N° d'ordre :
N° de série :

Université de kasdi merbah ouargla
Faculté de mathématique
et des sciences de la matière
Département de physique

Thèse de Doctorat LMD

Spécialité « Physique »

Option « spectroscopie des matériaux »

par

Korichi Zineb

Etude de systèmes statistiques dans diverses dimensions d'espace basée sur une mécanique quantique fractionnaire

Thèse soutenue le 30/11/2016 devant le jury composé de :

Pr :	F. Khelfaoui	Université de Kasdi Merbah Ouargla	Président
Pr :	F. Benamira	Université de Constantine 1	Examinateur
Pr :	M. Maamache	Université de Ferhat Abbas Sétif 1	Examinateur
Dr :	H. Benzair	Université de Kasdi Merbah Ouargla	Examinateur
Pr :	M. T. Meftah	Université de Kasdi Merbah Ouargla	Rapporteur

À

ma très chère mère
mon père
tous mes frères et soeurs
toute la famille et tous mes amis

Ce document a été préparé à l'aide de l'éditeur "Texmaker" et du logiciel de composition typographique LaTeX 2ε.
Zineb Korichi 2016

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre réaliser ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur Mohammed Tayeb Meftah pour avoir accepté de rapporter cette thèse ainsi que pour sa constante disponibilité, ses encouragements, son aide précieuse, ses conseils et ses grandes qualités scientifiques qui m'ont permis de mener à bien ce projet passionnant. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Mes remerciments vont également à Monsieur F. Khelfaoui de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur Farid Benamira de l'université de Constantine et Monsieur Mustapha Maamache de l'université Ferhat Abbas Sétif 1 , d'avoir bien voulu faire partie du jury. Je remercie de même Mlle Hadjira Benzair de l'université de Kasdi Merbah ouargla d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie sincèrement, et plus largement, toutes les personnes du laboratoire LRPPS (Laboratoire de Rayonnement et Plasmas et Physique des Surfaces) notamment le directeur du laboratoire Pr : F. Khelfaoui pour m'avoir accueillie constamment au sein de ce Laboratoire.

Je voudrais aussi remercier, Mme Kaltoum Chenini pour les échanges d'informations et ainsi que sa présence et soutien moral durant toute la phase de déroulement de la thèse.

Je remercie vivement tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse, même par un petit sourire d'encouragement.

Mes remerciements s'adressent à toute la famille et tous mes collègues et amis.

Résumé

Dans ce travail, nous avons concentré notre attention sur l'étude des propriétés thermodynamiques de certains systèmes statistiques classiques et quantiques qui sont décrits par l'hamiltonien fractionnaire H_α. En premier lieu, nous avons présenté les outils fondamentaux de la construction de la théorie de la dérivée fractionnaire. Ensuite nous avons donné un aperçu sur la mécanique quantique fractionnaire en présentant ses principes et quelques applications de l'équation de Schrödinger fractionnaire puis nous avons étudié quelques problèmes statistiques classiques et quantiques dans le contexte de la mécanique quantique fractionnaire à D dimensions. La fonction de partition Z_N et les fonctions thermodynamiques pour un gaz parfait libre sont calculées. Nous avons également calculé les fonctions thermodynamiques pour le cas d'un gaz formé de N oscillateurs fractionnaires portés à une température T toujours dans le cadre de la mécanique quantique fractionnaire en utilisant l'ensemble microcanonique et l'ensemble canonique.

Dans ce travail, nous avons concentré aussi sur l'étude d'un gaz quantique de fermions et de bosons sans interactions (gaz parfait) libre et piegé dans le cas fractionnaire et nous avons abordé le problème de la transition de phase pour les bosons en discutant toutes les grandeurs thermodynamiques y compris la température de Bose en fonction du paramètre de la fractionalité de la dérivée dans l'Hamiltonien décrivant le système et nous avons montré que les gaz quantiques piégés sont équivalents au gaz quantique libre. Nous avons trouvé que la fonction de partition du système de N oscillateurs quantiques fractionnaires est modifiée et les propriétés thermodynamiques de ce système sont également modifiées.

mots-clés : Dérivation fractionnaire, Mécanique quantique fractionnaire, Bosons, Fermions, Fonction de partition, Fonction de partition grand canonique, Grandeurs thermodynamiques, température critique.

Abstract

In this work, we focus our attention on the study of thermodynamic properties of certain classical and quantum statistical systems that are described by the fractional Hamiltonian H_α.
In our thesis, firstly, we presented the fundamental tools of the construction of the theory of fractional derivative. Then we give an overview of the fractional quantum mechanics by introducing its principles and some applications of fractional Schrödinger equation then we studied some classical and quantum statistical problems in the context of the fractional quantum mechanics in D dimensions. The partition function Z_N and thermodynamic functions for a free ideal gas is calculated. We also calculated the thermodynamic functions for the case of a gas of N fractional oscillators heated to a temperature T always within the framework of the fractional quantum mechanics using the microcanonical ensemble and the canonical ensemble.
In this work, we have also focused on the study of a free and trapped quantum gas of fermions and bosons without interactions (ideal gas) in the fractional case, and we addressed the phase transition problem for the bosons by discussing all thermodynamic quantities including Bose temperature as function of fractionalité of the derivative in the Hamiltonian and we showed that the trapped quantum gases is equivalent to the free quantum gas. We found that the partition of N fractional quantum oscillators system function is modified and the thermodynamic properties of this system are also modified.

Keywords : *fractional derivation, fractional quantum mechanics, Bosons, Fermion, partition function, grand canonical partition function, thermodynamic quantities, critical temperature.*

ملـــخص

في هذا العمل، ركزنا اهتمامنا على دراسة الخصائص الحرارية لبعض النظم الإحصائية الكلاسيكية والكمية التي تم وصفها بالمؤثر الهاملتوني الكسري. أولا، قدمنا الأدوات الأساسية لبناء نظرية المشتق الكسري. ثم أعطينا لمحة عامة عن الميكانيك الكمي الكسري مع مبادئها وبعض تطبيقات معادلة شرودنجر الكسرية ثم درسنا بعض مشاكل الفيزياء الإحصائية الكلاسيكية والكمية في إطار الميكانيك الكمي الكسري في D بعد. و قمنا بحساب دالة التوزيع و الخصائص الحرارية لغاز مثالي حر. كما قمنا أيضا بحساب الخصائص الحرارية لغاز يتكون من N هزاز كسري و استخدمنا لذلك المجموعة القانونية الصغرى و المجموعة القانونية .

في هذا العمل، ركزنا أيضا على دراسة غاز كمي من الفرميونات والبوزونات في الحالة الحرة و الحالة المقيدة في الحالة الكسرية وعالجنا مشكلة المرحلة انتقالية لغاز من البوزونات و ناقشنا جميع االخصائص الحرارية بما في ذلك درجة حرارة بوس بدلالة المعامل الكسري α الموجود في المؤثر الهاملتوني الموصوف به النظام وأظهرنا أن الغازات الكمية المقيدة تعادل الغاز الكمي الحر. كما وجدنا ايضا أن دالة التوزيع لنظام يتكون من N هزاز كسري و الخصائص الحرارية له في الحالة الكسرية تتعلق بالمعامل α .

كلمات البحث: الاشتقاق الكسري، الميكانيك الكمي الكسري، بوزونات، الفرميونات، دالة التوزيع، دالة التوزيع الكبرى، الديناميكا الحرارية، درجة الحرارة الحرجة.

Table des matières

Table des matiéres viii
Liste des figures x
Liste des symboles xi

Introduction générale **1**
Bibliographie 4

1 Aspects fondamentaux de l'analyse fractionnaire **6**
1.1 Introduction 6
1.2 Fonctions de base 7
1.2.1 Fonction Gamma d'Euler $\Gamma(x)$ 7
1.2.2 Fonction bêta d'Euler 10
1.2.3 Fonction de Mittag-Leffler 11
1.2.4 Fonction de Fox 11
1.3 Opérateurs fractionnaires 12
1.3.1 Intégration fractionnaire 12
1.3.2 Dérivation fractionnaire 13
1.3.3 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires 15
1.4 Conclusion 16
Bibliographie 17

2 Application du calcul fractionnaire en mécanique quantique **19**
2.1 Introduction 19
2.2 Les principes de la mécanique quantique fractionnaire 20
2.3 Intégrale de chemin fractionnaire 21
2.4 Équation de Schrödinger fractionnaire 22
2.5 Hermiticité de l'opérateur Hamiltonien fractionnaire 25
2.6 L''équation de Schrödinger fractionnaire indépendante du temps 28
2.7 Densité et courant de probabilité 29
2.8 Applications de la mécanique quantique fractionnaire . . . 31
2.8.1 Particule libre 31

2.8.2 Particule dans une boite 33
2.8.3 Barrière de potentiel 38
2.8.4 Oscillateur quantique fractionnaire 45
2.8.5 Atome de Bohr fractionnaire 47
2.9 Conclusion 50
Bibliographie 51

3 Mecanique Statistique Fractionnaire 53
3.1 Introduction 53
3.2 Mecanique Statistique Classique Fractionnaire 54
3.2.1 Gaz parfait 54
3.2.2 Système d'oscillateurs fractionnaires 58
3.3 Mecanique Statistique Quantique 63
3.3.1 Gaz de bosons en D dimensions 63
3.3.2 Gaz de fermions 74
3.3.3 Oscillateurs quantiques fractionnaires 75
Bibliographie 79

Conclusion générale 81

Publications 83

Liste des figures

1.1 Graphe de la fonction gamma d'Euler. 8

2.1 Puits de potentiel infini à une dimension. 33
2.2 Particule confinée dans une boîte cubique. 36
2.3 Barrière de potentiel. 39

3.1 Fractions de la phase normale et condensée d'un gaz de Bose en fonction de T/T_C. 67
3.2 La chaleur spécifique d'un gaz de bosons en fonction de T/T_C. . . 68
3.3 Fractions de la phase normale et condensée d'un gaz de Bose en fonction de T/T_C. 70
3.4 La chaleur spécifique d'un gaz de bosons en fonction de $T/T_C pour D = 3$. 70
3.5 Entropie d'un gaz de bosons en fonction de $T/T_C pour D = 3$. . . . 71
3.6 Energie libre d'un gaz de bosons en fonctionde $T/T_C pour D = 3$. . 71

Liste des symboles

Symboles mathématiques :

I^{α} ..... intégration fractionnaire d'ordre α

D^{α} ..... dérivée fractionnaire d'ordre α

Grandeurs physiques :

t ..... temps

r ..... position

$H_{\alpha,\nu}$ ..... hamiltonien

$V(r,t)$ ..... énergie potentielle

$\Psi(r,t)$ ..... fonction d'onde

$\rho(r,t)$ ..... densité de probabilité

$j(r,t)$ ..... courant de densité de probabilité

T ..... température

T_c ..... température critique

V ..... volume

a_0 ..... rayon de Bohr

μ ..... potentiel chimique

z ..... fugacité

Z_N ..... fonction de partition canonique

$D(z,V,T)$ ..... fonction de partition grand canonique

λ ..... longueur d'onde thermique

λ_g ..... longueur d'onde thermique généralisée

C_V ..... chaleur spécifique

P ..... pression

S ..... entropie

F ..... energie libre

R ..... constante des gaz parfaits

Fonctions mathématiques

$\Gamma(x)$ ..... fonction gamma

$\Gamma(x,a)$ ..... fonction gamma incomplète supérieure

$\gamma(x,a)$ ..... fonction gamma incomplète inférieure

$B(x,y)$ ..... fonction bêta

$E_{\alpha,\beta}$ ..... fonction de Mittag-Leffler

$H_{p,q}^{m,n}$ ..... fonction de Fox
$f_l(z)$ ..... fonction de Fermi
$g_l(z)$ ..... fonction de Bose
δ ..... distribution de Dirac

Constantes physiques :

c ..... vitesse de la lumière
K_B ..... constante de Boltzmann
h ..... constante de Planck
$\hbar$ ..... constante de Planck réduite

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres arbitraires (réels ou complexes).

Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville [1], alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne. En effet, l'histoire du calcul remonte à la fin du 17 éme siècle, partant de quelques spéculations de G.W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée le 30/09/1695, sur la signification de $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$ [2], [3].

La théorie de la dérivation et de l'intégration fractionnaire a été longuement considérée comme une branche relevant des mathématiques sans aucune explication réelle ou pratique. Durant ces trois dernières décennies, un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [4], où on a pu trouver un progrès significatif des travaux théoriques qui peuvent servir comme base pour un nombre d'applications dans ces domaines. Donc, un grand effort a été fait pour essayer de mettre en pratique les résultats déjà établis, et un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire [5].

Récemment, le calcul fractionnaire entre dans le monde de la mécanique quantique pour l'objectif de généralisation - sans aucune contradiction avec les postulats de la mécanique quantique standard-. Les possibilités de cette généralisation a été montrée par LASKIN [6], qui a développé une nouvelle mécanique quan-

tique fractionnaire, et a été réalisée au moyen de l'approche des intégrales de chemin de Feynman [7]. L'approche de Feynman dans la mécanique quantique standard est basée sur l'intégrale de chemin en utilisant la mesure générée par le mouvement brownien. La généralisation naturelle du mouvement brownien est le mouvement de Lévy [8]. Du moment que l'intégrale de chemin sur des trajectoires browniennes conduit à l'équation de Schrödinger, donc l'intégrale de chemin sur des trajectoires de Lévy mène à l'équation de Schrödinger fractionnaire. L'équation fractionnaire de Schrödinger comprend la dérivée d'ordre fractionnaire α au lieu de la dérivée seconde $\alpha = 2$ dans l'équation standard de Schrödinger. Les résultats de la mécanique quantique fractionnaire ont été discutées par plusieurs auteurs [9]- [22]. Ces dernières années, Alisultanov [23], [24] a discuté les possibilités d'introduire ce concept en physique statistique quantique et son interprétation physique. Ils ont également étudié les propriétés thermodynamiques de quelques systèmes statistiques quantiques avec hamiltenien fractionnaire.

Cette thèse a pour objet l'étude des propriétés thermodynamiques de certain problèmes de physique statistique classique et quantique basées sur la mécanique fractionnaire, elle est structurée comme suit :

Dans le premier chapitre, nous évoquerons brièvement les différentes définitions de base de la dérivation et de l'intégration d'ordre non entier et quelques propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Nous poursuivons dans le deuxième chapitre la présentation de l'application du calcul fractionnaire en mécanique quantique. Nous allons présenter les principes de la mécanique quantique fractionnaire et quelques applications de l'équation de Schrödinger fractionnaire.

Le troisième chapitre qui sera divisé en deux parties, fera l'objet d'étude des propriétés thermodynamiques de certains systèmes fractionnaires. Dans la première partie, nous étudierons les propriétés du système de gaz parfait classique libre et gaz parfait confiné dans un potentiel fractionnaire, en utilisant l'ensemble

canonique et microcanonique. Dans la deuxième partie, nous allons calculer la fonction de partition grand canonique d'un gaz parfait quantique libre et confiné dans un potentiel extérieure fractionnaire de bosons et de fermions et nous allons calculer la fonction de partition d'un gaz quantique formé de N oscillateurs fractionnaires dans le cadre de la mécanique quantique fractionnaire. Nous allons ensuite déduire les fonctions thermodynamiques dans le cas fractionnaire.

Bibliographie

[1] J. Liouville, Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques, J. Ecole Polytechnique, 13 : 1-69, 1832. (Cité page 1.)

[2] B. Ross, The Development of Fractional Calculus 1695-1900, Historia Math, 4 : 75-89, 1977. (Cité page 1.)

[3] K. S. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differantial equations, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1993. (Cité page 1.)

[4] R. Hilfer, Applications of fractional calculus in physics, World Scientific, Singapore City, 2000. (Cité page 1.)

[5] R. Gorenflo and F. Mainardi, Fractals and fractional calculus in Continuum mechanics, Springer-Verlag, Wien and New York, 1997. (Cité page 1.)

[6] N. Laskin, Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals, Physics Letters A, 268 : 298-305, 2000. (Cité page 1.)

[7] N. Laskin, Fractional Quantum Mechanics, Physical Review E, 62 : 3135-3145, 2000. (Cité page 2.)

[8] N.Laskin Principles of Fractional Quantum Mechanics, arXiv :1009.5533v1 [math-ph], 2010. (Cité page 2.)

[9] X. Guo and M. Xu, Some physical applications of fractional Schrodinger equation, J. Math. Phys, 47 :082104, 2006. (Cité page 2.)

[10] J. Dong and M. Xu, Some solutions to the space fractional Schrodinger equation using momentum representation method, J.Math.Phys, 48 : 072105, 2007.

[11] N. Laskin, Fractals and quantum mechanics, Chaos, 10 : 780-790, 2000.

[12] S. Wang, M. Xu, Generalized fractional Schrodinger equation with space-time fractional derivatives, J. Math. Phys, 48 :043502, 2007.

[13] J. Dong, M. Xu, Space–time fractional Schrodinger equation with time-independent potentials, J. Math. l Anal. Applic, 344 : 1005–1017, 2008.

[14] V. E. Tarasov, Fractional Heisenberg equation. Physical Letters A, 372 : 2984-2988, 2008.

[15] V.E. Tarasov, Weyl quantization of fractional derivatives. J. Math. Phys, 49 : 102112, 2008.

[16] A. Iomin, Fractional-time quantum dynamics. Physical Review E, 80 : 022103, 2009.

[17] E. C. Oliveira, F.S. Costa and J. Vaz , The fractional Schrodinger equation for delta potentials, J. Math. Phys, 51 : 123517, 2010.

[18] E.C. Oliveira and J. Vaz , Tunneling in Fractional Quantum Mechanics, J. Phys A, 44 : 185303, 2011.

[19] S. S. Bayın, On the consistency of the solutions of the space fractional Schrodinger equation, J. Math. Phys, 53 : 042105, 2012.

[20] R. Herrmann, arXiv :math-ph/1210.4410v2[math-ph], 2012.

[21] R. Herrmann, arXiv :1308.4587v2 [physics.gen-ph], 2013.

[22] M. Naber, Time fractional Schrodinger equation, J. Math. Phys, 45 :3339, 2004. (Cité page 2.)

[23] Z. Z. Alisultanov and R. P. Meilanov, Some features of quantum statistical systems with an energy spectrum of the fractional-power type, Theor. Math. Phys, 171 : 404-416, 2012. (Cité page 2.)

[24] Z. Z. Alisultanov and R. P. Meilanov, Some problems of the theory of quantum statistical systems with an energy spectrum of the fractional power type, Theor. Math. Phys, 173 : 135-148, 2012. (Cité page 2.)

Chapitre 1

Aspects fondamentaux de l'analyse fractionnaire

1.1 Introduction

Le formalisme de la dérivation non entière consiste à généraliser la notion de la dérivée à des ordres non entiers de dérivation (réels ou complexes). L'idée pour cette généralisation de la dérivée vers un ordre arbitraire est découverte dans le courrier échangé entre L'Hôpital et Leibniz. L'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégrale, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ième}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans un courrier à l'Hopital, l'Hopital a répondu et posé la question à Leibniz, sur le résultat de cette dérivée $\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)$ pour l'ordre $n = \frac{1}{2}$?. Cette lettre de l'Hopital, écrite en 1695 [1]. Depuis cet échange de courriers, plusieurs mathématiciens ont contribué à l'élaboration de la théorie de la dérivation fractionnaire tels que : P. S. Laplace(1812), J. Fourier(1822), J. Liouville(1832), B. Riemann (1847), A. Grunwald$(1867 - 1872)$, J. Hadamard(1892), S. Pincherle(1902), H. weyl(1917), P. Lévy(1923), A. Marchaud(1927) et M. Riesz(1949) [2].

Plusieurs activités scientifiques comme l'organisation de colloques internationaux, la parution de plusieurs ouvrages et d'une revue « Journal of fractional calculus » entièrement consacrée au sujet, témoignent de la vitalité actuelle de la recherche sur la dérivation d'ordre non entier. Il y a plusieurs définitions pour la dérivation fractionnaire. Ces définitions même ne menant pas toujours à des résultats identiques sont équivalentes pour un large panel de fonctions. Toutefois, la définition de la dérivation fractionnaire peut s'établir selon trois approches. La première est l'approche par limites qui est l'approche classique de Grünwald-Letnikov qui consistent à généraliser la notion de la dérivation entière. La deuxième est l'approche de Riemann-Liouville et Caputo qui, à partir des primitives, associére la dérivation fractionnaire à l'intégration fractionnaire. La troisième approche est spectrale et utilise la transformée de Fourier.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent, tout en rappelant les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire. On notera α l'ordre de dérivation, D^{α} l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α et I^{α} l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre α.

1.2 Fonctions de base

On a besoin de présenter des fonctions qui jouent un rôle important dans la théorie de calcul fractionnaire et qui permettent en général de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma d'Euler, la fonction Bêta et de la fonction de Mittag-Leffler. On va définir aussi la fonction de Fox.

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler $\Gamma(x)$

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction gamma d'Euler $\Gamma(x)$. La fonction gamma est une fonction complexe, son interprétation est

simplement la généralisation du factoriel n $(n!)$ et elle permet à n de prendre des valeurs non entières.

Définition

Pour tout nombre complexe x tel que $Re(x) > 0$, on définit la fonction gamma d'Euler $\Gamma(x)$ par l'intégrale suivante [3] :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad (\Re e(x) > 0) \tag{1.1}$$

L'allure de la fonction gamma est donnée par la figure (1.1)

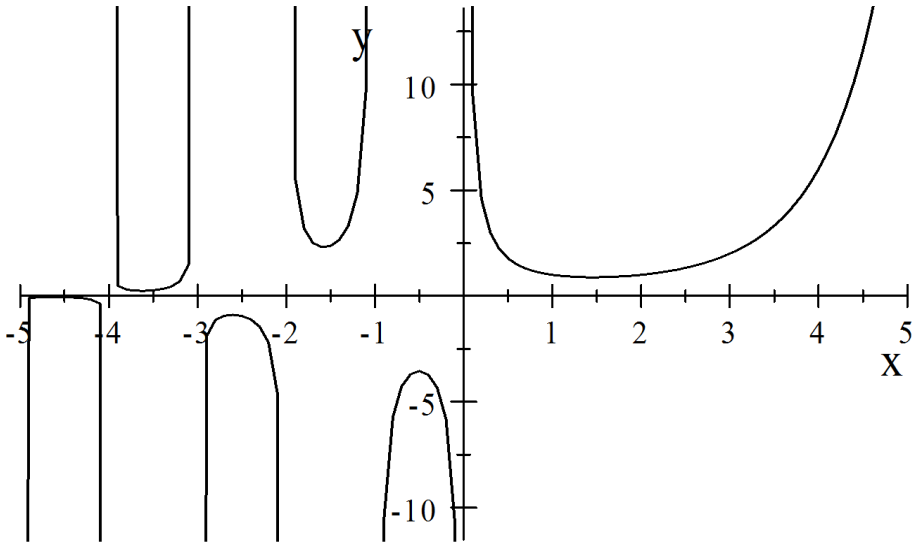

FIGURE 1.1 – *Graphe de la fonction gamma d'Euler.*

Propriétés de la fonction gamma

1. Une propriété importante de la fonction $\Gamma(x)$ est la relation de récurrence suivante [4] :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{1.2}$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \left[-e^{-t} t^x\right]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x) \tag{1.3}$$

Puisque $\Gamma(1) = 1$, en utilisant la relation (1.2), on obtient pour $x = 1, 2, 3 \ldots$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1! \tag{1.4}$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2! \tag{1.5}$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3! \tag{1.6}$$

donc :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = (n)! \tag{1.7}$$

2. L'autre propriété importante de la fonction gamma est qu'elle possède des pôles simples pour $x = 0, -1, -2, ...$Son expression est :

$$\Gamma(x) = \varphi(x) + \frac{(-1)^0}{0!}\frac{1}{0+x} + \frac{(-1)^1}{1!}\frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^2}{2!}\frac{1}{2+x} + ...$$

avec :

$$\varphi(x) = \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{1.8}$$

Ceci signifie que pour des valeurs entières négatives, la fonction gamma tend asymptotiquement vers l'infini.

3. On donne quelques valeurs particulières de $\Gamma(x)$:

   (a) pour $x = \frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

   (b) pour $x = n + \frac{1}{2}$, $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$, n entier positif.

4. La fonction gamma peut être écrite en termes de deux composantes comme suit [5] :

$$\Gamma(x) = \gamma(x, a) + \Gamma(x, a) \tag{1.9}$$

où $\gamma(x, a)$ est la fonction gamma incomplète inférieure. Elle est donnée par :

$$\gamma(x, a) = \int_0^a e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad (\Re e(x) > 0) \tag{1.10}$$

et $\Gamma(x, a)$ est la fonction gamma incomplète supérieure. Elle est défnie par :

$$\Gamma(x, a) = \int_a^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad (\Re e(x) > 0) \tag{1.11}$$

Les fonctions Gamma incomplètes sont utilisées pour obtenir la différentiation et l'intégration fractionnaire des fonctions périodiques.

1.2.2 Fonction bêta d'Euler

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction bêta d'Euler.

Définition

La fonction bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives par [3] :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \qquad (\Re e(x) > 0, \Re e(y) > 0) \tag{1.12}$$

Propriétés de la fonction bêta d'Euler

Les principales propriétés de la fonction bêta d'Euler sont [5] :

1. La fonction bêta d'Euler peut prendre plusieurs formes d'intégrales :

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta \tag{1.13}$$

$$B(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt \tag{1.14}$$

2. La fonction bêta d'Euler est symétrique :

$$B(x,y) = B(y,x) \tag{1.15}$$

3. La fonction bêta est liée à la fonction gamma par la relation suivante :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{1.16}$$

4. La fonction bêta satisfait des équations fonctionnelles telles que :

$$B(x,y)\,B(x+y,1-y) = \frac{\pi}{x\sin(y\pi)} \tag{1.17}$$

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x+y} B(x,y) \tag{1.18}$$

$$B(x,x) = 2^{1-2x} B\left(\frac{1}{2}, x\right) \tag{1.19}$$

1.2.3 Fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une fonction importante dans le monde du calcul fractionnaire. Son rôle est analogue à celui joué par la fonction exponentielle dans le cas du calcul entier.

Définition

La fonction de Mittag-Leffler, notée $E_{\alpha,\beta}$, est une fonction spéciale qui s'applique dans le plan complexe et dépend de deux paramètres complexes α et β. La fonction est définie pour $\alpha > 0$ [4] :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{1.20}$$

Il est aussi courant de représenter la fonction de Mittag-Leffler avec un seul paramètre α comme suit :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{1.21}$$

La fonction exponentielle usuelle correspond pour une valeur de $\alpha = 1$:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{n!} = e^z \tag{1.22}$$

1.2.4 Fonction de Fox

En 1961, Fox a introduit les H-fonctions qui sont des fonctions spéciales de nature très générale. Elles permettent le traitement de plusieurs phénomènes, parmi lesquels se trouve la diffusion anormale (diffusion fractionnaire). Les fonctions de Fox H sont des généralisations de celles de Meijer G et elles sont définies par une intégrale de type Mellin-Barnes [6] :

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = H_{p,q}^{m,n}\left(z \left| \begin{matrix} (a_p, A_q) \\ (b_p, B_q) \end{matrix} \right.\right) = H_{p,q}^{m,n}\left(z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), ..., (a_p, A_q) \\ (b_1, B_1), ..., (b_p, B_q) \end{matrix} \right.\right) \tag{1.23}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C h(s) z^s ds \tag{1.24}$$

où

$$h(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j - B_j s\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1 - a_j + A_j s\right)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j - A_j s\right)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1 - b_j + B_j s\right)} \tag{1.25}$$

et m, n, p, q sont des entiers positifes satisfant $0 \leq n \leq p, 1 \leq m \leq q$. Aussi $A_j, j = 1, ..., p$,et $B_j = 1, ..., q$ sont des réells positifes et $a_j, j = 1, ..., p$, et $b_j = 1, ..., q$ sont des nombres complexes satisfaissant :

$$A_j(b_h + v) \neq B_h(a_j - \lambda - 1) \text{ où } v, \lambda = 0, 1, ...;\ h = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n \tag{1.26}$$

1.3 Opérateurs fractionnaires

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Dans ce paragraphe, nous allons présenter une définition unique de l'intégration fractionnaire et plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire.

1.3.1 Intégration fractionnaire

L'idée principale d'intégration fractionnaire est la généralisation d'intégrations itérées.

Définition

L'intégration fractionnaire d'ordre α, noteé I^α, d'une fonction f localement intégrable est définie par [7] :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \tag{1.27}$$

avec $\alpha \in R^+$ et $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma d'Euler. Ce type d'intégrale fractionnaire est appelé intégrale d'ordre fractionnaire α de Riemann-Liouville.

Exemple

Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$. Alors :

$${}_aI_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta\, dt \tag{1.28}$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x - a)\tau$, d'où

$$ {}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta} dt \tag{1.29} $$

$$ = \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \tag{1.30} $$

D'après la formule (1.16), l'équation (1.29) devient :

$$ {}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta} \tag{1.31} $$

1.3.2 Dérivation fractionnaire

En mathématique, la dérivation fractionnaire a 300 ans d'existence. Tout au long de ces années, de nombreux mathématiciens ont contribué pour donner plusieurs approches et déffitions. Dans ce paragraphe on va présenter les quatre approches les plus pratiques et qui sont celles de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo et de Riesz.

Approche de Grünwald-Letnikov (G-L)

Une des approches les plus rencontrées de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée l'approche de Grünwald-Letnikov. L'idée de cette approche est basée sur la généralisation de la dérivée classique d'une fonction $f(x)$ d'ordre $n \in N$ de la forme [8] :

$$ D^n f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - jh) \tag{1.32} $$

où les coefficients $\binom{n}{j}$ sont donnés par :

$$ \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \tag{1.33} $$

En remplaçant l'entier n par $\alpha \in R\,(\alpha > 0)$, l'expression (1.33) s'écrit :

$$ \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!\,(\alpha-j)!} \tag{1.34} $$

Donc, la dérivée d'ordre fractionnaire α de G-L est [8] :

$$ {}_{a}^{GL}D_{x}^{\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]}(-1)^{k}\binom{\alpha}{j}f(x-jh) \tag{1.35} $$

où $[x]$ dénotes la partie entière de x et h le pas d'échantillonnage $\binom{\alpha}{j}$ sont appelés les coefficients binomiaux.

L'approche de Riemann-Liouville (R-L)

L'approche de Riemann-Liouville est l'approche la plus connue et répandue. La dérivée d'ordre $\alpha \in R^{+}$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f localement intégrable définie sur $[a,\infty)$ est définie par [9]- [8] :

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}f(x) = \frac{d^{n}}{dx^{n}}\left({}_{a}I_{x}^{n-\alpha}f(x)\right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)\,dt \tag{1.36} $$

avec $(n-1) < \alpha < n$.

L'approche de Caputo

Caputo a reformulé la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit [7] :

$$ {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}f(x) = {}_{a}I_{x}^{n-\alpha}D^{n}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{1.37} $$

où $0 < (n-1) < \alpha < n, n \in N$.

La relation qui relie les deux définitions (1.36) et (1.37) est donnée par :

$$ {}^{RL}D^{\alpha}f(x) = {}^{C}D^{\alpha}f(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(a) \tag{1.38} $$

o

L'approche de Riesz

La dérivée fractionnaire de Riesz est définie par [10] :

$$ R_{x}^{\alpha}g(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-t)^{\alpha-1}g(t)\,dt \tag{1.39} $$

tel que $0 < \alpha \leq 2, \alpha \neq 1$.

Il existe une autre repésentation de la dérivée fractionnaire de Riesz :

$$R_x^\alpha g(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+\xi)-2f(x)+f(x-\xi)}{\xi^{1+\alpha}}d\xi, \qquad 0<\alpha\leq 2 \tag{1.40}$$

1.3.3 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

Les principales propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires sont les suivantes [8] [11] :

Linéarité

La dérivation non entière est un opérateur linéaire. Ainsi, si f et g sont deux fonctions continues et (μ,λ) deux réels, on a :

$$D_x^\alpha(\lambda f(x)+\mu g(x)) = \lambda D_x^\alpha f(x) + \mu D_x^\alpha g(x) \tag{1.41}$$

où D_x^α désigne n'importe quelle approche de dérivation fractionnaire.

Règle de Leibniz

Pour n entier, on a :

$$D_x^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(x)\,D^{p-k}g(x) - R_n^p(x) \tag{1.42}$$

où $n > p+1$ et $R_n^p(x) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)}\int_a^x (x-\tau)^{-p-1}g(\tau)\,d\tau\int_\tau^x f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n\,d\xi$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^p(x) = 0$.

Autres propriétés des dérivées fractionnaires

1. Les opérateurs d'intégration d'ordre fractionnaire vérifient la propriété de semi-groupe, soit :

$$_aI_{xa}^\alpha I_x^\beta f(x) =_a I_x^{\alpha+\beta} f(x) \tag{1.43}$$

2. Les opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe), ne vérifient pas la propriété de semi-groupe que sous certaines conditions :

$$_0D_{x0}^\alpha D_x^\beta f(x) =_0 D_x^{\alpha+\beta} f(x) \tag{1.44}$$

et

$$ {}_aD^n_{xa}D^\alpha_x f(x) =_a D^{n+\alpha}_x f(x) \tag{1.45} $$

si n est entier positif et α arbitraire.

3. Pour $\alpha = 0$, $D^0_x f(x)$ est l'opérateur identité $\left(D^0_x f(x) = f(x)\right)$.

4. La dérivée d'ordre fractionnaire de l'intégrale de même ordre d'une fonction $f(x)$ donne :

$$ {}_aD^\alpha_{xa}I^\alpha_x f(x) = f(x) \qquad \text{avec } \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \tag{1.46} $$

5. Pour $\alpha = n$ où n est un nombre entier, l'opérateur ${}_aD^\alpha_x$ produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.

6. Si $f(x)$ est une fonction analytique en x, alors sa dérivée fractionnaire ${}_aD^\alpha_x f(x)$ est une fonction analytique en x.

1.4 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base de la dérivation fractionnaire. On a cité quelques notions relatives à cet outil mathématique, quelques approches des dérivées fractionnaires sont introduites à savoir, l'approche de Grunwald Letnikov, de Riesz, de Riemann Liouville et celle de Caputo ainsi leurs propriétés.

Le chapitre suivant aura pour objectif d'approfondir les applications de la dérivée fractionnaire dans le domaine de la mécanique quantique.

Bibliographie

[1] B. Ross, The Development of Fractional Calculus 1695-1900, Historia Math, 4 : 75-89, 1977. (Cité page 6.)

[2] R. Gorenflo and F. Mainardi, Fractals and fractional calculus in Continuum mechanics, Springer-Verlag,Wien and New York, 1997. (Cité page 6.)

[3] E.Artin, Einfuhrung in die Theorie der Gammafunktion. Teubner, Leipzig, 1931. (English translation : The Gamma Function. Published 1964 by Holt, Rinehart and Winston, New York). (Cité pages 8 et 10.)

[4] S. Das, Functional Fractional Calculus for System Identification and Control, Springer-Verlag, Berlin, 2008. (Cité pages 8 et 11.)

[5] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals : Series,Academic Press, New York, 2007. (Cité pages 9 et 10.)

[6] S S$_{\cdot}$ Bayın, Supplements to Mathematical Methods in Science and Engineering, John Wiley & Sons, Inc., 2006. (Cité page 11.)

[7] A. A. Kilbas, H.M. Srisvastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, North-Holland, 2006. (Cité pages 12 et 14.)

[8] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley Sons, Inc., New York, 1993. (Cité pages 13, 14 et 15.)

[9] K. B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus : Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Academic Press, New York, 1974. (Cité page 14.)

[10] N. Laskin, Fractional Schrodinger equation, Physical Review E, 66 :056108, 2002. (Cité pages 14, 24 et 25.)

[11] M. S. Abd Elouahab, les systémes caotiques à dérivées fractionnaires, mémoire de magistere en mathematiques, Université Mentouri, constantine, 2009. (Cité page 15.)

Chapitre 2

Application du calcul fractionnaire en mécanique quantique

2.1 Introduction

Au départ, le calcul fractionnaire a été longuement considéré comme une simple théorie mathématique sans aucune explication réelle ou pratique. En effet, l'intérêt de ce concept dans les sciences fondamentales et en ingénierie ne s'est manifesté qu'à la seconde moitié du 20^{éme} siècle. Dès lors, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordres fractionnaires et leur intérêt dans différentes disciplines telles que la physique, l'électricité, la biologie, la chimie, l'automatique... etc. Parmi les applications des dérivées fractionnaires dans la physique, on mentionne les plus importantes : dans le matière condensée, Tarasov [1] et Laskin [2] ont largement discuté et montré que l'hamiltonien de certains systèmes avec interaction à longue portée est la somme d'une partie cinétique ($\propto p^{\alpha}$) et d'une partie d'inter-

action ($\propto x^{\nu}$) où α et ν sont des nombres non entiers (nombres fractionnaires). A ce stade, on note que dans la mécanique quantique $p^{\alpha} = (-i\hbar\nabla)^{\alpha}$ requiert une attention particulière en raison de α est un nombre fractionnaire. On applique aussi les dérvées intégrales fractionnaires dans les systèmes dynamiques [1]. Dans mécanique des milieux fractals [5] [6].Dans la physique de plasmas [7] et [8]et en la mecanique classique et l'électromagnétisme classique [9] [10] [11].

Récemment, $[14-21]$ ont appliqué le concept de la dérivée fractionnaire en mecanique quantique et ont développé une nouvelle mécanique quantique fractionnaire.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la dérivation fractionnaire appliquée en mecanique quantique et nous allons présenter les principes de la mécanique quantique fractionnaire.

2.2 Les principes de la mécanique quantique fractionnaire

En physique quantique, la première tentative réussie d'appliquer le concept de fractalité était l'approche d'intégrale de chemin de Feynman à la mécanique quantique. Feynman et Hibbs ont reformulé la mécanique quantique comme une intégrale de chemin au cours des trajectoires browniennes. La généralisation naturelle du mouvement brownien (ou le processus stochastique de Wiener) est le processus stochastique de Lévy. Le fondement de cette généralisation est la théorie des distributions de probabilité stables qui est été développée par P.Lévy. La propriété la plus fondamentale des distributions de Lévy est la stabilité qui est conforme avec le théorème limite centrale généralisé. Ainsi, du point de vue de la théorie des probabilités, la loi de probabilité stable est une généralisation de la loi de Gauss [18]. Le processus de Lévy est caractérisé par l'indice de Lévy α , $0 < \alpha \leq 2$. D'autre part α est la dimension fractale de la trajectoire de Lévy ($d^{Lévy}_{fractale} = \alpha$) [19]. Pour $\alpha = 2$ on obtient le processus gaussien ou le processus du mouvement brownien. Comme on le sait, dans le cas gaussien l'approche de l'intégrale de chemin à la mécanique quantique permet de reproduire l'équation

de Schrödinger pour la fonction d'onde. Dans le cas général nous tirons la généralisation fractionnaire de l'équation de Schrödinger. L'équation fractionnaire de Schrödinger comprend la dérivée d'ordre α au lieu de la dérivée seconde pour $\alpha = 2$ dans l'équation standard de Schrödinger, c'est l'une des raisons pour l'emploi du terme «mécanique quantique fractionnaire» (FQM) [20] .

2.3 Intégrale de chemin fractionnaire

Considérons une particule, en mouvment sous l'action d'un potentiel $V(x,t)$ à l'instant intiale t_a, allant du point x_a au point final x_b à l'instant final t_b. Le chemin de la particule est représenté par une fonction du temps $x(t)$ avec $x(t_a) = x_a$ et $x(t_b) = x_b$.

La mesure fonctionnelle de Feynman pour l'intégrale de chemin est definie par [21] :

$$\int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} D_{Feynman}x(\tau)\ldots = \lim_{N\to\infty}\int dx_1\ldots dx_{N-1}\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-N/2}\times\prod_{j=1}^{N}\exp\left(\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\left(x_j-x_{j-1}\right)^2\right)\ldots \tag{2.1}$$

où m est la masse de la particule, $\hbar$ est la constante de Planck, $x_0 = x_a$, $x_N = x_b$ et $\varepsilon = (t_b - t_a)/N$.

L'expression du propagateur prend la forme suivante :

$$K_F\left(x_b t_b / x_a t_a\right) = \int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} D_{Feynman}x(\tau)\exp\left[\frac{-i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} V\left(x(\tau)\right)d\tau\right] \tag{2.2}$$

La mesure de Feynman se généralise pour la processus du mouvement brownien. La généralisation du processus du mouvement brownien est le processus stochastique du mouvement de Lévy, et l'intégrale de chemin fractionnaire est définie comme [12] :

$$\int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} D_{Laskin}x(\tau)\ldots = \lim_{N\to\infty}\int dx_1\ldots dx_{N-1}\hbar^{-N}\left(\frac{D_\alpha i\varepsilon}{\hbar}\right)^{-N/\alpha}\times$$

$$\prod_{j=1}^{N} L_\alpha\left\{\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{D_\alpha i\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\left|x_j - x_{j-1}\right|\right\}\ldots \tag{2.3}$$

telle que

$$\hbar^{-1}\left(\frac{D_\alpha t}{\hbar}\right)^{-1/\alpha} L_\alpha\left\{\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{D_\alpha t}\right)^{1/\alpha}|x|\right\} = \frac{1}{\alpha\,|x|} H_{2,2}^{1,1}\left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{D_\alpha t}\right)^{1/\alpha}|x| \,\middle|\, \begin{matrix}(1,1/\alpha),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/2)\end{matrix}\right]$$

et α est l'indice de Lévy avec $0 < \alpha \leq 2$. D_α est le coefficient de diffusion quantique fractionnaire et pour $\alpha = 2, D_\alpha = 1/2m$ et L_α la fonction de lévy et H la fonction de Fox.

Comme on le sait, la définition donnée par l'équation (2.1) conduit à la mécanique quantique standard. Alors la définition donnée par l'équation (2.3) conduit à la mécanique quantique fractionnaire. Laskin [18] a proposé la mécanique quantique fractionnaire basée sur l'intégrale de chemin fractionnaire :

$$K_L\left(x_b t_b / x_a t_a\right) = \int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} D_{Laskin} x\left(\tau\right) \exp\left[\frac{-i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} V\left(x\left(\tau\right)\right) d\tau\right] \tag{2.4}$$

où $V(x(\tau))$ est l'énergie potentielle.

Pour une particule libre $V(x) = 0$, l'équation (2.4) devient :

$$K_L\left(x_b t_b / x_a t_a\right) = \int D_{Laskin} x\left(\tau\right).1 \tag{2.5}$$

$$= \hbar^{-1}\left(\frac{iD_\alpha\left(t_b - t_a\right)}{\hbar}\right)^{-1/\alpha} L_\alpha\left\{\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{D_\alpha i\left(t_b - t_a\right)}\right)^{1/\alpha}|x_b - x_a|\right\} \tag{2.6}$$

En terme de l'intégrale de Fourier, le propagateur K_L s'écrit sous la forme :

$$K_L\left(x_b t_b / x_a t_a\right) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp \exp\left(i\frac{p\left(x_b - x_a\right)}{\hbar} - i\frac{D_\alpha |p|^\alpha\left(t_b - t_a\right)}{\hbar}\right) \tag{2.7}$$

On note que l'énergie de la particule libre dans le cas de la mécanique quantique fractionnaire est donnée par [18] :

$$E = D_\alpha |p|^\alpha \tag{2.8}$$

2.4 Équation de Schrödinger fractionnaire

L'équation de Schrödinger est l'équation la plus fondamentale dans le mécanique quantique non-relativiste, décrivant l'évolution dans le temps du vecteur d'état

$|\Psi(t)\rangle$ d'un système quantique arbitraire et jouant le même rôle que les lois de Newton de la conservation de l'énergie en mécanique classique non relativiste. Elle a été établie en 1925 par Erwin Schrödinger et généralisée par Paul Dirac quelques années plus tard. L'évolution temporelle de $|\Psi(t)\rangle$ est décrite par [22] :

$$H\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) \tag{2.9}$$

où H est l'opérateur hamiltonien de la particule et $\hbar$ la constante de Planck.

En mécanique quantique standard, si la particule est en interaction avec un potentiel scalaire $V(r,t)$, et en l'absence de champ magnétique, H prendra la forme suivante :

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r},t) \tag{2.10}$$

où $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ est l'opérateur de l'impulsion et $\hat{r}$ est l'opérateur de la coordonnée d'espace de la particule.

L'équation de Schrödinger dépendante du temps standard est écrite sous la forme :

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r},t) + V(r,t)\,\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) \tag{2.11}$$

Pour trouver l'équation de Schrôdinger fractionnaire (l'équation différentielle fractionnaire de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$) qui décrite l'évolution d'un système de la mécanique quantique fractionnaire nous pouvons utiliser le noyau $K_L(x_b t_b / x_a t_a)$ qui est difini par l'équation (2.4) :

$$\Psi_f(x_b,t_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_a K_L(x_b t_b / x_a t_a)\,\Psi_i(x_a,t_a) \tag{2.12}$$

où $\Psi_i(x_a,t_a)$ est la fonction d'onde fractionnaire à l'instant initiale $t = t_a$ et $\Psi_f(x_b,t_b)$ c'est la fonction d'onde fractionnaire à l'instant finale.

On applique l'équation (2.12) dans le cas particulier que le temps t_b ne diffère que par un intervalle infinitésimal ε de $t_a \equiv t$,

$$\Psi(x,t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy K_L(x,t+y/\varepsilon,t)\,\Psi(y,t+\varepsilon) \tag{2.13}$$

En utilisant l'approximation de Feynman :

$$\int_{t}^{t+\tau} d\tau V\left(x\left(\tau\right)\right) \simeq \varepsilon V\left(x+y/2\right) \tag{2.14}$$

et la définition donnée par l'équation (2.4), on a :

$$\Psi(x,t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(i\frac{p\left(y-x\right)}{\hbar} - i\frac{\varepsilon D_\alpha \left|p\right|^\alpha}{\hbar} - \frac{i}{\hbar}\varepsilon V\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\Psi(y,t) \tag{2.15}$$

On peut développer l'expression précédente en série :

$$\Psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\exp\left(\frac{ip(x-y)}{\hbar}\right)\left(1 - i\frac{\varepsilon D_\alpha |p|^\alpha}{\hbar}\right)}{2\pi\hbar} \times \left(1 - \frac{i}{\hbar}\varepsilon V\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\Psi(y,t) \tag{2.16}$$

Ensuite, en tenant compte des définitions des transformations de Fourier,

$$\varphi(p,t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx \exp(-\frac{ip}{\hbar}x)\Psi(x,t) \tag{2.17}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp \exp(\frac{ip}{\hbar}x)\varphi(p,t) \tag{2.18}$$

et en introduisant la dérivée fractionnaire quantique de Riesz $(\hbar\nabla)^\alpha$ [12] :

$$(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x,t) = -\frac{1}{2\pi\hbar}\int dp \exp(\frac{ip}{\hbar}x)\left|p\right|^\alpha \varphi(p,t) \tag{2.19}$$

on obtient :

$$\Psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \Psi(x,t) + i\frac{\varepsilon D_\alpha}{\hbar}\left(\hbar\nabla\right)^\alpha\Psi(x,t) - i\frac{\varepsilon}{\hbar}V\left(x\right)\Psi(x,t) \tag{2.20}$$

Donc l'équation différentielle fractionnaire de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ est [10] :

$$-D_\alpha\left(\hbar\nabla\right)^\alpha\Psi(x,t) + V\left(x\right)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \tag{2.21}$$

L'équation (2.21) peut être réécrite sous la forme :

$$H\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \tag{2.22}$$

où H est l'Hamiltenien fractionnaire :

$$H = -D_\alpha\left(\hbar\nabla\right)^\alpha + V\left(x\right) \tag{2.23}$$

avec $(\hbar\nabla)^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Riesz à une dimension [10] :

$$(\hbar\nabla)^{\alpha}\Psi(x,t) = -\frac{1}{2\pi\hbar}\int dp \exp(\frac{ip}{\hbar}x)\,|p|^{\alpha}\,\varphi(p,t) \tag{2.24}$$

Pour une particule qui se déplace dans un espace tridimensionnel sous l'influence du potentiel $V(r,t)$, l'hamiltonien fractionnaire est écrit sous la forme :

$$H = D_{\alpha}\,|\hat{p}|^{\alpha} + V(\hat{r},t) \tag{2.25}$$

$$= D_{\alpha}(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} + V(\hat{r},t) \tag{2.26}$$

Ici il faut noter que D_{α} est un coéfficient qui ajuste les unités physiques avec le dimension $[D_{\alpha}] = erg^{1-\alpha}cm^{\alpha}sec^{-\alpha}$.

Et l'équation de Schrodinger fractionnaire dépendante du temps à $3D$ est [19] :

$$D_{\alpha}(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r,t) + V(r,t)\Psi(r,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) \quad 1 < \alpha \leq 2 \tag{2.27}$$

La dérivée fractionnaire de Riesz $(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}$ est définie comme :

$$(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p \exp(\frac{ip}{\hbar}r)\,|p|^{\alpha}\,\varphi(p,t) \tag{2.28}$$

où $\varphi(p,t)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'onde $\Psi(r,t)$:

$$\varphi(p,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3r \exp(-\frac{ip}{\hbar}r)\Psi(r,t) \tag{2.29}$$

2.5 Hermiticité de l'opérateur Hamiltonien fractionnaire

Alors que les opérateurs utilisés en mécanique quantique sont très souvent complexes, les grandeurs physiques qu'ils permettent de calculer sont toujours réelles. De ce fait, les opérateurs de la mécanique quantique doivent être des opérateurs hermitiques.

Les opérateurs hermitiques satisfont la relation suivante :

$$\langle\phi,\hat{G}\chi\rangle = \langle\hat{G}\phi,\chi\rangle^{*} \tag{2.30}$$

Pour prouver l'hermiticité de H_α, il faut démontrer que :

$$\langle \phi, (\hbar\nabla)^\alpha \chi \rangle = \langle (\hbar\nabla)^\alpha \phi, \chi \rangle \tag{2.31}$$

preuve

L'Hamiltonien fractionnaire H_α défini par l'équation (2.26) est un opérateur auto-adjoint dans l'espace muni du produit scalaire :

$$\langle \phi, \chi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi^* (x,t) \chi (x,t) \tag{2.32}$$

avec :

$$H_\alpha = -D_\alpha (\hbar\nabla)^\alpha + V(x,t) \tag{2.33}$$

où le signe * indique le conjugué complexe .

donc on peut écrire :

$$(\phi, \nabla^\alpha \chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi^*(x,t) \nabla^\alpha \chi(x,t) \tag{2.34}$$

$$(\nabla^\alpha \phi, \chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \nabla^\alpha \phi^*(x,t) \chi(x,t) \tag{2.35}$$

avec $\nabla^\alpha \chi$ et $\nabla^\alpha \phi$ sont les dérivées de Riesz quantiques fractionnaires :

$$\nabla^\alpha \chi(x,t) = -\frac{1}{2\pi\hbar} \int dk \exp(ikx) \, |k|^\alpha \, \hat{\chi}(k,t) \tag{2.36}$$

$$\nabla^\alpha \phi(x,t) = -\frac{1}{2\pi\hbar} \int dk \exp(ikx) \, |k|^\alpha \, \hat{\phi}(k,t) \tag{2.37}$$

$\hat{\chi}(k,t)$ et $\hat{\phi}(k,t)$ sont les transformées de Fourier des fonctions $\chi(x,t), \phi(x,t)$:

$$\hat{\chi}(k,t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \exp(ikx) \chi(x,t) \tag{2.38}$$

$$\hat{\phi}(k,t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \exp(ikx) \phi(x,t) \tag{2.39}$$

On note que, en utilisant l'équation (2.36) et l'équation (2.38), l'équation (2.34) peut être écrite comme :

$$(\phi, \nabla^{\alpha}\chi) == -\int dk\,|k|^{\alpha}\,\hat{\chi}(k,t)(\frac{1}{2\pi\hbar}\int dx\phi^{*}(x,t)\exp(ikx)) \tag{2.40}$$

$$= -\int dk\,|k|^{\alpha}\,(\frac{1}{2\pi\hbar}\int dx\exp(ikx)\chi(x,t))\hat{\phi}^{*}(k,t)) \tag{2.41}$$

$$= (\nabla^{\alpha}\phi, \chi)$$

donc :

$$(\phi, \nabla^{\alpha}\chi) = (\nabla^{\alpha}\phi, \chi) \tag{2.42}$$

L'énergie moyenne d'un système quantique fractionnaire avec hamiltonien H_{α} est :

$$E_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\Psi^{*}(x,t)H_{\alpha}\Psi(x,t) = \langle\Psi, H_{\alpha}\Psi\rangle \tag{2.43}$$

Tenant compte de l'équation (2.30), on a :

$$E_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\Psi^{*}(x,t)H_{\alpha}\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx(H_{\alpha}^{+}\Psi(x,t))^{*}\Psi(x,t) = E_{\alpha}^{*}$$

Comme conséquence physique, l'énergie du système est réelle. Ainsi, l'Hamiltonien fractionnaire H_{α} défini par l'équation (2.33) est hermitien ou opérateur auto-adjoint dans l'espace muni par le produit scalaire défini par l'équation (2.43),

$$(\phi, H_{\alpha}\chi) = (H_{\alpha}^{+}\phi, \chi) \tag{2.44}$$

Notons que l'équation (2.21) conduit à l'équation importante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dx\Psi^{*}\left(x,t\right)\Psi\left(x,t\right) = 0 \tag{2.45}$$

qui montre que la fonction d'onde reste normalisée.

En multipliant l'équation (2.21) par $\Psi^{*}(x,t)$ et le conjugué de l'équation (2.21) par $-\Psi\left(x,t\right)$, et en sommant les deux équations résultantes, on obtient :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^{*}\left(x,t\right)\Psi\left(x,t\right)\right) = \Psi^{*}\left(x,t\right)H_{\alpha}\Psi\left(x,t\right) - \Psi\left(x,t\right)H_{\alpha}^{*}\Psi^{*}\left(x,t\right) \tag{2.46}$$

Intégrons cette relation sur tout l'éspace et en utilisant le fait que l'opérateur H_α est auto-adjoint, on trouve l'équation (2.45).

2.6 L''équation de Schrödinger fractionnaire indépendante du temps

Un cas particulier très important de l'équation de Schrödinger est la situation lorsque le potentielle $V(x,t)$ ne dépend pas du temps. En fait, ce cas particulier couvrira la plupart des problèmes importants en mécanique quantique. Comme son nom l'indique, il est la situation lorsque le potentiel ne dépend que de la position (il peut être une constante).

Si $V(x,t) = V(x)$, alors l'équation de Schrödinger fractionnaire devient :

$$-D_\alpha\left(\hbar\nabla\right)^\alpha \Psi(x,t) + V(x)\,\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \quad 1 < \alpha \leq 2 \tag{2.47}$$

Lorsque V indépendante du temps, il devient possible d'utiliser la technique de séparation des variables, dans lequel la fonction d'onde est écrite comme le produit de deux fonctions, dont chacune est une fonction d'une seule variable :

$$\Psi(x,t) = f(t)\Psi(x) \tag{2.48}$$

En substituant dans l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$-D_\alpha\hbar^\alpha\frac{\partial^\alpha\left(\Psi(x)f(t)\right)}{\partial x^\alpha} + V(x)\Psi(x)f(t) = i\hbar\frac{\partial\left(\Psi(x)f(t)\right)}{\partial t} \tag{2.49}$$

La simplification des dérivées donne :

$$\frac{1}{\Psi(x)}\left(-D_\alpha\hbar^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\Psi(x) + V(x)\Psi(x)\right) = \frac{i\hbar\frac{\partial f(t)}{\partial t}}{f(t)} \tag{2.50}$$

Comme le membre de gauche de l'équation (2.50) ne dépend que de t et que le membre de droite ne dépend que de x, il ne pourra y avoir de solution de la forme (2.48) que si l'équation (2.50) est égale à une constante (qui ne dépend donc ni de t ni de x). Cette constante a la dimension d'une énergie, appelons-la E. Dés lors $\frac{i\hbar\partial f(t)}{\partial t} = Ef(t)$ et par conséquent $f(t) = \exp(-\frac{iE}{\hbar}t)$. Tandis que [19] :

$$-D_\alpha\hbar^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{2.51}$$

qu'on appelle "l'équation de Schrödinger indépendante du temps".

Par conséquent la forme la plus générale de la solution dans laquelle les variables d'espace et de temps sont séparées :

$$\Psi(x,t) = \exp(-\frac{iE}{\hbar}t)\Psi(x) \tag{2.52}$$

2.7 Densité et courant de probabilité

La densité de probabilité $\rho(r,t)$ pour trouver l'existence d'une particule dont la fonction d'onde $\Psi(r,t)$ ($\Psi(r,t)$ est normée) est donnée par [24] :

$$\rho(r,t) = |\Psi(r,t)|^2 \tag{2.53}$$

Sachant que la probabilité dP de trouver la particule à l'instant t dans le volume d^3r en r est [24] :

$$dP = \rho(r,t)d^3r \tag{2.54}$$

Par conséquent l'intégrale de la densité de probabilité $\rho(r,t)$ sur tout l'espace est donc constante (normalisation), mais sa valeur locale peut varier. Les variations de $\rho(r,t)$ donnent lieu à un courant de probabilité $J(r,t)$ qui obéit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial\rho(r,t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J}(r,t) = 0 \tag{2.55}$$

ce qui impose qu'il y ait conservation locale de probabilité. Si notre particule est soumise à la seule action du potentiel $V(r,t)$, son équation de Schrödinger fractionnaire correspondante s'écrit :

$$D_\alpha(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r,t) + V(r,t)\Psi(r,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) \tag{2.56}$$

qui a pour complexe conjugué :

$$D_\alpha(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi^*(r,t) + V(r,t)\Psi^*(r,t) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(r,t) \tag{2.57}$$

Pour trouver le vecteur de la densité de courant de probabilité dans le cas fractionnaire, on multiplie l'équation (2.56) par $\Psi^*(r,t)$ et l'équation (2.57) par $-\Psi(r,t)$, et on somme les deux équations résultantes, on obtient :

$$D_\alpha \left\{ \Psi^*(r,t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r,t) - \Psi(r,t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi^*(r,t) \right\} = i\hbar \left\{ \begin{array}{c} \Psi^*(r,t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) + \\ \Psi(r,t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(r,t) \end{array} \right\} \tag{2.58}$$

or :

$$\Psi^*(r,t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) + \Psi(r,t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\Psi(r,t)\Psi^*(r,t))$$

Donc :

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = D_\alpha \left[\Psi^*(r,t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r,t) - \Psi(r,t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi^*(r,t) \right] \tag{2.59}$$

L'équation (2.59) prend aussi la forme suivante [19] :

$$\frac{\partial\rho(r,t)}{\partial t} + \frac{D_\alpha\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla} \left[\Psi^*(r,t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2-1}\overrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) - \Psi(r,t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2-1}\overrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t) \right] = 0 \tag{2.60}$$

Et en mettant :

$$\vec{J}(r,t) = \frac{D_\alpha\hbar}{i}(\Psi^*(r,t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2-1}\overrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) - \Psi(r,t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2-1}\overrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t)) \tag{2.61}$$

$J(r,t)$ est la densité de courant de probabilité dans le cas fractionnaire.

Si nous remplaçons $\frac{\hbar}{i}\nabla$ par $\hat{p}$, l'équation (2.61) devient :

$$J(r,t) = D_\alpha(\Psi^*(r,t)(\hat{p}^2)^{\alpha/2-1}\hat{p}\Psi(r,t) - \Psi(r,t)(\hat{p}^2)^{\alpha/2-1}\hat{p}\Psi^*(r,t)) \tag{2.62}$$

Nous pouvons exprimer l'équation (2.62) en terme de l'opérateur de la vitesse défini comme :

$$\hat{v} = \frac{d\hat{r}}{dt} \tag{2.63}$$

où $\hat{r}$ est l'opérateur de la coordonnée d'espace.

En utilisant la règle générale de la mécanique quantique pour la différenciation de l'opérateur :

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[H_\alpha, r\right], \tag{2.64}$$

on a :

$$\hat{v} = \frac{i}{\hbar}\left[H_\alpha r - H_\alpha r\right] \tag{2.65}$$

En outre, à l'aide de l'équation $f(\hat{p})\, r - r f(\hat{p}) = -i\hbar\frac{\partial f}{\partial p}$ qui détient pour toute fonction $f(\hat{p})$ de l'opérateur de l'impulsion, et en tenant compte de l'équation (2.25) pour l'hamiltonien $\hat{H}_\alpha(\hat{p}, \hat{r})$, on obtient l'équation de l'opérateur de vitesse :

$$\hat{v} = \alpha D_\alpha \left|\hat{p}^2\right|^{\alpha/2-1} \hat{p} \tag{2.66}$$

Ici $\hat{p}$ est l'opérateur de l'impulsion. En comparant les équations (2.62) et (2.66) on conclue que :

$$j = \frac{1}{\alpha}\left(\Psi\hat{v}\Psi^* + \Psi^*\hat{v}\Psi\right) \tag{2.67}$$

Pour obtenir le courant de densité de la probabilité égale à 1 (le courant lorsque une particule traverse unité de surface par unité de temps) la fonction d'onde de particule libre doit être normalisée :

$$\Psi(r,t) = \sqrt{\frac{\alpha}{2v}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}pr - \frac{i}{\hbar}Et\right), \qquad E = D_\alpha |p|^\alpha, \qquad 1 < \alpha < 2 \tag{2.68}$$

où v est la vitesse de la particule, avec $v = \alpha D_\alpha p^{\alpha-1}$.

Lorsque $\alpha = 2$, $D_\alpha = 1/2m$, on retrouve les résultats bien connus en mécanique quantique usuelle. Donc les nouvelles équations (2.61) et (2.62) sont la généralisation fractionnaire des équations bien connues pour le vecteur du courant et de la densité de probabilité de la mécanique quantique standard.

2.8 Applications de la mécanique quantique fractionnaire

2.8.1 Particule libre

Comme première application de l'équation de Schrödinger fractionnaire, on considère le cas de la particule libre qui exprime le cas plus simple que l'on puisse imaginer.

Considérons une particule libre dont l'énergie potentielle est nulle (ou a une valeur constante) en tout point de l'espace. La particule n'est donc soumise à aucune force et l'équation de Schrödinger fractionnaire dépendante du temps devient :

$$D_\alpha(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(r,t)}{\partial t}, \qquad \Psi(r,t=0) = \Psi_0(r) \tag{2.69}$$

En utilisant la tansformation de Fourier définie par l'équation (2.29) et la la définition de la dérivée fractionnaire de Riesz à 3D donnée par l'équation (2.28), on obtient :

$$D_\alpha\,|p|^\alpha\,\varphi(p,t) = i\hbar\frac{\partial\varphi(p,t)}{\partial t} \tag{2.70}$$

avec la condition initiale :

$$\varphi_0(p) = \varphi(p,t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r \exp\left(-ip\frac{r}{\hbar}\right)\Psi_0(r) \tag{2.71}$$

L'équation (2.70) admet comme solution générale :

$$\varphi(p,t) = C\exp(-\frac{i}{\hbar}D_\alpha\,|p|^\alpha\,t) \tag{2.72}$$

où C est une constante. La transformation de Fourier inverse donne la solution finale de l'équation (2.69) :

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \exp\left(i\frac{p\,(r-r')}{\hbar} - i\frac{D_\alpha p^\alpha t}{\hbar}\right)\Psi_0(r') \tag{2.73}$$

L'intégrale sur p peut être exprimée en termes des fonctions de Fox $H^{1,2}_{3,3}$ et la solution du problème de particule libre devient [19] :

$$\Psi(r,t) = -\frac{1}{2\pi\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} d^3r' \frac{1}{|r-r'|^3} H^{1,2}_{3,3}\left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{iD_\alpha t}\right)^{1/\alpha}|r-r'|\,\middle|\,\begin{matrix}(1,1),(1,1/\alpha),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/2),(2,1)\end{matrix}\right]\Psi_0(r') \tag{2.74}$$

Substituant dans l'équation (2.74) $\Psi_0(r) = \delta(x)$, on trouve que le noyau $K^0(x,t\,|0\,,t)$ de l'équation de Schrödinger fractionnaire est écrit sous la forme :

$$K^0(x,t\,|0\,,t) = -\frac{1}{2\pi\alpha\,|r|^3} H^{1,2}_{3,3}\left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{iD_\alpha t}\right)^{1/\alpha}|r|\,\middle|\,\begin{matrix}(1,1),(1,1/\alpha),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/2),(2,1)\end{matrix}\right] \tag{2.75}$$

Pour $\alpha = 2$, le noyau $K^0(x,t\,|0\,,t)$ devient :

$$K^0(x,t\,|0\,,t) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar^3 t}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{imr^2}{2\hbar t}\right) \tag{2.76}$$

2.8.2 Particule dans une boite

Dans ce paragraphe on va traiter le problème de la particule dans une boîte dans le cas fractionnaire comme deuxième application de l'équation de schrodinger fractionnaire.

En physique, la particule dans une boîte (ou puits de potentiel carré) est une représentation simple d'un système relevant de la mécanique quantique. On étudie une particule confinée dans une région finie de l'espace grâce à des murs de potentiel infini aux bords de cette région. La particule n'est soumise à aucune force à l'intérieur de la boîte, mais y est retenue par une force infinie aux bords. C'est une situation similaire à un gaz confiné dans un récipient. Pour simplifier, le cas unidimensionnel sera premièrement traité. On en déduira les équations dans le cas tridimensionnel.

Le cas unidimensionnel

On considère une particule confinée dans un puits de potentiel infini :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour } |x| \geq a \\ 0 & \text{pour } |x| \leq a \end{cases} \tag{2.77}$$

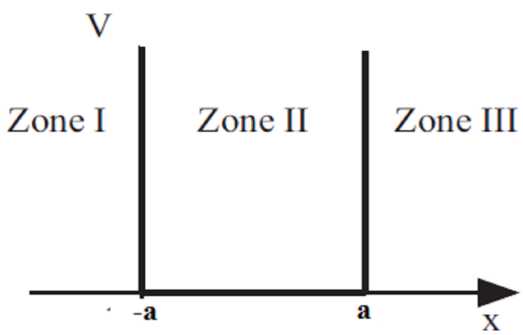

FIGURE 2.1 – *Puits de potentiel infini à une dimension.*

Pour le cas unidimensionel, l'équation de Schrödinger indépendante du temps de cette particule peut-être écrite comme :

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x)+V(x)\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{2.78}$$

où $E = D_\alpha\,|p|^\alpha$ est l'énergie totale de la particule.

Ce puits de potentiel comporte un mur impénétrable en $x = -a$ et $x = a$. A cause de ce mur de potentiel infiniment haut, la particule aurait une énergie infinie, la particule ne peut pas se trouver dans l'intervalle $[-a, a]$ où V est infini. Sa densité de probabilité de présence doit donc y être nulle et sa fonction d'onde doit nécessairement s'annuler dès que x atteint les bords de l'intervalle.

$$\Psi(x)=0 \quad |x|\geq a$$

Pour la région à l'intérieur de la boîte $V(x) = 0$ et l'équation (2.78) se réduit à

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{2.79}$$

avec $(\hbar\nabla)^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Riesz qui est définie par l'équation (2.24) .

L'équation (2.79) peut-être écrite sous la forme :

$$\nabla^\alpha\Psi(x,t)+k^\alpha\Psi(x,t)=0 \tag{2.80}$$

avec : $k^\alpha = \frac{E}{D_\alpha\hbar^\alpha}$.

La solution générale de l'équation différentielle fractionnaire (2.80), exprimée avec les fonctions cosinus et sinus est [13] :

$$\Psi(x)=A\sin(kx)+B\cos(kx) \qquad |x|\leq a \tag{2.81}$$

où A et B sont des nombres complexes.

et l'énergie qui lui correspond est :

$$E=D_\alpha\hbar^\alpha k^\alpha \tag{2.82}$$

A ce stade, on a donc :

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x \\ A\sin(kx) + B\cos(kx) & |x| \leq a \\ 0 & -a \leq x \end{cases} \tag{2.83}$$

On a mentionné que la fonction $\Psi(x)$ est une fonction continue. La condition de continuité en $x = -a$ et $x = a$, implique que :

$$A\sin(ka) + B\cos(ka) = 0 \tag{2.84}$$

$$-A\sin(ka) + B\cos(ka) = 0 \tag{2.85}$$

La combinaison de l'équation (2.84) et l'équation (2.85) donne :

$$\begin{array}{c} A\sin(ka) = 0 \\ B\cos(ka) = 0 \end{array}$$

donc, les solutions se répartissent en deux catégories : celles avec $A = 0$ et celles avec $B = 0$. Les solutions impaires ont $B = 0$, alors $ka = n\frac{\pi}{2}$ pour $n = 2, 4, 6, \ldots$. Les niveaux d'énergie deviennent :

$$E_n^{(imp)} = D_\alpha(\frac{\hbar n\pi}{2a})^\alpha$$

et les fonctions d'onde :

$$\Psi_n^{(imp)}(x) = A\sin(\frac{n\pi}{2a}x) \qquad |x| \leq a$$

Les solutions paires ont $A = 0$, alors $ka = n\frac{\pi}{2}$ pour $n = 1, 3, 5, \ldots$ .Les niveaux d'énergie deviennent :

$$E_n^{(p)} = D_\alpha(\frac{\hbar n\pi}{2a})^\alpha$$

et les fonctions d'onde :

$$\Psi_n^{(p)}(x) = B\cos(\frac{n\pi}{2a}x) \qquad |x| \leq a$$

La combinaison des solutions paires et impaires donne :

- les niveaux d'énergie :

$$E_n = D_\alpha(\frac{\hbar n\pi}{2a})^\alpha \qquad n = 1,2,3,... \tag{2.86}$$

- les fonctions d'onde :

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} C_0 \sin(\frac{n\pi}{2a}(x+a)) & n = 1,2,3,... \quad \text{pour } |x| \leq a \\ 0 & \text{pour } |x| \geq a \end{cases} \tag{2.87}$$

Maintenant afin de trouver C_0, on utilise le fait que la probabilité de trouver la particule quelque part est égale à 1. D'où la valeur de l'intégrale de $|\Psi|^2$ sur l'axe x :

$$\int_{-a}^{+a} |\Psi(x)|^2 = C_0^2 \int_{-a}^{+a} \sin^2(\frac{n\pi}{2a}(x+a)) = 1 \tag{2.88}$$

c'est à dire

$$C_0 = 1/\sqrt{a} \tag{2.89}$$

Finalement, la solution complète pour le problème d'une particule unidimensionnelle dans une boîte dans le cas fractionnaire est [13] :

$$\begin{cases} \Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin(\frac{n\pi}{2a}(x+a)) \exp(-\frac{iE}{\hbar}t) & n = 1,2,3,... \quad |x| \leq a \\ E_n = D_\alpha(\frac{\hbar n\pi}{2a})^\alpha & n = 1,2,3,... \end{cases} \tag{2.90}$$

Le cas tridimensionnel

Pour le cas tridimensionnel, la particule est confinée dans une boite parallélépipèdique de longueur L_x dans la direction x, L_y dans la direction y et L_z dans la direction z. Le potentiel est encore nul dans la boîte et infini sur les murs.

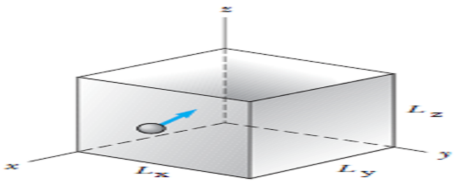

FIGURE 2.2 – *Particule confinée dans une boîte cubique.*

Pour la zone intérieure de la boîte, où le potentiel est nul, l'expression trimensionnelle analogue à l'équation (2.79) s'écrit :

$$D_\alpha(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z) \tag{2.91}$$

$$D_\alpha\left[-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]^{\alpha/2}\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z) \tag{2.92}$$

Cette équation différentielle n'a pas une solution facile, pour cela on va chercher d'abord les valeurs propres de l'equation (2.92).

L'Hamiltonien fractionnaire de la particule à l'intérieur de la boîte écrite comme :

$$H_\alpha = D_\alpha(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} \tag{2.93}$$

On peut s'ecrire l'équation (2.93) comme :

$$H_\alpha = 2mD_\alpha(-\hbar^2)^{\alpha/2-1}\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta^{\alpha/2}\right) \tag{2.94}$$

où m est la masse de la particule.

Alors l'équation de de Schrödinger devient :

$$C\hat{h}^{\alpha/2}\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z) \tag{2.95}$$

avec $C = 2mD_\alpha(-\hbar^2)^{\alpha/2-1}$

Il faut noter ici que $\hat{h}$ est l'opérateur de Hamilton standard d'une particule dans une boite :

$$\hat{h} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta^{\alpha/2} \tag{2.96}$$

et l'équation de Schrödinger standard de cette particule est :

$$\hat{h}\Psi(x,y,z) = \varepsilon\Psi(x,y,z) \tag{2.97}$$

où ε est l'énergie :

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2}+\frac{n_y^2}{L_y^2}+\frac{n_z^2}{L_z^2}\right) \tag{2.98}$$

On reécrit l'équation (2.95) comme :

$$C\hat{h}\Psi(x,y,z) = E\hat{h}^{-\alpha/2+1}\Psi(x,y,z) \tag{2.99}$$

Donc :

$$C\hat{h}\Psi(x,y,z) = E\varepsilon^{-\alpha/2+1}\Psi(x,y,z) \tag{2.100}$$

Alors :

$$C^{\alpha/2}\,\hat{h}^{\alpha/2}\,\Psi(x,y,z) = \left(E\varepsilon^{-\alpha/2+1}\right)^{\alpha/2}\Psi(x,y,z) \tag{2.101}$$

à partir de l'équation (2.101) on peut déduire que :

$$E = C^{1-\alpha/2}\left(E\varepsilon^{-\alpha/2+1}\right)^{\alpha/2} \tag{2.102}$$

Enfin les valeurs propres sont :

$$E = \varepsilon^{\alpha/2} = \frac{C\hbar^{\alpha}}{(8m)^{\alpha/2}}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right)^{\alpha/2} \tag{2.103}$$

2.8.3 Barrière de potentiel

Maintenant, on va examiner le problème d'un faisceau de particules incident sur une barrière de potentiel de largeur a et de hauteur $V_0 > 0$. Cette géométrie est particulièrement importante car elle comprend l'exemple le plus simple d'un phénomène de diffusion dans lequel un faisceau de particules est dévié par un potentiel local. En outre, cette géométrie unidimensionnelle fournit également une plate-forme pour explorer un phénomène propre à la mécanique quantique - effet tunnel quantique. Pour ces raisons, nous allons traiter ce problème pleinement dans le cas fractionnaire.

Considérons la diffusion d'un faisceau de particules d'énergie E venant de la gauche par une barrière de potentiel rectangulaire $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

avec $V_0 > 0$.

Selon la mécanique classique, une particule d'énergie E inférieure à $V_0 (E < V_0)$ serait réfléchie par la barrière. Alors qu'avec l'énergie $E > V_0$ elle continuerait

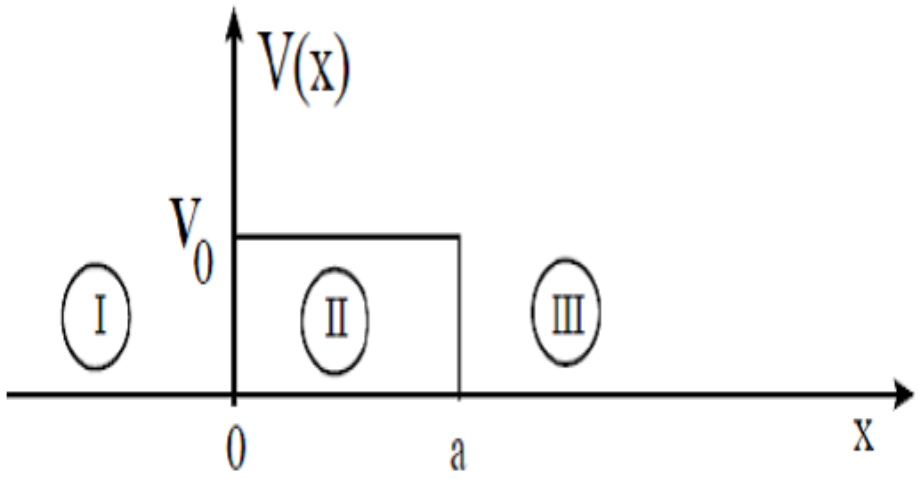

FIGURE 2.3 – *Barrière de potentiel.*

sa course avec une vitesse moindre. Mais la fonction d'onde associée avec une particule libre doit être continue à la barrière et montrera une décroissance exponentielle à l'intérieur de la barrière (lorsque $E < V_0$). La fonction d'onde doit également être continue de l'autre côté de la barrière. Donc la particule a une certaine probabilité d'être transmise dans la région $x > a$ lorsque $E < V_0$.

Nous disposons de trois régions distinctes dans lesquelles nous devons résoudre l'équation de Schrödinger fractionnaire :

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{2.104}$$

Dans la région I ($x < 0$), l'équation à résoudre est :

$$\nabla^\alpha\Psi(x) + k^\alpha\Psi(x) = 0 \tag{2.105}$$

avec :

$$k^\alpha = \frac{E}{D_\alpha\hbar^\alpha}$$

La solution générale de l'équation (2.105) est donnée par :

$$\Psi_I(x) = A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx} \tag{2.106}$$

Dans l'équation (2.106) le terme e^{ikx} représente l'onde incidente et qui correspond à une onde allant de gauche vers la droite. Lorsque la particule arrive en $x = 0$, elle peut soit être réfléchie, soit être transmise. Et l'onde réfléchie est représentée par le terme e^{-ikx}.

Le courant de densité de probabilité fractionnaire de l'onde incidente est donné par :

$$\begin{aligned} J_i(x) &= \frac{D_\alpha \hbar}{i}(\Psi^*(x)(\hbar^2\Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1}\overrightarrow{\nabla}\Psi(x) - \Psi(x)(\hbar^2\Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1}\overrightarrow{\nabla}\Psi^*(x)) \\ &= |A_1|^2 \frac{D_\alpha \hbar}{i}(e^{-ikx}(\hbar^2\Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1}\overrightarrow{\nabla}e^{ikx} - e^{ikx}(\hbar^2\Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1}\overrightarrow{\nabla}e^{-ikx}) \end{aligned}$$

Donc :

$$J_i(x) = 2D_\alpha(k\hbar)^\alpha |A_1|^2 \tag{2.107}$$

Et le courant de densité de probabilité fractionnaire correspondant à l'onde réfléchie est :

$$J_r(x) = 2D_\alpha(k\hbar)^\alpha |B_1|^2 \tag{2.108}$$

Tandis que dans la région III $(x > a)$ on :

$$\nabla^\alpha\Psi(x) + k^\alpha\Psi(x) = 0 \tag{2.109}$$

la solution générale de l'équation (2.109) est évidemment :

$$\Psi_{III}(x) = A_3e^{ikx} + B_3e^{-ikx} \tag{2.110}$$

Le premier terme en e^{ikx} correspond à une onde allant de gauche vers la droite. Il représente donc l'onde transmise. Par contre le second terme représente une onde venant de $+\infty$ allant vers la gauche. Comme nous n'avons pas de particule qui provient dans ce sens, nous poserons $B_3 = 0$.

Donc :

$$\Psi_{III}(x) = A_3e^{ikx} \tag{2.111}$$

Le courant de densité de probabilité fractionnaire de l'onde transmise est donné par :

$$J_t(x) = 2D_\alpha(k\hbar)^\alpha |A_3|^2 \tag{2.112}$$

Alors que dans la région II $(0 < x < a)$ l'équation de Schrodinguer fractionnaire est :

$$\nabla^{\alpha}\Psi(x) + \frac{1}{D_{\alpha}\hbar^{\alpha}}\left(E - V_0\right)\Psi(x) = 0 \tag{2.113}$$

Nous distinguons les deux cas $E > V_0$ et $E < V_0$.

Dans le cas $E > V_0$ l'équation (2.113) admet comme solution générale :

$$\Psi_{II}(x) = A_2 e^{iKx} + B_2 e^{-iKx} \tag{2.114}$$

où $K = \left[\frac{1}{D_{\alpha}\hbar^{\alpha}}\left(E - V_0\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$

Dans le cas $E < V_0$ la solution générale de l'équation (2.113) est :

$$\Psi_{II}(x) = A_2 e^{\rho x} + B_2 e^{-\rho x} \tag{2.115}$$

telle que $\rho = \left[\frac{1}{D_{\alpha}\hbar^{\alpha}}\left(V_0 - E\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$.

On peut donc obtenir la solution $E < V_0$ à partir de la solution pour $E > V_0$ en remplaçant simplement iK par ρ dans notre solution.

En général, nous ne cherchons pas à écrire la fonction d'onde dans toutes les régions mais plutôt à calculer le coefficient de réflexion ou de transmission de la barrière dans les deux cas $E < V_0$ et $E > V_0$ en cas fractionnaire.

Le coefficient de réflexion est défini comme le module du rapport du courant de probabilité réfléchi J_r, sur le courant de probabilité incident J_i. Alors que le coefficient de transmission, défini comme le rapport du courant transmis J_t sur le courant incident J_i.

Le cas $E > V_0$

Les expressions de la fonction d'onde dans les différentes régions sont :

$$\begin{cases} \Psi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & x \leq 0 \\ \Psi_{II}(x) = A_2 e^{iKx} + B_2 e^{-iKx} & 0 \leq x \leq a \\ \Psi_{III}(x) = A_3 e^{ikx} & x \geq a \end{cases} \tag{2.116}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, le coefficient de transmission est défini par :

$$T = \frac{J_t(x)}{J_i(x)} = \frac{2D_{\alpha}(k\hbar)^{\alpha}\left|A_3\right|^2}{2D_{\alpha}(k\hbar)^{\alpha}\left|A_1\right|^2} = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 \tag{2.117}$$

alors que le coefficient de réflexion est :

$$R = \frac{J_r(x)}{J_i(x)} = \frac{2D_\alpha(k\hbar)^\alpha \left|B_1\right|^2}{2D_\alpha(k\hbar)^\alpha \left|A_1\right|^2} = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2 \tag{2.118}$$

Les constantes A_1, B_1 et A_3 sont déterminées à partir des conditions que $\Psi(x)$ et $(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x)$ sont continues en:

- $x = 0$

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \tag{2.119}$$

$$(ik)^{\alpha-1}A_1 + (-ik)^{\alpha-1}B_1 = (iK)^{\alpha-1}A_2 + (-iK)^{\alpha-1}B_2 \tag{2.120}$$

- $x = a$

$$A_3e^{ika} = A_2e^{iKa} + B_2e^{-iKa} \tag{2.121}$$

$$(ik)^{\alpha-1}e^{ika}A_3 = (iK)^{\alpha-1}e^{iKa}A_2 + (-iK)^{\alpha-1}e^{-iKa}B_2 \tag{2.122}$$

La combinaison de l'équation (2.119) et l'équation (2.120) donne :

$$B_2 = \frac{1}{1+(-1)^\alpha}\left[(1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1})A_1 + (1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1})B_1\right] \tag{2.123}$$

$$A_2 = \frac{1}{1+(-1)^\alpha}\left[(1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1})A_1 + (1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1})B_1\right] \tag{2.124}$$

La combinaison de l'équation (2.121) et l'équation (2.122) donne :

$$B_2 = \frac{A_3}{1+(-1)^\alpha}\left[(1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1})\right]e^{i(ka+Ka)} \tag{2.125}$$

$$A_2 = \frac{A_3}{1+(-1)^\alpha}\left[(1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1})\right]e^{i(ka-Ka)} \tag{2.126}$$

alors on a :

$$\frac{A_3}{1+(-1)^\alpha}\left[(1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1})\right]e^{i(ka-Ka)} = \frac{1}{1+(-1)^\alpha}\left[(1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1})A_1 + (1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1})B_1\right] \tag{2.127}$$

$$\frac{A_3}{1+(-1)^\alpha}\left[(1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1})\right]e^{i(ka+Ka)}=\frac{1}{1+(-1)^\alpha}\left[(1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1})A_1+(1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1})B_1\right] \tag{2.128}$$

A partir des équations (2.127) et (2.128), on trouve :

$$\frac{A_3}{A_1}e^{ika}=\frac{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2-\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2}{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2e^{iKa}-\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2e^{-iKa}} \tag{2.129}$$

$$\frac{B_1}{A_1}=\frac{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right](e^{-iKa}-e^{iKa})}{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2e^{iKa}-\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2e^{-iKa}} \tag{2.130}$$

Donc nous pouvons déduire que le coefficient de transmission est tel que :

$$T=\left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2=\frac{\left\{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2-\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2\right\}^2}{\left|\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2e^{iKa}-\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2e^{-iKa}\right|^2} \tag{2.131}$$

et le coefficient de réflexion s'écrit comme :

$$R=\left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2=\left|\frac{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right](e^{-iKa}-e^{iKa})}{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2e^{iKa}-\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2e^{-iKa}}\right|^2 \tag{2.132}$$

La simplification de l'expréssion (2.131) donne [13] :

$$\begin{aligned}T&=\frac{\left\{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2-\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2\right\}^2}{\left\{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2-\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2\right\}^2+4\left\{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2\right\}^2\sin^2(Ka)}\\&=\left\{1+\frac{4\left\{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2\right\}^2\sin^2(Ka)}{\left\{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2-\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2\right\}^2}\right\}^{-1}\end{aligned} \tag{2.133}$$

Et la simplification de l'expréssion (2.131) permet d'écrire le coefficient de réflexion comme suit [13] :

$$R=\frac{4\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2\sin^2(Ka)}{\left\{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2-\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2\right\}^2+4\left\{\left[1-(\frac{k}{K})^{\alpha-1}\right]^2\left[1-(\frac{k}{-K})^{\alpha-1}\right]^2\right\}^2\sin^2(Ka)} \tag{2.134}$$

On vérifie facilement que $R + T = 1$

Le cas $E < V_0$

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous n'avons pas à reprendre tous nos calculs pour résoudre ce nouveau cas. Nos solutions (2.106)et (2.111) restent valables pour les régions I et III alors que pour la région II nous n'avons qu'à remplacer iK par ρ. Donc le coefficient de transmission devient :

$$T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \left|\frac{\left[1-(\frac{ik}{\rho})^{\alpha-1}\right]^2 - \left[1-(\frac{ik}{-\rho})^{\alpha-1}\right]^2}{\left[1-(\frac{ik}{\rho})^{\alpha-1}\right]^2 e^{\rho a} - \left[1-(\frac{ik}{-\rho})^{\alpha-1}\right]^2 e^{-\rho a}}\right|^2 \tag{2.135}$$

et le coefficient de réflexion :

$$R = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2 = \left|\frac{\left[1-(\frac{ik}{\rho})^{\alpha-1}\right]\left[1-(\frac{ik}{-\rho})^{\alpha-1}\right]\left[e^{-\rho a} - e^{\rho a}\right]}{\left[1-(\frac{ik}{\rho})^{\alpha-1}\right]^2 e^{\rho a} - \left[1-(\frac{ik}{-\rho})^{\alpha-1}\right]^2 e^{-\rho a}}\right|^2 \tag{2.136}$$

Enfin on peut écrire le coefficient de transmission :

$$T = \frac{1}{\left\{\begin{array}{c}\left[1+\left\{(\frac{k}{\rho})^{\beta}\cos(\beta\pi) - 2\cos(\frac{\beta\pi}{2})\right\}(\frac{k}{\rho})^{\beta}\right]^2 + \\ \left[\left\{(\frac{k}{\rho})^{\beta}\sin(\beta\pi) - 2\sin(\frac{\beta\pi}{2})\right\}(\frac{k}{\rho})^{\beta}\right]^2\end{array}\right\}\frac{\sinh^2(\rho a)}{4(\frac{k}{\rho})^{2\beta}\sin^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left[1-(\frac{k}{\rho})^{\beta}\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\right]^2} + 1} \tag{2.137}$$

avec : $\beta = \alpha - 1$.

Et encore :

$$T^{-1} = 1 + \frac{\sinh^2(\rho a)\left\{D_1 + D_2\right\}}{4(\frac{k}{\rho})^{2\beta}\sin^2\frac{\beta\pi}{2}\left[1-(\frac{k}{\rho})^{\beta}\cos\frac{\beta\pi}{2}\right]^2} \tag{2.138}$$

Avec :

$$D_1 = \left[1+\left\{(\frac{k}{\rho})^{\beta}\cos\beta\pi - 2\cos(\frac{\beta\pi}{2})\right\}(\frac{k}{\rho})^{\beta}\right]^2 \tag{2.139}$$

$$D_2 = \left[\left\{(\frac{k}{\rho})^{\beta}\sin\beta\pi - 2\sin(\frac{\beta\pi}{2})\right\}(\frac{k}{\rho})^{\beta}\right]^2 \tag{2.140}$$

Alors :

$$\begin{aligned} T^{-1} &= 1 + \sinh^2(\rho a) + \\ &\frac{\sinh^2(\rho a)\left\{\left[(\frac{\rho}{k})^{\beta} - (\frac{k}{\rho})^{\beta} - 2\cos(\frac{\beta\pi}{2})(1-(\frac{k}{\rho})^{\beta}\cos\beta\pi/2)\right]^2\right\}}{4\sin^2\frac{\beta\pi}{2}\left[1-(\frac{k}{\rho})^{\beta}\cos\frac{\beta\pi}{2}\right]^2} \end{aligned} \tag{2.141}$$

Et le coefficient de réflexion :

$$R = \frac{\left|1 - 2\cos(\beta\pi)\,(\frac{k}{\rho})^{\beta} + (\frac{k}{\rho})^{2\beta}\right|^2 \sinh^2(\rho a)}{D_3 \sinh^2(\rho a) + D_4} \tag{2.142}$$

Avec :

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{c} \left[1 + \left\{(\frac{k}{\rho})^{\beta}\cos\beta\pi - 2\cos(\frac{\beta\pi}{2})\right\}(\frac{k}{\rho})^{\beta}\right]^2 + \\ \left[\left\{(\frac{k}{\rho})^{\beta}\sin\beta\pi - 2\sin(\frac{\beta\pi}{2})\right\}(\frac{k}{\rho})^{\beta}\right]^2 \end{array} \right\} \tag{2.143}$$

$$D_4 = \left[\left\{(\frac{k}{\rho})^{\beta}\sin\beta\pi - 2\sin(\frac{\beta\pi}{2})\right\}(\frac{k}{\rho})^{\beta}\right]^2 \tag{2.144}$$

2.8.4 Oscillateur quantique fractionnaire

N. Laskin [19] a proposé une nouvelle approche fractionnaire pour étudier les états liés de systèmes de quark-antiquark lourds $q\bar{q}$ (par exemple charmonium $c\bar{c}$ ou bottonium $b\bar{b}$) traités dans le potentiel d'image non-relativiste. Il a supposé que l'énergie potentielle de confinement de deux quarks localisés est donnée par :

$$V\left(|r_i - r_j|\right) = q_i q_j \left|r_i - r_j\right|^{\beta}, \quad \beta > 0 \tag{2.145}$$

où q_i et q_j sont les charges des quark i et j.

Notez qu'on utilise le terme *quarkonium* pour dénoter tous les états liés du système de quark-antiquark $q\bar{q}$.

Pour étudier le probème des quarkonium, on considère le modèle de la mécanique quantique fractionnaire non relativiste avec le hamiltonien fractionnaire [19] :

$$H_{\alpha,\beta} = D_{\alpha}\left(-\hbar^2\Delta\right)^{\alpha/2} + q^2\left|r\right|^{\beta} \quad 1 < \alpha \leq 2, 1 < \beta \leq 2 \tag{2.146}$$

où r est le vecteur d'espace, q est une constante avec la dimension physique $[q] = erg^{1/2}cm^{-\beta/2}$ et l'opérateur $\left(-\hbar^2\Delta\right)^{\alpha/2}$ est défini par l'équation (2.28).

Il est facile de voir que l'hamiltonien $H_{\alpha,\beta}$ est la généralisation fractionnaire de l'hamiltonien H de l'oscillateur harmonique standard :

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{2.147}$$

On appelle "l'oscillateur fractionnaire "le modèle de la mécanique quantique fractionnaire qui a l'hamiltonien donné par l'équation (2.146).

L'équation de Schrödinger indépendant de temps pour l'oscillateur quantique fractionnaire est :

$$D_\alpha \left(-h^2\Delta\right)^{\alpha/2} \Psi\left(r\right) + q^2 \left|r\right|^\beta \Psi\left(r\right) = E\Psi\left(r\right) \tag{2.148}$$

E : l'énergie totale de l'oscillateur.

Contrairement aux exemples traités précédemment, l'équation fractionnaire de Schrödinger que l'on doit résoudre est passablement plus difficile. Pour cela il serait intéressant de calculer les niveaux d'énergie d'un oscillateur fractionnaire en une dimension, qui peuvent être calculés si nous utilisons l'approximation semi-classique. Nous avons mis l'énergie totale égale à E, de sorte que :

$$E_\alpha = D_\alpha \left|p\right|^\alpha + q^2 \left|x\right|^\beta \tag{2.149}$$

où $\left|p\right| = \left(\frac{1}{D_\alpha}(E - q^2\left|x\right|^\beta)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Dans les points de retournement $p = 0$, le mouvement classique est possible dans l'intervalle $\left|x\right| \leq \left(E/q^2\right)^{1/\beta}$.

Une utilisation systématique de la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld [22] donne :

$$2\pi\hbar(n + \frac{1}{2}) = \oint p dx = 4\int_0^{x_m} p dx = D_\alpha^{-1/\alpha} 4\int_0^{x_m} (E - q^2\left|x\right|^\beta)^{\frac{1}{\alpha}} dx \tag{2.150}$$

où la notation $\oint$ désigne l'intégrale sur une période du mouvement classique, $x_m = (E/q^2)^{1/\beta}$ est le point tournant du mouvement classique.

Pour évaluer la dernière l'intégrale dans le partie droite de l'équation (2.150). nous introduisons une nouvelle variable $y = x(\frac{E}{q^2})^{-1/\beta}$, nous avons donc :

$$D_\alpha^{-1/\alpha}\int_0^{x_m} (E - q^2\left|x\right|^\beta)^{\frac{1}{\alpha}} dx = \frac{1}{D_\alpha^{1/\alpha} q^{2/\beta}} E^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}} \int_0^1 dy(1 - y^\beta)^{1/\alpha} \tag{2.151}$$

L'intégrale sur dy peut être exprimée en termes de la fonction B. Posons $z = y^\beta$:

$$\int_0^1 dy(1 - y^\beta)^{1/\alpha} = \frac{1}{\beta}\int_0^1 z^{\frac{1}{\beta}-1}(1 - z)^{\frac{1}{\alpha}} dz = \frac{1}{\beta} B(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + 1) \tag{2.152}$$

A l'aide des équations (2.151) et (2.152) nous réécrivons l'équation (2.150) comme :

$$2\pi\hbar(n+\frac{1}{2}) = \frac{4}{D_\alpha^{1/\alpha}q^{2/\beta}}E^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}\frac{1}{\beta}B(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha}+1) \tag{2.153}$$

L'équation ci-dessus donne les valeurs de l'énergie des états stationnaires pour l'oscillateur fractionnaire dans une dimension.

$$E_n = \left(\frac{\pi\hbar\beta D_\alpha^{1/\alpha}q^{2/\beta}}{2B(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha}+1)}\right)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \tag{2.154}$$

Cette nouvelle équation (2.154) généralise le spectre d'énergie bien connu de l'oscillateur quantique standard.

Ces calculs pour une seule dimension se généralisent très bien à 3 dimensions. Pour $D = 3$, les valeurs de l'énergie sont :

$$E_n = \left(\frac{\pi\hbar\beta D_\alpha^{1/\alpha}q^{2/\beta}}{2B(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha}+1)}\right)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}\left(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \tag{2.155}$$

2.8.5 Atome de Bohr fractionnaire

Le modèle de Bohr est un complément du modèle planétaire d'Ernest Rutherford qui décrit l'atome d'hydrogénoïde comme un noyau massif et chargé positivement Ze, autour duquel gravite un électron de masse m et chargé négativement. L'interaction entre ces deux particules est électrostatique, la force intervenant étant la force de Coulomb. Ceci nous permet donc d'écrire l'énergie potentielle de l'électron à une distance r du noyau comme :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{|r|} \tag{2.156}$$

où e est la charge de l'électron, Ze est la charge nucléaire de l'atome hydrogénoïds.

L'équation de Schrödinger indépendante du temps de l'atome hydrogénoïde s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(r) - \frac{Ze^2}{|r|}\Psi(r) = E\Psi(r) \tag{2.157}$$

On propose une généralisation de l'équation de Schrödinger de l'atome de Bohr et on considére l'équation de Schrödinger fractionnaire suivante :

$$D_\alpha \left(-\hbar^2\Delta\right)^{\alpha/2} \Psi(r) - \frac{Ze^2}{|r|}\Psi(r) = E\Psi(r) \tag{2.158}$$

L'hamiltonien fractionnaire du système quantique considéré a la forme :

$$H_\alpha = D_\alpha |p|^\alpha - \frac{Ze^2}{|r|} \tag{2.159}$$

et l'énergie totale est :

$$E = E_c + V \tag{2.160}$$

où $E_c = D_\alpha |p|^\alpha$ est l'énergie cinétique et V est l'énergie potentielle.

Il est bien connu que dans un système en équilibre dynamique, il existe une relation simple entre le moyenne temporelle de l'énergies cinétique E_c et l'énergie potentielle, connues sous le nom "théorème du viriel " [23].

A partir de ce théorème du viriel, la relation entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système avec l' hamiltonien (2.159) est :

$$\alpha \bar{E}_c = -\bar{V} \tag{2.161}$$

Maintenant, nous allons intéresser de trouver les valeurs propres de l'équation de Schrödinger fractionnaire pour les atomes hydrogénoïdes.

Pour évaluer le spectre d'énergie de l'atome hydrogénoïde fractionnaire, rappelons les postulats du N. Bohr :

1er postulat de Bohr :

Sans émission de rayonnement, les électrons ne peuvent graviter autour du noyau que sur certaines orbites permises. Celles-ci sont déterminées par la condition de quantification suivante :

$$Pa_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{2.162}$$

avec a_n est le rayon de l'orbite de l'électron autour du noyau.

2ème postulat de Bohr :

A chaque orbite permise correspond un niveau énergétique déterminé. Les transitions électroniques d'une orbite vers une autre se font par sauts (Quantensprünge) et sont accompagnées de l'émission ou de l'absorption d'un photon d'énergie :

$$\omega = \frac{E_f - E_i}{\hbar} \tag{2.163}$$

où E_i est l'énergie correspondante à l'orbite de départ, E_f est l'énergie correspondante à l'orbite d'arrivée et ω est la fréquence du rayonnement émis ou absorbé. En utilisant le premier postulat et l'équation (2.161), on obtient :

$$\alpha D_\alpha \left(\frac{n\hbar}{a_n}\right)^N = \frac{Ze^2}{a_n} \tag{2.164}$$

Donc :

$$a_n = a_0 n^{\alpha/(\alpha-1)} \tag{2.165}$$

où a_0 est le rayon de Bohr fractionnaire, avec

$$a_0 = \left(\frac{\alpha D_\alpha \hbar^\alpha}{Ze^2}\right)^{1/(\alpha-1)} \tag{2.166}$$

L'utilisation de l'équation (2.161) donne le moyenne de l'énergie totale :

$$\bar{E} = (1 - \alpha E_c) \tag{2.167}$$

Pour les niveaux d'énergie de l'atome hydrogénoïde fractionnaire on a :

$$E_n = (1 - \alpha)\, E_0 n^{-\alpha/(\alpha-1)} \tag{2.168}$$

où E_0 est l'énergie de liaison de l'électron dans la plus basse orbite de Bohr, qui est l'énergie nécessaire pour le mettre dans un état $E = 0$ correspond à ∞ :

$$E_0 = \left(\frac{\left(Ze^2\right)^\alpha}{\alpha^\alpha D_\alpha \hbar^\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \tag{2.169}$$

Selon le second postulat de Bohr, on trouve que la fréquence est donnée par :

$$\omega = \frac{1-\alpha}{\hbar}\left(\frac{\left(Ze^2\right)^\alpha}{\alpha^\alpha D_\alpha \hbar^\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\left[\frac{1}{n^{\alpha/(\alpha-1)}} - \frac{1}{m^{\alpha/(\alpha-1)}}\right]$$

.

2.9 Conclusion

La mécanique quantique fractionnaire est une généralisation de la mécanique quantique standard, dans ce chapitre on a présenté ses principes notamment l'équation de Schrodinger. On a défini aussi l'Hamiltonien et montré qu'il est un opérateur autoadjoint. Nous avons également développé quelques problèmes dans le cas de la présence de dérivée fractionnaire dans le Hamiltonien.

Bibliographie

[1] V. E. Tarasov and G. M. Zaslavsky, Fractional dynamics of coupled oscillators with long-range interaction, Chaos, 16 : 023110, 2006. (Cité pages 19 et 20.)

[2] N. Laskin and GM. Zaslavsky, Nonlinear fractional dynamics on a lattice with long range interactions, Physica A, 368 : 38-54, 2006. (Cité page 19.)

[3] V. E Tarasov and GM. Zaslavsky, Fractional dynamics of coupled oscillators with long-range interaction, CHAOS, 16 : 023110, 2006.

[4] GM. Zaslavsky Hamiltonian chaos and fractional dynamics. Oxford University Press, 2005.

[5] A. Carpinteri and F.Mainardi, Fractals and fractional calculus in continuum mechanics, Springer, New York, 1997. (Cité page 20.)

[6] V. E.Tarasov, Continuous medium model for fractal media, Physical Letters A,336 : 167-174, 2005. (Cité page 20.)

[7] B. A. Carreras and al, Anomalous diffusion and exit time distribution of particle tracers in plasma turbulence model, Physics of Plasmas, 8 : 5096, 2001. (Cité page 20.)

[8] V. E.Tarasov, Electromagnetic field of fractal distribution of charged particles. Physics of Plasmas,12 : 082106 ,2005. (Cité page 20.)

[9] F. Riewe, Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics, Physical Review E, 53 : 1890, 1996. (Cité page 20.)

[10] F. Riewe, Mechanics with fractional derivatives, PPhysical Review E, 55 : 3581, 1997. (Cité page 20.)

[11] V. E. Tarasov, Electromagnetic field of fractal distribution of charged particles, Physics of Plasmas, 12 : 082106, 2005. (Cité page 20.)

[12] N. Laskin, Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals, Physics Letters A, 268 : 298-305, 2000. (Cité pages 21 et 24.)

[13] X. Guo and M. Xu, Some physical applications of fractional Schrodinger equation, J. Math. Phys, 47 : 082104, 2006. (Cité pages 34, 36 et 43.)

[14] J. Dong and M. Xu, Some solutions to the space fractional Schrodinger equation using momentum representation method, J.Math.Phys, 48 : 072105, 2007.

[15] R. Herrmann, arXiv :math-ph/1210.4410v2[math-ph], 2012.

[16] R. Herrmann, arXiv :1308.4587v2 [physics.gen-ph], 2013.

[17] Naber M. Time fractional Schrodinger equation. J. Math. Phys, 45 : 3339, 2004.

[18] N. Laskin, Fractional quantum mechanics, PPhysical Review E, 62 : 3135,2000. (Cité pages 20 et 22.)

[19] N.Laskin Principles of Fractional Quantum Mechanics, arXiv :1009.5533v1 [math-ph], 2010. (Cité pages 20, 25, 28, 30, 32, 45 et 56.)

[20] B. MEFTAH, Equation de Schrodinger Fractionnaire, mémoire de master académique en mathématiques ,l'université de Ouargla, 2012. (Cité page 21.)

[21] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York, 1965. (Cité page 21.)

[22] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics : Non-Relativistic Theory, Pergamon, London, 1958. (Cité pages 23 et 46.)

[23] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Mechanics, Pergamon,London, 1960. (Cité page 48.)

[24] J.Hladik et Chrysos. Introduction a la mecanique quantique, Dunod, Paris, 2000. (Cité page 29.)

Chapitre 3

Mecanique Statistique Fractionnaire

3.1 Introduction

Plusieurs auteurs ont appliqué le concept du calcul fractionnaire en physique quantique et développé une nouvelle mécanique quantique fractionnaire. Ils ont montré aussi que l'hamiltonien de certains systèmes avec interactions à longue portée est écrit comme :

$$H_{\alpha,\nu} = D_\alpha \left|p\right|^\alpha + q^2 \left|x\right|^\nu \tag{3.1}$$

Récemment, Alisultanov [1] [2] a étudié les possibilités d'introduire ce concept en physique statistique quantique et il a discuté des propriétés thermodynamiques de certains systèmes avec un hamiltonien définit par l'équation (3.1). Plus précisément, il a dérivé l'équation d'état et la densité d'états pour un système avec un spectre de puissance fractionnaire décrivantes électrons et les phonons dans les solides. Cependant, l'utilisation du calcul fractionnaire dans la physique sta-

tistique n'a pas été suffisamment exploitée pour voir comment les problèmes fondamentaux de la physique statistique seront affectés.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés thermodynamiques de certains systèmes statistiques en utilisant le contexte de l'hamiltonien quantique fractionnaire à D dimensions.

3.2 Mecanique Statistique Classique Fractionnaire

3.2.1 Gaz parfait

Le gaz parfait est un modèle thermodynamique décrivant le comportement des gaz réels à basse pression, dans lequel les molécules sont supposées rigides et totalement indépendantes les unes des autres. Les seules interactions qu'elles peuvent subir lors de leur agitation sont les chocs élastiques entre elles ou avec les parois du récipient contenant le gaz.

Dans ce partie, on va étudier les proprieties thermodynamique d'un système de gaz parfait le cas fractionnaire à D dimensions où l'énergie total de ce système est :

$$E = D_\alpha \left|p\right|^\alpha \tag{3.2}$$

Pour résoudre le problème d'un gaz parfait, on utilise la fonction de partition Z_N.

Fonction de partition

La fonction de partition Z est une grandeur fondamentale qui englobe les propriétés statistiques d'un système à l'équilibre thermodynamique. C'est une fonction de la température et d'autres paramètres, tels que le volume contenant un gaz par exemple. La plupart des variables thermodynamiques du système, telles que l'énergie totale, l'entropie, l'énergie libre ou la pression peuvent être exprimées à l'aide de cette fonction et de ses dérivées [3].

Pour un système d'un gaz parfait constitué de N particules indiscernables, dans un volume V à la température T et dans le cas fractionnaire, la fonction de parti-

tion est égale au produit des fonctions de partition individuelles car les particules sont indépendantes (système sans interactions) [4] :

$$Z_N = \frac{1}{N!}\left(Z_1\right)^N \tag{3.3}$$

où Z_1 est La fonction de partition d'une particule libre dans ce gaz définie par :

$$Z_1 = \sum_n e^{-\beta E_n} \tag{3.4}$$

avec, $\beta = 1/K_B T$.

Il faut noter ici qu'il est intéressant de calculer la fonction de partition d'une particule libre Z_1 pour calculer les propriétés thermodynamique d'un gaz parfait dans le cas fractionnaire.

En utilisant l'équation (3.2) et l'équation (3.4), la fonction de partition Z_1 peut s'écrire comme [3] :

$$Z_1 = \sum_p e^{-\beta D_\alpha |p|^\alpha} \tag{3.5}$$

Sachant que nous traitons des systèmes dans un volume macroscopique, les niveaux d'énergie sont très serrés. On peut donc remplacer la sommation par une intégration sur l'espace des phases permis, en comptant un état par volume h^D de l'espace des phases. On a ainsi :

$$Z_1 = \int \frac{d^D p d^D x}{h^D} e^{-\beta D_\alpha |p|^\alpha} \tag{3.6}$$

L'intégrale sur x donne la volume V, et on utilise les coordonnées sphériques pour évaluer l'intégrale sur p, on trouve que Z_1 devient :

$$Z_1 = \frac{2\pi^{D/2} V}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) h^D} \int p^{D-1} e^{-\beta D_\alpha |p|^\alpha} dp \tag{3.7}$$

Il suffit ensuite de poser :

$$P = \beta D_\alpha \left|p\right|^\alpha \tag{3.8}$$

pour transformer Z_1 en une intégrale figurant dans le formulaire :

$$Z_1 = \frac{2\pi^{D/2} V}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) h^D} \int_0^\infty dP \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta D_\alpha}\right)^{\frac{D}{\alpha}} P^{\frac{D}{\alpha}-1} e^{-P} \tag{3.9}$$

Ce qui donne finalement

$$Z_1 = \frac{2\pi^{D/2}V}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)h^D\alpha\left(\beta D_\alpha\right)^{D/\alpha}}\Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right) \tag{3.10}$$

où $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ est la fonction gamma d'Euler.

Notez ici que Laskin [19] a calculé Z_1 que dans une seule dimension. Le dernier résultat (3.10) peut être transformé en $Z_1 = \frac{V}{\lambda^D}$, où

$$\lambda = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)h^D\alpha\left(\beta D_\alpha\right)^{D/\alpha}}{2\pi^{D/2}\Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right)}\right)^{1/D} \tag{3.11}$$

est la longueur d'onde thermique généralisée [5].

Lorsque on pose $\alpha = 2$ et $D = 3$, on trouve la longueur d'onde thermique standard $h/\sqrt{2\pi m K_B T}$. Finalement, on obtient la fonction de partition classique pour le gaz idéal dont l'hamiltonien fractionnaire :

$$Z_N = \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi^{D/2}V}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)h^D\alpha\left(\beta D_\alpha\right)^{D/\alpha}}\Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right)\right)^N \tag{3.12}$$

$$= \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^D}\right)^N \tag{3.13}$$

En utilisant la formule de Stirling $\log N! \simeq N\log N - N$, on en déduit l'énergie libre de Helmholtz :

$$F = -K_B T\log Z_N = -NK_B T(\log\frac{V}{\lambda_g^D N} + 1). \tag{3.14}$$

La connaissance de la fonction de partition Z_N et l'énergie libre F d'un gaz parfait permet de déterminer facilement les grandeurs physiques qui caractérisent ses propriétés macroscopiques.

Propriétés thermodynamiques

Energie interne et chaleur spécifique L'énergie interne d'un système thermodynamique est une fonction d'état extensive. Elle est égale à la valeur moyenne de l'énergie cinétique $\bar{E}_c$. Pour le système d'un gaz parfait fractionnaire maintenu à la température T peut être calculée par la formule suivante [4] :

$$U = \bar{E}_c = -\frac{\partial\log Z_N}{\partial\beta} \tag{3.15}$$

$$U = \frac{D}{\alpha}NKT \tag{3.16}$$

On en déduit aussitôt la chaleur spécifique à volume constant :

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \frac{D}{\alpha} NK \tag{3.17}$$

Entropie L'entropie est une fonction d'état extensive qui sert à mesurer le degré de désordre d'un système. L'entropie canonique S_c d'un gaz parfait se déduit de son énergie libre par la formule [6] :

$$S_c = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{3.18}$$

Cependant on a déjà calculé l'énergie moyenne $\bar{E}_c$, il est aussi simple d'utiliser la relation suivante [6] :

$$S_c = \frac{1}{T}\left(U - F\right) \tag{3.19}$$

Donc :

$$S_c = NK\left(\log \frac{V}{\lambda^D N} + \frac{D}{\alpha} + 1\right) \tag{3.20}$$

Equation d'état L'équation d'état d'un système de gaz parfait à l'équilibre thermodynamique est une relation entre différents paramètres physiques (température T, pression P , volume V) qui déterminent son état. A partir de l'équation d'état, il est possible de déterminer la totalité des quantités thermodynamiques. En dérivant par rapport au volume l'expression (3.14) de l'énergie libre, on obtient l'équation d'état du gaz parfait fractionnaire :

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{NKT}{V} \tag{3.21}$$

Ce résultat remarquable simple, valable pour tous les gaz parfaits quelque soit l'énergie de leur particules, constitue la célèbre équation d'état des gaz parfaits, que l'on écrit généralement sous la forme :

$$PV = nRT \tag{3.22}$$

R est la constante des gaz parfait , qui vaut :

$$R = N_A K \tag{3.23}$$

N_A le nombre d'Avogadro.

On remarque ici que l'équation d'état est indépendante des paramètres α alors que toutes les autres grandeurs thermodynamiques dépendent. Cette remarque vaut aussi lorsque nous utilisons le ensemble micro-canonique.

3.2.2 Système d'oscillateurs fractionnaires

Dans cette section, on va calculer les propriétés statistiques d'un système composé de N oscillateurs classiques indépendants à D dimensions décrits par le hamiltonien suivant :

$$H = \sum_{i=1}^{N} (D_\alpha \left|p_i\right|^\alpha + q^2 \left|x_i\right|^\nu) \tag{3.24}$$

où q est une constante de dimension physique $[q] = erg^{1/2}.cm^{-\nu/2}$, α et β sont des paramètres tel que ; $1 < \alpha \leq 2$, $1 < \nu \leq 2$.

En utilisant l'ensemble micro-canonique et l'ensemble canonique pour développer les propriétés thermodynamiques de ce système.

Ensemble micro-canonique

Pour une valeur de E, V et N fixes, le système considéré ne peut prendre que certains états internes. La connaissance de tous les paramètres internes du système (de son état) donne ce qu'on appelle un micro-état.

Le nombre Ω de micro-états accessibles au système, dont l'énergie est inférieure à E_0, est égale au volume de l'espace de phase auquel il peut avoir accès, divisé par le volume de la cellule élémentaire qui vaut est h^{DN} [4] :

$$\Omega = \frac{1}{h^{DN} N!} \int d\overrightarrow{p}_1 \int ... \int d\overrightarrow{p}_N \int_{H \leq E_0} d\overrightarrow{x}_1 \int ... \int d\overrightarrow{x}_N \tag{3.25}$$

Si on exprime $d\overrightarrow{p}$ et $d\overrightarrow{x}$ en coordonnées sphériques, c'est à dire $\int d^D p = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int p^{D-1} dp$ et $\int d^D r = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int r^{D-1} dr$, on peut écrire :

$$\Omega = \frac{1}{N!} \left(\frac{4\pi^D}{h^D \Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right)} \right)^N \int \cdots \int_{H \leq E_0} p_1^{D-1} dp_1 ... p_N^{D-1} dp_N \int \cdots \int x_1^{D-1} dx_1 ... x_N^{D-1} dx_N \tag{3.26}$$

le volume d'intégration correspond à la condition :

$$D_\alpha p_1^\alpha + q^2 x_1^\nu + ... + D_\alpha p_N^\alpha + q^2 x_N^\nu \leq E_0 \tag{3.27}$$

Or :

$$D_\alpha p_1^\alpha + q^2 x_1^\nu + ... + D_\alpha p_N^\alpha + q^2 x_N^\nu = E_0 \tag{3.28}$$

Posons : $\left(\frac{P^2}{D_\alpha}\right)^{1/\alpha} = p$ et $\left(\frac{X}{q^2}\right)^{2/\nu} = x$, la condition (3.28) devient :

$$P_1^2 + X_1^2 + P_2^2 + X_2^2 ... P_N^2 + X_N^2 = E \tag{3.29}$$

elle représente l'équation d'une sphère de rayon $\sqrt{E_0}$ dans l'espace.

Et l'équation (3.26) devient :

$$\Omega = A \int ... \int P_1^{\frac{6}{\alpha}-1} dP_1 ... P_N^{\frac{6}{\alpha}-1} dP_N \int_{P_1^2+X_1^2+P_2^2+X_2^2...P_N^2+X_N^2 \leq E_0} ... \int X_1^{\frac{6}{\beta}-1} dX_1 ... X_N^{\frac{6}{\beta}-1} dX_N \tag{3.30}$$

Avec :

$$A = \frac{1}{h^{3N} N!} \left(\frac{4\,(4\pi)^2}{\alpha D_\alpha^{\frac{3}{\alpha}} \beta q^{\frac{6}{\beta}}} \right)^N \tag{3.31}$$

allégeons l'écriture de Ω :

$$\Omega = \frac{1}{N!} \left(\frac{16\pi^D}{h^D \alpha\nu\,(D_\alpha)^{D/\alpha}\,(q^2)^{D/\nu}\,\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right)} \right)^N \omega_{N,\alpha,\nu} \tag{3.32}$$

où :

$$\omega_{N,\alpha,\nu} = \int ... \int P_1^{\frac{2D}{\alpha}-1} dP_1 ... P_N^{\frac{2D}{\alpha}-1} dP_N \int_{P_1^2+X_1^2+P_2^2+X_2^2...P_N^2+X_N^2 \leq E_0} ... \int X_1^{\frac{2D}{\nu}-1} dX_1 ... X_N^{\frac{2D}{\nu}-1} dX_N \tag{3.33}$$

Pour évaluer $\omega_{N,\alpha,\beta}$, on peut utiliser les coordonnées polaires en $2N$ dimensions, et on trouve :

$$\omega_N = K_{N,\alpha,\nu} R^{2DN(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\nu})} \tag{3.34}$$

Donc :

$$d\omega_{N,\alpha,\beta} = 2DN(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})K_{N,\alpha,\beta}R^{2DN(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})-1} \tag{3.35}$$

où $K_{N,\alpha,\nu}$ est un coefficient qui dépend de la dimension n de l'espace et des paramètres α et ν. Pour déterminer $K_{N,\alpha,\nu}$, on utilise cette intégrale multiple facile à calculer :

$$I = \int ... \int P_1^{\frac{2D}{\alpha}-1} dP_1 ... P_N^{\frac{2D}{\alpha}-1} dP_N \int ... \int X_1^{\frac{2D}{\nu}-1} dX_1 ... X_N^{\frac{2D}{\nu}-1} dX_N e^{\left(-\left(P_1^2+X_1^2+...+P_N^2+X_N^2\right)\right)} \tag{3.36}$$

$$I = \left[\int P_1^{\frac{2D}{\alpha}-1} e^{\left(-P_1^2\right)} dP_1\right]^N \left[\int X_1^{\frac{2D}{\nu}-1} e^{\left(-X_1^2\right)} dX_1\right]^N \tag{3.37}$$

Le changement de variables $u = P_1^2$ et $s = X_1^2$ donne :

$$I = \left[\frac{1}{2}\int u^{\frac{D}{\alpha}-1} e^{(-u)} du\right]^N \left[\frac{1}{2}\int s^{\frac{D}{\nu}-1} e^{(-s)} ds\right]^N \tag{3.38}$$

on obtient :

$$I = \left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right)\right]^N \left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\nu}\right)\right]^N \tag{3.39}$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma d'Euler.

d'autre part, on peut écrire :

$$I = \int ... \int P_1^{\frac{2D}{\alpha}-1} dP_1 ... P_N^{\frac{2D}{\alpha}-1} dP_N \int ... \int X_1^{\frac{2D}{\nu}-1} dX_1 ... X_N^{\frac{2D}{\nu}-1} dX_N e^{\left(-\left(P_1^2+X_1^2+...+P_N^2+X_N^2\right)\right)} \tag{3.40}$$

$$I = \int d\omega_{N,\alpha,\nu} e^{\left(-R^2\right)} = 2DN(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\nu})K_{N,\alpha,\nu} \int R^{2DN(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\nu})-1} e^{\left(-R^2\right)} dR \tag{3.41}$$

Effectuons le changement de variable :

$$t = R^2 \tag{3.42}$$

Il vient :

$$I = DN(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\nu})K_{N,\alpha,\nu} \int t^{N(\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu})-1} e^{\left(-t^2\right)} dt \tag{3.43}$$

$$= DN(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\nu})K_{N,\alpha,\nu}\Gamma\left(N(\frac{D}{\alpha} + \frac{D}{\nu})\right) \tag{3.44}$$

Il ne reste plus qu'à identifier (3.44) et (3.39) pour déterminer $K_{N,\alpha,\nu}$:

$$2DN(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\nu})K_{N,\alpha,\nu}\Gamma\left(N(\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu})\right)=\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right)\right]^N\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\nu}\right)\right]^N \tag{3.45}$$

Donc :

$$K_{N,\alpha,\nu}=\frac{\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right)\right]^N\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\nu}\right)\right]^N}{N(\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu})\Gamma\left(N\left(\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu}\right)\right)} \tag{3.46}$$

Enfin

$$\omega_{N,\alpha,\nu}=\frac{\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right)\right]^N\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\nu}\right)\right]^N}{N(\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu})\Gamma\left(N\left(\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu}\right)\right)}E_0^{DN(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\nu})} \tag{3.47}$$

et le nombre de micro-états est :

$$\Omega=\frac{1}{N!}\left(\frac{16\pi^D}{h^D\alpha\nu\left(D_\alpha\right)^{D/\alpha}\left(q^2\right)^{D/\nu}\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right)}\right)^N\frac{\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right)\right]^N\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\nu}\right)\right]^N}{N(\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu})\Gamma\left(N\left(\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu}\right)\right)}E_0^{DN(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\nu})} \tag{3.48}$$

Maintenant on peut déduire facilement les propriétés thermodynamiques :

Entropie Dans l'ensemble microcanonique, l'entropie statistique a été définie par Boltzmann par la relation [4] :

$$S=K_B\ln\Omega \tag{3.49}$$

Donc

$$S=K_B\left\{\ln\frac{1}{N!}\left(\frac{16\pi^D}{h^D\alpha\nu\left(D_\alpha\right)^{D/\alpha}\left(q^2\right)^{D/\nu}\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right)}\right)^N\frac{\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right)\right]^N\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{\nu}\right)\right]^N}{N(\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu})\Gamma\left(N\left(\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu}\right)\right)}E^{DN(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\nu})}\right\} \tag{3.50}$$

Energie et chaleur spécifique On peut calculer l'énergie interne d'un gaz d'oscillateurs fractionnaires avec la formule suivante :

$$\frac{1}{T}=\frac{\partial S}{\partial U}=K_B\frac{DN(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\nu})}{E} \tag{3.51}$$

donc :

$$E=D(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\nu})NK_BT \tag{3.52}$$

Et la chaleur spécifique de ce gaz est :

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = D(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\nu})NK_B \tag{3.53}$$

Ensemble canonique

La fonction de partition canonique de ce système classique est donnée par

$$Z_N = \frac{1}{N!}(Z_1)^N \tag{3.54}$$

où

$$Z_1 = \int \frac{d^D p d^D r}{h^D} e^{-\beta H_a(p,r)} \tag{3.55}$$

Alors

$$Z_1 = \int \frac{d^D p d^D r}{h^D} e^{-\beta(D_\alpha |p|^\alpha + q^2 |r|^\nu)} \tag{3.56}$$

Un simple calcul donne :

$$Z_1 = \frac{4\pi^D \Gamma(\frac{D}{\alpha})\Gamma(\frac{D}{\nu})}{\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right) h^D \alpha\nu(\beta D_\alpha)^{D/\alpha}(\beta q^2)^{D/\nu}} \tag{3.57}$$

Donc :

$$Z_N = \frac{1}{N!}[\frac{4\pi^D \Gamma(\frac{D}{\alpha})\Gamma(\frac{D}{\nu})}{\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right) h^D \alpha\nu(\beta D_\alpha)^{D/\alpha}(\beta q^2)^{D/\nu}}]^N. \tag{3.58}$$

Si on exprime l'énergie de Helmholtz (en utilisant la formule de Stirling)

$$F = -NKT\left[1 + \log\left(\frac{4\pi^D \Gamma(\frac{D}{\alpha})\Gamma(\frac{D}{\nu})}{N\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right) h^D \alpha\nu(\beta D_\alpha)^{D/\alpha}(\beta q^2)^{D/\nu}}\right)\right] \tag{3.59}$$

Energie et la chaleur spécifique L'énergie interne dans l'ensemble canonique est donnée par :

$$U = -\frac{\partial \log Z_N}{\partial \beta} = D(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\nu})NK_B T \tag{3.60}$$

et la chaleur spécifique à volume constant est :

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = D(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\nu})NK_B. \tag{3.61}$$

Il est clair que lorsque on met $\alpha = 2$ et $\nu = 2$ dans les trois dernières formules on retrouve les résultats bien connus dans le cas standard [4].

3.3 Mecanique Statistique Quantique

Le modèle standard classe les particules élémentaires en deux grandes familles : les fermions et les bosons. Les fermions ont un spin 1/2 entier et les bosons ont un spin entier. Nous allons maintenant nous concentrer sur l'étude d'un gaz quantique de bosons et fermions sans interaction (gaz parfait) dans le cas fractionnaire.

3.3.1 Gaz de bosons en D dimensions

Un gaz de Bose idéal est une version de la mécanique quantique d'un gaz idéal classique. Il est composé de bosons, qui ont une valeur entière du spin, et obéissent à la statistique de Bose-Einstein. La mécanique statistique des bosons a été développée par Satyendra Nath Bose pour les photons, et étendue aux particules massives par Albert Einstein.

Cas libre

On considère un système composé de N bosons de spin zéro sans interaction, enfermés dans un volume V en équilibre avec un thermostat à la température T. On suppose aussi que le système est décrit par l'opérateur suivant :

$$H_\alpha = D_\alpha \left(-\hbar^2 \sum_{i=1}^{D} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^{\alpha/2} \tag{3.62}$$

Les propriétés thermodynamique de ce système de bosons sont mieux calculées en utilisant la fonction de partition. La fonction de partition grand canonique pour un gaz de Bose est donnée par [4] :

$$D(z, V, T) = \prod_i \frac{1}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_i}} \tag{3.63}$$

où $\beta = 1/K_B T$, K_B étant la constante de Boltzmann et $z = e^{\beta\mu}$ est la fugacité du gaz. Nous constatons que la fugacité z est comprise entre zéro et 1 et μ le potentiel chimique.

Sachant que les particules sont non relativistes et dans la cas fractionnaire, leur énergie est :

$$\varepsilon = D_\alpha p^\alpha \tag{3.64}$$

Notons que, en utilisant l'équation (3.63) et l'équation (3.64), la fonction de partition grand canonique peut être écrite comme :

$$D(z, V, T) = \prod_p \frac{1}{1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} \tag{3.65}$$

En utilisant l'expression (3.65) on peut calculer les quantités thermodynamiques du système.

L'équation d'état L'équation d'état est donnée par :

$$\frac{PV}{KT} = \log(D(z, V, T)) = -\sum_{p=1}^{\infty} \log(1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}) - \log(1 - z) \tag{3.66}$$

$$N = z\frac{\partial}{\partial z} \log D(z, V, T) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}{1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} + \frac{z}{1 - z} \tag{3.67}$$

où P et N sont respectivement la pression et le nombre moyen de particules du système.

Pour un grand volume V, on peut remplacer la somme en (3.66) et (3.67) par une intégrale en les coordonnées sphériques à D dimensions :

$$\sum_p \to \frac{2\pi^{D/2} V}{(2\pi\hbar)^D \, \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int p^{D-1} dp \tag{3.68}$$

On peut écrire les équations (3.66) et (3.67) comme :

$$\frac{PV}{KT} = -\frac{2\pi^{D/2} V}{(2\pi\hbar)^D \, \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int p^{D-1} dp \log(1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}) - \log(1 - z) \tag{3.69}$$

$$N = \frac{2\pi^{D/2} V}{(2\pi\hbar)^D \, \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int p^{D-1} dp \frac{ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}{1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} + \frac{z}{1 - z} \tag{3.70}$$

Pour évaluer les intégrales dans les équations (3.66) et (3.67), on utilise la représentation en série :

$$\log(1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k e^{-k\beta D_\alpha p^\alpha} \tag{3.71}$$

$$\frac{1}{1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-k\beta D_\alpha p^\alpha} \tag{3.72}$$

Par conséquent, l'équation d'état prend la forme suivante :

$$\frac{P}{KT} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(2\pi\hbar)^D}\sum_k \frac{1}{k} z^k \int p^{D-1} dp e^{-k\beta D_\alpha p^\alpha} - \frac{1}{V}\log(1-z) \tag{3.73}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(2\pi\hbar)^D}\int p^{D-1} dp \frac{z e^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}{1 - z e^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} + \frac{1}{V}\frac{z}{1-z} \tag{3.74}$$

Evaluant ces intégrales, on obtient enfin deux équations couplées :

$$\frac{P}{KT} = \frac{2\pi^{D/2}\Gamma(\frac{D}{\alpha})}{\alpha\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(2\pi\hbar)^D(\beta D_\alpha)^{\frac{D}{\alpha}}} g_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(z) - \frac{1}{V}\log(1-z) \tag{3.75}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{2\pi^{D/2}\Gamma(\frac{D}{\alpha})}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(2\pi\hbar)^D \alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{D}{\alpha}}} g_{\frac{D}{\alpha}}(z) + \frac{1}{V}\frac{z}{1-z} \tag{3.76}$$

où $g_l(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^l}$ est la fonction de Bose.

L'équation d'état peut être obtenue en éliminant z à partir des deux équations couplées suivantes :

$$\frac{P}{KT} = \frac{1}{\lambda^D} g_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(z) - \frac{1}{V}\log(1-z) \tag{3.77}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^D} g_{\frac{D}{\alpha}}(z) + N_0 \tag{3.78}$$

où

$$\lambda = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(2\pi\hbar)^D \alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{D}{\alpha}}}{2\pi^{D/2}\Gamma(\frac{D}{\alpha})}\right)^{1/D} \tag{3.79}$$

est la longueur d'onde thermique généralisé et N_0 est le nombre de bosons dans l'état $\varepsilon = 0$.

Condensation de Bose Einstien On connait que l'on peut mettre un nombre quelconque de bosons dans un micro-état particulier. Lorsque la température du système est nulle, tous les bosons doivent se trouver dans l'état de plus basse énergie $\varepsilon = 0$. Cet état est exclu dans l'éxpréssion (3.76) et cette dernière n'est donc égale qu'au nombre de particules qui ne sont pas dans l'état $\varepsilon = 0$. Appelons N_e ce nombre. Nous avons :

$$N_e = \frac{2\pi^{D/2}\Gamma(\frac{D}{\alpha})V}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(2\pi\hbar)^D \alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{D}{\alpha}}} g_{\frac{D}{\alpha}}(z) \tag{3.80}$$

Le nombre de bosons dans l'état $\varepsilon = 0$ est, quant à lui, égal à :

$$N_0 = N - N_{\varepsilon>0} = \frac{z}{1-z} \tag{3.81}$$

d'où :

$$-\frac{\mu}{KT} = \log(1 + \frac{1}{N}) \approx \frac{1}{N}$$

puisque N est grand. On en conclut qu'à $T = 0$, $\mu = 0$. Lorsque T augmente tout en restant très basse, la majorité des bosons se trouve encore dans le micro-état d'énergie $\varepsilon = 0$ et le potentiel chimique est négatif mais très faible en valeur absolue. Par exemple, si $N \sim N_A = 6,02.10^{23}$ et si $N_0 = 10^{20}$, on voit que $\mu \sim 10^{-20} K_B T$, ce qui est extrêmement petit. On peut donc considérer que le potentiel chimique est pratiquement nul dans ces conditions. Dans ce cas, le nombre de bosons qui se trouvent dans les états excités est donné par :

$$N_e = \frac{2\pi^{D/2}\Gamma(\frac{D}{\alpha})V}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) h^D \alpha (\beta D_\alpha)^{\frac{D}{\alpha}}} g_{\frac{D}{\alpha}}(1) \tag{3.82}$$

On appelle température de Bose T_C la valeur de T pour laquelle $N_{\varepsilon>0} = N$, elle est donnée par :

$$N = \frac{2\pi^{D/2}\Gamma(\frac{D}{\alpha})V}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) h^D \alpha (\beta D_\alpha)^{\frac{D}{\alpha}}} g_{\frac{D}{\alpha}}(1) \tag{3.83}$$

soit :

$$T_C = \frac{D_\alpha}{k}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) h^D \alpha N}{2\pi^{D/2}\Gamma(\frac{D}{\alpha})V g_{\frac{D}{\alpha}}(1)}\right)^{\frac{\alpha}{D}} \tag{3.84}$$

En divisant l'équation (3.82) par l'équation (3.83) on obtient :

$$N_e = N\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{D}{\alpha}} \tag{3.85}$$

Si $T < T_B$, le nombre de bosons dans le micro-état $\varepsilon = 0$ est égal à :

$$N_0 = N\left(1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{D}{\alpha}}\right) \tag{3.86}$$

Pour $D = 3$, on a [7] :

$$\begin{cases} N_e = N\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{\alpha}} \\ N_0 = N\left(1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{\alpha}}\right) \end{cases} \tag{3.87}$$

Les fractions N_e/N et N_0/N sont indiqués par 1 et 2 sur la figure (3.1) pour $\alpha = 1, \alpha = 1.5$ et $\alpha = 2$:

Lorsque $T < T_C$, il est intéressant de calculer l'expression de quelques quantités thermodynamiques associées au gaz de Bose dans le cas fractionnaire à D dimensions.

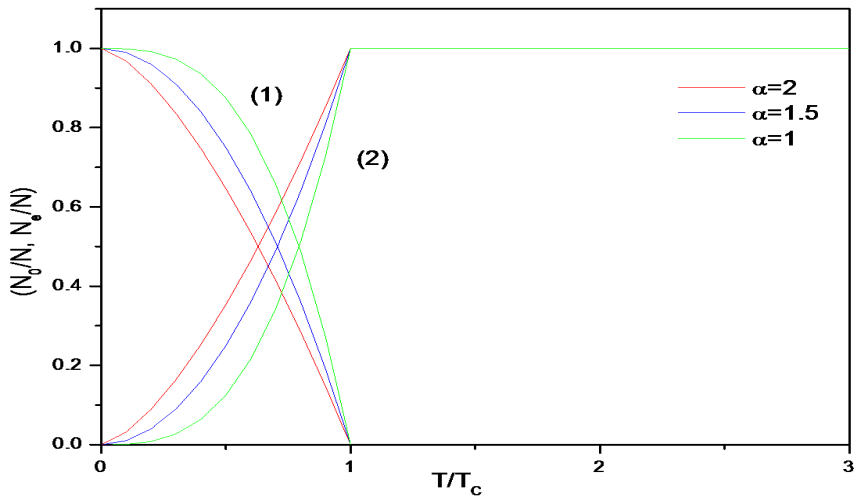

FIGURE 3.1 – *Fractions de la phase normale et condensée d'un gaz de Bose en fonction de T/T_C.*

Propriétés thermodynamiques En utilisant les expressions statistiques des quantités thermodynamiques, on peut facilement obtenir les quantités thermodynamiques du système d'après l'équation (3.65). Par example :

Energie et la chaleur spécifique L'énergie interne dans l'ensemble grand canonique d'un système de gaz de bosons est donnée par :

$$U = -\frac{\partial \log D(z,V,T)}{\partial \beta} \begin{cases} \frac{D}{\alpha} K_B T V g_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(z) \frac{1}{\lambda_g^D} & T > T_C \\ \frac{D}{\alpha} K_B T V g_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(1) \frac{1}{\lambda_g^D} & T \leq T_C \end{cases} \tag{3.88}$$

cette expression nous conduit à :

$$PV = \frac{\alpha}{D} U \tag{3.89}$$

La chaleur spécifique à volume constant est :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{3.90}$$

En utilisant les propriétés :

$$z \frac{\partial g_n(z)}{\partial z} = g_{n-1}(z) \tag{3.91}$$

et

$$\left.\frac{\partial z}{\partial T}\right|_{N,V} = -\frac{Dz}{\alpha T} \frac{g_{\frac{D}{\alpha}}(z)}{g_{\frac{D-\alpha}{\alpha}}(z)} \tag{3.92}$$

On trouve :

$$\frac{C_V}{NK_B} = \begin{cases} \frac{V(D\alpha+D^2)}{\alpha^2 N\lambda^D} g_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(z) - \frac{D^2 g_{\frac{D}{\alpha}}(z)}{\alpha^2 g_{\frac{D-\alpha}{\alpha}}(z)} & T > T_C \\ \frac{V(D\alpha+D^2)}{\alpha^2 N\lambda^D} g_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(1) & T \leq T_C \end{cases} \tag{3.93}$$

Lorsque on pose $D = 3$, on trouve [7] :

$$\frac{C_V}{NK_B} = \begin{cases} \frac{V(3\alpha+9)}{\alpha^2 N\lambda^D} g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z) - \frac{9 g_{\frac{3}{\alpha}}(z)}{\alpha^2 g_{\frac{3-\alpha}{\alpha}}(z)} & T > T_C \\ \frac{V(3\alpha+9)}{\alpha^2 N\lambda^D} g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(1) & T \leq T_C \end{cases} \tag{3.94}$$

La figure (3.2) montre la variation de la chaleur spécifique d'un gaz parfait de Bose en terme de T/T_C.

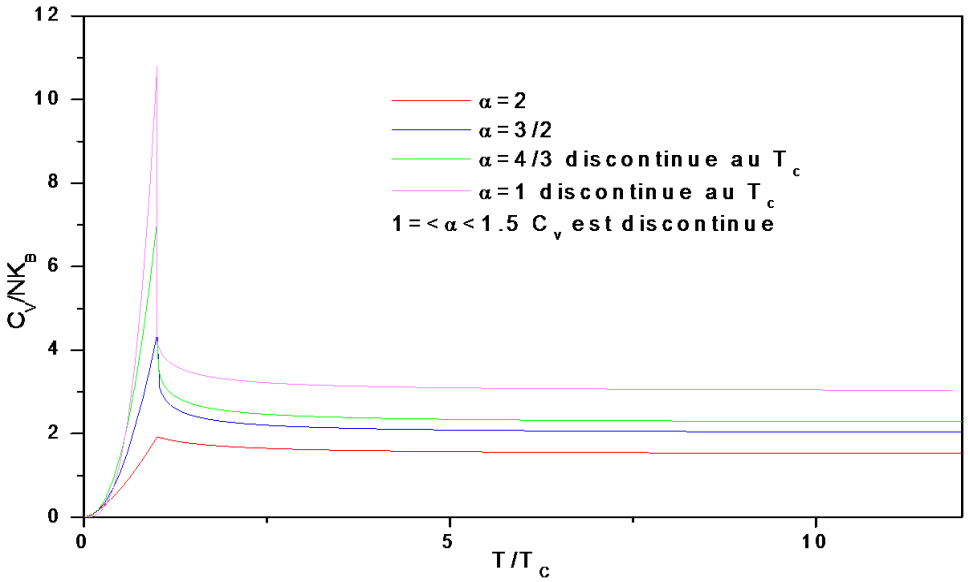

FIGURE 3.2 – *La chaleur spécifique d'un gaz de bosons en fonction de T/T_C.*

Entropie L'entropie S d'un gaz quantique de bosons est donnée par :

$$S = \frac{U-F}{T} = \begin{cases} \frac{D+\alpha}{\alpha} V K_B \frac{g_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(z)}{\lambda^D} - NK_B \log z & T > T_C \\ \frac{D+\alpha}{\alpha} V K_B \frac{g_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(1)}{\lambda^D} & T \leq T_C \end{cases} \tag{3.95}$$

cas piégé

En présence du potentiel fractionnaire $V(x) = q^2 |x|^\nu$, l'équation d'état est modifiée et le comportement thermique est différent de celui du gaz libre. Le spectre d'énergie du système devient :

$$\varepsilon = D_\alpha |p|^\alpha + q^2 |x|^\nu \tag{3.96}$$

En utilisant les méthodes de la section précédente, on calcule l'équation d'état comme

$$\begin{cases} \frac{PV}{KT} = -\sum \log(1 - ze^{-\beta\left(D_\alpha |p|^\alpha + q^2 |x|^\nu\right)}) - \log(1-z) \\ N = \sum \frac{ze^{-\beta\left(D_\alpha |p|^\alpha + q^2 |x|^\nu\right)}}{1 - ze^{-\beta\left(D_\alpha |p|^\alpha + q^2 |x|^\nu\right)}} + \frac{z}{1-z} \end{cases} \tag{3.97}$$

Pour un grand volume V, on peut remplacer la somme en (3.97) par une intégrale :

$$\begin{cases} \frac{PV}{KT} = \frac{4\pi^D}{\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right)h^D} \int p^{D-1} dp \int_0^\infty x^{D-1} dx \log(1 - ze^{-\beta\left(D_\alpha p^\alpha + q^2 x^\nu\right)}) - \log(1-z) \\ N = \frac{4\pi^D}{\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right)h^D} \int p^{D-1} dp \int_0^\infty x^{D-1} dx \frac{ze^{-\beta\left(D_\alpha p^\alpha + q^2 |x|^\nu\right)}}{1 - ze^{-\beta\left(D_\alpha p^\alpha + q^2 x^\nu\right)}} + \frac{z}{1-z} \end{cases} \tag{3.98}$$

L'évaluation de l'intégrale spatiale et l'intégrale de l'impulsion donne :

$$\begin{cases} \frac{PV}{KT} = \frac{4\pi^D \Gamma(\frac{D}{\alpha})\Gamma(\frac{D}{\nu})}{\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right)h^D \nu\alpha(\beta)^{\frac{D}{\nu}+\frac{D}{\alpha}} q^{\frac{2D}{\nu}} D_\alpha{}^{\frac{D}{\alpha}}} g_{\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu}+1}(z) - \log(1-z) \\ N = \frac{4\pi^D \Gamma(\frac{D}{\alpha})\Gamma(\frac{D}{\nu})}{\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right)h^D \nu\alpha(\beta)^{\frac{D}{\nu}+\frac{D}{\alpha}} q^{\frac{2D}{\nu}} D_\alpha{}^{\frac{D}{\alpha}}} g_{\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu}}(z) + \frac{z}{1-z} \end{cases} \tag{3.99}$$

Par analogie avec le gaz libre, le nombre maximal de particules dans les niveaux excités peut être obtenu à partir de la limite $z \downarrow 1$, de sorte qu'on obtient maintenant

$$N_{\varepsilon>0}^{\max} = \frac{4\pi^D \Gamma(\frac{D}{\alpha})\Gamma(\frac{D}{\nu})}{\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right) h^D \nu\alpha\,(\beta)^{\frac{D}{\nu}+\frac{D}{\alpha}}\, q^{\frac{2D}{\nu}} D_\alpha{}^{\frac{D}{\alpha}}} g_{\frac{D}{\alpha}+\frac{D}{\nu}}(1) \tag{3.100}$$

Par conséquent, la température de Bose est donnée par :

$$T_B = \frac{1}{K_B} \left(\frac{\nu\alpha\Gamma^2\left(\frac{D}{2}\right) h^D q^{\frac{2D}{\nu}} D_\alpha{}^{\frac{D}{\alpha}} N}{4\pi^D \Gamma(\frac{D}{\alpha})\Gamma(\frac{D}{\nu}) g_{\frac{D}{\sigma}}(1)} \right)^{\frac{\sigma}{D}} \tag{3.101}$$

et

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{D}{\sigma}} \tag{3.102}$$

où $\sigma = \frac{\alpha\nu}{(\alpha+\nu)}$.

Propriétés thermodynamiques Toutes les propriétés thermodynamiques peuvent être trouvées facilement, et nous les citons comme suit :

	$T > T_C$	$T \leq T_C$
N_0	0	$N\left(1-\left(\frac{T}{T_B}\right)^{\frac{D}{\sigma}}\right)$
N_e	N	$N\left(\frac{T}{T_B}\right)^{\frac{D}{\sigma}}$
U	$vNK_BT\frac{g_{\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}(z)}{g_{\left(\frac{D}{\sigma}\right)}(z)}$	$\frac{D}{\sigma}NKT_B\frac{g_{\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}(1)}{g_{\left(\frac{D}{\sigma}\right)}(1)}\left(\frac{T}{T_B}\right)^{\frac{D}{\sigma}+1}$
$\frac{C_V}{NK}$	$\frac{\frac{D}{\sigma}(\frac{D}{\sigma}+1)}{g_{(\frac{D}{\sigma})}(z)}g_{(\frac{D}{\sigma}+1)}(z)-\frac{(\frac{D}{\sigma})^2g_{(\frac{D}{\sigma})}(z)}{g_{(\frac{D}{\sigma}-1)}(z)}$	$\frac{D}{\sigma}(\frac{D}{\sigma}+1)\frac{g_{(\frac{D}{\sigma}+1)}(1)}{g_{(\frac{D}{\sigma})}(1)}(\frac{T}{T_B})^{\frac{D}{\sigma}}$
S	$NK_B\left((\frac{D}{\sigma}+1)\frac{g_{\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}(z)}{g_{(\frac{D}{\sigma})}(z)}-\log z\right)$	$NK_B\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)\frac{g_{\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}(1)}{g_{\left(\frac{D}{\sigma}\right)}(1)}\left(\frac{T}{T_B}\right)^{\frac{D}{\sigma}}$
F	$NK_BT\left(\log z-\frac{g_{\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}(z)}{g_{(\frac{D}{\sigma})}(z)}\right)$	$-NK_BT_B\frac{g_{\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}(1)}{g_{\left(\frac{D}{\sigma}\right)}(1)}\left(\frac{T}{T_B}\right)^{\frac{D}{\sigma}+1}$

Ces fonctions sont tracées à $3D$:

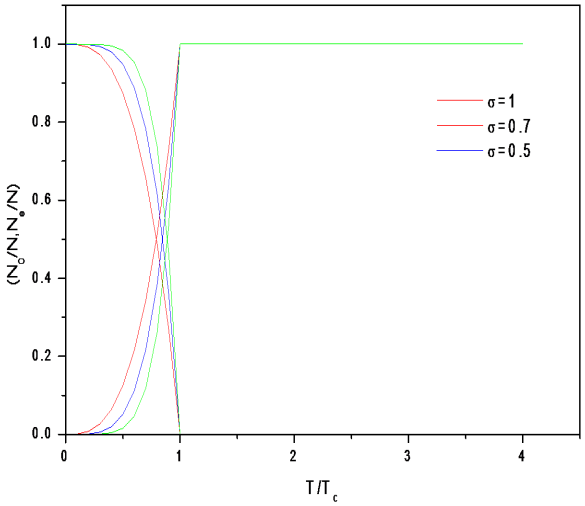

FIGURE 3.3 – *Fractions de la phase normale et condensée d'un gaz de Bose en fonction de T/T_C.*

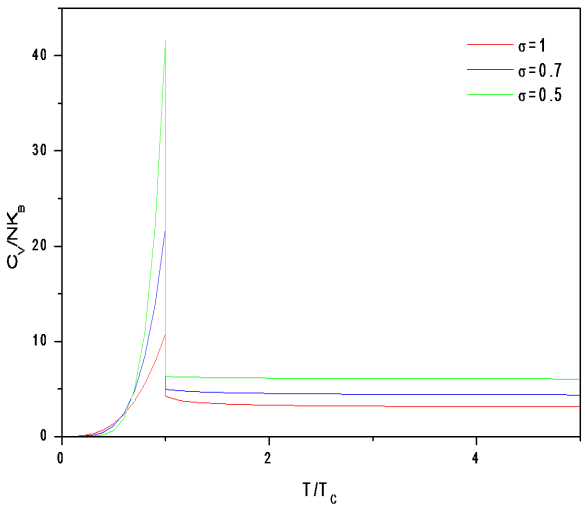

FIGURE 3.4 – *La chaleur spécifique d'un gaz de bosons en fonction de $T/T_C pour D = 3$.*

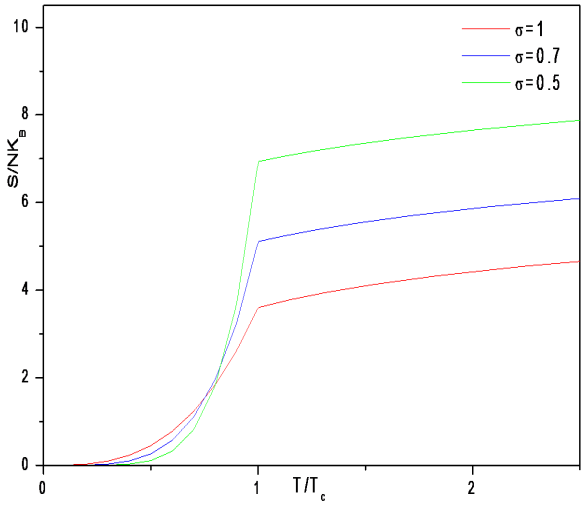

FIGURE 3.5 – *Entropie d'un gaz de bosons en fonction de* T/T_C *pour* $D = 3$.

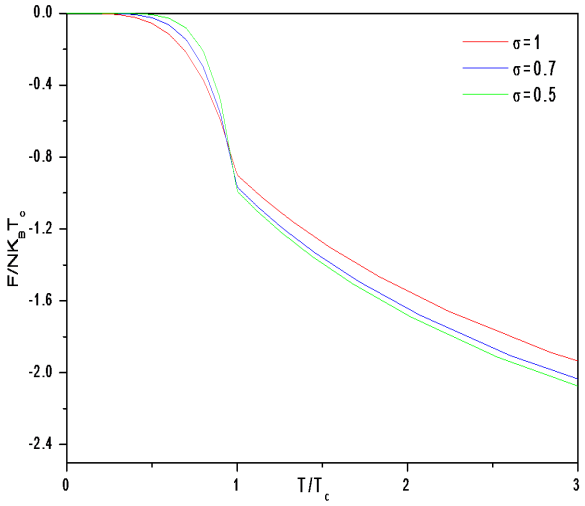

FIGURE 3.6 – *Energie libre d'un gaz de bosons en fonctionde* T/T_C *pour* $D = 3$.

Lorsque on pose $\alpha = 2$, on trouve les résultats obtenus par [8].

En introduisant les paramètre suivants (dimension virtuelle) :

$$D' = D + \frac{D\alpha}{\nu} \tag{3.103}$$

et

$$V^* = \left(\frac{D_\alpha h^\alpha}{q^2 \left(\frac{2\pi^{D/2}\Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right)}{\alpha\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \right)^{\frac{\alpha}{D}}} \right)^{D/\nu} \frac{2\pi^{D/2}\Gamma(\frac{D}{\nu}+1)}{D\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \tag{3.104}$$

l'équation (3.99) peut être exprimée comme :

$$\begin{cases} \frac{PV}{KT} = \frac{V^*}{\lambda_g^{D'}} g_{\left(\frac{D'}{\alpha}+1\right)}(z) - \log(1-z) \\ N = \frac{V^*}{\lambda_g^{D'}} g_{\left(\frac{D'}{\alpha}\right)}(z) + \frac{z}{1-z} \end{cases} \tag{3.105}$$

La comparison entre l'équation (3.105) et l'équation d'état du gaz parfait libre :

$$\begin{cases} \frac{PV}{KT} = \frac{V}{\lambda_g^D} g_{\left(\frac{D}{\alpha}+1\right)}(z) - \log(1-z) \\ N = \frac{V}{\lambda_g^D} g_{\left(\frac{D}{\alpha}\right)}(z) + \frac{z}{1-z} \end{cases} \tag{3.106}$$

montre que l'équation d'état des bosons piégés a une expression similaire à celle du gaz libre de Bose lorsque la dimension de l'espace est $D' = D + \frac{D\alpha}{\nu}$ et le volume est V^* . En ce sens, on peut dire que le système de Bose piégé est équivalent au système de Bose libre [9].

Le rayonnement du corps noir

Une des applications importantes du gaz de Bose concerne l'émission d'un rayonnement électromagnétique par un corps chauffé à la température T (rayonnement du corps noir). Ce rayonnement est constitué de photons qui sont des particules de spin 1, donc des bosons.

On va considérer une cavité portée à la température T. Celle-ci est peuplée de photons qui sont émis et absorbés par les parois. Dans le cas de la mécanique quantique fractionnaire, on suppose que l'énergie du photon est écrite comme :

$$E = D_\alpha (\hbar k)^\alpha \tag{3.107}$$

Lorsque $\alpha = 1$, $D_\alpha = c$ la vitesse de la lumière.

Comme le nombre de photons contenus dans la cavité maintenue à la température T est variable, il est tout indiqué d'utiliser l'ensemble grand canonique pour traiter ce problème. La fonction de partition grand canonique de gaz de photons est :

$$D(z, V, T) = \prod_{\varepsilon, k} \frac{1}{1 - ze^{-\beta E}} \tag{3.108}$$

où ε est la polarisation de photon.

À l'équilibre, l'énergie libre du système, dont le volume et la température sont fixés, doit être minimum. Comme le nombre de particules est la seule quantité qui peut varier, on a :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu = 0 \tag{3.109}$$

ce qui signifie que le potentiel chimique du gaz de photons est nul. Alors :

$$D(V,T) = \prod_k \frac{1}{1-e^{-\beta E}} \tag{3.110}$$

La théorie de la relativité entraîne que le photon ne peut avoir que deux états de polarisation transverse (la polarisation longitudinale est interdite pour un photon réel). Il faut toujours prendre la dégénérescence associée au spin des photons : $g = 2$. L'énergie intène de ce système est :

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log D(V,T) = 2\sum \frac{Ee^{-\beta E}}{(1-e^{-\beta E})} = 2\sum \frac{E}{(e^{\beta E}-1)} \tag{3.111}$$

La sommation de l'equation (3.111) peut s'effectuer analytiquement en passant à la limite continue et en remplaçant la somme sur les niveaux d'energie par une intégrale sur la vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$:

$$U = \frac{V(2)^{2-D}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(\pi)^{D/2}} \int k^{D-1} dk \frac{E}{(e^{\beta E}-1)} \tag{3.112}$$

On connait que l'énergie de photon est

$$E = \hbar\omega = D_\alpha(\hbar k)^\alpha \tag{3.113}$$

Alors, on peut transformer l'intégrale sur k par une intégrale sur ω, on obtient :

$$\frac{U}{V} = \int_0^{+\infty} d\omega u(\omega,T) \tag{3.114}$$

où

$$u(\omega,T) = \frac{(2)^{2-D}\hbar^{D\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)+1}}{\alpha\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(\pi)^{D/2}D_\alpha^{D/\alpha}} \frac{\omega^{\frac{D}{\alpha}}}{(e^{\beta\hbar\omega}-1)} \tag{3.115}$$

est la densité d'énergie de photons. Le cacul de l'intégrale (3.114) donne le loi de Stefan Boltzman dans le cas fractionnaire :

$$\frac{U}{V} = \frac{(2)^{2-D}\hbar^{-D}(K_BT)^{\frac{\alpha+D}{\alpha}}}{\alpha\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)(\pi)^{D/2}D_\alpha^{D/\alpha}} \Gamma\left(\frac{D}{\alpha}+1\right)\zeta\left(\frac{D}{\alpha}+1\right) \tag{3.116}$$

lorsque $\alpha = 1$, $D_\alpha = c$ et $D = 3$, on trouve :

$$\frac{U}{V} = \frac{(K_BT)^4}{\hbar^3c^3\pi^2}\frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2}{15}\frac{(K_BT)^4}{\hbar^3c^3} \tag{3.117}$$

3.3.2 Gaz de fermions

Les Fermions sont des particules qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac et ils ont un spin demi-entier (c'est-à-dire 1/2, 3/2, 5/2, ...) comme l'électron, le muon...

On va maintenant étudier des systèmes d'un gaz parfait de N fermions, dans un volume V , à la température T . On suppose que le spectre de l'énergie de la particule du système est définie comme :

$$E = D_\alpha \left|p\right|^\alpha \tag{3.118}$$

Tout comme le gaz de bose, le gaz de Fermi peut être traité en utilisant l'ensemble grand canonique. La fonction de partition grand canonique s'écrit par conséquent [4] :

$$D(z, V, T) = \prod_i \left(1 + e^{-\beta(\mu - \varepsilon_i)}\right) \tag{3.119}$$

ce qui conduit à

$$\log D(z, V, T) = \sum_p \log\left(1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}\right) \tag{3.120}$$

Donc l'équation d'état est :

$$\begin{cases} \frac{PV}{KT} = \sum_p \log\left(1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}\right) \\ N = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}{1+ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} \end{cases} \tag{3.121}$$

En utilisant la même méthode utilisée dans le paragraphe précédent, on calcule l'équation d'état comme :

$$\begin{cases} \frac{PV}{KT} = \frac{2\pi^{D/2}\Gamma(\frac{D}{\alpha})}{\alpha\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)h^D(\beta D_\alpha)^{\frac{D}{\alpha}}} f_{\frac{D}{\alpha}+1}(z) \\ N = \frac{2\pi^{D/2}\Gamma(\frac{D}{\alpha})}{\alpha\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)h^D(\beta D_\alpha)^{\frac{D}{\alpha}}} f_{\frac{D}{\alpha}}(z) \end{cases} \tag{3.122}$$

avec $f_l\left(z\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-1\right)^{k+1} \frac{1}{k^l} z^k$

L'énergie interne du système est donnée par :

$$U = -\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\log(D)\right)_{z,V} = \frac{D}{\alpha} KTV f_{\frac{D}{\alpha}+1}(z) \frac{1}{\lambda^D} \tag{3.123}$$

la chaleur spécifique du gaz est :

$$C_V = \left(\frac{\partial}{\partial T}U\right)_{N,V} = \frac{D}{\alpha} KV f_{\frac{D}{\alpha}+1}(z) \frac{1}{\lambda^D} + \frac{D^2}{\alpha^2} KV g_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(z) \left(\frac{4\pi\Gamma(\frac{D}{\alpha})}{(\beta D_\alpha)^{\frac{D}{\alpha}} \alpha h^D}\right)$$

L'énergie Helmoltz et l'entropie sont :

$$F = N\mu - PV = NK_BT(\log z - \frac{f_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(z)}{f_{\frac{D}{\alpha}}(z)}) \tag{3.124}$$

$$S = \frac{E-F}{T} = \frac{D+\alpha}{\alpha} NK_B \frac{f_{\frac{\alpha+D}{\alpha}}(z)}{f_{\frac{D}{\alpha}}(z)} - NK_B \log z \tag{3.125}$$

En présence de potentiel extérieur $V(x) = q^2 |x|^\nu$, les propriéties thermodynamiques du gaz parfait de fermions devient :

grandeur physique	éxperssion
Equation d'état	$\begin{cases} \frac{PV}{KT} = \frac{4\pi^D \Gamma(\frac{D}{\alpha})\Gamma(\frac{D}{\nu})}{\Gamma^2(\frac{D}{2}) h^D \nu\alpha(\beta)^{\frac{D}{\sigma}} q^{\frac{2D}{\nu}} D_\alpha{}^{\frac{D}{\alpha}}} f_{(\frac{D}{\sigma}+1)}(z) \\ N = \frac{4\pi^D \Gamma(\frac{D}{\alpha})\Gamma(\frac{D}{\nu})}{\Gamma^2(\frac{D}{2}) h^D \nu\alpha(\beta)^{\frac{D}{\sigma}} q^{\frac{2D}{\nu}} D_\alpha{}^{\frac{D}{\alpha}}} f_{(\frac{D}{\sigma})}(z) \end{cases}$
Enérgie intèrne	$\frac{D}{\sigma} NK_BT \frac{f_{(\frac{D}{\sigma}+1)}(z)}{f_{(\frac{D}{\sigma})}(z)}$
Chaleurs spécifique	$\frac{D}{\sigma} NK_B \left(\frac{D}{\sigma}+1\right) \frac{f_{\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}(z)}{f_{\left(\frac{D}{\sigma}\right)}(z)} - NK_B \left(\frac{D}{\sigma}\right)^2 \frac{f_{\left(\frac{D}{\sigma}\right)}(z)}{f_{\left(\frac{D}{\sigma}-1\right)}(z)}$
Entropie	$NK_B \left(\left(\frac{D}{\sigma}+1\right) \frac{f_{\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}(z)}{f_{\left(\frac{D}{\sigma}\right)}(z)} - \log z \right)$
Energie libre	$NK_BT \left(\log z - \frac{f_{\left(\frac{D}{\sigma}+1\right)}(z)}{f_{\left(\frac{D}{\sigma}\right)}(z)} \right)$

La même remarque à propos de l'équivalence du gaz de Fermi piégé avec le gaz de Fermi libre est également valable ici.

3.3.3 Oscillateurs quantiques fractionnaires

On a vu qu'en mécanique quantique fractionnaire, le spectre d'un oscillateur fractionnaire en D dimensions peut être indexé par le nombre quantique n représentant le nombre de niveaux d'excitation de l'oscillateur (n est un entier positif ou nul). Les énergies accessibles sont données par l'équation :

$$E_{n_1,\ldots,n_D} = a^\sigma (n_1 + n_2.. + n_D + d)^\sigma \tag{3.126}$$

où $n_i = 0, 1, 2, \ldots$ et :

$$a = \frac{\pi\hbar\nu D_\alpha^{1/\alpha} q^{2/\nu}}{2B(\frac{1}{\nu}, 1+\frac{1}{\alpha})}, \qquad \sigma = \frac{\alpha\nu}{\alpha+\nu}, \qquad d = \frac{D}{2} \tag{3.127}$$

où $B(x, y)$ est la fonction bêta.

Si on décrit le système en utilisant l'ensemble canonique, les propriétés thermodynamiques peuvent être étudiées à partir de la fonction de partition canonique :

$$Z_N = \frac{Z_1^N}{N!} \tag{3.128}$$

où Z_1 est la fonction de partition canonique individuelle donnée par :

$$Z_1 = \sum_{n_1,\ldots,n_D=0}^{\infty} e^{-\beta E_{n_1,\ldots,n_D}} \tag{3.129}$$

$$= \sum_{n_1,\ldots,n_D=0}^{\infty} e^{-\beta a^\sigma (n_1+..+n_D+d)^\sigma} \tag{3.130}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+D-1)!}{n!\,(D-1)!} e^{-\beta a^\sigma (n+d)^\sigma} \tag{3.131}$$

La dernière relation est due à la dégénérescence de l'énergie de l'oscillateur quantique à D dimensions. En introduisant la représentation de $\delta($ δ est la distribution de Dirac), l'équation (3.131) peut s'écrire comme :

$$Z_1 = \frac{1}{(D-1)!} \sum_{n=0} \frac{(n+D-1)!}{n!} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k)\delta(k-(n+d)^\sigma) \tag{3.132}$$

ou

$$Z_1 = \frac{1}{(D-1)!} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) \frac{\Gamma\left(k^{1/\sigma}-d+D\right)}{\Gamma(k^{1/\sigma}-d+1)} \theta\left(k^{1/\sigma}-d\right)$$

où la fonction de Heaviside $\theta\,(x)$ résulte de la sommation sur la distribution delta. En évaluant la fonction de Heaviside, on trouve

$$Z_1 = \frac{1}{(D-1)!} \sum_{k=d^\sigma}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) \frac{\Gamma\left(k^{1/\sigma}-d+D\right)}{\Gamma(k^{1/\sigma}-d+1)} \tag{3.133}$$

$$= \frac{1}{(D-1)!} \sum_{k=d^\sigma}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) \left(k^{1/\sigma}+d-1\right) \ldots \left(k^{1/\sigma}-(d-1)\right) \tag{3.134}$$

$$= \frac{1}{(D-1)!} \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} \sum_{k=d^\sigma}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) \left(k^{1/\sigma}+(d-1)\right)^m \tag{3.135}$$

tel que $S_{D-1}^{(m)}$ sont les coefficients de Stirling [10]. Pour évaluer la somme dans (3.114), on utilise le développement du binome de Newton :

$$\left(k^{1/\sigma}+(d-1)\right)^m = (d-1)^m \sum_{p=0}^{m} \frac{C_p^m}{(d-1)^p} \left(k^{1/\sigma}\right)^p \tag{3.136}$$

avec C_p^m sont les coefficients du binôme. Par conséquent, la fonction de partition individuelle prend la forme suivante :

$$Z_1 = \frac{1}{(D-1)!} \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} (d-1)^m \sum_{p=0}^{m} \frac{C_p^m}{(d-1)^p} \sum_{k=d^\sigma}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) k^{\frac{p}{\sigma}} \tag{3.137}$$

Notons ici, qu'on retrouve le résultat standard pour la fonction de partition de l'oscillateur à une dimension en mettant $D = 1$, ($S_0^{(0)} = 1$, $C_0^0 = 1$), et $\sigma = 1$. En utilisant les abréviations $B = \frac{p}{\sigma}$ et $b = \beta a^\sigma$, la dernière somme en (3.137) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=d^\sigma}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) k^{\frac{p}{\sigma}} = \frac{\partial^B}{\partial\,(-b)^B} \sum_{k=d^\sigma}^{k=\infty} \exp(-bk) = \left(\frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial\,(-b)^{\frac{1}{\sigma}}} \right)^p \frac{\exp\,(-bd^\sigma)}{1-\exp\,(-b)} \tag{3.138}$$

et la fonction de partition devient :

$$Z_1 = \frac{1}{(D-1)!} \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} (d-1)^m \sum_{p=0}^{m} \frac{C_p^m}{(d-1)^p} (\frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial(-b)^{\frac{1}{\sigma}}})^p \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1-\exp(-b)} \tag{3.139}$$

$$= \frac{1}{(D-1)!} [\sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} \widehat{Y}^m] \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1-\exp(-b)} \tag{3.140}$$

$$= \frac{1}{(D-1)!} \widehat{Y}(\widehat{Y}-1)(\widehat{Y}-2)....(\widehat{Y}-D+2) \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1-\exp(-b)} \tag{3.141}$$

où $\widehat{Y}$ est l'opérateur donné par :

$$\widehat{Y} = d - 1 + \frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial\,(-b)^{\frac{1}{\sigma}}} = \frac{D}{2} - 1 + \frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial\,(-b)^{\frac{1}{\sigma}}} \tag{3.142}$$

L'équivalence entre (3.140) et (3.141) est dûe au développement Stirling guidé par les coefficients $S_{D-1}^{(m)}$ qui satisfont à la formule de récurrence :

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(m)} &= S_n^{(m-1)} - nS_n^{(m)}, \qquad S_n^{(0)} = \delta_{n,0}, \qquad S_n^{(n)} = 1, \qquad n = 0, 1, ... \\ S_1^{(1)} &= 1, \qquad S_2^{(1)} = -S_1^{(1)} = -1, \qquad etc.... \end{aligned} \tag{3.143}$$

Le dévloppement de (3.140) et (3.141) permet de tirer : - Pour $D = 2$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{(D-1)!} \left[\sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} \widehat{Y}^m \right] \frac{\exp\,(-bd^\sigma)}{1-\exp\,(-b)} \\ &= \left[S_1^{(0)} + S_1^{(1)} \widehat{Y} \right] \frac{\exp\,(-bd^\sigma)}{1-\exp\,(-b)} = \widehat{Y} \frac{\exp\,(-bd^\sigma)}{1-\exp\,(-b)} \\ \widehat{Y} &= \frac{\partial^s}{\partial\,(-b)^s}, \quad s = \sigma^{-1} \end{aligned} \tag{3.144}$$

- Pour $D = 3$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \tfrac{1}{2} \left[S_2^{(0)} + S_2^{(1)} \widehat{Y} + S_2^{(2)} \widehat{Y}^2 \right] \tfrac{\exp(-bd^\sigma)}{1-\exp(-b)} \\ Z_1 &= \tfrac{1}{2!} \widehat{Y}(\widehat{Y}-1) \tfrac{\exp(-bd^\sigma)}{1-\exp(-b)} \qquad , \widehat{Y} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\partial^s}{\partial(-b)^s} \end{aligned} \tag{3.145}$$

- Pour $D = 4$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{3!}\left[S_3^{(0)} + S_3^{(1)}\widehat{Y} + S_3^{(2)}\widehat{Y}^2 + S_3^{(3)}\widehat{Y}^3\right]\frac{\exp\left(-bd^{\sigma}\right)}{1-\exp\left(-b\right)} \\ Z_1 &= \frac{1}{3!}\widehat{Y}(\widehat{Y}-1)(\widehat{Y}-2)\frac{\exp\left(-bd^{\sigma}\right)}{1-\exp\left(-b\right)} \qquad , \widehat{Y} = 1 + \frac{\partial^s}{\partial\left(-b\right)^s} \end{aligned} \tag{3.146}$$

et ainsi de suite. Il importe-à-dire quelque chose sur la dérivée fractionnaire apparaissant dans ces formules. Pour faire ce genre de dérivée, nous nous référons à la formule [11]

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s}\exp(\lambda x) \equiv D^s \exp(\lambda x) = x^{-s}E_{1,1-s}(\lambda x) \tag{3.147}$$

où $E_{1,1-s}(\lambda x)$ est la fonction de Mittag-Leffler. Enfin, nous pouvons écrire la fonction de partition (3.141) comme :

$$Z_1 = \frac{(\widehat{Y}-D+2)_{D-1}}{(D-1)!}\frac{\exp\left(-bd^{\sigma}\right)}{1-\exp\left(-b\right)} \tag{3.148}$$

A ce stade, on peut vérifier que, pour $D = 2$, $d = 1$ et $\sigma = 1$, $\widehat{Y} = -\frac{\partial}{\partial b}$, nous mettons le cas standard pour les oscillateurs harmoniques en deux dimensions :

$$Z_1 = -\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\exp\left(-b\right)}{1-\exp\left(-b\right)}\right) \tag{3.149}$$

$$= \frac{1}{\left[\exp\left(b/2\right)-\exp\left(-b/2\right)\right]}\frac{1}{\left[\exp\left(b/2\right)-\exp\left(-b/2\right)\right]} \tag{3.150}$$

A dimension supérieure ($D > 4$), on suit la même procédure détaillée dans les formules (3.144-3.146).

La connaissance de la fonction de partition permet de déterminer toutes les quantités thermodynamiques. Formellement, l'énergie de Helmholtz, les énergies internes et l'entropie sont consécutivement données par :

$$F = -K_B T \log Z_N; \qquad U = -\frac{\partial \log Z_N}{\partial \beta}; \qquad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{3.151}$$

Bibliographie

[1] Z. Z. Alisultanov and R. P. Meilanov, Some features of quantum statistical systems with an energy spectrum of the fractional-power type, Theor. Math. Phys, 171 : 404-416, 2012. (Cité page 53.)

[2] Z. Z. Alisultanov and R. P. Meilanov, Some problems of the theory of quantum statistical systems with an energy spectrum of the fractional power type, Theor. Math. Phys, 173 : 135-148, 2012. (Cité page 53.)

[3] C. Ngô et H. Ngô, Physique statistique : Introduction, Cours et exercices corrigés, DUNOD, Paris, 2001. (Cité pages 54 et 55.)

[4] K. Huang, Statistical Mechanics, John Wiley and Sons, 1963. (Cité pages 55, 56, 58, 61, 62, 63 et 74.)

[5] Z. Yan, General thermal wavelength and its applications, Eur. J. Phys, 21 : 625-631, 2000. (Cité page 56.)

[6] R. K. Pathria and P. D. Beale, Statistical Mechanics, Elsevier, 2011. (Cité page 57.)

[7] Z. Korichi and M.T. Meftah, Statistical mechanics based on fractional classical and quantum mechanics, J. Math. Phys, 55 : 4868702, 2014. (Cité pages 66 et 68.)

[8] S. Luca, Ideal quantum gases in D-dimensional space and power-law potentials, J. Math. Phys, 41 : 8016-8024, 2000. (Cité page 71.)

[9] G. Su, Y. Cai and J. Chen, A new approach to treat the problems of trapped ideal gases, J. Phys. A : Math. Theor, 42 : 125003, 2009. (Cité page 72.)

[10] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1970. (Cité page 76.)

[11] I. Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press, New York, 1999. (Cité page 78.)

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons appliqué le calcul fractionnaire dans la mécanique statistique quantique. Nous avons principalement étudié certains problèmes de la mécanique statistique basée sur la mécanique quantique fractionnaire à D dimensions.

Notre attention a été mise pour montrer comment les propriétés thermodynamiques de certains systèmes statistiques, décrivant par un hamiltonien fractionnaire, sont affectés. Un autre intérêt et question fondamentale est de récupérer les résultats de la mécanique statistique standard lorsque les exposants fractionnaires deviennent entiers.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté des notions de base qui nous semblent utiles pour la compréhension de notre travail relatives au calcul fractionnaire, nous avons présenté les différentes fonctions qui sont très utilisées et qui permettent en général de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire. C'est ainsi que nous avons donné les définitions les plus utilisées de l'opérateur fractionnaire et ses propriétés.

Le deuxième chapitre était réservé aux applications de la dérivation fractionnaire dans le mécanique quantique, pour cela les principes de la mécanique quantique fractionnaire sont tout d'abord cités. Par la suite nous avons défini l'hamiltonien fractionnaire et approfondi l'étude de l'équation de schrodinger fractionnaire et ses applications.

Dans le chapitre trois, nous avons pu développer quelques problèmes de la physique statistique fractionnaire et nous avons divisé le chapitre en deux parties :

Dans la première partie nous avons étudié quelques systèmes classiques fractionnaires et nous avons calculé :

1. Les propriétés thermodynamiques du système de gaz parfait classique fractionnaire en utilisant l'ensemble canonique et nous avons trouvé que toutes les quantities sont liées au de paramètre α sauf l'équation d'état de système.
2. Les propriétés thermodynamiques d'un système de gaz parfait classique d'oscilateurs fractionnaires en utilisant l'ensemble microcanonique et l'ensemble canonique.

Dans la deuxième partie nous avons traité le problème du gaz quantique libre et piegé dans le cas de la présence de dérivée fractionnaire dans l'hamiltonien et nous avons :

- calculé les fonctions de partitions grand canoniques des gaz de bosons et de fermions libres et piegés et nous avons déduit leurs proprietés thermodynamiques.
- vu que le gaz quantique de bosons libre et piégé présente une transition de phase de second ordre à une température T_C qui dépend des paramètres fractionnaires α et ν et nous trouvé que la température critique est indépendante de la dimension de boite.
- montré que les gaz quantiques piégés sont équivalent au système de gaz quantique libre.
- calculé la constante de Stephane Boltzmen dans le cas fractionnaire.
- calculé la fonction de partition canonique d'un gaz quantique d'oscilateurs fractionnaire.

Comme un test qui garantit la validité de nos calculs, nous avons comparé nos résultats avec les résultats standard où $\alpha = v = 2$.

PUBLICATIONS