Le nombre de domination par contraction

[1]Kamel Tablennehas et[2]Mustapha Chellali.
[1]Département de Mathématiques, Faculté des Sciences,
Université de Médea. E-mail: Tablennehas1@yahoo.fr
[2]Laboratoire LAMDA-RO Département des Mathématiques,
Université de Blida. E-mail: m_chellali@hotmail.com

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble S de V est un dominant de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G, noté $\gamma(G)$, est appelé nombre de domination. Un ensemble dominant stable d'un graphe G est un ensemble dominant dont le sous-graphe induit est un stable. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant stable de G, noté $i(G)$, est appelé nombre de domination stable. Etant donné un paramètre de domination μ d'un graphe G, on défini le nombre de domination par contraction d'un graphe G connexe, noté $Ct\mu(G)$ comme étant le nombre minimum d'arêtes à contracter successivement pour faire diminuer le nombre de domination $\mu(G)$.

Dans [4] Huang et Jun-Ming ont montrés que $Ct\gamma(G) \leq 3$ pour tout graphe G. Dans ce papier, On donne une réponse au problème posé par Huang et Jun-Ming dans l'article [4], en caractérisant les arbres T ayant $Ct_\gamma(T) = 3$. Ensuite, on montre qu'il existe des graphes où le nombre de domination stable par contraction est très grand.

Keywords: domination, domination stable, nombre de domination par contraction.

1 Introduction

On considère un graphe simple connexe $G = (V, E)$ ayant $V(G)$ comme ensemble de sommets et $E(G)$ comme ensemble d'arêtes. Le nombre de sommets $|V(G)|$ dans un graphe G est appelé ordre de G et noté souvent par n. Le voisinage ouvert d'un sommet est $N(v) = \{u \in V/uv \in E\}$, son voisinage fermé est $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Le degré d'un sommet v, noté par

$d_G(v)$ est $|N(v)|$. Un sommet de degré nul est dit isolé. Un sommet de degré un est appelé sommet pendant, et son voisin est dit sommet support.

Le voisinage privé d'un sommet v par rapport à un ensemble S noté $pn[v,S]$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S, i-e: $pn[v,S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

Soient u et v deux sommets d'un graphe G. On appelle distance entre u et v, notée $d(u,v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v. L'excentricité d'un sommet v dans un graphe $G = (V,E)$ est $exc(v) = \max\{d(v,w) : w \in V\}$ et le diamètre de G, noté $Diam(G)$, est égal à $\max\{exc(v) : v \in V\}$.

Pour un sous-ensemble $S \subset V$, le sous-graphe induit par S noté $G[S]$ est le graphe ayant S comme ensemble de sommets et ses arêtes sont celles de E ayant leurs extrémités dans S.

Pour un-sous ensemble $U \subseteq E$, le graphe partiel de G défini par U noté G_U est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U.

Un graphe $G = (V,E)$ est dit $multi-parti$ s'il existe une partition de V en k sous-ensembles $V_1, V_2, ..., V_k$ tels que chacun des $G[V_i]$ ne contient aucune arête (stable). Si $k = 2$ le graphe G est dit *biparti***.** On appelle graphe $biparti-complet$**,** un graphe biparti tel que pour tout sommet $u \in V_1$ et $v \in V_2, uv \in E$. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

L'étoile noté par $K_{1,t}$ est un cas particulier d'un graphe biparti complet tel que $|V_1| = 1$ et $|V_2| = t$

Soit $G = (V,E)$ un graphe simple. Un sous-ensmble $S \subseteq V(G)$ est un ensemble dominant si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G est appelé nombre de domination et est noté par $\gamma(G)$.Un ensemble dominant S de cardinal $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G)$-ensemble ou simplement γ-ensemble.

Un sous-ensmble $S \subseteq V(G)$ est un ensemble dominant stable si S est un ensemble dominant et le sous-graphe induit par les sommets de S ne contient pas d'arêtes. Le nombre de domination stable noté par $i(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant stable de G.

Soit $G = (V,E)$ un graphe simple, pour une arête uv de G, on note par G_{uv} le graphe obtenu à partir de G en contractant l'arête uv . On note aussi par $\overline{uv}$ le nouveau sommet obtenu. Donc le graphe G_{uv} est obtenu à partir de G en supprimant les sommets u et v et en ajoutant le sommet $\overline{uv}$ qui est adjacent à tous les sommets adjacents à u ou v.

Dans ce papier on considère l'effet de la contraction d'arêtes sur le nombre de domination $\gamma(G)$. Dans [4], Huang et Jun-Ming ont défini le nombre de domination par contraction d'un graphe $G = (V, E)$ connexe tel que $\gamma(G) \geq 2$, noté par $Ct_\gamma(G)$ comme étant le nombre minimum d'arêtes à contracter successivement pour faire diminuer le nombre de domination $\gamma(G)$.

2 Resultats préliminaires

Nous citons quelques résultats obtenus par Huang et Ming Xu dans [4].

Proposition 1 *[4] Pour les chaînes P_n et les cycles C_n d'ordre $n \geq 4$, $Ct_\gamma(P_n) = Ct_\gamma(C_n) = i$ tel que $n = 3k + i$ et $1 \leq i \leq 3$.*

Huang et Jun-Ming ont montré que $Ct_\gamma(G)$ est inférieur à trois pour tout graphe connexe avec $\gamma(G) \geq 2$.

Théorème 2 *[4] Pour tout graphe G connexe on a : $Ct_\gamma(G) \leq 3$.*

Par la proposition suivante, les graphes ayant $Ct_\gamma(G) = 0$ sont caractérisés.

Proposition 3 *Pour un graphe G connexe, $Ct_\gamma(G) = 0$ si et seulement si G admet une étoile comme sous-graphe partiel.*

Par la proposition suivante, les graphes ayant $Ct_\gamma(G) = 1$ sont caractérisés.

Proposition 4 *[4] Pour un graphe G connexe, $Ct_\gamma(G) = 1$ si et seulement s'il existe un $\gamma(G)$-ensemble D qui n'est pas un stable.*

Il résulte de cette proposition le corollaire suivant:

Corollaire 5 *[4] Pour un graphe G connexe, si $\gamma(G)=i(G)$, alors $Ct_\gamma(G)>1$.*

Les graphes G tels que $Ct_\gamma(G) = 2$ sont caractérisés par le résultat suivant:

Proposition 6 *[4] Pour un graphe G connexe, $Ct_\gamma(G) = 2$ si et seulement si tout $\gamma(G)$-ensemble est un stable et il existe un ensemble dominant D de cardinalité $\gamma + 1$ tel que $G[D]$ contient au moins deux arêtes.*

A partir du théorème 2, tous les graphes peuvent être classés en quatre catégories selon leurs nombre de domination par contraction $Ct_{\gamma}(G)$. On note par $\mathcal{C}_{\gamma}^{i}$ les graphes ayant $Ct_{\gamma}(G) = i$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. Et on note par $\mathcal{P}_{\gamma}^{j}$ l'ensemble des graphes connexes satisfaisant la propriété j. Si $\mathcal{A}$ est une famille de graphes connexes, alors $\overline{\mathcal{A}}$ représente la famille de graphes connexes qui ne sont pas dans la famille $\mathcal{A}$.

Propriété 1. G admet une étoile comme sous graphe partiel.

Propriété 2. G admet un $\gamma(G)$-ensemble D qui n'est pas un stable.

Propriété 3. G admet un ensemble dominant D de cardinalité $\gamma + 1$ tel que $G[D]$ contient au moins deux arêtes.

Théorème 7 *[4]* $\mathcal{C}_{\gamma}^{0} = \mathcal{P}_{\gamma}^{1}$, $\mathcal{C}_{\gamma}^{1} = \mathcal{P}_{\gamma}^{2}$, $\mathcal{C}_{\gamma}^{2} = \overline{\mathcal{P}_{\gamma}^{2}} \cap \mathcal{P}_{\gamma}^{3}$ *et* $\mathcal{C}_{\gamma}^{3} = \overline{\mathcal{P}_{\gamma}^{1}} \cap \overline{\mathcal{P}_{\gamma}^{3}}$.

3 Caractérisation des arbres tels que $Ct\gamma(G) = 3$

On s'intérresse dans cette partie à donner une réponse au problème posé par Huang et Jun-Ming dans l'article [4] en caractérisant les arbres T ayant $Ct_{\gamma}(T) = 3$.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des arbres T obtenus à partir d'une séquence d'arbres $T_1, T_2, ..., T_k$ avec $k \geq 1$ tel que $T_1 = P_6$ et $T = T_k$. Si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu à partir de T_i par l'une des opérations suivantes. Soit $\{x, y\}$ l'ensemble des sommets support de l'arbre T_1 et on pose $A(T_1) = \{x, y\}$

Opération θ_1 : Ajouter des sommets pendants à un support z.
Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i)$.

Opération θ_2 : Attacher un sommet z de $V(T_i) - A(T_i)$ à un sommet u de la chaîne uvw. Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{v\}$.

Par la construction de $\mathcal{F}$, on a l'observation suivante:

Observation 8 *Si $T \in \mathcal{F}$ alors chaque sommet de $A(T)$ admet au moins deux sommets privés dans $V(T) - A(T)$.*

Nous donnons la définition d'un dominant parfait comme suit:

Définition 9 *Un ensemble S est dit un dominant parfait si S est un dominant et chaque sommet de $V - S$ admet exactement un seul voisin dans S.*

Théorème 10 (Bange, Barkaukas et Slater [5]) *Si G admet un dominant parfait alors tous les dominants minimaux ont la même taille $\gamma(G)$.*

Théorème 11 (Gunther, Hartnell, Markus et Rall [6]) .
Un arbre T *d'ordre* $n \geq 3$ *admet un* $\gamma(T)$*-ensemble unique* D *si et seulement si chaque sommet de* D *admet au moins deux voisins privés dans* $V - D$.

Lemme 12 *Si* T *est un arbre tel que* $Ct_\gamma(T) = 3$, *alors* T *admet un* $\gamma(T)$*- ensemble unique et un dominant parfait unique.*

Preuve. Soit S un $\gamma(T)$-ensemble et supposons que $Ct_\gamma(T) = 3$. Il est clair que $G[S]$ est un stable et donc $\gamma(T) = i(T)$. On suppose maintenant que l'ensemble S n'est pas un dominant parfait. Alors il existe un sommet $z \in V - S$ qui admet deux voisins x, y dans S. Notons par w le sommet obtenu à partir de la contraction des deux arétes xz et yz, et soit G' le graphe obtenu après la contraction. Alors l'ensemble $\{w\} \cup (S - \{x, y\})$ est un dominant de G' et $\gamma(G') < \gamma(G)$. Par conséquent $Ct_\gamma(T) = 2$, d'où la contradiction.

Pour l'unicité, soit D un $\gamma(T)$-ensemble. Comme T est un arbre, alors pour tout sommet $v \in D$ on a $N(v) \neq \emptyset$. Puisque $G[D]$ est un stable et si $N(v) = \{u\}$ alors $D' = (D - \{v\}) \cup \{u\}$ est un dominant de T qui n'est pas parfait. Donc chaque sommet $v \in D$ admet au moins deux voisins privés dans $V - D$. D'aprés le théorème 11, D est un dominant parfait unique. ■

Remarque: *Le résultat précédent n'est pas vrai pour tout graphe* G, *car si* $G = C_6$ *alors* $Ct_\gamma(T) = 3$ et *le graphe* G *admet un dominant parfait qui n'est pas unique.*

Lemme 13 *Pour un arbre* $T \neq k_{1,t}$, *l'arbre* T *admet à la fois un unique* $\gamma(T)$*-ensemble et un unique dominant parfait si et seulement si* $T \in \mathcal{F}$.

Preuve. ($\Leftarrow$) Soit T un arbre de la famille $\mathcal{F}$. A partir de la construction $A(T)$ est un dominant parfait de T et d'aprés le théorème 10 $A(T)$ est un $\gamma(T)$-ensemble. Puisque chaque sommet de $A(T)$ possède au moins deux sommets privés alors d'aprés le thèorème 11 $A(T)$ est un unique $\gamma(T)$-ensemble. D'ou T admet à la fois un unique $\gamma(T)$-ensemble et un unique dominant parfait.

($\Rightarrow$) Soit D à la fois un unique $\gamma(T)$- ensemble et un unique dominant parfait de T. On utilise l'induction sur le nombre de sommets de T. L'unicité de l'ensemble D implique chaque sommet support est dans D. Aussi dire que D est dominant parfait signifie que la distance entre deux supports est au moins trois. Puisque T n'est pas une étoile alors $diam(T) \geq 5$. Il est clair que $T = P_6$ est le plus petit arbre admettant un dominant parfait unique et $T \in \mathcal{F}$. On suppose que chaque arbre T' d'ordre $n' < n$ admet un unique $\gamma(T')$-ensemble et un unique dominant parfait est dans $\mathcal{F}$.

Soit T un arbre d'ordre n. Si T admet un support z adjacent à au moins deux sommets pendants, alors considérons l'arbre T' obtenu à partir de T en supprimant un sommet pendant quelconque z' adjacent à z. Alors D reste un $\gamma(T')$-ensemble. Maintenant on suppose que D n'est pas unique et soit D' un seconde $\gamma(T')$-ensemble. Alors $z \notin D'$ et z possède un autre sommet pendant $z" \in D'$. Soit w un sommet non pendant adjacent à z dans T (un tel sommet existe toujours car $diam(T) \geq 5$). Alors D' contient au moins un sommet de $N[w] - \{z\}$ et cela pour dominer le sommet w, donc $\{z\} \cup (D' - \{z''\})$ est un $\gamma(T)$-ensemble qui n'est pas unique ou bien n'est pas parfait les deux donnent une contradiction. Par induction sur T' on a $T' \in \mathcal{F}$ par conséquent $T \in \mathcal{F}$ car il est obtenu à partir de T' par l'opération θ_1.

On suppose que chaque sommet support est adjacent à exactement un seule sommet pendant. Soit u' un sommet pendant à distance maximum r d'un sommet de degré plus de deux. Soient u, v, w les sommets parents des sommets u', u, v respectivements. Alors $u \in D$ et $w \notin D$.
Soit $T' = T - \{u', u, v\}$. Alors $D' = D - \{u\}$ est un unique $\gamma(T')$-ensemble et un unique dominant parfait de T'. Par induction sur T' on a $T' \in \mathcal{F}$ et par la suite $T \in \mathcal{F}$ car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération θ_2. ■

Théorème 14 *Soit un arbre $T \neq k_{1,t}$ les assertions suivantes sont équivalentes :*
a)− $Ct_\gamma(T) = 3$.
b)− T admet un unique $\gamma(T)$-ensemble et un unique dominant parfait .
c)− $T \in \mathcal{F}$.

Preuve. $(a) \Rightarrow (b)$: d'aprés le lemme 12
$(b) \Leftrightarrow (c)$: d'aprés le lemme 13.
Il suffit de montrer que (b) implique (a) : Supposons que $Ct_\gamma(T) = 1$, alors d'aprés la proposition 4, il existe un $\gamma(T)$-ensemble qui n'est pas un stable et comme T admet un dominant parfait unique alors $Ct_\gamma(T) \geq 2$. Supposons maintenant que $Ct_\gamma(T) = 2$, alors d'aprés la proposition 6 tout $\gamma(T)$-ensemble est un stable (ce qui est vérifie dans notre cas, car T admet un dominant parfait unique) et il existe un ensemble dominant $S \cup \{x\}$ de cardinalité $\gamma + 1$ contenant au moins deux arêtes ce qui est impossible, car dans ce cas x admet deux voisins dans S, contradiction. Par conséquent $Ct_\gamma(T) \geq 3$ et d'aprés le théorème 2 en déduit que $Ct_\gamma(T) = 3$. ■

4 Le nombre de domination stable par contraction $Cti(G)$

On commence par donner la définition du nombre domination stable par contraction.

Définition 15 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe connexe tel que* $i(G) \geq 2$. *On note par* $Ct_i(G)$ *le nombre minimum d'arête qu'il faut contracter successivement pour faire diminuer* $i(G)$.

Proposition 16 *Pour les chaînes* P_n *et les cycles* C_n,$i(P_n)$=$i(C_n)$=$\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Proposition 17 *Pour les chaînes* P_n *et les cycles* C_n *d'ordre* $n \geq 4$,
$Ct_i(P_n) = Ct_i(C_n) = i$ *tel que* $n = 3k + i$ *et* $1 \leq i \leq 3$.

Nous donnons par les observations suivantes les conditions suffisantes pour que $Ct_i(G) = 1$.

Observation 18 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe connexe. S'il existe un* i*-ensemble* S *de* G *contenant au moins un sommet sans sommets privés, alors* $Ct_i(G) = 1$.

Proposition 19 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe connexe, s'il existe un* $\gamma(G)$*-ensemble* S *contenant exactement une arête, alors* $Ct_i(G) = 1$.

Preuve. Il est clair que $\gamma(G) \leq i(G)$ pour tout graphe G. Soit un $\gamma(G)$-ensemble S contenant une arête uv, alors $\gamma(G_{uv}) = \gamma(G) - 1 = i(G_{uv})$. Et par conséquent
$\gamma(G_{uv}) < \gamma(G)$. D'ou $\gamma(G_{uv}) < i(G)$ et par suite $i(G_{uv}) < i(G)$. Donc $Ct_i(G) = 1$. ■

Rappelons que le voisinage privé d'un sommet v par rapport à un ensemble S noté $pn[v, S]$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S, i-e: $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

Proposition 20 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe connexe et soient* S *un* $i(G)$*-ensemble et* $x \in S$.
a)– Si $|pn[x, S]| = 0$, *alors* $Cti(G) = 1$.
b)– Si $|pn[x, S]| = d_G(x)$, *alors* $Cti(G) \leq 3$.
c)– Si $1 < |pn[x, S]| < d_G(x)$, *alors* $Cti(G) \leq \min_{x \in S}(d_G(x))$.

Preuve. Soient G un graphe connexe et S un $i(G)$-ensemble. Soit x un sommet quelconque de S. Posons $|pn[x, S]| = k$

$a)-$ Si $k = 0$, alors l'ensemble $N(x)$ est dominé par $S - \{x\}$. Dans ce cas la contraction d'une arête reliant x et un de ces voisins fait diminuer $i(G)$, par conséquent $Cti(G) = 1$.

$b)-$ $k = d_G(x)$. Puisque G est connexe alors, il existe une arête reliant un sommet $y \in pn[x, S]$ à un sommet $z \in V - (S \cup pn[x, S])$. Donc il existe un sommet $t \in S$ adjacent à z. Par conséquent la contraction des arêtes xy, yz et zt consécutivement fait diminuer $i(G)$, d'ou $Cti(G) \leq 3$.

$c)-$ Si $1 < k < d_G(x)$, alors il existe un sommet $z \in N(x)$ adjacent à $S - \{x\}$ et la contraction des k arêtes reliant x à $pn[x, S]$ ainsi que l'arête zx fait diminuer $i(G)$. Par conséquent $Cti(G) \leq k + 1$ et puisque $k < d_G(x)$ alors $Cti(G) \leq d_G(x)$. ∎

Contrairement au paramètre $Ct_\gamma(G)$, par l'observation suivante on montre qu'il existe des graphes où $Ct_i(G)$ peut être trés grand.

Observation 21 *Pour tout entier* $k \geq 1$ *il existe un arbre* T_k *tel que* $Ct_i(T_k) \geq k$.

Preuve. Soit T_k un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,k}$ avec $k \geq 2$ de centre y en attachant chaque sommet pendant x_j par $(k-1)$ sommets tel que $1 \leq j \leq k$. Il est clair que $S = \{x_1, x_2, ...x_k\}$ est un $i(T_k)$-ensemble tel que $d(x_j) = k$.On peut constater que la contraction d'une arête de type yx_j fait augmenter le nombre de domination stable de l'arbre résultant par rapport à $i(T_k)$. D'autre part la contraction d'une arête joignant un support à son sommet pendant ne fait pas changer $i(T_k)$. On conclut que au moins k arêtes sont necessaires pour diminuer le nombre de domination stable, d'ou $Ct_i(T_k) \geq k$. ∎

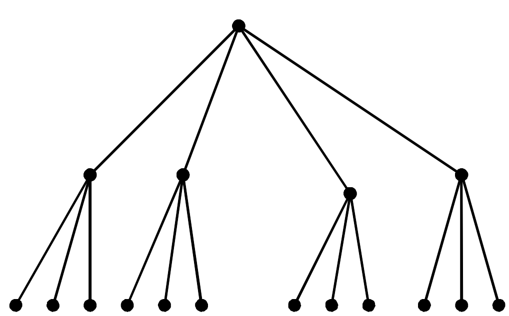

Fig.4.1: L'arbre T_k avec $k = 4$.