee 2 et l'unicité des limites faible $*$. ∎

Théorème 14 *Soit* $h^I_\star$ *et* $u^I_\star$ *sont donnés par (3.30) et (3.33) respectivement . Alors*

$$h^I_\star - u^I_\star \to 0 \ in \ D'(0,T;H^1(\Omega)),$$

$$l^I - u^I_\star \to 0 \ dans L^\infty(0,T;H^r(\Omega)), 0 \le r \le 1, \tag{3.83}$$

où $I \longrightarrow \infty$.

Preuve. Soit $\varphi \in D(0,T)$. Soit $I \geq I_0$, où I_0 est telle que support φ est de continuer à $[\delta_0, T-\delta_0]$ avec $\delta_0 = \dfrac{T}{I_0}$, pour que $supp(\varphi) \subset [\delta, T-\delta]$,devient $\delta = \frac{T}{I}$. Alors

$$\int_0^T (h_\star^I - u_\star^I)\varphi dt = \sum_{i=0}^{I-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (h_\star^I(t) - u_\star^I(t))\varphi(t)dt \tag{3.84}$$

$$= \sum_{i=0}^{I-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (u^{i-1} - u^i)\theta_I(t)\varphi(t)dt \tag{3.85}$$

$$= \sum_{i=0}^{I-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^i(\varphi_\delta - \varphi)(t)dt, \tag{3.86}$$

devient $\varphi_\delta = \varphi(t+\delta)$et pour tous,$|\varphi - \varphi_\delta| \leq c\delta$, devient $c = max\left|\dfrac{d\varphi}{dt}\right|$. par conséquent,

$$\left\|\int_0^T (h_\star^I - u_\star^I)\varphi dt\right\|_{H^1(\Omega)} \leq c\delta^2 \sum_{i=0}^{I-1} \|u^I\|_{H^1(\Omega)} \tag{3.87}$$

$$\leq c\delta^2 \left((I-1)\sum_{i=0}^{I-1} \|u^I\|^2_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.88}$$

$$\leq c\delta^2((I-1)^2 C)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.89}$$

$$\leq \widehat{c}\delta^2 2^2$$

$$= \widehat{c}\delta^2 T/\delta = \widehat{c}\delta T \longrightarrow 0 \ if \ \delta \longrightarrow 0.$$

Où, c, C et $\widehat{c}$ sont des constantes positives . Prouver (3.83) en utilisant les convergences, à la suite

$$l^I \rightharpoonup l \ faible * dans \ L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$$

$$\dot{l}^I \rightharpoonup \dot{l} \ faible * dans \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Laisser $0 < r = \theta\alpha + (1-\theta)\beta < 1$, et pour $r \neq 1/2$. Il existe un ensemble $A \subset [0,T]$ tel que $mes(A) = 0$ pour toutes $t_1, t_2 \in [0,T] \setminus A$, avec $t_1 \leq t_2$

$$\| \ l^I(t_2) - l^I(t_1) \ \|_{H^1(\Omega)} \leq M_\theta \ \| \ l^I(t_2) - l^I(t_1) \ \|^\theta_{L^2(\Omega)} \| \ l^I(t_2) - l^I(t_1) \ \|^{1-\theta}_{H^1(\Omega)} \tag{3.90}$$

$$\leq M_\theta \left(\int_{t_1}^{t_2} \left\|\dot{l}^I(t)\right\|_{L^2(\Omega)} dt\right)^\theta \tag{3.91}$$

$$\leq M_\theta (t_1 - t_2)^1/2. \tag{3.92}$$

En particulier, pour toutes $t \in [t_{i-1}, t_i] \setminus A$, alors

$$\|u_*^I - l^I\|_{H^r(\Omega)} = \|l^I(t_i) - l^I(t)\|_{H^r(\Omega)} \leq M_\theta (t_i - t)^{\frac{\theta}{2}} \longrightarrow 0, \tag{3.93}$$

lorsque $I \longrightarrow \infty$. ■

Théorème 15 *Soit u la limite présentée dans le théorème (13), alors*

$$u \in L^\infty(0,T;K) \tag{3.94}$$

$$\dot{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.95}$$

$$\ddot{u} \in D'(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.96}$$

$$\nabla u \in D'(0,T;H(div)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.97}$$

Preuve. Selon la relation (3.15), nous avons

$$\int_\Omega \ddot{h}^I v dx + a(h_*^I, v) \geq L^i(v) \ \forall v \in K$$

cette inégalité est vraie pour $v(t) \in L^2(0,T;V); v(t) \in K$ p.p et

$$\int_0^T \int_\Omega \ddot{h}^I v(t) dx dt + \int_0^T a(h_*^I, v(t)) \geq \int_0^T L_*(v(t)) dt, \ \forall v \in L^2(0,T.K)$$

$v(t) = \varphi(t)\omega(t)$ tel que $\varphi(t) \in D(0,T)$; $\omega(t) \in D(\Omega)$ nous avons intégration par parties, nous trouvons le premier terme

$$-\int_0^T \int_\Omega \dot{h} v(t) dx dt + \int_0^T a(h_*^I, v(t)) \geq \int_0^T \int_\Omega f_*(v(t)) dt,$$

pour $v(t) = -\varphi(t)\omega(t)$ on trouve

$$\int_0^T \int_\Omega \ddot{h} v(t) dx dt + \int_0^T a(h_*^I, v(t)) = \int_0^T f_*(v(t)) dt \tag{3.98}$$

nous pouvons aussi prouver que

$$\int_0^T a(h_*^I, v(t)) dt \longrightarrow \int_0^T a(h_*^I, v(t)) dt, \ si \ I \longrightarrow \infty \tag{3.99}$$

et cela

$$\int_0^T \int_\Omega f_*(v(t)) dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega f(v(t)) dx dt. \tag{3.100}$$

Donc

$$\int_0^T \int_\Omega \dot{u}\dot{v}(t) dx dt + \int_0^T a(u, v(t)) dt = \int_0^T \int_\Omega f v(t)) \ dx dt \forall v \in (D(0,T) \times \Omega). \tag{3.101}$$

Prouver, (3.94)il suffit de voir que $u_*^I = u \in K$ et depuis $u_*^I \xrightarrow{*} u$ dans $(L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ alors $u_*^I \xrightarrow{*} u$ dans $L^\infty(0,T;K)$ où (3.94). Nous avons (15) directement par $\dot{h}^I \overset{*}{\rightharpoonup} \dot{h}^I$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ avec une fonction de test $v(t) \in D(0,T;K)$ trouvé :

$$\int_0^T \int_\Omega \ddot{u} v(t) dx dt - \int_0^T \Delta(u) v(t) dt = \int_0^T \int_\Omega f v(t) dx dt \ \forall v \in (D(0,T) \times \Omega)$$

$$\ddot{u} - \Delta u - f = 0 \ p.p \text{ dans } Q = (0,T) \times \Omega. \tag{3.102}$$

Comme $\dot{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, alors $\ddot{u} \in D'(0,T;L^2(\Omega))$

$$\ddot{u} = (\Delta u + f) \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

$\ddot{u} \in D'(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ où (15).

Tel que $\nabla(h_*^I) \longrightarrow \nabla(u)$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et $\nabla u \in H(div) \Longrightarrow \nabla u \in D'(0,T;H(div))$ où $\nabla u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap D'(0,T;H(div))$ où (3.97). ■

Théorème 16 *Soit u la limite de précédent en théorème 13, alors u vérifie la condition (3.2)*

Preuve. De corollaire 4

$$l^I \longrightarrow u \in C([0.T];L^2(\Omega)).$$

Ensuite, comme $l^I(0) = u_0$ pour tout I, nous pouvons passer à la limite et d'obtenir que $u(0) = u_0$.

D'autre part

$$h^I \longrightarrow \dot{u} \ dans \ C_s([0.T]);L^2(\Omega)),$$

alors

$$\int_\Omega \dot{h}^I(0) v dx \longrightarrow \int_\Omega \dot{u}(0).v dx, \forall v \in L^2(\Omega)$$

Qui donnent $h^I(0) = u_1$ pour tout I alors

$$\int_\Omega \dot{u}(0).v dx = \int_\Omega u_1.v dx, \forall v \in L^2(\Omega).$$

■

3.9 Étape 5 : La limite u est solution de problème (P.C)

Dans cette étape, nous allons montrer que la limite faible u est une solution faible de problème (P.C). Pour cela, il suffit de montrer que u est solution du problème (P.V)

$$(P.V) \begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \langle \ddot{u}, v-u \rangle + a(u, v-u) \geq L(v-u) \ \forall v \in K. \\ u(x,0) = u_0, \dot{u}(x,0) = u_1. \end{cases} \tag{3.103}$$

Considérons le problème suivant

$$(P^iV) \begin{cases} \langle \ddot{h}^I, v-h^i \rangle + a(h^i, v-h^i) = L^i(v-h^i) + \langle \partial_n h^i n, v_n \rangle \ \forall v \in K \\ \langle \partial_n h^i.n, v_n - u_n^i \rangle \geq 0 \ \forall v \in K \end{cases} \tag{3.104}$$

qui provient des propriétés des solutions du problème (P^iV). À l'aide de fonctions h_*^I et u_*^I. On définit dans le problème précédent sur l'intervalle $[0,T]$ l'inégalité suivante :

$$\begin{cases} \int_0^T \langle \ddot{h}^I, v(t) - h_*^I \rangle dt + \int_0^T a(h_*^I, v(t) - h_*^I) dt = \int_0^T L_*^I(v(t) - h_*^I) dt + \int_0^T \langle \partial_n(h_*^I) n, v_n(t) \rangle \ dt \forall v \in L^1(0,T; \\ \int_0^T \langle \partial_n(h_*^I).n, v_n(t) - u_{*n}^I \rangle \ dt \geq 0 \ \forall v \in L^1(0,T;K) \end{cases} \tag{3.105}$$

où

$$\int_0^T \langle \ddot{h}^I, v(t) - h_*^I \rangle dt = -\int_0^T \langle \dot{h}^I, \dot{v}(t) - \dot{h}_*^I \rangle dt + \langle \dot{h}^I, v(t) - h_*^I \rangle |_0^T \tag{3.106}$$

$$= -\int_0^T \langle \dot{h}^I, \dot{v}(t) - \dot{h}_*^I \rangle dt + \langle \dot{h}^I, v(T) - h_*^I \rangle - \langle \dot{h}^I(0), v(0) - h_*^I \rangle \tag{3.107}$$

Et nous avons

$$\dot{h}^I \rightharpoonup \dot{u} \;\text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

et le fait que $v(t) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, alors nous pouvons passer à la limite sur I, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \dot{h}^I \dot{v}(t) dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \dot{u}\dot{v}(t) dx dt.$$

$$\int_0^T a(h_*^I, v(t)) dt \longrightarrow \int_0^T a(u, v(t)) dt,$$

$$\int_0^T \int_\Omega L_*^I(v(t)) dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega L(v(t)) dx dt.$$

alors, nous avons

$$\int_0^T \langle \ddot{h}^I, v(t) - h_*^I \rangle dt \longrightarrow -\int_0^T \int_\Omega \dot{u}(\dot{v}(t) - \dot{u}(t)) dx dt + \int_0^T \int_\Omega \dot{u}(T)(v(T) - u(T)) dx dt \tag{3.108}$$

$$-\int_0^T \int_\Omega \dot{u}(0)(v(0) - u(0)) dx dt. \tag{3.109}$$

et

$$\int_0^T a(h_*^I, v(t) - h_*^I) dt \longrightarrow \int_0^T a(u, v(t) - u(t)) dt. \tag{3.110}$$

$$\int_0^T L_*^I(v(t) - h_*^I) dt \longrightarrow \int_0^T L(v(t) - u(t)) dt. \tag{3.111}$$

alors

$$-\int_0^T \langle \dot{u}, \dot{v}(t) - \dot{u}(t) \rangle dt + \int_0^T \langle \dot{u}(T), v(T) - u(T) \rangle dt - \int_0^T \langle \dot{u}(0), v(0) - u(0) \rangle dt \tag{3.112}$$

$$+\int_0^T a(u, v(t) - u(t)) dt = \int_0^T L(v(t) - u(t)) dt + \lim_{I \longrightarrow \infty} \int_0^T \langle \partial_n(h_*^I) n, v_n(t) \rangle \tag{3.113}$$

D'autre part

$$\int_0^T \langle \partial_n(h_*^I) n, v_n(t) - u_{*n}^I(t) \rangle \; dt \geq 0 \;\forall v \in L^1(0,T;K) \tag{3.114}$$

alors

$$\int_0^T \langle \partial_n(h_*^I) n, v_n(t) \rangle \; dt \geq \int_0^T \langle \partial_n(h_*^I) n, u_{*n}^I(t) \rangle \; dt \;\forall v \in L^1(0,T;K) \tag{3.115}$$

enfin, nous obtenons

$$-\int_0^T \langle \dot{u}, \dot{v}(t) - \dot{u}(t) \rangle dt + \int_0^T a(u, v(t) - u(t)) dt = \int_0^T L(v(t) - u(t)) dt + \int_0^T \langle \partial_n (h_*^I) n, v_n(t) \rangle \tag{3.116}$$

$$-\int_0^T \langle \dot{u}(T), v(T) - u(T) \rangle dt + \int_0^T \langle \dot{u}(0), v(0) - u(0) \rangle dt \tag{3.117}$$

tel que

$$\int_0^T \langle \partial_n (h_*^I) n, v_n(t) \rangle \geq 0 \tag{3.118}$$

Donc

$$-\int_0^T \langle \dot{u}, \dot{v}(t) - \dot{u}(t) \rangle dt + \int_0^T a(u, v(t) - u(t)) dt \geq \int_0^T L(v(t) - u(t)) dt \tag{3.119}$$

$$-\int_0^T \langle \dot{u}(T), v(T) - u(T) \rangle dt + \int_0^T \langle \dot{u}(0), v(0) - u(0) \rangle dt \tag{3.120}$$

Alors u est une solution faible de $(P.V)$ au sens de Définition 3.4.1.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a établi un résultat d'existence d'une inéquation variationnelle hyperbolique de première espèce. On a trouvé une solution faible au sens de la définition (3.4.1). Les problèmes des inéquations variationnelles hyperboliques de deuxième espèce restent ouverts de même pour les problèmes non linéaires et leurs problèmes de point de vue

1. *Unicité de la solution.*
2. *Régularité de la solution faible.*

Résumé

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence des solutions de l'ineqation variationnelle hyperbolique par la méthode Roth.

Mots clés : Inégalité, variationnelle, hyperbolique, méthode de Roth.

Abstract

In this memory, we study the existence of the solutions of an hyperbolic variational inequality via Roth method.

Keywords : variational inequality, hyperbolic problem, Roth's method.

Bibliographie

[1] H.Brezis, Analyse fonctionnelle théories et application.Dunod 1999.

[2] R.Glowinski. Lectures on Numerical Methods For Non-Linear variational Problems. Bombay 1980.

[3] S.AGMONN, A.DOUGlIS and L.NIRENBERG. Estimates near the boundary for solution of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. Part II, Comm.Pure Appl. Math. 17(1965)35-92.

[4] A.Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atii Societa Italianna per il Progresso della Scienze, 1933.

[5] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964.

[6] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[7] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967.

[8] H. Brézis, Problémes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1, 1-168, 1972.

[9] H. Brézis, équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1, 115-175, 1968.

[10] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968. 31

[11] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire Dunod, Paris, 1969.

[12] U. Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[13] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[14] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[15] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémoliéres, Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.

[16] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1984

[17] Matthew Rudd and Klaus Schmitt, Variational Inequalities of Elliptic and Parabolic Type, Salt Lake City, Utah 84112-0090,May 20,2002.

[18] G.Duvaut J.L.Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Berlin Heidelberg New York,1976.

[19] Jacques-Louis Lions, Sur les Problèmes Unilatérale, 1968.

[20] R.Glowisski, Lectures on Numerical Methods for Non-Linear variational Problems, 1980,Bomby. 32

[21] J. U. Kim, A boundary thin obstacle problem for a wave equation, Comm. Partial Differential equations 14 (1989) 1011-1026.