**UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA**

**Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière**

N° d'ordre :
N° de série :

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

# MASTER

**Filiére : Mathématiques**

**Spécialité : Analyse**

**Par : Guedda Ibtissam**

**Thème**

# Stabilité du semi-groupe associe à certains problèmes d'evolution.

**Soutenu publiquement le : 30 juin 2017**

**Devant le jury composé de :**

| | | |
|---|---|---|
| Kouidri Mohammed | M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla | Président |
| Boussaàd Abdelmalik | M.C. Université KASDI Merbah - Ouargla | Examinateur |
| Guerboussa Yassine | M.C. Université KASDI Merbah - Ouargla | Examinateur |
| Agti Mohammed | M.C. Université KASDI Merbah - Ouargla | Encadreur |

# Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à ma chère mère,*

*A mon cher père qui m'ont toujours soutenu,*

*Qui m'ont aide à affronter les difficultés,*

*A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.*

*A mes très chères soeurs et chèrs frère.*

*A toute ma famille.*

*A tous les amis.*

*A tous les étudiants d'université de KASDI Merbah - Ouargla.*

*A tous.*

# Remerciement


En premier lieu , je tient à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant , de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .

Je tient à exprimer mon profond respect , et de reconnaissance à mon professeur et mon encadreur de mémoire : **Agti Mohammed** , pour ces conseils et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .

*Je remercier sincèrement les membres du jury :*

⋆ **Mon professeur : Kouidri Mohammed** , d'avoir accepté la présidence du jury

Aussi je remercier vivement :

⋆ **Professeur : Boussaàd Abdelmalik** d'avoir accepté l'examinateur de ce travail .

⋆ **Mon Professeur : Guerboussa Yassine** d'avoir accepté l'examinateur de ce travail .

*Je les remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail .*

Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père, ma mère, mon frère et mes soeurs, et tout la famille et mes amis qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de Kasdi Merbah - Ouargla .

Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donnés .

Merci à tous ceux qui ont contribué, de prés ou de loin , à l'aboutissement de ce travail .

# Table des matières

# Notations

$E$ : Espace de Banach sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$H$ : Espace de Hilbert.

$\mathcal{L}(E)$ : L'algèbre de Banach des opérateur linéaire borné.

$C$ : Constante.

$x$ : Variable d'espace $X$.

$\Delta$ : opérateur de Laplacien.

$\nabla$ : opérateur gradient.

$\frac{\partial^2 u}{dt^2}$ : la dérivée partielle de $u$ par rapport à $t$ d'ordre 2.

$\frac{\partial u}{dt}$ : la dérivée partielle de $u$ par rapport à $t$ d'ordre 1.

$\Omega$ : Un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$\rho(A)$ : L'ensemble résolvent de $A$.

$\sigma(A)$ : Le spectre de $A$.

$I$ : L'unité de $\mathcal{L}(E)$.

$r(T(t))$ : Le rayon spectrale de $T(t)$.

$SG(M, \omega)$ : L'ensemble de $C_0$ semi-groupe.

$L^\infty(\Omega) : \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable} , \quad \sup |f| < +\infty\}$.

$L^2(\Omega)$ : L'espace des fonction carré intégrable.

$H^1 = \{u \in L^2, \frac{\partial u}{dt} \in L^2\}$.

$H^2 = \{u \in L^2, \frac{\partial u}{dt} \in L^2, \frac{\partial^2 u}{d^2 t_{ij}} \in L^2, \forall i, j = 1...n\}$.

$H_0^1 = \{u \in H^1, \text{le trace de u sur } \partial\Omega \text{est nulle}\}$.

# Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la stabilité de quelques problèmes d'évolution, plus précisément la stabilité des solutions qui sont données sous la forme $T(t)U_0$ où $(T(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif, l'étude de la stabilité d'un problème d'évolution est donc revient à déterminer le comportement asymptotique du semi-groupe associé.

-Notre première inquiétude est l'existence et l'unicité des solutions. Pour cela nous mettons le problème d'évolutions sous forme d'un système du 1$^{\text{er}}$ ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU \qquad t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

où $A : D(A) \longrightarrow H$ et $H$ un espace de Hilbert.

L'outil principal est la méthode des semi-groupes et en particulier le théorème de Lumer-Phillips, nous devons donc vérifier que l'opérateur $A$ est m-dissipatif pour obtenir l'existence et l'unicité des solutions. Cette méthode sera appliquée dans les deux problèmes traités.

-Ensuite, nous étudions la stabilité forte c'est-à-dire analyser simplement la décroissance des solution vers zéro

$$\|T(t)\| \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque} \quad t \longrightarrow +\infty$$

et la stabilité exponentielle ( la décroissance la plus rapide ), lorsque celle ci tend vers zéro de manière exponentielle

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\varepsilon t}, \qquad t > 0$$

$M, \varepsilon$ sont des constantes positives.
De plus, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que $T(t)$ tende vers zéro.
Le contenu du travail est le suivant, il se décompose en trois chapitre :

Le premier chapitre et une présentation de la théorie générale, et les notions qui seront utilisées dans ce travail.

Le deuxième chapitre présente la théorie spectrale du semi-groupe et de son générateur et des notions sur la stabilité forte et la stabilité exponentielle, ces propriétés sont importantes notamment pour comprendre le comportement asymptotique ($t \longrightarrow +\infty$) des solutions du problème d'évolution.

Le troisième chapitre est consacré à l'exposé de deux applications le premier est un problème d'évolution qui non exponentiellement stable et le deuxième c'est le problème des ondes où nous prouvons qu'il est exponentiellement stable a certaines conditions.

# Chapitre 1

# Théorie générale

## 1.1 Semi-groupes d'opérateurs bornés

**Définition 1.1** *:*

*Soit $E$ un espace de Banach sur le corps $\mathbb{C}$ et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires sur $E$. La famille $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ est appelée semi-groupe si :*

1. $T(0) = Id$ *l'élément unité de l'algèbre* $\mathcal{L}(E)$
2. $T(s+t) = T(s) \cdot T(t) \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}^+$

### 1.1.1 $C_0$ semi-groupes et Semi-groupes uniformément continues

**Définition 1.2** *:*

*Le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est appelé semi-groupe fortement continue et noté $C_0$ semi-groupe si l'application :*

$$\begin{aligned} [0,+\infty[ &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ t &\longmapsto T(t) \end{aligned}$$

*et continue pour le topologie forte d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$ c-à-d :*

$$\lim_{t\to t_0} \|T(t)f - T(t_0)f\|_E = 0 \qquad \forall f \in E, \forall t \geq 0$$

**Définition 1.3** *:*

*On appelle semi-groupe uniformément continue $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ vérifient le propriété suivant :*

$$\lim_{t\to 0} \|T(t) - Id\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$$

**Remarque 1** *:*

*Les semi-groupes uniformément continus sont $C_0$semi-groupes puisque :*

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - Id\|\|x\|$$

*Mais il existe des $C_0$semi-groupes qui ne sont pas uniformément continus.*

### 1.1.2 Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe

**Définition 1.4** *:*

*L'opérateur $A$ défini par :*

$$D(A) = \left\{ x \in E \quad , \quad \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} exist \right\}$$

*et*

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt} |_{t=0} \quad \forall x \in D(A)$$

*est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.*

**Théorème 1.5** *:*

*Un Opérateur $A : E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continue si et seulement si $A$ est un opérateur linéaire bornée.*

**Lemme 1.6** *:*

*soit $A \in \mathcal{L}(E)$ alors $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continue dont le générateur infinitésimal est opérateur $A$.*

**Proposition 1** *:*

*$(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe et $A$ son générateur infinitésimal, alors $T(t)x \in D(A)$ :*

1. $T(t)Ax = AT(t)x \qquad \forall t \geq 0, \qquad x \in D(A)$
2. $\frac{dT(t)x}{dt} = T(t)Ax = AT(t)x \qquad \forall t \geq 0, \qquad x \in D(A)$
3. $T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds \qquad \forall t \geq 0, \qquad x \in D(A)$
4. $$\int_0^t T(s)xds \quad \in \quad D(A)$$

**Démenstation**

1. Soit $\quad h \geq 0$ :

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)x-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(t)T(h)x-T(t)x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}T(t)x \\ &= AT(t)x \end{aligned}$$

   donc $T(t)x \in D(A)$ alors

$$T(t)Ax = AT(t)x$$

2. Soient $x \in D(A)$ et $t \geq 0, h \geq 0$

$$\begin{aligned} \left\|\frac{T(t+h)-T(t)Ax}{h} - T(t)Ax\right\| &= \left\|T(t)\left(\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right)\right\| \\ &\leq \|T(t)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^dT(t)}{dt}x = T(t)Ax = AT(t)x \qquad , \quad \forall \geq 0$$

   de même que on trouve :

$$\frac{d^gT(t)}{dt}x = T(t)Ax = AT(t)x \qquad , \quad \forall \geq 0$$

   d'où

$$\frac{dT(t)}{dt}x = T(t)Ax = AT(t)x \qquad , \quad \forall \geq 0$$

3. 

$$\begin{aligned} \int_0^t T(s)Axds &= \int_0^t \frac{dT(s)}{dt}xds \\ &= T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds \end{aligned}$$

**Lemme 1.7** *:*

*Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* $C_0$*semi-groupe alors :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(s)xds = T(t)x \qquad \forall x \in E \quad , \quad \forall t \geq 0$$

**Démenstration** : Voir [5].

**Corollaire 1** *:*

*Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe uniformément continue et* $A$ *son générateur infinitésimal alors :*

1. *IL existe* $\omega \geq 0$ *tq :*
$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0$$
2. *l'application*
$$\begin{aligned} [0,+\infty[ &\longrightarrow \pounds(E) \\ t \quad &\longmapsto T(t) \end{aligned}$$
*est continue et différentiable pour le topologie des norme et*
$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A \qquad \forall t \geq 0$$

**Définition 1.8** *:*

*On appelle type d'un semi-groupe fortement continue* $(T(t))_{t\geq 0}$ *le nombre(borne de croissance) :*

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \inf\left\{\omega \in \mathbb{R} \quad ; \quad \exists M_\omega \in \mathbb{R} \quad tq \quad \|T(t)\| \leq M_\omega e^{wt} \quad ,\forall t \geq 0\right\} \\ &= \{\omega \in \mathbb{R} \quad : \lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{-\omega t}\|T(t)\| = 0\} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log\|T(t)\| \end{aligned}$$

**Théorème 1.9** *:*

*Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continue alors il existe* $\omega \in \mathbb{R}_+$ *et* $M \geq 1$ *telle que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0$$

**Démenstration** :

Voir[5].

### 1.1.3 Semi-groupes analytique

**Définition 1.10** *:*

*Désignerons par* $\Delta$ *l'ensemble :*

$\Delta = \{z \in \mathbb{C}^* \quad , \quad Rez > 0 \quad et \quad \varphi_1 < argz < \varphi_2 \quad , \quad \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$

*On appelle semi-groupe analytique une famille* $(T(z))_{z\in\Delta} \subset \mathcal{L}(E)$ *si*

1. $T(0) = Id$
2. $T(s+t) = T(s) \cdot T(t) \qquad \forall t, s \in \Delta$
3. $\lim_{z\to 0} T(z)x = x \qquad z \in \Delta$
4. *L'application* $\quad z \in \Delta \longrightarrow T(z) \in \mathcal{L}(E) \quad$ *est analytique dans* $\Delta$

**Théorème 1.11** *(L'unicité de l'engendrement) :*

*Soit deux semi-groupes* $(T(t))_{t\geq 0}$ *et* $(S(t))_{t\geq 0}$ *ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur* $A$ *alors :*

$$T(t) = S(t) \qquad , \quad \forall t \geq 0$$

**Démenstration** : Voir[2].

### 1.1.4 Propriétés spectral des $C_0$ semi-groupes

**Définition 1.12** *:*

*Soit* $\mathcal{A}$ *une algèbre unitaire de Banach et soit* $Inv(\mathcal{A})$ *l'ensemble de tout les éléments inversible de* $\mathcal{A}$ *si* $x, y \in Inv(\mathcal{A})$ *alors* $y^{-1}x$ *et l'inverse de* $x^{-1}y$

**Définition 1.13**

*Soit* $x$ *un élément d'une algèbre de Banach unitaire on appelle spectre de* $x$ *l'ensemble :*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - x)^{-1} \quad n'existe\ pas\}$$

*La complémentaire de* $\sigma(x)$ *est appelé l'ensemble résolvant de* $x$ *et est noté* $\rho(x)$*, Autrement dit :*

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad , \quad \lambda e - x \in Inv(A)\}$$

*la résolvant de $x$ est l'application définie sur $\rho(x)$, à valeurs dans $A$ donnée par :*

$$R(\lambda; x) := (\lambda e - x)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(x)$$

*Enfin, la rayon spectral de $x$ est le nombre :*

$$r(x) := sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

**Lemme 1.14** *:*

*Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire bornée et $x \in \mathcal{A}$ tel que $\|x\| < 1$ alors :*

$$e - x \in Inv(\mathcal{A})$$

**Corollaire 2** *:*

*Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire. Alors $Inv(\mathcal{A})$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{A}$.*

**Théorème 1.15** *:*

*Soit $A$ opérateur linéaire bornée et $x \in A$. On a :*

$$r(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

**Démenstration** : Voir[8].

**Proposition 2** *:*

*Soit $\omega_0$ le type d'un semi-groupe fortement continue $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors le rayon spectral de $T(t)$*

$$r(T(t)) = sup\{|\lambda| \quad , \quad \lambda \in \sigma(T(t))\} \qquad \forall t \geq 0$$

*vérifier*

$$r(T(t)) = e^{\omega_0 t}$$

**Démenstration** :

d'après la définition

$$\omega_0 = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|$$

et puisque

$$r(T(t)) = \lim_{n \to +\infty} \|T(nt)\|^{\frac{1}{n}}$$

et pour tout $t > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} r(T(t)) &= \lim_{n \to +\infty} exp\left[t(nt)^{-1} \log \|T(t)\|\right] \\ &= e^{\omega_0 t} \end{aligned}$$

**Lemme 1.16** *:*

*Soit* $(T(t))_{t\geq 0} \in SG(M, \omega)$ *et* $A$ *son générateur infinitésimal. Alors pour tout* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *et* $t > 0$ *l'application :*

$$B_\lambda(t) : E \longrightarrow E$$

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)xds$$

*définit un opérateur linéaire borné sur* $E$ *vérifiant les propriétés suivant :*

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad \forall x \in E$$

*et*

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad \forall x \in D(A)$$

*De plus :*

$$B_\lambda(t)T(t) = T(t)B_\lambda(t)$$

**Démenstration** : Voir[5].

**Corollaire 3** *:*

*Pour tout* $\lambda_0 \in \rho(A)$ *on a :*

$$dis(\lambda_0, \sigma(A)) = \frac{1}{r(R(\lambda_0, A))} \geq \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$$

**Démenstration** : Voir[5].

**Définition 1.17** *( la borne spectrale ) :*

*Soit* $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ *est un opérateur fermé, la borne spectrale de* $A$ *est définit par :*

$$S(A) = \sup\{Re\lambda \quad : \quad \lambda \in \sigma(A)\}$$

*elle est dominée par la borne de croissance* $\omega_0$*.*

**Définition 1.18** *:*

*Soit* $A$ *le générateur infinitésimal du* $C_0$*semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *alors on a :*

$$\inf_{t\geq 0} \frac{1}{t} \log\|T(t)\| = \lim_{t\longrightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log\|T(t)\| = \frac{1}{t_0} \log(r(T(t_0))) \tag{1.1}$$

$$-\infty \leq S(A) \leq \omega_0 < +\infty \tag{1.2}$$

*pour chaque* $t_0 > 0$

**Théorème 1.19** *:(Spectral mapping )*

*Soit* $(T(t))_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ *et le* $A$ *générateur infinitésimal. Alors*

$$e^{t\sigma(A)} = \{e^{\lambda t} \quad / \quad \lambda \in \sigma(A)\} \subset \sigma(T(t)) \quad t \geq 0$$

**Démenstration** :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\lambda t} \in \rho(T(t))$ Alors on peut considérer l'opérateur

$$Q = (e^{\lambda t} I - T(t))^{-1} \in \pounds(E)$$

d'après le lemme (1.16) on a :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad \forall x \in E \tag{1.3}$$

et

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad \forall x \in D(A) \tag{1.4}$$

Par multiplication avec $(Q)$ à droit dans (1.3) et à gauche dans (1.4), on obtenons :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)Qx = x \qquad \forall x \in E$$

$$QB_\lambda(\lambda I - A)x = x \qquad \forall x \in D(A)$$

Mais d'après le lemme (1.16) il en résulte que :

$$(e^{\lambda t} I - T(t))B_\lambda(t) = B_\lambda(t)(e^{\lambda t} I - T(t))$$

Pare conséquent

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)Qx = x \quad \forall x \in E$$

et

$$B_\lambda(t)Q(\lambda I - A)x = x \quad \forall x \in D(A)$$

Par suite $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\rho(T(t)) \subset e^{t\rho(A)} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

Ainsi $\quad e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t))$.

**Définition 1.20** *:*

*On définit :*

*Le spectre ponctuel par :*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad , \quad \lambda I - A \quad n'est\ pas\ injectife\}$$

*Le spectre résidus par :*

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad ; \quad (\lambda I - A)D(A) \quad n'est\ pas\ dense\}$$

*Le spectre approximatif par :*

$$\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad , \quad \lambda I - A \quad n'est\ pas\ injectife\ ou\ (\lambda I - A)D(A) \quad n'est\ pas\ ferm\acute{e}\}$$

*il est claire :*

$$\sigma_p(A) \subseteq \sigma_{ap}(A) \quad et \quad \sigma(A) = \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_r(A) \tag{1.5}$$

**Remarque 2** *:*

1. $$\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad ; \quad \exists (x_n)_n \in D(A)^N \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad \|x_n\| = 1 \quad et \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \|(\lambda I - A)x_n\| = 0\} \tag{1.6}$$

2. $$\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_{ap} \tag{1.7}$$

**Théorème 1.21** *:*

*Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un $C_0$semi-groupe sur et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal alors on a : si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que*

$$(\lambda I - A)^{-1}x = R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \qquad pour \quad x \in E$$

**Proposition 3** *:*

*Soit $x$ un élément dans d'une algèbre de Banach unitaire alors :*

*si $\lambda \in \mathbb{C}$ $|\lambda| \geq \|x\|$ alors $\lambda \in \rho(x)$ et*

$$R(\lambda; x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

**Définition 1.22** *:*

*Soit $A$ un opérateur $(A, D(A))$ dans $E$, l'opérateur $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$ est appelé approximation de Yosida de $A$.*

**Remarque 3** *:*

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$$

*L'opérateur $A_\lambda$ est donc un opérateur borné dans $E$.*

*De plus nous avons :*

$$A_\lambda x = \lambda R(\lambda, A)Ax \quad \forall x \in E$$

.

**Théorème 1.23** *:*

*Soit $A$ un opérateur linéaire bornée et $x \in E$*

1. *L'ensemble résolvant $\rho(x)$ est ouvert et l'application résolvante $R(., x)$ est holomorphe dans $\rho(x)$.*
2. *$\sigma(x) \subset \bar{D}(0, \|x\|)$*
3. *Le spectre $\sigma(x)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$*
4. *Si $x \in Inv(A)$, alors on a :*

$$\sigma(x^{-1}) = (\sigma(x))^{-1} = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}$$

**Démenstration** :

1. Considérons $f : \mathbb{C} \longrightarrow A$ définie par :

$$f(\lambda) := \lambda e - x$$

Alors $f$ est clairement continue et

$$\rho(x) = f^{-1}(Inv(A))$$

comme $Inv(A)$ est ouvert dans $A$ (d'après le corollaire (2)) on déduit que $\rho(x)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$.

2. Si $|\lambda| >\|x\|$ alors, $\lambda e - x = \lambda(e - \frac{x}{\lambda})$, on obtient avec le lemme (1.14) que $\lambda e - x \in Inv(A)$. Autrement dit, $\lambda \in \rho(x)$.

   Par contraposée, si $\lambda \in \sigma(x)$, alors $|\lambda| \leq\|x\|$.

3. D'après (1) $\sigma(x)$, est fermé, de plus d'après (2) , $\sigma(x)$ est borné, ainsi, le spectre $\sigma(x)$ de $x$ et un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{C}$, c'est donc un compacte. Il reste à vérifier que $\sigma(x)$ non vide. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde, en supposant que $\rho(x) = \mathbb{C}$. Alors $R(., x)$ est une fonction entière, à valeurs dans $A$. de plus, pour $|\lambda| >\|x\|$,on a avec l'égalité suivant :

$$R(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

   et donc

$$\|R(\lambda, x)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}$$

   En particulier, on déduit que :

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} R(\lambda, x) = 0$$

   et donc $R(., x)$ est une fonction bornée. Alors que $R(., x)$ est constante et donc $R(\lambda, x) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$, ce qui est absurde.

4. Soit $\lambda \in \sigma(x^{-1})$. Cela signifie que $\lambda e - x^{-1}$ n'est pas inversible. Pour $\lambda \neq 0$, on peut écrire :

$$\lambda e - x^{-1} = -\lambda x^{-1}(\lambda^{-1} e - x),$$

   et on déduit que : $\lambda^{-1} e - x$ n'est pas inversible. autrement dit, $\lambda^{-1} \in \sigma(x)$, c'est à dire $\lambda = (\lambda^{-1})^{-1} \in (\sigma(x))^{-1}$. Par conséquent, on a prouvé que :

$$\sigma(x^{-1}) \subset (\sigma(x))^{-1}.$$

   Appliquent maintenant cette inclusion, en remplaçant $x$ par $x^{-1}$ et on obtient :

$$\sigma(x) \subset (\sigma(x^{-1}))^{-1},$$

   donc

$$(\sigma(x))^{-1} \subset \sigma(x^{-1}),$$

**Corollaire 4** *:*

*Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* $C_0$*semi-groupe sur* $E$*, alors :*

$$T(t)x = \frac{(k-1)!}{t^{k-1}}\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\longrightarrow +\infty}\int_{\omega-in}^{\omega+in} e^{\lambda t}R(\lambda,A)^K x d\lambda \qquad \text{pour tous} \quad x\in D(A)$$

*pour tout* $\omega > \omega_0(T(t))$ , $k\in\mathbb{N}$ , $t>0$ *et* $x\in D(A)$

*De plus si* $k\geq 2$ *alors :*

*l'intégral est uniformément convergent pour* $t>0$.

**Démenstration** :

Voir[5].

**Définition 1.24** *:*

*On dit que* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un* $C_0$*semi-groupe de contraction sur* $E$ *si* $(T(t))_{t\geq 0}\in SG(1,0)$ *c-à-d :*

$$\|T(t)\|\leq 1 \qquad \forall \geq 0$$

**Théorème 1.25** *:(Hille-Yosida)*

*Un opérateur linéaire* $A : D(A)\subset E\longrightarrow E$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue* $(T(t))_{t\geq 0}\in SG(M,\omega)$ *si et seulement si :*

1. *A fermé et domaine dense dans* $E$.
2. $\Lambda_\omega = \{\lambda\in\mathbb{C} \quad , \quad Re\lambda>\omega\}\subset\rho(A)$ *et* $\forall\lambda\in\Lambda_\omega$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ *on a :*

$$\|R(\lambda,A)^n\|\leq\frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n}$$

**Démenstration** : Voir[2].

**Théorème 1.26** *:*

*Un opérateur linéaire* $A : D(A)\subset E\longrightarrow E$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe contraction(où analytique)* $(T(t))_{t\geq 0}\in SG(1,0)$ *si et seulement si :*

1. *A fermé et domaine dense dans* $E$.
2. $\Lambda_0 = \{\lambda\in\mathbb{C} \quad , \quad Re\lambda>0\}\subset\rho(A)$ *et* $\forall\lambda\in\Lambda_0$ *on a :*

$$\|R(\lambda,A)\|\leq\frac{1}{Re\lambda}$$

## 1.2 Les opérateur m-dissipatif

**Définition 1.27** *:*
*Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans $E$ est fermé si son graphe*

$$G(A) = \{(x, Ax)\ x \in D(A)\}$$

*est fermé dans $E \times E$.*

**Définition 1.28** *:*
*Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dans $E$ lorsque $D(A)$ est dense dans $E$, on dite que $(A, D(A))$ est de domaine dense dans $E$.*

**Définition 1.29** *:*
*Soit $H$ un espace de Hilbert et $H \in \mathbb{L}(H)$, on dit que $A$ est un opérateur positif si*

$$< Ax, x > \geq 0 \qquad \textit{pour tout} \quad x \in H$$

**Définition 1.30** *:*
*Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans $E$. On appelle adjoint de $A$ l'opérateur $(A, D(A))$ défini par :*
$D(A^*) = \{y \in E' \quad / \exists C \geq 0 \quad tq \quad < Ax, y >_{E \times E'} \leq C\|x\| \quad \forall x \in D(A)\}$
*et* $\qquad < Ax, y >_{E \times E'} = < x, A^* y >_{E \times E'} \quad \forall y \in D(A^*)$

### 1.2.1 Opérateur m-dissipatif dans un espace de Banach

**Définition 1.31** *:*
*Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans $E$ est dissipatif si :*

$$\forall x \in D(A) \quad , \quad \forall \lambda > 0 \quad , \quad \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|$$

**Définition 1.32** *:*
*Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans $E$ est m-dissipatif :*

1. *$A$ est dissipatif.*
2. $\forall f \in E \quad , \quad \forall \lambda > 0 \qquad \exists x \in D(A) \quad tq \quad \lambda x - Ax = f$

**Théorème 1.33** *:*

*Soit $(A, D(A))$ un opérateur dissipatif de domaine dense dans $E$, si $A$ est fermé et $A^*$ est dissipatif alors $A$ est m-dissipatif .*

### 1.2.2 Opérateur m-dissipatif dans un espace de Hilbert

Dans cette section nous supposons que $E$ est un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

**Théorème 1.34** *:*

*Un opérateur$(A, D(A))$ linéaire non borné dans $E$, est dissipatif si et seulement si :*

$$\forall x \in D(A) \quad , \quad < Ax, x > \leq 0$$

*Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente remplacée par :*

$$\forall x \in D(A) \quad , \quad Re < Ax, x > \leq 0$$

**Exemple 1** *(Laplacien sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$) :*

*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $H = L^2(\Omega)$. On définie l'opérateur de laplacien $\Delta$ sur $H$ par :*

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}$$

*et on prend :*

$$D(\Delta) = \{U \in H_0^1(\Omega), \quad \Delta U \in L^2(\Omega)\}$$

1. *Montrons que l'opérateur de Laplace est dissipatif :*

   *Soit $u \in D(\Delta)$*

   $$< \Delta U, U >= \int_\Omega U \cdot \Delta U dx = -\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla U dx \leq 0$$

   *d'où $\Delta$ est dissipatif.*

**Théorème 1.35** *:*

1. *Si $A$ est m-dissipatif alors $D(A)$ est fermé et dense dans $E$.*

2. *Soit $A$ un opérateur dissipatif de domaine dense dans $E$. Alors $A$ est m-dissipatif si et seulement si $A$ est fermé et $A^*$ est dissipatif.*

**Définition 1.36** *:*

*L'opérateur $A$ est dit symétrique si :*

$$\forall u, v \in D(A) \qquad (Au, v) = (u, Av)$$

*L'opérateur $A$ est dit auto-adjoint si $A^* = A$ c-à-d :*

1. $D(A^*) = D(A)$
2. $\forall u \in D(A) \qquad A^*u = Au \quad$ *et* $\quad A^*u = -Au$ *(anti-adjoint)*

**Théorème 1.37** *:*

*Si $A$ est m-dissipatif, alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$admet une inverse $(\lambda I - A)^{-1}f$ appartient à $D(A)$ pour tout $f \in E$ et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur $E$ vérifiant :*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

**Démenstration** : Voir[2].

**Proposition 4** *:*

*Soit $A$ un opérateur linéaire de domaine dense si :*

1. $G(A) \subset G(A^*)$
2. *$A$ est dissipatif* $\quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in D(A) \quad (Ax, x) \leq 0$

**Corollaire 5** *:*

*Si $A$ est anti-adjoint dans l'espace de Hilbert alors $A$ est $-A$ sont m-dissipatif .*

**Théorème 1.38** *:*

*Soit $A$ un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans $E$. Alors*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| = 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in E$$

*De plus*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \|A_\lambda x - x\| = 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in D(A)$$

**Démenstration** :

Soit $x \in D(A)$ on a :

$$\lambda R(\lambda; A)x - x = (\lambda I - A)^{-1} Ax$$

Nous en déduisons :

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \longrightarrow 0$$

$$\text{quand} \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

Soit $x \in E$ et soit $(x_n)$ une suite dans $D(A)$ convergent vers $x$ dans $E$ comme

$$\|R(\lambda; A)\| \leq 1$$

nous avons

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|\lambda R(\lambda; A)\|\|x_n - x\| + \|x_n - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + 2\|x_n - x\|\end{aligned}$$

pour tout $x \in D(A)$ on a :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \|A_\lambda x - x\| = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \|A_\lambda x - x\| \longrightarrow 0$$

$$\text{quand} \qquad \lambda \longrightarrow +\infty$$

**Corollaire 6** *:*

*Soit $A$ est un opérateur linéaire dans l'espace $E$ et de domaine dense , alors $A$ et $-A$ sont m-dissipatif si et seulement si $A$ est anti-adjoint.*

**Remarque 4** *:*

$$\sigma_r(A) = \sigma_p(A^*) \quad \textit{et} \quad R(\lambda, A)^* = R(\lambda, A^*) \quad \textit{pour tout} \quad \rho(A) = \rho(A^*) \tag{1.8}$$

**Théorème 1.39** *(Lumer-Phillips) :*

*Soit $A$ un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans un espace de Hilbert si :*

1. *$A$ est dissipatif*

2. *$\lambda \forall > 0 \qquad \lambda I - A$ est surjective*

*Alors $A$ générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction (analytique) sur $A$.*

**Dénemstration** : Voir[2].

## 1.3 Transformation de Fourier

**Définition 1.40** *:*

*On définit la transformation de Fourier d'une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$F(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

**Définition 1.41** *:*

*Soit* $\hat{f}(\omega)$ *la transformation inverse de Fourier de* $f(x)$ *est définie par la formule*

$$F^{-1}(\hat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iwt} \hat{f}(\omega) d\omega$$

# Chapitre 2

# Stabilité des semi-groupes

## 2.1 Stabilité des semi-groupes uniformément continus

**Définition 2.1** *:*

*Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe on dit que* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est stable si :*

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} \|T(t)\| = 0$$

**Exemple 2** *:*

*Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$, $(e^{tA})_{t\geq 0}$ *est stable si :*

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} \|e^{tA}x\| = 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad x \in \mathbb{C}$$

**Théorème 2.2** *(Liapunov 1892) :*

*Soit* $(e^{tA})_{t\geq 0}$ *un semi-groupe engendré par l'opérateur* $A \in M_n(\mathbb{C})$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est stable (ie) :*

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} \|e^{tA}\| = 0$$

2. *Toutes les valeurs propres de A à :*

$$Re\lambda < 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad \lambda \in \sigma(A)$$

**Démenstration** :

Puisque la stabilité est invariante par similarité. Donc on peut supposer que à une forme normal de Jordan alors le semi-groupe $(e^{tA})_{t\geq 0}$ est stable si seulement si touts les semi-groupe $(e^{tA_k})_{t\geq 0}$ engendres par les blacks de Jordan $A_k$ sont stables puisque :

$$e^{tA} = e^{t\lambda}e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^(k-1)}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^(k-2)}{(k-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{k\times k}$$

et

$$\begin{aligned} \|e^{tA}\| &= e^{tRe\lambda}\|e^{tN}\| \\ &\leq e^{tRe\lambda}e^{\|tN\|} \\ &\leq e^{tRe\lambda}e^{t} \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}\|e^{tA}\| = 0$$

si et seulement si $Re\lambda < 0$.

## 2.2 Stabilité des $C_0$ semi-groupes

**Définition 2.3** *:*

*Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$ semi-groupe on dit que $(T(t))_{t\geq 0}$ exponentiellement stable s'il existe deux constante $M, \varepsilon > 0$ tel que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\varepsilon t} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

**Définition 2.4** *:*

*Le $C_0$ semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit :*

1. *uniformément exponentiellement stable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{\varepsilon t}\|T(t)\| = 0.$$

2. *uniformément stable si :*

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}\|T(t)\| = 0$$

*3. fortement stable si :*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|T(t)x\| = 0 \quad , \quad \forall x \in E$$

*4. faiblement stable si :*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} < T(x)x, x' >= 0 \quad , \quad \forall x \in E \quad et \quad x' \in E'$$

**Proposition 5** *:*

*Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$ semi-groupe, les assertions suivante sont équivalentes :*

1. $\omega_0 < 0$, *(i.e)*, $(T(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément exponentiellement stable.*

2. $$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|T(t)\| = 0$$

3. $\|T(t_0)\| < 1$ *pour certain* $t_0 > 0$.

4. $r(T(t_1)) < 1$ *pour certain* $t_1 > 0$.

**Démenstration** : Voire [5].

**Théorème 2.5** *:*

*Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$semi-groupe de contraction sur un espace de Hilbert. Alors $T(t)$ est exponentiellement stable si et seulement si :*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta \quad , \quad \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$$

*et*

$$\overline{\lim_{|\beta| \longrightarrow +\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < +\infty$$

**Démenstration** :

On suppose que :

$$sup\{Re\lambda \quad : \quad \lambda \in \sigma(A)\} < 0 \quad , \quad \text{Alors} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

si $Re\lambda \geq 0$ on a $\lambda \notin \sigma(A)$ par suite $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.

Si

$$\sup_{Re\lambda > 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty$$

alors

$$\|(ikI - A)^{-1}\| \leq \sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty \quad \forall k \geq |\beta|$$

donc

$$\sup_{k > |\beta|} \|(ikI - A)^{-1}\| \leq \sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty$$

Ce qui implique que :

$$\inf_{|\beta|} (\sup_{k \geq |\beta|} \|(ikI - A)^{-1}\|) < \infty$$

Alors

$$\overline{\lim_{|\beta| \longrightarrow +\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$$

**Proposition 6** *:*

*Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un $C_0$semi-groupes alors les assertion suivantes sont équivalentes :*

1. *$(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable.*
2. *$(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément stable.*
3. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)x\| = 0 \quad , \quad \forall x \in E$$

**Démenstration :**

La propriété (1) implique (2) et (3).

on à :

$$e^{\omega_0 t} = r(T(t)) \leq \|T(t)\| \quad \forall t \geq 0$$

(2) implique $\omega_0 < 0$ car :

$$\omega_0 = inf\{\omega \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-\omega t} \|T(t)\| = 0\}$$

donc il existe $\omega$ telle que $\omega_0 < \omega < 0$

d'où

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-\omega t} \|T(t)\| = 0$$

on poser $\varepsilon = -\omega$ alors

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)\| = 0$$

donc (1).

Démonstration de l'implication (3) $\Longrightarrow$ (1)

Il existe $\varepsilon > 0$ telle que :

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)x\| = 0 \qquad \forall x \in E$$

alors $(e^{\varepsilon t} T(t))_{t \geq 0}$ est fortement bornée d'où il est uniformément bornée

alors

$$\exists C > 0 \qquad \text{telle que} \qquad \|e^{\varepsilon t} T(t)\| \leq C$$

$\Longrightarrow$

$$e^{\varepsilon t} \|T(t)\| \leq C \tag{2.1}$$

En multipliant(2.1) par $(e^{-\frac{\varepsilon}{2} t})$ :

$$e^{\frac{\varepsilon}{2} t} \|T(t)\| \leq C e^{-\frac{\varepsilon}{2} t}$$

$$\Longrightarrow \lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{\frac{\varepsilon}{2} t} \|T(t)\| \leq \lim_{t \longrightarrow +\infty} C e^{-\frac{\varepsilon}{2} t}$$

$$\Longrightarrow \lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{\frac{\varepsilon}{2} t} \|T(t)\| = 0$$

d'où il résulte(1).

**Exemple 3** *:*

1. *Le $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe de translation (gauche) où*

$$E = L^P(\mathbb{R}_+) \quad , \quad 1 < p < +\infty \qquad f(t).f(s) = f(t+s)$$

*on a :*

$$\begin{aligned} \|T(t)f(s)\|^P_{L^P(\mathbb{R}_+)} &= \int_0^{+\infty} |T(t)f(s)|^P ds \\ &= \int_t^{+\infty} |f(t+s)|^P ds \\ &= \int_t^{+\infty} |f(\beta)|^P d\beta \end{aligned}$$

*alors*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|T(t)f(s)\| = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} |f(\beta)|^P d\beta$$
$$= \int_{+\infty}^{+\infty} |f(\beta)|^P d\beta$$
$$= 0$$

*d'où* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est fortement stable.*

*mais on à* $\|T(t)\| = 1 \quad \forall t \geq 0$ *, alors il n'est pas uniformément stable.*

2. *Le* $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *un groupe de translation (gauche) avec*

$$E = L^P(\mathbb{R}) \quad , \quad 1 < p < +\infty$$

*est un groupe d'isométries donc n'est pas fortement stable.*

*D'autre part pour les fonctions* $f \in E, g \in E' = L^q(\mathbb{R}) \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ *avec un support compact on a alors* $T(t)f$ *et* $g$ *a disjoint supports :*

$< T(t)f, g >= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(s+t)\cdot g(s)ds = 0$ *pour tout* $f \in E$ *et* $g \in E'$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$

*on choisit* $f_n \in E$ *et* $g_n \in E'$ *avec un support compact.*

*Puisque*

$$\|f - f_n\|_p < \frac{1}{n} \quad et \quad \|g - g_n\| \leq \frac{1}{n}$$

*alors*

$$|< T(t)f, g >| \leq |< T(t)(f - f_n), g_n >| + |< T(t)f, g - g_n| + |< T(t)f_n, g_n >|$$
$$\leq \frac{1}{n} (\|g\|_q + 1 + \|f\|_p) + |< T(t)f_n, g_n >|$$

*et car* $t \in [0, +\infty]$

*par conséquent :*

$$\lim < T(t)f, g >= 0 \quad pour\ tout \quad f \in E \quad et \quad g \in E'$$

*(i.e)* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est faiblement stable.*

**Définition 2.6** *:*

*Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* $C_0$*semi-groupe et* $(A, D(A))$ *son générateur infinitésimal,* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est exponentiellement stable s'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que :*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)x\| = 0 \qquad \forall x \in D(A)$$

**Théorème 2.7** *(DATKO 1970, Pazy 1972 ) :*

*Le $C_0$semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach $E$ est uniformément exponentiellement stable si et seulement si pour tout $p \in [1, +\infty[$ :*

$$\int_0^{+\infty} \|T(t)x\|^P dt < +\infty \quad \forall x \in E \tag{2.2}$$

**Démonstration :**

Si le semi-groupe est exponentiellement stable alors (2.2) est satisfait.

L'implication inverse d'après la proposition (5) il suffit de vérifier que :

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|T(t)\| = 0 \tag{2.3}$$

pour cela, on définit par $n \in \mathbb{N}$ les générateur

$$\tau_n \in \pounds(X, L^p(\mathbb{R}_+, X))$$

avec

$$\tau_n x = 1_{[0,n]}(.)T(.)x$$

alors par hypothèse, l'ensemble

$$\{\tau_n x \quad , \quad n \in \mathbb{N}\} \subset L^p(\mathbb{R}_+, X)$$

est borné pour tout $n \in X$

donc par le principe de la limite uniforme, il existe $C > 0$ tel que :

$$\int_0^t \|T(t)x\|^p dr \leq C^p \|x\|^p \quad \text{pour tout} \quad x \in X \quad \text{et} \quad t \geq 0$$

D'autre par, d'après la théorème (1.9) il existe $M \geq 1$ et $\omega > 0$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

d'après les deux intégrales précédente, on obtient :

$$\frac{1 - e^{-P\omega t}}{P\omega} \|T(t)x\|^P = \int_0^t e^{-P\omega r} \|T(r)T(t-r)x\|^P dr$$

$$\leq \int_0^t M^P \|T(t-r)x\|^P dr$$

$$\leq M^P C^P \|x\|^P \qquad \forall x \in X \quad , \quad t \geq 0$$

donc, il existe une constante $L > 0$ tell que :

$$\|T(t)\| \leq L \quad , \quad t \geq 0$$

par conséquent :

$$t\|T(t)x\|^P = \int_0^t \|T(t-r)T(r)x\|^P dr$$

$$\leq \int_0^t L^P \|T(r)x\|^P dr$$

$$\leq L^P C^P \|x\|^P \qquad\qquad \forall x \in X \quad , \quad t \geq 0$$

et donc

$$\|T(t)\| \leq LCt^{-1/p} \qquad t > 0$$

ceci implique (2.3).

**Lemme 2.8** *:*

*Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continue et soit $A$ son générateur infinitésimal si :*

$$\sigma(T(t)) \cup \{0\} = e^{\overline{t\sigma(A)}} \cup \{0\} \quad \textit{pour} \quad t \geq 0$$

*alors la borne de croissance $\omega_0$ et la borne spectrale $S(A)$ c'est-à-dire :*

$$S(A) = \omega_0$$

**Démenstration** :

D'après (1.1) on a :

$$\omega_0 = \frac{1}{t} \log r(T(t)) \quad \text{pour tout} \quad t > 0$$

Et puisque $-\infty \leq S(A) \leq \omega_0$ (d'après le définition 1.18).

on suppose que $\omega_0 > -\infty$, alors on obtient

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{t} \log \sup\{|\mu| \quad : \quad \mu \in \sigma(T(t))\} \\
&= \frac{1}{t} \log \sup\{e^{tRe\lambda} \quad : \quad \lambda \in \sigma(A)\} \\
&= \sup\{\frac{1}{t} \log e^{tRe\lambda} \quad : \quad \lambda \in \sigma(A)\} \\
&= S(A)
\end{aligned}$$

**Théorème 2.9** *(GEARHART 1978, PRüSS1984, GREINER 1985) :*
*Un $C_0$semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H est uniformément exponentiellement stable si et seulement si le demi-plan :*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \quad : \quad Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$$

*et*

$$\sup_{Re\lambda > 0} \|R(\lambda, A)\| < +\infty \tag{2.4}$$

**Démenstration** :
Si $\omega_0$, alors la relation (2.4) découle du théorème (1.25). Pour l'implication inverse, on observe d'après le théorème (1.25) on a :

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A)$$

d'où il résulte (2.4) par $Re\lambda \geq 0$.
En suite, nous prenons $\omega > |\omega_0| + 1$ et considérons le semi-groupe définit part :

$$(T_{-\omega})_{t\geq 0} \quad \text{avec} \quad T_{-\omega}(t) = e^{-\omega t}T(t)$$

Alors, par le théorème (1.25). et pour $x \in H$, et $s \in \mathbb{R}$, nous avons

$$R(\omega + is, A)x = R(is, A - \omega)x = \int_0^{+\infty} e^{-ist}T_{-\omega}(t)xdt$$

utilisons la transformation de Fourier

$$F : L^2(\mathbb{R}, H) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, H)$$

nous obtenons

$$R(\omega + is, A)x = F(T_{-\omega}(.)x)(s) \tag{2.5}$$

où on fait une extension de $T_{-\omega}(.)$ sur $\mathbb{R}$

$$T_{-\omega}(t) = \begin{cases} e^{-\omega t}T(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

et puisque $(T_{-\omega}(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable.
on a $T_{-\omega}(t)x \in L^2(\mathbb{R}, H)$ pour cela on que H est un espace Hilbert, à partie du théorème de Plancherel($C$.14) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\omega + is, A)x\|^2 ds &= 2\Pi \int_0^{+\infty} \|T_{-\omega}(t)x\|^2 dt \\ &\leq L.\|x\|^2 \end{aligned}$$

pour certaine constante $L > 0$ et pour tout $x \in H$.

Et il résulte par l'équation de résolvant que

$$R(is, A) = R(\omega + is, A) + \omega R(is, A)R(\omega + is, A)$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et car

$$\|R(is, A)x\| \leq (1 + M\omega)\cdot\|R(\omega + is, A)x\| \tag{2.6}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $x \in H$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\omega + is, A)x\|^2 ds &\leq (1 + M\omega)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\omega + is, A)x\|^2 ds \\ &\leq (1 + M\omega)^2 L.\|x\|^2 \qquad\qquad \forall x \in H\end{aligned} \tag{2.7}$$

Comme $\|T\| =\|T^*\|$ pour tout $T \in \pounds(H)$, par symétrique, la même estimation est vraie pour la résolvante du générateur $A^*$ du semi-groupe adjoint $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ (i.e) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, A^*)y\|^2 ds \leq (1 + M\omega)^2 \cdot L^2\cdot\|y\|^2 \qquad \forall y \in H \tag{2.8}$$

En suite, nous utilisons la formule d'inversion dans () pour $K = 2$ et concluons que

$$(tT(t)x)|_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\omega+is)t}(R(\omega + is, A)^2 x|_y) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}(R(is, A)x|R(is, A^*)y) ds$$

pour tout $x \in D(A^2)$ et$y \in H$. Pour la seconde égalité, nous avons utilisé le théorème intégral de Cauchy, qui est applicable puisque $R(\lambda, A)$ est uniformément borné pour $Re\lambda \geq 0$ et donc

$$\|R(\lambda, A)x\| = \frac{1}{|\lambda|}\|R(\lambda, A)Ax + x\|$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|}(M\|Ax\|+\|x\|)$$

par suit il résulte par (2.7) , (2.8) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz : é pour $Re\lambda \geq 0$ et donc

$$\|(tT(t)x|y)\| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, A)x\|^2 ds\right)^{1/2} \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is, A^*)y\|^2 ds\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{(1 + M\omega)^2 \cdot L^2}{2\pi}\cdot\|x\|\cdot\|y\|$$

pour tout $x, y \in D(A^2)$ Comme $D(A^2)$ est dense dans H, cela implique

$$\|tT(t)\| = \sup\{|(tT(t)x|y)| : x, y \in D(A^2), \quad \|x\| =\|y\| = 1\}$$

$$\leq \frac{(1 + M\omega)^2 \cdot L^2}{2\pi}$$

Donc

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|T(t)\| = 0$$

et donc $\omega_0(T(t)) < 0$ par la proposition (5).

**Proposition 7** *:*

*Dans un espace de Hilbert le $C_0$semi-groupe engendré par l'opérateur $A$ est exponentiellement stable si seulement si :*

$$S(A) < 0$$

*et*

$$\sup_{Re\lambda > 0} \|R(\lambda, A)\| < +\infty$$

**Démenstration** :

résultat inédit du théorème (2.9).

# Chapitre 3

# Stabilité du semi-groupe associe à certains problèmes d'évolution

## 3.1 Application 1 :

### Énoncé du problème :

On considère le problème :

$$\begin{cases} C\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + B\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(0) = u_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $A, B$ et $C$ sont des opérateurs autoadjoints définis positifs de domaines $D(A) \subset D(C) \subset D(B)$ dense dans un espace de Hilbert $H$.

### 3.1.1 Existence et unicité du solution :

On suppose que $C$ est un opérateur autoadjoint d'inverse $C^{-1}$, et on note par $\tilde{A} = C^{-1}A$, $\tilde{B} = C^{-1}B$ et on suppose aussi que $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont des opérateurs autoadjoint. Alors on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tilde{A}u + \tilde{B}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(0) = u_0 \quad , \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_1 \end{cases} \tag{3.2}$$

On note par $\mathcal{H} = D(\tilde{A}^{1/2}) \times H$ , $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ alors en peut écrire l'équation (3.2) sous for me d'une équation d'évolution du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = A_B U \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

avec $U = (u, v)$ et $U_0 = (u_0, u_1)$, on définit l'opérateur $A_B$ par :
$A_B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\tilde{A} & -\tilde{B} \end{pmatrix}$ et $A_B U = \begin{pmatrix} v \\ -(\tilde{A}u + \tilde{B}u) \end{pmatrix}$

$$D(A_B) = \{(u, v) \in D(\tilde{A}) \times D(\tilde{A}^{1/2}) : \tilde{A}u + \tilde{B}v \in H\}$$

Pour $U \in D(A_B)$ on a :

$$\begin{aligned} (A_B U, U) &= \left(\tilde{A}^{1/2}v, \tilde{A}^{1/2}u\right)_H - \left(\tilde{A}u + \tilde{B}v, v\right)_H \\ &= \left(\tilde{A}^{1/2}v, \tilde{A}^{1/2}u\right)_H - \left(\tilde{A}^{1/2}u + \tilde{A}^{-1/2}\tilde{B}v, \tilde{A}^{1/2}v\right)_H \\ &= -\|\tilde{B}^{1/2}v\|_H^2 \leq 0 \end{aligned}$$

par suit $A_B$ est dissipatif.

**Théorème 3.1** *:(l'existence et l'unicité)*
*On suppose que $\tilde{A} = C^{-1}A$ et $\tilde{B} = C^{-1}B$ sont des opérateurs autoadjoint avec $\tilde{A}$ est défini positif et bijection de $\tilde{A}$ à $\mathcal{H}$, alors l'opérateur $A_B$ est le générateurs infinitésimal d'un semi-groupe de contraction $S_B(t)$ dans $\mathcal{H}$.*

**Démenstration** :
Puisque $D(\tilde{A})$ est dense dans $H$ et $D(\tilde{A}) \times D(\tilde{A}) \subset D(A_B)$, alors $D(A_B)$ est dense dans $\mathcal{H}$. Par conséquent pour prouver le théorème président il suffit de prouver que $0 \in \rho(A_B)$ soit donc $F = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$, on montre qu'il existe $Y = (u, v) \in D(A_B)$ satisfait :

$$A_B Y = F$$

d'où

$$\begin{pmatrix} v \\ -(\tilde{A}u + \tilde{B}u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

c'est à dire :

$$v = f_1 \in D(\tilde{A}^{1/2})$$

et

$$-\tilde{A}u - \tilde{B}u = f_2 \in H$$

On obtient alors :

$$-\tilde{A}u - \tilde{B}f_1 = f_2 \in H$$

et puisque $\tilde{A}$ est inversible, alors il existe $u$ tel que :

$$u = -\tilde{A}^{-1}f_1 - \widetilde{A^{-1}}Bf_1$$

par conséquent :

$$Y = (u, v) \in D(A_B)$$

d'après le théorème (1.39) de Lumer-Phillips $A_B$ est générateurs infinitésimal d'un semi-groupe de contraction on le note par $(S_B(t))_{t\geq 0}$ de plus d'après le théorème (1.11) de l'unicité de l'engendrement $(S_B(t))_{t\geq 0}$ est unique.

### 3.1.2 Stabilité du semi-groupe $(\mathbf{S_B(t)})_{\mathbf{t\geq 0}}$ :

**Théorème 3.2** *:*

*On suppose que les opérateurs $A, B$ et $C$ ont les même valeurs propres et les vecteurs propres tels que :*

$A\omega_v = \lambda_v\omega_v$

$B\omega_v = f_1(\lambda_v)\omega_v$ *où* $f_1(\lambda) = 0(\lambda^{-1-\beta-\alpha}),$ $0 < \beta$

$C\omega_v = f_2(\lambda_v)\omega_v$ *où* $f_2(\lambda) = 0(\lambda^{1-\alpha}),$ $0 < \alpha$

$$\lambda_v \longrightarrow +\infty$$

*alors le semi-groupe engendré par l'opérateur $(A_B)$ est non exponentiellement stable.*

**Démenstration** :

Pour prouver ce théorème on utilisé le théorème (3.1), soit $F = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ et on note par $U = (u, v)$ la solution du système :

$$i\lambda U - A_B U = F$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1 \\ i\lambda v + C^{-1}Au + C^{-1}Bv = f_2 \end{cases} \tag{3.4}$$

on pend $f_1 \equiv 0$ et $f_2 = \omega_\upsilon$, et on chercher une solution de la forme

$$u = a\omega_\upsilon \quad \text{et} \quad v = b\omega_\upsilon \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

d'après (3.4) on a :

$$-\lambda^2 a\omega_\upsilon + \lambda_\upsilon f_2(\lambda_\upsilon)^{-1} a\omega_\upsilon + b f_1(\lambda_\upsilon) f_2(\lambda_\upsilon)^{-1}\omega_\upsilon = \omega_\upsilon$$

on choisit $\quad \lambda = \sqrt{\lambda_\upsilon f_2(\lambda_\upsilon)^{-1}} \quad$ on obtient alors

$$f_1(\lambda_\upsilon) f_2(\lambda_\upsilon)^{-1}\omega_\upsilon b = \omega_\upsilon \Longrightarrow b = \frac{f_2(\lambda_\upsilon)}{f_1(\lambda_\upsilon)}$$

et

$$a = -\frac{f_2(\lambda_\upsilon)^{3/2}}{\lambda_\upsilon^{1/2} f_1(\lambda_\upsilon)} i$$

par conséquent :

$$u = -\frac{f_2(\lambda_\upsilon)^{3/2}}{\lambda_\upsilon^{1/2} f_1(\lambda_\upsilon)} i\omega_\upsilon \qquad \text{et} \qquad v = \frac{f_2(\lambda_\upsilon)}{f_1(\lambda_\upsilon)}\omega_\upsilon$$

d'autre part on a :

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} = \|\tilde{A}^{1/2}\|^2_H + \|v\|^2_H$$

$$= \left\| C^{-1/2} A^{1/2} \left( -\frac{f_2(\lambda_\upsilon)^{3/2}}{\lambda_\upsilon^{1/2} f_1(\lambda_\upsilon)} i\omega_\upsilon \right) \right\|^2_H + \left\| \frac{f_2(\lambda_\upsilon)}{f_1(\lambda_\upsilon)}\omega_\upsilon \right\|^2_H$$

$$= \left( \frac{f_2(\lambda_\upsilon)}{f_1(\lambda_\upsilon)} \right)^2 \|\omega_\upsilon\|^2_H + \left( \frac{f_2(\lambda_\upsilon)}{f_1(\lambda_\upsilon)} \right)^2 \|\omega_\upsilon\|^2_H$$

$$= 0(\lambda_\upsilon^{2\beta}) \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad \upsilon \longrightarrow +\infty$$

d'où $\quad \|U\| \longrightarrow +\infty \quad$ quand $\quad \upsilon \longrightarrow +\infty$

de plus

$$i\lambda U - A_B U = F$$

$\Longleftrightarrow$

$$U = (i\lambda - A_B)^{-1} F$$

donc d'après le théorème (3.1) le semi-groupe $(S_B(t))_{t \geq 0}$ est non exponentiellement stable.

**Définition 3.3** *:*

*Soient $A$ et $B$ deux opérateurs linéaire avec $D(A) \subset D(B)$.*

*Alors $B$ est dit $A$-borné (où relativement borné) s'il existe $a, b \geq 0$ tel que :*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \qquad \textit{pour tout} \quad x \in D(A)$$

*dans ce cas on pose $D(A+B) = D(A)$.*

**Lemme 3.4** *:*

*Soit $A$ un opérateur fermé, $\lambda \in \rho(A)$ et $B$ est $A$-borné avec*

$$\|B \cdot R(\lambda; A)\| < 1$$

*alors $A+B$ (avec $\quad D(A+B) = D(A)$ est fermé et $\quad \lambda \in \rho(A+B)$) où :*

$$\begin{aligned} R(\lambda; A+B) &= R(\lambda; A)\sum_{n=0}^{+\infty}(BR(\lambda; A))^n \\ &= R(\lambda; A)(I - BR(\lambda; A))^{-1} \end{aligned}$$

*ainsi*

$$\|R(\lambda; A+B)\| \leq \frac{R(\lambda; A)}{1 - \|BR(\lambda; A)\|}$$

## 3.2 Application 2 (L'équation des ondes) :

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide de classe $C^2$ et soit l'espace de Hilbert $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $b \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant :

$b(x) \geq \beta \quad$ pour tout $\quad x \in \Omega \quad$ et $\quad \beta > 0$ , considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_D u(t) - b\dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad x, \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0 \quad , \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \end{cases} \tag{3.5}$$

### 3.2.1 Existence et unicité :

On écrit le problème (3.5) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - bv = 0, \quad , \quad t \geq 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad , \quad t \geq 0, \end{cases}$$

On pose $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de sort que ce problème d'évolution d'ordre un :

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU \\ u(0) = u_0 \quad , \quad v(0) = u_1 \end{cases} \tag{3.6}$$

avec

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta_D & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta_D u - bv \end{pmatrix}$$

On va montrer que l'opérateur $(A, D(A))$ est m-dissipatif tel que

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1$$

. Soit $U \in E$ avec $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$< AU, U >= \int_\Omega \triangledown v \cdot \triangledown u + \int_\Omega \Delta u \cdot v$$

et d'après la formule de Green on obtient :

$$\begin{aligned} < AU, U > &= \int_\Omega \triangledown v \cdot \triangledown u - \int_\Omega \triangledown u \cdot \triangledown v \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

ainsi $A$ est dissipatif.

Montrons maintenant que $A$ est m-dissipatif :

Soit $(f, g) \in E$ et soit $\lambda > 0$ l'équation

$$\lambda y - Ay = (f, g) \quad \text{avec} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

est équivalente au système

$$\begin{cases} \lambda y_1 - y_2 = f \quad \Longrightarrow \quad y_2 = \lambda y_1 - f \\ (\lambda - b) y_2 - \Delta_D y_1 = g \end{cases} \tag{3.7}$$

Alors

$$\lambda^2 y_1 - (\lambda b - \Delta_D) y_1 = g + (\lambda - b) f$$

Cette équation admet une solution unique $y_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1$ car l'opérateur $\Delta$ est m-dissipatif, par conséquence $y_2 \in H_0^1$ unique d'où il existe $y = (y_1 y_2)$ unique dans l'espace $(H^2(\Omega) \cap H_0^1) \times H_0^1$ pour toute couple $(f, g) \in E$, ainsi l'opérateur $A$ avec $D(A)$ est m-dissipatif.

D'après le théorème de Lumer-Phillips (1.39) le problème (3.6) admet une solution unique $U = T(t)(u_0, u_1)^t$ pour tout $(u_0, u_1) \in D(A)$ où $(T(t))_{t \geq 0}$ est le semi-groupe sur l'espace $E$ engendré par l'opérateur $A$.

### 3.2.2 Stabilité exponentielle :

Montrons maintenant que le semi-groupe $T(t)$ associe au problème (3.6) est exponentiellement stable(on utilise le proposition (7)).

L'opérateur :

$$R\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_D^{-1}(bf+g) \\ f \end{pmatrix} \quad , \quad (f,g) \in E$$

définie l'inverse de l'opérateur $A$, c'est-à-dire :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_D^{-1} b & \Delta_D^{-1} \\ \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite on montre que :

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(A) \qquad \text{et} \qquad \sup_{r\in\mathbb{R}} \|R(ir,A)\| = C < \infty \tag{3.8}$$

Supposons que (3.8) est vérifiée, par suit $\lambda \in \rho(A)$ et $\|R(\lambda, A)\| \leq 2C$ et quand $|Re\lambda| \in [0, \frac{1}{2C}]$, d'après le lemme ( 3.4) où on remplace $\lambda$ par $ir$ et $B$ par $\pm Re\lambda I$, on trouve :

$$\|R(\lambda; A + Re\lambda)\| \leq \frac{R(\lambda; A)}{1 - |Re\lambda| \|R(\lambda; A)\|}$$

tel que

$$R(\lambda; A + B) = R(\lambda; A + Re\lambda)$$

et d'après le théorème de Hille-Yosida on obtient :

$$\sup_{r\in\mathbb{R}} \|R(ir, A)\| < \infty$$

d'autre par on a $S(A) \leq \omega_0 = 0 \qquad$ où $\qquad S(A) \leq 0$

Si $S(A) = 0$ il résulte que :

$$i\mathbb{R} \subseteq \sigma(A) \quad \text{contraction avec la supposition} \quad i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$$

par conséquent

$$S(A) < 0$$

Par suite les conditions de proposition (7) sont vérifies.

Maintenant montre (3.8) :

Puisque $S(A) \leq 0$ tout $ir \in \sigma(A)$ appartient à $\partial\sigma(A)$ (frontière du spectre de $A$) Par suit :

$$m(r) = \inf\{\|ir\omega - A\omega\|_E, \omega \in E, \|\omega\|_E = 1\} = 0$$

à cause de la remarque (2).

La relation (3.8) est vérifiée si :

$$\inf_{r\in\mathbb{R}} m(r) = m_0 > 0 \qquad \text{donc} \qquad c = \frac{1}{m_0}.$$

Puisque $0 \in \rho(A)$ et $\rho(A)$ est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $[-ir_0, ir_0] \subseteq \rho(A)$, d'où $m(r) \geq \delta = \left(\max_{|r|\leq r_0}\|R(ir,A)\|\right)^{-1} > 0$ pour tout $r \in [-r_0, r_0]$.

On fixe $\varepsilon \in ]0, \frac{\beta}{2}[$ tel que :

$$0 < \frac{3\varepsilon\beta}{\beta - 2\varepsilon} < r_0$$

On suppose qu'il existe $|r| \geq r_0$ et $\omega = (u,v) \in D(A)$ tel que :

$$\|\omega\|_E^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \|v\|_2^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \|ir\omega - A\omega\|_E < \varepsilon$$

Par suit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \left|\left((irI - A)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)\right| \\
&= \left|\int_\Omega \nabla(iru - v)\nabla u dx + \int_\Omega(-\Delta u\bar{v} + (ir+b)v\bar{v})dx\right| \\
&= \left|ir\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|v\|_2^2\right) - \overline{\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\bar{u}dx} + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\bar{v}dx + \int_\Omega b|v|^2dx\right| \\
&= \left|i\left(r + 2Im\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\bar{v}dx\right) + \int_\Omega b|v|^2dx\right|
\end{aligned}$$

et par intégration par partie on obtient :

$$\varepsilon \geq \left|ir + 2Im\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\bar{v}dx\right| \quad \text{et} \quad \varepsilon \geq \int_\Omega b|v|^2dx \geq \beta\|v\|^2$$

alors

$$\|\nabla u\|_2^2 = 1 - \|v\|_2^2 \geq 1 - \frac{\varepsilon}{\beta}$$

et

$$1 - 2\|\nabla u\|_2^2 \leq \frac{2\varepsilon}{\beta} - 1 < 0$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}
r\left(1 - \frac{2\varepsilon}{\beta}\right) &\leq |r| \cdot \left|1 - 2\|\nabla u\|_2^2\right| \\
&= \left|r + 2Im\int_\Omega \nabla u \cdot \overline{ir\nabla u} dx\right| \\
&\leq \left|r + 2Im\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx\right| + \left|2Im\int_\Omega \nabla u \cdot \overline{ir\nabla u \cdot \nabla v} dx\right| \\
&\leq \varepsilon + 2\|\nabla u\|_2^2 \|\nabla(iru - v)\|_2 \\
&\leq \varepsilon + 2\|(irI - A)\omega\|_E \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

il résulte $|r| < \frac{3\varepsilon\beta}{\beta - 2\varepsilon}$ qui est impossible.

d'où $m(r) \geq \varepsilon > 0$ pour tout $|r| \geq r_0$.

# Conclusion

Pour étudier la stabilité d'un semi-groupe associe au problème d'évolution on mettre ce problème sous forme d'un système de premier ordre et puis on utilise la théorie de Lumer-Phillips pour prouver l'existence et l'unicité. Ensuite on exploite la théorie spectrale du semi-groupe et de son générateur pour comprendre le comportement asymptotique des solutions.

Il résulte par comparaison entre les deux applications traités que le spectre de l'opérateur multiplier par $(U'(t))$ joue un rôle important dans la stabilité ou non des solutions du problème de Cauchy d'ordre deux.

# Bibliographie


[1] A.F Pazoto and J.C Vila Bravo, Asymptotic Stability of Semigroups Associated to Linear Weak Dissipative Systems, National Laboratory of Scienti¯c Computations, Brazile, Octobre 2003.

[2] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlage, New York, 1983.

[3] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, N. N. O. Castro, Exponential stability for the thimoshenko system with two weak dampings, Elsevier Ltd. All rights reserved, 2005.

[4] C. Bardos, Comportement Asymptotique de Solutions d'équations de Réaction-diffusion, Journal de physique colloques 1978, Université Paris-Nord, 93000 Saint-Denis, France

[5] Ioan I.Vrabie, $C_0$-Semigroups and applications, Elsevier Science B. V. 2003

[6] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.

[7] Klaus-Jochen Engel, Rainer Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Alfred A.Knopf, 1995.

[8] Roland Schnaubelt, Lecture Notes Evolution Equations, Karlsruhe, January 25, 2012.

# ملخص.

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة استقرار الحلول للمعادلات التفاضلية المتعلقة بالزمن وللقيام بذلك نقوم بوضع هذه المعادلة على شكل جملة معادلات من الرتبة الأولى.

التقنية الأساسية المستخدمة هي طريقة نصف زمر وبخاصة نظرية Lumer-Phillips وهذا لإثبات وجود و وحدانية الحل.

وبعد ذلك نستعمل النظرية الطيفية للنصف الزمر $(T(t))_{t\geq 0}$ ومولدها وهذا لإيجاد الشروط الضرورية واللازمة لكي تكون الحلول مستقرة. أخيرا عرضنا كمثال تطبيقي اثنين من المعادلات التفاضلية.

**الكلمات المفتاحية :** طيف المؤثر, استقرار حلول معادلة تفاضلية, نظرية Lumer-Phillips.



# Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier la stabilité de quelques problèmes d'évolution. Pour cela nous mettons le problème d'évolution sous forme d'un système de 1$^{er}$ ordre.

L'outil principal pour prouver l'existence et l'unicité est la méthode des semi-groupes et en particulier le théorème de Lumer-Phillips.

Ensuite nous utilisons la théorie spectrale du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et de son générateur pour donner des condition nécessaires et suffisantes pour que la solution soit exponentiellement stable. Enfin nous exposons à titre d'application deux problèmes d'évolutions.

**Mots-clés :** $C_0$ semi-groupe, équation d'évolution, stabilité exponentielle, comportement asymptotique



# Abstract

The main objectives in this dissertation consist to study the stability of some evolution equations. For this we put the evolution equation in the form of a first-order system.

The main tool to prove existence and uniqueness is the semi-group and particular the theorem of Lumer-Phillips.

Then we use the spectral theory of semi-group $(T(t))_{t\geq 0}$ and its generator to give necessary and sufficient conditions for the solution to be exponentially stable. Finally, we expose as an application two problems of evolution.

**Key words**: $C_0$ semi-groups, Evolution equations, Expentially stable, Asymptotic behavoir