UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :Djafer Fatima Zohra

Théme

Approximation hilbertienne et polynômes orthogonaux.

Soutenu publiquement le : 25/05/2017

Devant le jury compose de :

M. Amara Abdelkader	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
M. Tellab Brahim	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur
M. Abassi Hocine	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
M. Bencheikh Abdelkrim	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur

Année universitaire 2016/2017

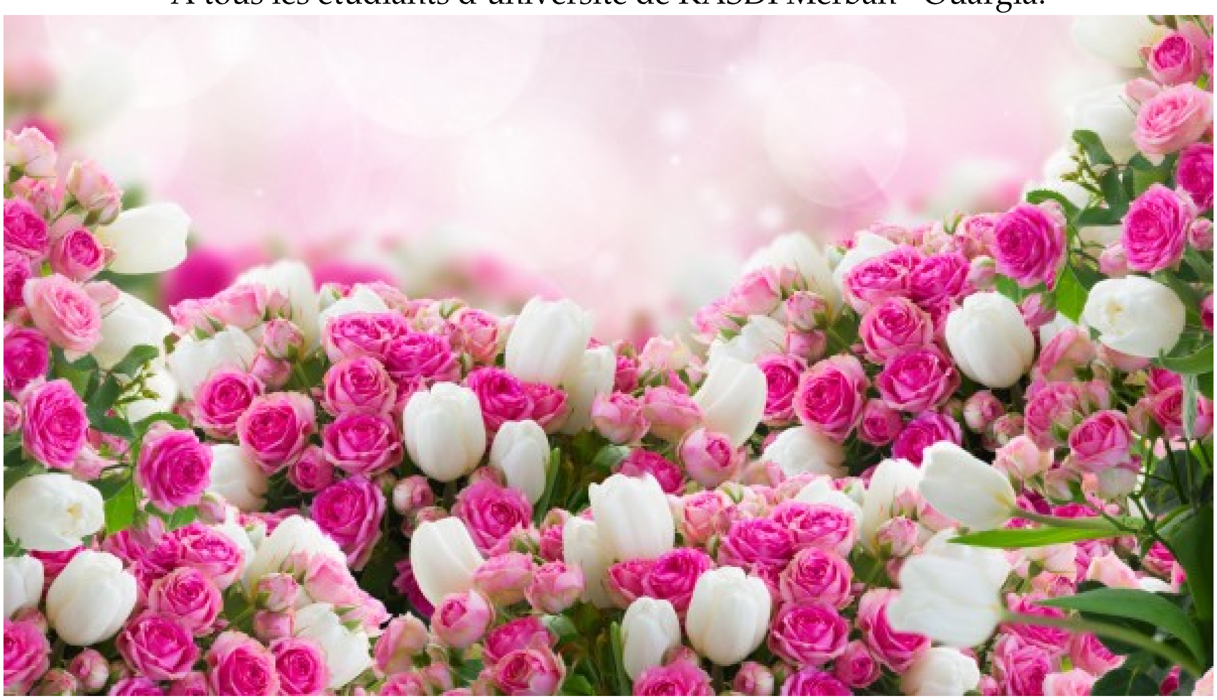
DÉDICACES

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents :
Á ma mère**" Aldjai chawai "** qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.
Á mon père**" Mechri "**, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ;
Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

Á mon mari **" Mostapha Hamel "** que j'étais le lien en encourageant et me payer avant et donner un coup de main de différentes façons.
Á mon fils chéri Blottie "**Abde Rahmane Sajed**" Dieu le protège Á mes frères **Aissa,**

Bilal, Abd Raouf, Hamza, Oussama, Mohamed Amin qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.
Á la nouvelle famille qui m'a donné une seconde mère **"Hada"**, et le second père **"Abde Rahman"** et ses frères **"Fawaz,yousef, Adam "**et soeurs **" Randa, Johaina, Aicha, Narjas** qui me aider.
Á toute ma famille.
Á tous les amis, surtout **"Asma"**
Á mes encadreur **M.Tellab Ibrahime** de qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.
Á tous les étudiants d'université de KASDI Merbah - Ouargla.



REMERCIEMENT

Après une recherche de voyage et d'efforts et de diligence jusqu'à la réalisation complète de ce travail,

Je remercie Dieu le Tout-Puissant pour la bénédiction que nous est le Tout-Puissant,

Je ne peut être pointés du plus haut grâce et expressions d'appréciation **M. TELLAB Brahim** pour ses efforts, et ses conseils tout au long l'achèvement de ce travail.

De plus, ne pas oublier d'étendre les remerciements au comité et plus belles phrases les plus précieux pour le jury composé de :

M. Amara Abdelkader d'avoir accepté la présidence du jury .
Aussi je remercie vivement
M. Abassi Hocine et **M. Bencheikh Abdelkrim** d'avoir accepté d'être examinateurs (2 de ce travail.

J'adresse également mes remerciements à tous ceux qui ont contribué à donner un coup de main pour accomplir notre formation et surtout à tous les enseignants du département des mathématiques de **Université Kasdi Merbah Ouargla**.

Pour ceux qui ont planté l'optimisme dans notre chemin et nous ont fourni l'assistance, les installations et l'information, nous avons tous nos remerciements.

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les polynômes orthogonaux sont un sujet d'étude pour les mathématiciens depuis longtemps. À titre d'exemple, Adrien-Marie Legendre en était arrivé dès le début du XIXe siècle à considérer la suite de polynômes auxquels son nom est maintenant associé, les polynômes de Legendre, dans le cadre de ses calculs concernant la mécanique céleste. Depuis cette époque jusqu'à aujourd'hui, la théorie concernant ces polynômes n ?a cessé de croître en précision et aussi en importance, puisque d'autres applications se sont développées. En effet, avec l'avènement des ordinateurs, les polynômes orthogonaux sont devenus des outils d'approximation et d'encodage-décodage très utiles. C'est pourquoi leur étude continue encore aujourd'hui. Ce mémoire se veut une (brève) introduction à l'étude des polynômes orthogonaux, qui soit accessible et rigoureuse. Aussi, les définitions puis les théorèmes seront développés dans le cadre le plus général possible.voir [9]
Les polynômes orthogonaux jouent un rôle très important dans divers branches de sciences. La relation des polynômes orthogonaux avec d'autre branches de mathématiques est vraiment impressionnante sans même essayer d'être complète, nous mentionnons à titre d'exemples, les fractions continues, la théories des opérateurs, les fonctions analytiques, l'interpolation polynomiale, théorie de l'approximation, la théorie des nombres, théorie des graphes,...

Les polynômes orthogonaux sont introduit par la théorie de Sturn-Liouville. Dans cet travail nous présentons quelques préliminaires de la théorie analytique des polynômes orthogonaux, ainsi quelques définitions et propriétés importantes.

Ce travail est organisé de la manière suivante :

Premier chapitre : est réserver comme un rappel sur les espaces de Hilbert, ses propriétés et quelques applications.

Deuxième chapitre : dans ce chapitre, nous présentons les polynômes orthogonaux, ses propriétés et quelques exemples classiques des familles de polynômes orthogonaux.

Troisième chapitre : Dans le troisième chapitre, nous donnons quelques applications sur les polynôme orthogonaux en particulier les formules de quadratures.

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle forme sesquilinéaire sur E, toute application ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant,*
pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y, z \in E$:
1. $\phi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\phi(x, z) + \beta\phi(y, z)$
2. $\phi(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}\phi(x, y) + \overline{\beta}\phi(x, z)$
On dit que ϕ est hermitienne si elle vérifie de plus :
3. $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$.

Remarque 1.1.1 *Dans le cas oú $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est simplement une forme bilinéaire et une forme hermitienne est une forme bilinéaire symétrique.*

1.1.1 Produit hermitien

Définition 1.1.2 *Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. Une application $\phi : (x, y) \longrightarrow \phi(x, y)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ est appelée produit hermitien si elle vérifie les conditions suivantes :*
1. ϕ est sesquilinéaire.
2. $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$.
3. $\phi(x, y) \geq 0$ *et* $\phi(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

1.1.2 Produit scalaire

Définition 1.1.3 *Soit E un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur E, est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $E \times E$.*
• Un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé espace euclidien. Si $(x, y) \longrightarrow \langle x, y\rangle$ est un produit scalaire sur E, la norme euclidienne d'un élément $x \in E$ est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
• Un espace vectoriel réel de dimension infinie muni d'un produit scalaire est appelé espace pré-hilbertien réel. On notea généralement $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire.

Définition 1.1.4 *Un espace vectoriel muni d'un produit hermitien est un espace pré-hilbertien. Si de plus, il est complet pour la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, c'est un espace de Hilbert.*

Remarque 1.1.2 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel normé complet, c'est donc un espace de Banach. Bien entendu, un espace de Banach n'est pas nécessairement un espace de Hilbert.*

Exemple 1.1.1 *1.* $\mathbb{R}$ *est un espace de Hilbert,* $\langle x, y\rangle = xy$ *et* $\|x\| = |x|$.

2. $\mathbb{R}^n$ *est un espace de Hilbert,* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *et* $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

3. $\mathbb{C}^n$ *est un espace de Hilbert,* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ *et* $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$.

4. $l^2(\mathbb{N}) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}/\ x_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ *est un espace de Hilbert,*
$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ *et* $\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$.

5. $L^2(I)$ *(I ouvert) est un espace de Hilbert,* $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)\overline{g(t)}dt$ *et* $\|f\| = \left(\int_I |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

proposition 1.1.1 ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)*** *Soit H un espace pré-hilbertien. Alors,*

$$\forall x, y \in H :\ \ |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|. \tag{1.1}$$

Preuve :
1. Si $y = 0$, (1.1) est évidente.
2. Supposons maintenant que $y \neq 0$.
Pour tout réel t, on pose : $p(t) = \|x + ty\|^2$. On a :

$$\begin{aligned} p(t) = \|x + ty\|^2 &= \langle x + ty, x + ty\rangle \\ &= \langle x, x + ty\rangle + \langle ty, x + ty\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, ty\rangle + \langle ty, x\rangle + \langle ty, ty\rangle \\ &\le \|x\|^2 + 2t|\langle x, y\rangle| + t^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Puisque $y \neq 0$ alors $\|y\|^2 \neq 0$. L'expression polynômiale du second degré $p(t)$ est positive oú nulle pour tout réel t. On en déduit donc que son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire : $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$.

■

proposition 1.1.2 *Soit H un espace pré–hilbertien muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle$, alors pour tout $x, y \in H$, on a :*
1. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. *(Identité du parallélogramme)*
2. Si H est réel, alors : $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$. *(Identité de polarisation)*
3. Si H est complexe, alors : $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$.

Preuve :
1. On a :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \tag{1.2}$$
$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2. \tag{1.3}$$

En additionnant (1.2) et (1.3), on trouve :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Une autre fois, de (1.2) et (1.3) et par soustraction, on arrive à :

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle). \tag{1.4}$$

2. Si H est réel, (1.4) donne :

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

3. Si H est complexe, on remplace y par iy dans (1.4), on trouve :

$$\begin{aligned}\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 &= 2(\langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle) \\ &= 2(-i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle),\end{aligned}$$

on en déduit donc que :

$$i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = 2(\langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle). \tag{1.5}$$

De (1.4) et (1.5) et par addition, on obtient :

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = 4\langle x,y\rangle,$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\|x+i^k y\|^2.\end{aligned}$$

■

corollaire 1.1.1 ***(Théorème de la médiane)***
Soit H un espace pré-hilbertien muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme associée $\|.\|$. Si x, y, z sont des éléments de H, alors :

$$\left\|2\left(z - \frac{x+y}{2}\right)\right\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2\right).$$

Preuve :
Pour la preuve, il suffit d'appliquer l'identité du parallélogramme en posant $X = z - x$ et $Y = z - y$.

■

1.2 Projection orthogonale

Définition 1.2.1 • *Soit H un espace pré-hilbertien sur $\mathbb{K}$. Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dits orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$ et on écrit $x \perp y$*

•*Soit A un sous-ensemble de H. Un vecteur $x \in H$ et A sont dits orthogonaux dans H, si x est orthogonal à tout vecteur de A, et on note $x \perp A$. L'orthogonal de A est noté $A^{\perp}$ et on a :*

$$A^{\perp} = \{x \in H : \ \langle x, a\rangle = 0, \ \forall a \in A\}.$$

•*Deux sous-ensembles A et B sont orthogonaux, si pour tout $x \in A$ et $y \in B$ on a : $x \perp y$ et on écrit $A \perp B$.*

Exemple 1.2.1 *Si $H = \mathbb{R}^3$ et $A = \{(a_1, a_2, 0)/a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, alors $A^{\perp} = \{(0, 0, x_3)/x_3 \in \mathbb{R}\}$.*

proposition 1.2.1 *Soit H un espace pré-hilbertien et $A \subset H$, alors :*
1. Pour tout $x, y, z \in H$ et $x \perp y$, on a : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (théorème de Pythagore).
2. $0 \in A^{\perp}$.
3. Si $0 \in A$, alors $A \cap A^{\perp} = \{0\}$.
4. Si $B \subset A$ alors $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.
5. $A^{\perp}$ est un sous-espace fermé de H.
6. $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
7. $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$.

1.2.1 Ensembles convexes

Définition 1.2.2 *Une partie C d'un espace vectoriel E est dite convexe, si elle posséde la propriété géométrique suivante :*

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in C.$$

Exemple 1.2.2 *1. Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*
2. Dans un espace vectoriel normé, la boule fermée $\overline{B}(a, r) = \{/x \|x - a\| \leq r\}$ est convexe.

1.2.2 Projection sur un convexe fermé

Théorème 1.2.1 *Soit H un espace de Hilbert de norme $\|.\|_H$. C un ensemble non vide convexe et fermé de H et f un élément de H. Il existe un unique élément $f^{\star} \in C$ appelé projeté de f sur C vérifiant :*

$$\|f - f^{\star}\|_H = \inf_{g \in C} \|f - g\|_H = d(f, C). \tag{1.6}$$

De plus, une condition nécessaire et suffisante pour que $f^{\star}$ soit le projeté de f sur C est :

$$\forall g \in C : Re\big(\langle f - f^{\star}, g - f^{\star}\rangle_H\big) \leq 0, \tag{1.7}$$

où $\langle ., .\rangle_H$ désigne le produit hermitien de H associée à la norme $\|.\|_H$.

Preuve :

<u>Existence :</u> Par définition de la borne inférieure, il existe une suite (f_n) d'éléments de C telle que :

$$\|f - f_n\|_H \longrightarrow d(f, C) = \inf_{g \in C} \|f - g\|_H.$$

Montrons maintenant que la suite (f_n) est de Cauchy. Pour cela on applique le théorème de la médiane :

$$\|x - y\|^2 = 2\bigg(\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2\bigg) - 4\bigg\|z - \frac{x + y}{2}\bigg\|^2,$$

en posant $z = f$, $x = f_n$ et $y = f_p$. On a :

$$\|f_n - f_p\|^2 = 2\bigg(\|f - f_n\|^2 + \|f - f_p\|^2\bigg) - 4\bigg\|f - \frac{f_n + f_p}{2}\bigg\|^2.$$

Or $\frac{f_n+f_p}{2} \in C$, car $\bigg(\frac{f_n+f_p}{2} = \frac{1}{2}f_n + (1-\frac{1}{2})f_p\bigg)$ donc : $\bigg\|f - \frac{f_n+f_p}{2}\bigg\|^2 \geq d^2(f, C)$ et par conséquent,

$$\|f_n - f_p\|^2 \leq 2\bigg(\|f - f_n\|^2 + \|f - f_p\|^2\bigg) - 4d^2(f, C).$$

Mais, on sait que $\lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} \|f - f_p\| = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|f - f_n\| = d(f, C)$, alors cela nous permet de conclure que : $\|f_n - f_p\| \longrightarrow 0$ quand $n, p \longrightarrow +\infty$. c'est-à-dire que (f_n) est de Cauchy. Comme H est un espace de Hilbert, il est complet et donc (f_n) converge vers une limite $f^\star$. L'ensemble C étant fermé, cette limite est donc dans C et par continuité de la norme, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f - f_n\|_H = \|f - f^\star\|_H = d(f, C).$$

Nous avons donc l'existence d'un projeté $f^\star$ de f sur C.

<u>Unicité :</u>

L'unicité provient du théorème de la médiane. Supposons l'existence de deux éléments $f^\star$ et $\widetilde{f}$ de C qui réalisent l'infumum. L'égalité de la médiane appliquée à $z = f$, $x = f^\star$ et $y = \widetilde{f}$ donne :

$$\begin{aligned} \|f^\star - \widetilde{f}\|_H^2 &\leq 2\bigg(\underbrace{\|f - f^\star\|_H^2}_{d^2(f,C)} + \underbrace{\|f - \widetilde{f}\|_H^2}_{d^2(f,C)}\bigg) - 4d^2(f, C) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\widetilde{f} = f^\star$, d'où l'unicité de $f^\star$.

• Montrons maintenant la condition (1.7).
Soit $f^\star$ le projeté de f sur C et soit $g \in C$ et $t \in]0, 1[$.
Comme C est convexe on aura $(1 - t)f^\star + tg \in C$, et par définition de $f^\star$, nous avons :

$$\forall t \in]0, 1[: \|f - f^\star\|_H^2 \leq \|f - [(1 - t)f^\star + tg]\|_H^2$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in]0,1[: \|f - f^\star\|_H^2 \leq \|(f - f^\star) - t(g - f^\star)\|_H^2. \tag{1.8}$$

En développant (1.8), il vient :

$$\forall t \in]0,1[: 0 \leq t^2\|g - f^\star\|_H^2 - 2tRe\big(\langle f - f^\star, g - f^\star\rangle_H\big),$$

et en divisant par t, on obtient :

$$\forall t \in]0,1[: 2Re\big(\langle f - f^\star, g - f^\star\rangle_H\big) \leq t\|g - f^\star\|_H^2.$$

Si en faisant tendre t vers 0, on aura le résultat voulu :

$$\forall g \in C : Re\big(\langle f - f^\star, g - f^\star\rangle_H\big) \leq 0.$$

• Réciproquement, supposons que (1.7) est vitrifie et soit g un élément de C, alors on a :

$$\begin{aligned}\|f - g\|_H^2 &= \|(f - f^\star) - (g - f^\star)\|_H^2 \\ &= \|f - f^\star\|_H^2 + \|g - f^\star\|_H^2 - 2Re\big(\langle f - f^\star, g - f^\star\rangle_H\big).\end{aligned}$$

Or $g \in C$ donc (1.7) implique que

$$Re\big(\langle f - f^\star, g - f^\star\rangle_H\big) \leq 0, \tag{1.9}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\|f - g\|_H^2 &\geq \|f - f^\star\|_H^2 + \|g - f^\star\|_H^2 \\ &\geq \|f - f^\star\|_H^2, \quad \forall g \in C.\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f^\star$ est le projeté de f sur C.

■

corollaire 1.2.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut caractériser le projeté $f^\star$ de f sur C par :*

$$\forall g \in C : Re\big(\langle f^\star - g, f - g\rangle_H\big) \geq 0. \tag{1.10}$$

Preuve :
• Soit $f^\star$ le projeté de f sur C, alors (1.7) donne :

$$\forall g \in C : Re\big(\langle f - f^\star, g - f^\star\rangle_H\big) \leq 0, \tag{1.11}$$

On a :

$$\begin{aligned}\forall g \in C : \langle f^\star - g, f - g\rangle_H &= \langle f^\star - g, (f - f^\star) + (f^\star - g)\rangle_H \\ &= \langle f^\star - g, f - f^\star\rangle_H + \langle f^\star - g, f^\star - g\rangle_H \\ &= \langle f^\star - g, f - f^\star\rangle_H + \|f^\star - g\|_H^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\forall g \in C : Re\big(\langle f^\star - g, f - g\rangle_H\big) &= Re\big(\langle f^\star - g, f - f^\star\rangle_H\big) + \|f^\star - g\|_H^2 \\ &= -Re\big(\langle f - f^\star, g - f^\star\rangle_H\big) + \|f^\star - g\|_H^2.\end{aligned}$$

En exploitant (1.11), on arrive à :

$$\forall g \in C : Re\big(\langle f^\star - g, f - g\rangle_H\big) \geq 0.$$

• Réciproquement, Soit $g \in C$. Alors $h = f^\star + t(g - f^\star) \in C$ car ($f^\star \in C$).
Pour tout $t \in]0,1[$, on a :

$$\langle f^\star - h, h - f\rangle_H = \langle -t(g - f^\star), f^\star - f + t(g - f^\star)\rangle_H,$$

donc,

$$Re\big(\langle f^\star - h, h - f\rangle_H\big) = -tRe\big(\langle g - f^\star, f^\star - f + t(g - f^\star)\rangle_H\big),$$

c'est-à-dire que :

$$Re\big(\langle f^\star - h, f - h\rangle_H\big) = tRe\big(\langle g - f^\star, f^\star - f + t(g - f^\star)\rangle_H\big),$$

en utilisant (1.10), il vient :

$$\forall t \in]0,1[: Re\big(\langle g - f^\star, f^\star - f + t(g - f^\star)\rangle_H\big) \geq 0.$$

Si en faisant tendre t vers 0^+, on obtient :

$$Re\big(\langle g - f^\star, f^\star - f\rangle_H\big) \geq 0$$

autrement dit :

$$Re\big(\langle f - f^\star, g - f^\star\rangle_H\big) \leq 0.$$

Ceci veut dire que $f^\star$ est le projeté de f sur C. (d'après (1.7))

■

1.2.3 Projection sur un sous-espace de Hilbert

Théorème 1.2.2 *Soient E un espace de Hilbert, F un sous-espace de Hilbert et x un élément de E. Alors, il existe un unique élément $a_x \in F$ tel que :*

$$\| x - a_x \| = d(x, F).$$

De plus, a_x est l'unique élément de F tel que $x - a_x$ soit orthogonal à F, il est noté $P_F(x)$ et est appelé la projection orthogonale de x sur F.

Preuve :

• La première assertion est déjà démontrer précédemment.

• Pour la deuxième, on remarque que si $b \in F$, alors $a + \alpha b \in F$ pour tout complexe α. La relation (1.7) implique que

$$Re\big(\langle x - a, \alpha b\rangle\big) = Re\big(\langle x - a, \alpha b + a - a\rangle\big) \leq 0,$$

il suffit donc de prendre $\alpha = \pm 1$ pour obtenir : $Re\big(\langle x-a,b\rangle\big) \leq 0$ et $Re\big(\langle x-a,-b\rangle\big) \leq 0$, et puisque $\langle x-a,-b\rangle = -\langle x-a,b\rangle$, on obtient :

$$Re\big(\langle x-a,b\rangle\big) = 0, \quad \forall b \in F, \tag{1.12}$$

et aussi prendre $\alpha = \pm i$ pour avoir : $Re\big(\langle x-a,ib\rangle\big) \leq 0$ et $Re\big(\langle x-a,-ib\rangle\big) \leq 0$.
On sait que $\langle x-a,ib\rangle = -i\langle x-a,b\rangle$, et $\langle x-a,-ib\rangle = i\langle x-a,b\rangle$.
Puisque $Re\big(\langle x-a,ib\rangle\big) \leq 0$ et $Re\big(\langle x-a,-ib\rangle\big) \leq 0$, alors :

$$Re\big(i\langle x-a,b\rangle\big) = 0. \tag{1.13}$$

Mais, on a :

$$\langle x-a,b\rangle = Re\big(\langle x-a,b\rangle\big) + iIm\big(\langle x-a,b\rangle\big),$$

c'est-à-dire que

$$i\langle x-a,b\rangle = -Im\big(\langle x-a,b\rangle\big) + iRe\big(\langle x-a,b\rangle\big).$$

Donc (1.13) implique que :

$$Im\big(\langle x-a,b\rangle\big) = 0, \quad \forall b \in F, \tag{1.14}$$

de (1.12) et (1.14) on déduit que $\langle x-a,b\rangle = 0, \ \forall b \in F$, i.e. $x-a \perp F$.

• Réciproquement, Soit $a \in F$ tel que $x-a \perp F$. Pour tout $b \in F$, on a

$$\begin{aligned} \|x-b\|^2 &= \|x-a+a-b\|^2 \\ &= \|x-a\|^2 + \|b-a\|^2 \ \ (\text{car } b-a \in F \text{ et } x-a \perp F) \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\|x-b\|^2 \geq \|x-a\|^2 \ \ \forall b \in F,$$

il en résulte que $a = P_F(x)$.

■

corollaire 1.2.2 *Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace de Hilbert de E. Alors, les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E, c'est-à-dire que $E = F \bigoplus F^\perp$.*

Preuve :
• $F \cap F^\perp = 0$ (évident).
• Pour tout $x \in E$ on peut écrire : $x = x - P_F(x) + P_F(x)$, avec $x - P_F(x) \in F^\perp$ et $P_F(x) \in F$.

■

corollaire 1.2.3 • *L'application P_F est un opérateur linéaire de E dans F qui vérifie, pour tout x et tout y dans E,*
• $\|P_F x\| \leq \|x\|$,
• $\langle P_F x, y\rangle = \langle x, P_F y\rangle$,
• $P_F(P_F x) = P_F x$.

Preuve :
• P_F est linéaire :
On va montrer que :

$$\forall x, y \in E,\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} :\ \ P_F(\alpha x + \beta y) = \alpha P_F(x) + \beta P_F(y).$$

On a :

$$x \in E \Longrightarrow \exists ! x_1 \in F, \exists ! x_2 \in F^{\perp} :\ \ x = x_1 + x_2 = P_F(x) + P_{F^{\perp}}(x),$$

donc,

$$\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2, \tag{1.15}$$

de même, on a :

$$y \in E \Longrightarrow \exists ! y_1 \in F, \exists ! y_2 \in F^{\perp} :\ \ y = y_1 + y_2 = P_F(y) + P_{F^{\perp}}(y),$$

donc,

$$\beta y = \beta y_1 + \beta y_2. \tag{1.16}$$

De (1.15) et (1.16) on déduit que :

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2),$$

avec, $\alpha x_1 + \beta y_1 \in F$ et $(\alpha x_2 + \beta y_2) \in F^{\perp}$. Comme $\alpha x + \beta y \in E$, alors,

$$\alpha x + \beta y = P_F(\alpha x + \beta y) + P_{F^{\perp}}(\alpha x + \beta y). \tag{1.17}$$

L'écriture (1.17) est unique, donc :

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= P_F(\alpha x + \beta y) + P_{F^{\perp}}(\alpha x + \beta y) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= \alpha P_F(x) + \beta P_F(y) + \alpha P_{F^{\perp}}(x) + \beta P_{F^{\perp}}(y), \end{aligned} \tag{1.18}$$

par conséquent,

$$P_F(\alpha x + \beta y) = \alpha P_F(x) + \beta P_F(y),$$

et

$$P_{F^{\perp}}(\alpha x + \beta y) = \alpha P_{F^{\perp}}(x) + \beta P_{F^{\perp}}(y).$$

d'où P_F et $P_{F^{\perp}}$ sont linéaires.

• Pour $x \in E$, on écrit $x = x - P_F(x) + P_F(x)$. en appliquant le théorème de Pythagore, il vient :

$$\|x\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2 \geq \|P_F(x)\|^2,$$

donc, $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$.
De plus, on sait que $\forall y \in F : P_F(y) = y$, et comme $\forall x \in E : P_F(x) \in F$, on en déduit que

$$\forall x \in E : P_F(P_F x) = P_F(x).$$

On a aussi, $\forall x, y$ dans E, les éléments $P_F x$ et $y - P_F y$ sont orthogonaux, il en résulte que :
$\langle P_F x, y - P_F y \rangle = 0$ c'est-à-dire, $\langle P_F x, y \rangle = \langle P_F x, P_F y \rangle$,
de même,
$\langle x - P_F x, P_F y \rangle = 0$ c'est-à-dire, $\langle x, P_F y \rangle = \langle P_F x, P_F y \rangle$, ceci termine la preuve.

■

corollaire 1.2.4 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert E. F est dense dans E, si et seulement si, $F^{\perp} = \{0\}$.*

Remarque 1.2.1 *En particulier, pour montrer qu'un élément de E est nul, il suffit de montrer qu'il est dans l'orthogonal d'un sous-espace dense dans E.*

1.3 Problème de minimisation

Soient $v_1, v_2, ..., v_k$ des éléments d'un espace de Hilbert E, linéairement indépendants et soit $x \in E$. On veut trouver un moyen pour calculer la valeur minimum de la quantité

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \right\|, \tag{1.19}$$

lorsque $c_1, c_2, ..., c_k$ décrivent $\mathbb{K}$, et de trouver les valeurs correspondantes de $c_1, c_2, ..., c_k$.

Soit F l'espace vectoriel engendré par les éléments $v_1, v_2, ..., v_k$. C'est un sous-espace fermé de E. (puisque sa dimension est finie égale à k)

La quantité qu'on cherche à minimiser représente la distance de x à l'élément de F défini par $\sum_{j=1}^{k} c_j v_j$. Le théorème précèdent précise que $P_F(x)$ est l'unique élément de F qui rend minimum la quantité (1.19).

$P_F(x)$ s'écrit sous la forme $P_F(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j$ et aussi $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.

(ce qui pourrait alors être utiliser pour obtenir des renseignements sur le calcul des coefficients $c_1, c_2, ..., c_k$). Pour cela, posons :

$$a_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle, \ \ b_i = \langle x, v_i \rangle.$$

La propriété $x - P_F(x) \perp F$ implique que $\langle x - P_F(x), v_i \rangle = 0$, pour $1 \leq i \leq k$, ce qui fournit k équations linéaires dont les inconnues sont $c_1, c_2, ..., c_k$:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq k. \tag{1.20}$$

L'existence et l'unicité de $P_F(x)$ implique que le déterminant de la matrice (a_{ij}) n'est pas nul, et les coefficients (c_j) se calculent en résolvant le système (1.20).

Soit maintenant γ la valeur minimale de

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \right\|.$$

Comme $x - P_F(x) \perp F$, alors $\langle x - P_F(x), P_F(x)\rangle = 0$. Donc,

$$\begin{aligned}
\gamma^2 &= \langle x - P_F(x), x - P_F(x)\rangle \\
&= \langle x, x - P_F(x)\rangle \\
&= \langle x, x - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j\rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} \overline{c_j} b_j,
\end{aligned}$$

et notre problème est résolu.

•Cas particulier
Si les éléments $v_1, v_2, ..., v_k$ sont deux à deux orthogonaux, alors :

$$a_{ij} = \begin{cases} \|v_i\|^2 & si \;\; i = j, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et par suite le système (1.20) donne, pour tout i : $c_i = \frac{b_i}{\|v_i\|^2}$ et par conséquent,

$$\begin{aligned}
P_F(x) &= \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j}{\|v_j\|^2} v_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} \langle x, v_j\rangle \frac{v_j}{\|v_j\|^2}.
\end{aligned}$$

On a :

$$c_j = \frac{b_j}{\|v_j\|^2} \Longrightarrow \overline{c_j} = \frac{\overline{b_j}}{\|v_j\|^2} = \frac{\overline{\langle x, v_j\rangle}}{\|v_j\|^2}$$

et

$$b_j = \langle x, v_j\rangle.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\gamma^2 &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} \overline{c_j} b_j \\
&= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} \frac{\overline{\langle x, v_j\rangle}}{\|v_j\|^2} \langle x, v_j\rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} \frac{|\langle x, v_j\rangle|^2}{\|v_j\|^2}.
\end{aligned}$$

Si les v_j sont orthonormés, les résultats se résument au théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *Soient $v_1, v_2, ..., v_k$ des éléments deux à deux orthogonaux et de nome 1 dans un espace de Hilbert E, soit F le sous-espace vectoriel engendré par (v_j) $(1 \leq j \leq k)$ et soit x un élément de E. Alors quels que soient les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, on a :*

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{k} \langle x, v_j \rangle v_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \right\|.$$

L'égalité à lieu, si et seulement si $\lambda_j = \langle x, v_j \rangle$, pour tout $1 \leq j \leq k$.
• *La projection orthogonale de x sur le sous-espace F est :*

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle x, v_j \rangle v_j$$

• *La distance γ de x au sous-espace F est donnée par :*

$$\gamma^2 = \|x - P_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} |\langle x, v_j \rangle|^2.$$

1.4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 1.4.1 *Soit E un espace pré-hilbertien. Pour toute famille libre $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans E, il existe une unique famille orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans E telle que*

$$\forall k \in \{1, ..., p\} : \begin{cases} vect\{e_1, ..., e_p\} = vect\{x_1, ..., x_p\}, \\ \langle x_k, e_k \rangle > 0 \end{cases}$$

et la famille orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est définie par :

$$\begin{cases} f_1 = x_1, \\ e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1, \\ e_k = \frac{1}{\|f_k\|} f_k, \quad k = 2, ..., p, \\ f_k = x_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, e_j \rangle e_j \end{cases}$$

Remarque 1.4.1 *Le calcul des $\|f_k\|$, peut être simplifier en écrivant :*

$$\begin{aligned} \|f_k\|^2 &= \langle f_k, x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, e_j \rangle e_j \rangle \\ &= \langle f_k, x_k \rangle, \quad (\textit{car } f_k \textit{ est orthogonal à } ej \textit{ pour } 1 \leq j \leq k-1). \end{aligned}$$

Remarque 1.4.2 *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie ou infinie dénombrable de E, alors, il existe une base orthonormée pour F.*

Exemple 1.4.1 *On considère le produit scalaire définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :*

$$(P,Q) \longmapsto \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

De la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on va chercher une base orthonormée $(P_i)_{1\leq i\leq 3}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt. On a :

$$\begin{cases} Q_1 = 1, \\ P_1 = \frac{1}{\|Q_1\|}Q_1, \\ P_k = \frac{1}{\|f_k\|}f_k, \quad k = 2,3 \\ f_k = Q_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{2}\langle Q_k, P_j\rangle P_j \\ \|f_k\|^2 = \langle f_k, Q_k\rangle, \quad k = 2,3. \end{cases}$$

On a :

- $Q_1 = 1, \quad \|Q_1\|^2 = 2, \quad P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
- $f_2 = Q_2 - \langle Q_2, P_1\rangle P_1 = x, \quad \|f_2\|^2 = \langle f_2, Q_2\rangle = \frac{2}{3}, \quad \|f_2\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad P_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x.$
- $f_3 = Q_3 - \langle Q_3, P_1\rangle P_1 - \langle Q_3, P_2\rangle P_2 = x^2 - \frac{1}{3}, \quad \|f_3\|^2 = \frac{8}{45}, \quad \|f_3\| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, \quad P_3 = \frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2 - \frac{1}{3}).$

Une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc, $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2 - \frac{1}{3})\big)$.

Chapitre 2

Polynômes orthogonaux

2.1 Généralités et définitions

Soit I un intervalle borné (ou non) de $\mathbb{R}$ et soit $w :\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive appelée poids telle que :

$$\forall n \not\Leftarrow\in \mathbb{N} : \quad \int_I |x|^n w(x)dx < +\infty.$$

Sous ces hypothèses, on considère l'espace vectoriel E des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\int_I |f(x)|^2 w(x)dx < +\infty.$$

L'espace E muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)dx$$

est un espace pré-hilbertien.Voir [12].

étant donné un système d'éléments linéairement indépendants $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ on sait, à l'aide du procédé de Gram-Shmidt construire un système $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ orthonormal. Dans ce travail, on va s'intéresser au système $\{1, x, x^2, \ldots\}$. on va commencer par donner un critère simple pour déterminer l'indépendance linéaire d'un système de polynômes. Alors, dans toute la suite on va supposer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \int_a^b x^n \omega(x)dx < \infty.$$

Voir[12].

Définition 2.1.1 *Les polynômes orthogonaux relativement à la fonction poids w sont des polynômes P_n de degré n vérifiant la relation d'orthogonalité :*

$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_I P_n(x)P_m(x)w(x)dx = 0, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots \quad (n \neq m).$$

Théorème 2.1.1 *Tout système $\{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ de polynômes dans lequel p_n est de degré exactement égal à n est linéairement indépendant.*
De plus, tout polynôme de degré inférieur ou égal à n, peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Voir [12].

Preuve :
Pour la preuve on renvoit à [12].

■

Théorème 2.1.2 *Il existe une suite unique de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire de E de degré n à coefficients réels et dont le terme de plus haut degré est x^n.*

Preuve :
La démonstration se fait par récurrence. On construit P_n par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Shmidt.
On $P_0(x) = 1$, puisque P_0 doit être unitaire.
Supposons que la propriété est établie jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et soit $(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})$ de l'espace $\mathbf{P}_{n-1}$.
Construisons un polynôme sous la forme :

$$Q_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x).$$

Comme le produit scalaire $\langle Q_n, P_k\rangle$ s'annule pour les valeurs de $k = 0, 1, \ldots, n-1$, on en déduit que :

$$\langle x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x), P_k\rangle = 0,$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} \langle x^n, P_k\rangle &= \langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x), P_k\rangle \\ &= \langle \alpha_0 P_0(x) + \cdots + \alpha_k P_k(x), P_k\rangle \\ &= \alpha_k \langle P_k, P_k\rangle \\ &= \alpha_k \|P_k\|^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

ce qui donne,

$$\alpha_k = \frac{\langle x^n, P_k\rangle}{\|P_k\|^2},$$

par conséquent,

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle x^n, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k(x).$$

■

Remarque 2.1.1 *La suite (P_n) ainsi construite n'est pas orthonormée en général. La suite normalisée $\widetilde{P}_n = \frac{1}{\|P_n\|_2} P_n$ définit bien une base orthonormée de l'espace $\mathbf{P}_n$ de polyômes.*

Théorème 2.1.3 *Les Polynômes orthogonaux P_n vérifient la relation de récurrence :*

$$P_n(x) = (x - \lambda_n)P_{n-1}(x) - \mu_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

et

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - \lambda_1,$$

avec,

$$\lambda_n = \frac{\langle xP_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\|P_{n-1}\|_2^2}, \quad \mu_n = \frac{\|P_{n-1}\|_2^2}{\|P_{n-2}\|_2^2}.$$

Preuve :
Le polynôme xP_{n-1} et de degré n, alors on peut l'écrire sous la forme :

$$xP_{n-1} = P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x). \tag{2.2}$$

Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle xP_{n-1}, P_k\rangle &= \langle P_n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x), P_k\rangle \\
&= \underbrace{\langle P_n, P_k\rangle}_{=0} + \langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x), P_k\rangle \\
&= \alpha_k \|P_k\|_2^2,
\end{aligned}$$

et par définition du produit scalaire on a :

$$\langle xP_{n-1}, P_k\rangle = \langle P_{n-1}, xP_k\rangle = \int_I xP_{n-1}(x)P_k(x)w(x)dx.$$

Si $k \leq n-3$, alors $xP_k \in \mathbf{P}_{n-2}$, donc $\langle P_{n-1}, xP_k\rangle = 0$.
Il reste donc au plus deux coefficients non nuls

$$\alpha_{n-1} = \frac{\langle xP_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\|P_{n-1}\|_2^2} = \lambda_n, \quad \alpha_{n-2} = \frac{\langle P_{n-1}, xP_{n-2}\rangle}{\|P_{n-2}\|_2^2}.$$

Or $xP_{n-2} = P_{n-1} + Q, \quad Q \in \mathbf{P}_{n-2}$, donc

$$\begin{aligned}
\langle P_{n-1}, xP_{n-2}\rangle &= \langle P_{n-1}, P_{n-1} + Q\rangle \\
&= \|P_{n-1}\|_2^2 + \langle P_{n-1}, Q\rangle \\
&= \|P_{n-1}\|_2^2,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\alpha_{n-2} = \frac{\|P_{n-1}\|_2^2}{\|P_{n-2}\|_2^2} = \mu_n.$$

Par substitution dans (2.2), on obtient :

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + \lambda_n P_{n-1}(x) + \mu_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

c'est-à-dire :

$$P_n(x) = (x - \lambda_n)P_{n-1}(x) - \mu_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 2.$$

■

Exemple 2.1.1 *On prend* $I = [-1, 1]$, *et* $w(x) = 1$.
On a : $P_0(x) = 1$.

$$\lambda_1 = \frac{\langle xP_0, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \int_{-1}^{1} xdx = 0 \Longrightarrow P_1 = x - \lambda_1 = x.$$

$$\lambda_2 = \frac{\langle xP_1, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} = 0 \quad et \mu_2 = \frac{\langle xP_1, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \frac{1}{3},$$

donc,

$$P_2(x) = (x - \lambda_2)P_1(x) - \mu_2 P_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Ce sont les polyômes de Legendre unitaires.

Définition 2.1.2 *Si on orthogonalise le système* $\{1, x, x^2, \ldots\}$ *qui est indépendant on obtient un système orthogonal de polynômes* $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$ *uniquement déterminer par les conditions :*

1. $P_n(x)$ *est un polynôme de degré exactement égal à* n *dans lequel le coefficient de* x^n *est* $k_n > 0$.
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *le système* $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x) \ldots, P_n(x)\}$ *est orthonormal :*

$$\int_I P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{nm}$$

Voir [6].

Notation
Nous dirons que $\rho(x)$ est un π_n, si $\rho(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, et nous noterons $h_n = \langle P_n, P_n\rangle$.(Voir [12]).

2.1.1 Formule de Christoffel

Théorème 2.1.4 *Soit* $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille orthonormée de polynômes associée à la distribution* $\omega(x)dx$ *sur* $[a, b]$ *et soit :*

$$\rho(x) = c(x - x_1)\ldots(x - x_l)$$

un $\pi_l \geq 0$ *sur* $[a, b]$ *avec* $c \neq 0$ *et les* x_j *distincts.*
Alors les polynômes orthogonaux $\{q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *associés à la distribution* $\rho(x)\omega(x)dx$ *peuvent se présenter de la manière suivante :*

$$\rho(x)q_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) & \cdots & P_{n+l}(x) \\ P_n(x_1) & P_{n+1}(x_1) & \cdots & P_{n+l}(x_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ P_n(x_l) & P_{n+1}(x_l) & \cdots & P_{n+l}(x_l) \end{vmatrix}$$

Voir [6].

Preuve :
Le membre de droit est un π_{n+l} divisible par $\rho(x)$ (puisque pour $x = x_k$ le déterminant est nul, $k = 1, \ldots, l$). Donc il est de la forme $\rho(x)q_n(x)$ où $q_n(x)$ est un π_n. De plus $\rho(x)q_n(x)$ est une combinaison linéaire des $P_n(x), \ldots, P_{n+l}(x)$, donc si $q(x)$ est un π_{n-1} quelconque alors :

$$\int_a^b \rho(x)q_n(x)q(x)dx = \int_a^b q_n(x)q(x)(\rho(x)dx) = 0.$$

Pour terminer, nous devons montrer que ce membre de droite n'est pas identiquement nul.
Pour cela il suffit de voir que le coefficient de $P_{n+l}(x)$, c'est-à-dire le déterminant

$$|(P_{n+i}(x_{j+1}))_{i,j=0,\ldots,l-1}|,$$

n'est pas nul.
Supposons qu'il soit nul. Alors il existe des réels, $a_0, \ldots, a_{l-1}$, non tous nuls, tels que $a_0P_n(x) + \cdots + a_{l-1}P_{n+l-1}(x)$ s'annule en les points $x_1, \ldots, x_l$ donc :

$$a_0P_n(x) + \cdots + a_{l-1}P_{n+l-1}(x) = \rho(x)G(x)$$

où $G(x)$ est un π_{n-1}. Puisque cette expression est orthogonale à tous les π_{n-1}, alors on a,

$$\int_a^b (\rho(x)G(x))G(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \rho(x)G^2(x)dx = 0 \Rightarrow G(x) = 0.$$

Puisque l'on a, par hypothèse, $\rho(x) \geq 0$. Voir [12].

■

Remarque 2.1.2 *On remarque que :*

1. *Dans le cas où $\rho(x)$ a un zéro, x_k, d'ordre $m > 1$, on remplace les lignes correspondantes par les dérivées d'ordre $0, \ldots, m-1$ des polynômes $P_n(x), \ldots, P_{n+l}(x)$ en x_k.*
2. *En général, $q_n(x)$ n'est pas normalisé. Voir [12].*

2.1.2 Formule de Rodriguez

Pour les polynômes orthogonaux provenant des polynômes de Sturm-Liouville, il suffit d'utiliser le théorème suivant :

Théorème 2.1.5 *Considérons un problème de Sturm-Liouville :*

$$p(x)y'' + q(x)y' + \lambda = 0, \tag{2.3}$$

où il est supposé que $deg(p(x)) \leq 2$, $deg(q(x)) \leq 1$, que λ est une constante et que l'opérateur $L := p\frac{d^2}{dx^2} + q\frac{d}{dx} + \lambda$ est auto-adjoint. Appelons $w(x) = \frac{1}{p(x)}\exp(\int_{x_0}^x \frac{q(t)}{p(t)}dt)$. Alors la suite des polynômes orthogonaux solutions de ce problème est donnée par la formule de Rodriguez

$$P_n(x) = \frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}(w(x)[p(x)]^n), \tag{2.4}$$

à un facteur de normalisation prés. (Voir [9])

Preuve :

1. Posons $v(x) := w(x)[p(x)]^n$ et montrons que $\dfrac{1}{w(x)}\dfrac{d^n}{dx^n}v(x)$ est solution du problème de Sturm-Liouville (2.3).
   Calculons d'abord

$$\begin{aligned} w' &= \left(-\frac{p'}{p^2}+\frac{1}{p}.\frac{q}{p}\right)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{q(t)}{p(t)}dt\right) \\ &= \frac{q-p'}{p}w. \end{aligned}$$

   Alors d'une part,

$$\begin{aligned} \left(\frac{v^{(n)}}{w}\right)' &= \frac{v^{(n+1)}w - v^{(n)}w'}{w^2} = \frac{v^{(n+1)} - v^{(n)}\left(\frac{q-p'}{p}\right)}{w} \\ &= \frac{v^{(n+1)}}{w} + \frac{(p'-q)v^{(n)}}{wp} \end{aligned}$$

   et puis,

$$\begin{aligned} \left(\frac{v^{(n)}}{w}\right)'' &= \left(\frac{v^{(n+1)}}{w}\right)' + \left(\frac{(p'-q)v^{(n)}}{wp}\right)' \\ &= \frac{v^{(n+2)}}{w} + \frac{(p'-q)v^{(n+1)}}{wp} + \frac{[(p'-q)v^{(n)}]'wp - (p'-q)v^{(n)}wq}{w^2p^2} \\ &= \frac{v^{(n+2)}}{w} + \frac{(p'-q)v^{(n+1)}}{wp} + \frac{(p''-q')v^{(n)} + (p'-q)v^{(n+1)}}{wp} \\ &\quad - \frac{(p'-q)v^{(n)}q}{wp^2} \\ &= \frac{v^{(n+2)}}{w} + \frac{2(p'-q)v^{(n+1)}}{wp} + \left[\frac{(p''-q')}{wp} - \frac{(p'-q)q}{wp^2}\right]v^{(n)} \end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned} p\left[\frac{v^{(n)}}{w}\right]'' + q\left[\frac{v^{(n)}}{w}\right]' + \lambda\left[\frac{v^{(n)}}{w}\right] &= \frac{p}{w}v^{(n+2)} + \frac{2(p'-q)}{w}v^{(n+1)} \\ &\quad + \left[\frac{(p''-q')}{w} - \frac{(p'-q)q}{wp}\right]v^{(n)} \\ &\quad + \frac{q}{w}v^{(n+1)} + \frac{q(p'-q)}{wp}v^{(n)} + \frac{\lambda}{w}v^{(n)}. \end{aligned}$$

   En simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned} p\left[\frac{v^{(n)}}{w}\right]'' + q\left[\frac{v^{(n)}}{w}\right]' + \lambda\left[\frac{v^{(n)}}{w}\right] &= \frac{p}{w}v^{(n+2)} + \frac{2p'-q}{w}v^{(n+1)} \\ &\quad + \left[\frac{(p''-q')}{w} + \frac{\lambda}{w}\right]v^{(n)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} pv' &= p\left(wp^n\right)' \\ &= p\left(w'p^n + wnp^{n-1}p'\right) \\ &= w'p^{n+1} + nwp^np' \\ &= \left(\frac{q-p'}{p}\right)wp^{n+1} + nwp^np' \\ &= \left(q-p'\right)wp^n + nwp^np' \\ &= \left(q-p'+np'\right)wp^n \\ &= \left(q-p'+np'\right)v \\ &= \left(q+(n-1)p'\right)v. \end{aligned}$$

En dérivant $(n+1)$ fois l'égalité précédente en utilisant la règle du produit, nous obtenons :

$$\begin{aligned} pv^{(n+2)} + (n+1)p'v^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2}p''v^{(n)} &= \left[q+(n-1)p'\right]v^{(n+1)} \\ &+ (n+1)\left[q'+(n-1)p''\right]v^{(n)}. \end{aligned}$$

En ramenant tout au mémé coté et après simplification, on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= pv^{(n+2)} + [(n+1)p' - (q+(n-1)p')]v^{(n+1)} \\ &+ \left[\frac{n(n+1)}{2}p'' - (n+1)(q'+(n-1)p'')\right]v^{(n)} \\ &= pv^{(n+2)} + [2p'-q]v^{(n+1)} \\ &+ \left[\left(\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)(n-1)\right)p'' - (n+1)q'\right]v^{(n)} \\ &= pv^{(n+2)} + [2p'-q]v^{(n+1)} + \left[p'' - q' + \left(\frac{n-n^2}{2}\right)p'' - nq'\right]v^{(n)}. \end{aligned}$$

En comparant cela avec (2.5), nous trouvons que la fonction $\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}v(x)$ est bien une solution du problème (2.5), et les valeurs propres de l'équation étant données par :

$$\lambda = \left(\frac{n-n^2}{2}\right)p'' - nq'.$$

2. Nous avons montré que $P_n = \frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}(w(x)[p(x)]^n)$ est solution du problème de Sturm-Liouville associé pour chaque n fixé, et donc qu'il s'agit bien d'une suite de fonctions propres orthogonales dans L^2.
Il reste donc à montrer que ce sont bien des polynômes.
Cela se déduit du résultat un peu plus général suivant.
Soit $r = r(x)$ un polynôme quelconque. Alors

$$\frac{d^n}{dx^n}rwp^n = ws,$$

où $s = s(x)$ est un polynôme. En effet, si $n = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}rwp &= r'wp + r(wp)' \\ &= r'wp + rwq \\ &= w[r'p + rq] \\ &= ws, \end{aligned}$$

où $s(x) = r'p + rq$. Supposons maintenant, pour une récurrence, que le résultat soit vrai pour un certain n fixé. Alors

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} rwp^{n+1} &= \tfrac{d^n}{dx^n}\left[r'wp^{n+1} + r(wp)'p^n + rwp(p^n)'\right] \\ &= \tfrac{d^n}{dx^n}\left[r'wp^{n+1} + rwqp^n + rwpnp^{n-1}p'\right] \\ &= \tfrac{d^n}{dx^n} wp^n\left[r'p + rq + rnp'\right] \\ &= ws.\end{aligned}$$

pour un certain polynôme $s = s(x)$, puisque $r_0(x) := r'p + rq + rnp'$ est un polynôme.(Voir [9]).

■

2.2 Quelques propriétés de polynômes orthogonaux

• Dans cette section, on va étudier les propriétés des polynômes orthogonaux, lesquelles sont vérifiées pour des distributions du type Stieltjes, $d\alpha(x)$, cependant, on se contentera quelquefois du cas particulier d'une distribution du type $\omega(x)dx$.

• Considérons l'espace

$$L^2_\alpha([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \quad \text{mesurable}, \quad \|f\| < \infty\}$$

de norme induite par le produit scalaire :

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x),$$

où α est une mesure de Lebesgues-Stieltjes.(Voir [9]).

2.2.1 Propriétés d'extrema et de fermeture

Soit $f \in L^2_\alpha(a,b)$ donnée. Supposons que $x^n \in L^2_\alpha(a,b), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Alors, il est évident que les intégrales :

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)x^n d\alpha(x), \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

existent, dans le sens Stieltjes-Lebesgue.
Ensuite, on note $\{P_n(x)\}$ le système orthonormal de polynômes associé la distribution $d\alpha(x)$ sur $[a,b]$, voir [6] on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit $\rho(x)$ un π_n. Le nombre*

$$\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x),$$

est minimum si et seulement si $\rho(x)$ est la $n^{\text{iéme}}$ somme partielle du développement, formel, de Fourier :

$$f(x) \sim f_0 P_0(x) + \cdots + f_n P_n(x) + \ldots$$

où

$$f_n = \int_a^b f(x) P_n(x) d\alpha(x).$$

Le minimum vaut :

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) - \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2.$$

Voir [12].

corollaire 2.2.1 *Comme la valeur du minimum est positive, on a donc l'inégalité de Bessel :*

$$|f_0|^2 + |f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2 + \cdots \leq \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x). \tag{2.7}$$

Voir [6].

Théorème 2.2.2 *L'intégrale :*

$$\int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x),$$

où $\rho(x)$ est un π_n unitaire, est minimum si et seulement si $\rho(x) = const.P_n(x)$. Voir [12].

Théorème 2.2.3 *Soit x_0 un nombre complexe arbitraire, posons*

$$S = \{\rho(x) \in \pi_n : \int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x) = 1\} \tag{2.8}$$

(les π_n peuvent être à coefficient complexe).
Alors, le maximum de $|\rho(x_0)|^2$ est donné par le polynôme :

$$\rho(x) = \varepsilon \{K_n(x_0, x_0)\}^{\frac{-1}{2}} K_n(x_0, x) \quad \text{où} \quad |\varepsilon| = 1, \tag{2.9}$$

où

$$\begin{aligned} K_n(x_0, x) &= \overline{P_0(x_0)} P_0(x) + \overline{P_1(x_0)} P_1(x) + \cdots + \overline{P_n(x_0)} P_n(x) \\ &= P_0(\overline{x_0}) P_0(x) + P_1(\overline{x_0}) P_1(x) + \cdots + P_n(\overline{x_0}) P_n(x) \end{aligned}$$

Le maximum est donné par : $K_n(x_0, x_0)$.
($K_n(x, y)$ est appelé, le noyau de Christoffel-Darboux) (Voir [6])

Preuve :
Si on écrit $\rho(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \cdots + a_n P_n(x)$, alors, la condition de normalisation s'écrit :

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = 1.$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il suit que :

$$|\rho(x_0)|^2 = |\sum_{i=0}^{n} a_i P_i(x_0)|^2 \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=0}^{n} |P_i(x_0)|^2 = \sum_{i=0}^{n} |P_i(x_0)|^2$$

ce qui s'écrit :

$$|\rho(x_0)|^2 \leq \sum_{i=0}^{n} P_i(x_0)\overline{P_i(x_0)} = K_n(x_0, x_0).$$

Cette inégalité est atteinte pour

$$a_k = a\overline{P_k(x_0)}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

où a est déterminé par :

$$\begin{aligned} |a|^2 \sum_{i=0}^{n} |P_i(x_0)|^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad |a|^2 = [K_n(x_0, x_0)]^{-1} \\ &\Rightarrow \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{C}, \ \text{tel que} \ \|\varepsilon\| = 1 \ \text{et} \ a = \varepsilon.\{K_n(x_0, x_0)\}^{\frac{-1}{2}}.' \end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\rho(x) = \sum_{k=0}^{n} (a.\overline{P_k(x_0)})P_k(x) = \varepsilon.[K_n(x_0, x_0)]^{\frac{-1}{2}}.K_n(x_0, x).$$

Voir [12].

■

Remarque 2.2.1 *Le noyau polynomial :*

$$K_n(x_0, x) = \overline{K_n(x, x_0)} = K_n(\overline{x}, \overline{x_0}),$$

peut être utilisé pour la représentation des $n^{\text{iémes}}$ *sommes partielles,* $s_n(x)$*, du développement de Fourier sous forme intégrale. En fait on a :*

$$\begin{aligned} s_n(x) &= f_0P_0(x) + f_1P_1(x) + \cdots + f_nP_n(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P_k(x) \int_a^b f(t)P_k(t)d\alpha(t) \\ &= \int_a^b f(t)K_n(x, t)d\alpha(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\int_a^b K_n(x, t)\rho(t)d\alpha(t) = \rho(x),$$

et cela pour tout π_n *et* $\rho(x)$*.*

$$\begin{aligned} \int_a^b K_n(x, t)\rho(t)d\alpha(t) &= \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \int_a^b P_k(t)\rho(t)d\alpha(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \sum_{l=0}^{n} a_k \int_a^b P_k(t)P_l(t)d\alpha(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_kP_k(x) \\ &= \rho(x). \end{aligned}$$

Voir [12].

Théorème 2.2.4 *Soient a et x_0 finis tel que $x_0 \leq a$.*
Alors les noyaux $\{K_n(x_0, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont orthogonaux respectivement à la distribution :

$$(x - x_0).d\alpha(x).$$

Voir [12].

Preuve :
Ceci découle immédiatement du fait que pour tout π_n et $\rho(x)$:

$$\int_a^b \rho(t)K_n(t, x)d\alpha(t) = \rho(x)$$

Voir [12].

■

Théorème 2.2.5 *L'ensemble des polynômes orthogonaux $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, associée à la distribution $d\alpha(x)$ sur un intervalle fini $[a, b]$, est dense dans $L^2_\alpha(a, b)$.*
Plus généralement , il est dense dans $L^p_\alpha(a, b)$, $p \geq 1$. Voir [12].

Définition 2.2.1 *Soit $p \geq 1$. Un famille de fonctions, $\{f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots\}$, est dite dense dans $L^p_\alpha(a, b)$ si :*
$\forall f(x) \in L^p_\alpha(a, b), \forall\varepsilon > 0,\ \ \exists k(x) = C_0 f_0(x) + \cdots + C_n f_n(x)$ *tel que :*

$$\int_a^b |f(x) - k(x)|^p d\alpha(x) < \varepsilon.$$

Voir [12].

2.3 Propriétés élémentaires des zéros des polynômes orthogonaux

Théorème 2.3.1 *Pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme orthogonal P_n admet n racines réelles simples dans l'intervalle $]a, b[$. (Voir [5]).*

Preuve :
Tout d'abord, supposons que pour $n \geq 1$ fixé P_n garde un signe constant sur cet intervalle par exemple $P_n > \alpha > 0$. Alors

$$0 = \int_a^b P_n(x)w(x)dx \geq \alpha \int_a^b w(x)dx > 0$$

ce qui est absurde. Il existe donc au moins une racine x_1 dans $]a, b[$. Si x_1 est de multiplicité P, $P \geq\ 2$,

$$P_n(x) = (x - x_1)^2 Q_{n-2}(x),$$

avec, $Q_{n-2} \in \mathbb{R}_{n-2}[x]$, Mais

$$0 = \int_a^b P_n(x)Q_{n-2}(x)w(x)dx = \int_a^b (x - x_1)^2 Q^2_{n-2}(x)w(x)dx > 0.$$

Ceci contredit l'orthogonalité de P_n et Q_{n-2}. Donc x_1 est une racine simple. Soit $x_1, x_2, ..., x_p$, P racines simples de p_n dans $]a, b[$. Si $P < n$, on a :

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - x_i) Q_{n-p}(x)$$

avec, $Q_{n-p} \in \mathbb{R}_{n-p}[x]$, de signe constant dans l'intervalle $]a, b[$.

$$0 = \int_a^b P_n(x) Q_{n-p}(x) w(x) dx = \int_a^b \prod_{i=1}^{p} (x - x_i) Q_{n-p}^2(x) w(x) dx \neq 0.$$

D'où $P = n$; c'est-à-dire que P_n possède n racines simples dans $]a, b[$. (Voir [5]).

■

Remarque 2.3.1 *On a les remarques suivant :*

1. *Si $a < x_0 < b$ est un zéro multiple de $P_n(x)$ alors :*

$$\int_a^b P_n(x) \frac{P_n(x)}{(x - x_0)^2} d\alpha(x) = \int_a^b \left(\frac{P_n(x)}{x - x_0} \right)^2 d\alpha(x) = 0,$$

ce qui est impossible.

2. *Soit x_0 un zéro de $P_n(x)$. Comme $P_n(x)$ est à coefficients réels $P_n(\overline{x_0}) = 0$, donc $\frac{P_n(x)}{x - x_0}$ est un π_{n-1} et*

$$\int_a^b P_n(x). \frac{P_n(x)}{x - x_0} d\alpha(x) = \int_a^b (x - x_0). \left(\frac{P_n(x)}{x - \overline{x_0}} \right)^2 d\alpha(x) = 0,$$

ce qui entraine :

$$x_0 \int_a^b . \left(\frac{P_n(x)}{x - \overline{x_0}} \right)^2 d\alpha(x) = \int_a^b x. \left(\frac{P_n(x)}{x - \overline{x_0}} \right)^2 d\alpha(x) \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}.$$

Voir [12].

Théorème 2.3.2 *Les zéros de P_{n+1} sont alternée avec les zéros de P_n, c'est-à-dire que :*

$$\tau_{n+1}^{(n+1)} < \tau_n^{(n)} < \tau_n^{(n+1)} < \tau_{n-1}^{(n)} < \cdots < \tau_1^{(n)} < \tau_1^{(n+1)}.$$

Où, $\tau_k^{(n+1)}, \tau_k^{(n)}$ sont des zéros de P_{n+1} et P_n, respectivement.

2.4 Exemples de polynômes orthogonaux

2.4.1 Polynômes de Jacobi : $P_n^{\alpha,\beta}(x)$

• Intervalle fondamental : $I =]-1, 1[$.
• Fonction poids :

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad \alpha, \beta > -1.$$

• Carré de la norme :

$$h_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Avec Γ est un fonction.
• Formulation explicite :

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

• Formule de récurrence :

$$\begin{aligned}&2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)\\ &-(2n+\alpha+\beta+1)\big[(\alpha^2-\beta^2)+(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)x\big]P_n^{\alpha,\beta}(x)\\ &+2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) = 0,\end{aligned}$$

avec :

$P_0^{\alpha,\beta}(x) = 1.$
$P_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}\big[(\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta\big].$
• équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' + \big[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\big]y' + n(\alpha+\beta+n+1)y = 0, \quad y = P_n^{\alpha,\beta}(x).$$

• Formule de Rodriguez :

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\frac{d^n}{dx^n}\Big((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\Big).$$

Voir [12].

2.4.2 Polynômes de Gegenbauer (ou ultrasphèrique) : $G_n^{\alpha}(x)$

• Intervalle fondamental : $I =]-1, 1[$.
• Fonction poids :

$$w(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}, \quad \alpha > -\frac{1}{2}.$$

• Carré de la norme :
$$h_n = \frac{2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)\Gamma^2(\alpha)}.$$

• équation différentielle :
$$(1-x^2)y'' - (2\alpha+1)xy' + n(n+2\alpha)y = 0, \quad y = G_n^\alpha(x)..$$

Les quatre premiers polynômes de Gegenbauer sont :
$G_0^\alpha(x) = 1,$

$G_1^\alpha(x) = 2\alpha x,$

$G_2^\alpha(x) = -\alpha + 2\alpha(1+\alpha)x^2,$

$G_3^\alpha(x) = -2\alpha(1+\alpha)x + \dfrac{4}{3}\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)x^3.$

Les polynômes de Gegenbauer sont un cas particulier des polynômes de Jacobi ($\alpha = \beta$). Voir [9].

2.4.3 Polynôme de Legendre : $L_n(x)$

• Intervalle fondamental : $I =]-1, 1[$. • Fonction poids :
$$w(x) = 1.$$

• Carré de la norme :
$$h_n = \frac{2}{2n+1}.$$

• Formule de récurrence :
$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xL_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x), \qquad n \geq 1.$$

• équation différentielle :
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad y = L_n^\alpha(x)..$$

Les quatre premiers polynômes de Legendre sont :
$L_0(x) = 1,$

$L_1(x) = x,$

$L_2(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2},$

$L_3(x) = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x.$

Les polynômes de Legendre sont un cas particulier des polynômes de Gegenbauer ($\alpha = \frac{1}{2}$). Voir [12].

2.4.4 Polynôme de Laguerre : $P_n(x)$

• Intervalle fondamental : $I = (0, +\infty)$. • Fonction poids :

$$w(x) = e^{-x}.$$

• Carré de la norme :

$$h_n = 1.$$

• Formule de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1-x)P_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n > 1$$

avec,

$P_0(x) = 1,$

$P_1(x) = 1 - x.$

• équation différentielle :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad y = P_n(x).$$

Voir [9].
Les Polynômes de Laguerre se généralisent aux Polynômes de Laguerre associés de la manière suivante :

2.4.5 Polynômes de Laguerre associés : $P_n^\alpha(x)$

• Intervalle fondamental :

$$I = (0, +\infty).$$

• Fonction poids :

$$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1.$$

• Carré de la norme :

$$h_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

• Formulation explicite :

$$P_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{1}{k!} x^k.$$

• Formule de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1}^\alpha(x) = \left[(2n+\alpha+1) - x\right] P_n^\alpha(x) - (n+\alpha)P_{n-1}^\alpha(x)$$

avec :

$P_0^\alpha(x) = 1,$

$P_1^\alpha(x) = 1 + \alpha - x.$
• équation différentielle :

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0, \quad y = P_n^\alpha(x).$$

• Formule de Rodriguez :

$$P_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n}\Big(x^{n+\alpha}e^{-x}\Big).$$

Voir [12].

2.4.6 Polynômes de Hermite : $H_n(x)$

• Intervalle fondamental :

$$I = (-\infty, +\infty).$$

• Fonction poids :

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

• Carré de la norme :

$$h_n = \sqrt{\pi}2^n n!.$$

• Formulation explicite :

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}.$$

• Formule de récurrence :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

avec :

$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$
• équation différentielle :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad y = H_n(x).$$

• Formule de Rodriguez :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\big(e^{-x^2}\big).$$

Voir [12].

2.4.7 Polynômes de Tchebychef de première espèce : $T_n(x)$

• Intervalle fondamental :

$$I =]-1, 1[.$$

• Fonction poids :

$$w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

• Carré de la norme :

$$h_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \neq 0. \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

• Formulation explicite :

$$T_n(x) = \cos\big(n \arccos x\big).$$

• Formule de récurrence :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

avec :

$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$

• équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad y = T_n(x).$$

• Formule de Rodriguez :

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{d^n}{dx^n}\big((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\big).$$

Les polynômes de Tchebychef de première espèce sont un cas particulier des polynômes de Jacobi $(\alpha = \beta = (-1/2))$

2.4.8 Polynômes de Tchebychef de seconde espèce : $U_n(x)$

• Intervalle fondamental :

$$I = [-1, 1].$$

• Fonction poids :

$$w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

• Carré de la norme :

$$h_n = \frac{\pi}{2}$$

• Formulation explicite :

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

• Formule de récurrence :

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

avec :

$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$

- équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+1)y = 0, \quad y = U_n(x).$$

• Formule de Rodriguez :

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{3}{2})(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dx^n}\big((1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\big).$$

Les polynômes de Tchebychef de second espèce sont un cas particulier des polynômes de Jacobi $(\alpha = \beta = (1/2))$

Chapitre 3

Polynômes orthogonaux et quadratures

3.1 Interpolation polynômiale

L'interpolation est l'un des outils les plus utilisés en analyse numérique. Elle consiste à représenter des fonctions d'une certaine classe par celles d'une autre ayant une structure plus simple. Les fonctions interpolées peuvent être utilisées pour approcher les fonctions originales dans le calcul des dérivées, des intégrales et d'autres opérations. Un type d'interpolation le plus utilisé est l'approximation polynômiale que nous nous proposons d'étudier quelques unes dans cette section.(Voir [5])

3.1.1 Interpolation de Lagrange

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Nous supposons que les valeurs de f sont connues aux points $x_1, x_2, ..., x_m$. On considère deux les fonctions auxiliaires suivantes :

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - x_i) \tag{3.1}$$

et

$$l_i(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\pi'(x_i)} \tag{3.2}$$

On peut avoir donc :

$$\pi(x_j) = 0, \qquad j = 1, 2, ..., m \tag{3.3}$$

et aussi

$$l_i(x_j) = \delta_i j, \qquad j = 1, 2, ..., m.$$

En utilisant les notations précédentes, un tel polynôme $y(x)$ de degré $m - 1$ prenant les valeurs $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m)$ peut s'écrire en vertu de la propriété de l'unicité sous la forme :

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} l_i(x)f(x_i).$$

On passe maintenant au problème de l'approximation de f par le polynôme $y(x)$, en posant

$$\alpha(x) = \min\{x_1, x_2, ..., x_m, x\}; \qquad \beta(x) = \max\{x_1, x_2, ..., x_m, x\}.$$

Si $f^{(m)}$ est continue sur l'intervalle $[\alpha(x), \beta(x)]$, en utilisant le développement de Taylor, il suit que l'erreur est :

$$\begin{aligned} E(x) &= f(x) - y(x), \\ &= \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!}\pi(x), \qquad \zeta \in [\alpha(x), \beta(x)]. \end{aligned}$$

Cela suppose que f soit au moins de classe $C^{m+1}[a, b]$. L'interpolation de Lagrange consiste à approcher une fonction f assez régulière sur $[a, b]$ par :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{m} l_i(x) f(x_i).$$

Voir [5].

3.1.2 Interpolation d'Hermite

Nous supposons ici que les valeurs de f et f' sont connues aux points $x_1, x_2, ..., X - m$. Ces $2m$ valeurs suffisent à déterminer un polynôme $y(x)$ de degré $2m - 1$ tel que pour $i = 1, 2, ..., m$, on a :

$$\begin{cases} y(x_i) = f(x_i) \\ \\ y'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$$

Un tel polynôme $y(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} h_i(x) f(x_i) + \sum_{i=1}^{m} k_i(x) f'(x_i) \tag{3.4}$$

où $h_j(x)$ et $k_j(x)$, avec $(j = 1, 2, ..., m)$ sont des polynômes de degré $2m - 1$ à déterminer. On voit que l'hypothèse $y(x_j) = f(x_j)$ est satisfaite si et seulement si :

$$\begin{cases} h_i(x_j) = \delta_i j \\ \\ k_i(x_j) = 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., m$$

L'hypothèse $y'(x_j) = f'(x_j)$ est satisfaite si et seulement si :

$$\begin{cases} h'_i(x_j) = 0 \\ \\ k'_i(x_j) = \delta_i j \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., m$$

Comme $l_i(x)$ est un polynôme de degré $m - 1$ satisfaisant $l_i(x_j) = 0$, alors, $(l_i(x))^2$ est un polynôme de degré $2m - 2$ satisfaisant $(l_i(x_j))^2 = \delta_{ij}$ et dont la dérivée est nulle en x_j, si

$i \neq j$.
On peut poser

$$h_i(x) = r_i(x)(l_i(x))^2$$

et

$$k_i(x) = s_i(x)(l_i(x))^2$$

où $r_i(x)$ et $s_i(x)$ sont des fonctions linéaires satisfaisant, $r_i(x_i) = 1$ et $r_i(x_i) = 0$, d'après (3.4), ainsi que $r_i'(x_i) + 2l'(x_i) = 0$ et $s_i'(x_i) = 0$. On en déduit donc que :

$$\begin{cases} r_i(x) = 1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i) \\ \\ s_i(x) = x - x_i \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., m$$

On trouve ainsi les formules suivantes :

$$\begin{aligned} h_i(x) &= \big(1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i)\big)(l_i(x))^2 \\ k_i(x) &= (x - x_i)(l_i(x))^2 \end{aligned}$$

L'interpolation d'Hermite consiste donc à approcher $f(x)$ par la formule suivante :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{m} \big(1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i)\big)(l_i(x))^2 f(x_i) + \sum_{i=1}^{m} (x - x_i)(l_i(x))^2 f'(x_i). \tag{3.5}$$

L'erreur d'interpolation est :

$$E(x) = \frac{f^{(2m)}(\zeta)}{(2m)!}\big(\pi(x)\big)^2.$$

Pour une étude complète sur ce sujet, on se référera à [8].(Voir [5])

3.2 Quadrature

Soit

$$I(f) = \int_a^b f(x)\rho(x)dx, \qquad \rho > 0.$$

On veut calculer une valeur approchée de $I(f)$.

Définition 3.2.1 *Une formule de quadrature à n points est donnée par :*

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i f(x_i), \qquad x_i \in [a, b].$$

Le degré de précision est l'entier m tel que :

$$\begin{aligned} I(x^k) &= I_n(x^k), \qquad k = 0, 1, ..., m \\ I(x^{m+1}) &\neq I_n(x^{m+1}). \end{aligned}$$

C'est le degré du polynôme du plus haut degré pour lequel la formule est exacte.

3.2.1 Quadrature d'Hermite

On se propose ici d'approcher l'intégrale d'une fonction f par l'intégrale de son interpolé. Nous allons commencer l'étude par la quadrature d'Hermite. Nous supposerons dans toute la suite que la fonction f est suffisamment régulière pour la commodité des calculs.

A partir de la formule d'Hermite 3.5, nous pouvons écrire :

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} h_i(x) f(x_i) + \sum_{i=1}^{m} k_i(x) f'(x_i) + E(x).$$

On peut déduire donc la formule suivante :

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{m} H_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{m} K_i f'(x_i) + E. \tag{3.6}$$

où

$$\begin{aligned} H_i &= \int_a^b \rho(x) h_i(x) dx \\ &= \int_a^b \rho(x) \big(1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i)\big)(l_i(x))^2 dx \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} K_i &= \int_a^b \rho(x) k_i(x) dx \\ &= \int_a^b \rho(x)(x - x_i)(l_i(x))^2 dx \end{aligned} \tag{3.8}$$

et l'erreur associée est :

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b \rho(x) E(x) dx \\ &= \int_a^b \rho(x) \frac{f^{(2m)}(\zeta)}{(2m)!} \big(\pi(x)\big)^2, \qquad \zeta \in [a, b]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Si on néglige l'erreur, alors Le résultat obtenu est appelé formule de quadrature d'Hermite. On remarque que la formule de quadrature d'Hermite donne des résultats exacts pour des polynômes de degré $2m - 1$ mais ne donne pas de résultats exacts pour un polynôme de degré $2m$. On dit que cette quadrature possède un degré de précision égal à $2m - 1$.(Voir [5])

3.2.2 Quadrature de Gauss

Considérons l'équation (3.6) de la formule de quadrature d'Hermite. Si les points $x_i, i = 1, 2, ..., m$ peuvent être choisis tels que les coefficients de pondération K_i associés aux termes dérivés s'annulent, alors (3.6) se réduit à :

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{m} H_i f(x_i) + E. \tag{3.10}$$

et le degré de précision $2m-1$ reste inchangé.
Maintenant, si on considère les relations (3.2) et (3.3), on peut écrire (3.8) sous la forme :

$$K_i = \frac{1}{\pi'(x_i)} \int_a^b \rho(x)\pi(x)l_i(x)dx \tag{3.11}$$

oú les $x_i, i = 1, 2, ..., m$ sont les zéros de $\pi(x)$.

On voit que la condition $K_i = 0,$ quelque soit i est réalisée si et seulement si le polynôme $\pi(x)$ est orthogonal à $l_i(x), i = 1, 2, ..., m$ relativement à $\rho(x)$. Mais puisque $l_i(x)$ est un polynôme de degré $m-1$, une condition suffisante est que $\pi(x)$ soit orthogonal à tous les polynômes de degré inférieur à m sur $[a, b]$ relative à $\rho(x)$. Dans ce cas (3.9) est la formule de quadrature de Gauss. Le polynôme $\pi(x)$ peut être choisi dans la famille des polynômes orthogonaux. (Voir [5])

3.2.3 Quadrature de Gauss-Chebyshev

Pour $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$ $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$, est le $n^{\text{iéme}}$ polynôme de Chebyshev,

$$\pi(x) = \frac{1}{2^{m-1}} T_m(x).$$

On a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} H_i f(x_i) + E$$

avec

$$H_i = -\frac{\pi}{T_m'(x_i)T_{m+1}(x_i)},$$

avec une erreur,

$$E = \frac{2\pi}{2^{2m}(2m)!} f^{(m)}(\zeta), \qquad |\zeta| < 1.$$

Notons que :

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2m}\right), \qquad i = 1, 2, ..., m$$

et

$$T_m'(x_i) = (-1)^{i+1} \frac{1}{\sin \alpha_i},$$

$$T_m(x_i) = (-1)^i \sin \alpha_i, \qquad \alpha_i = \frac{(2i-1)}{2m}\pi$$

et

$$H_i = \frac{\pi}{m}.$$

Ainsi, on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \frac{\pi}{m} \sum_{i=1}^{m} f\left(\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2m}\right)\right) + \frac{2\pi}{2^{2m}(2m)!} f^{(m)}(\zeta), \qquad |\zeta| < 1.$$

Voir [5].

3.2.4 Quadrature de Gauss-Jacobi

on a : $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ sur l'intervalle $[-1,1]$.
$\pi(x)$ est un multiple du polynôme de Jacobi $P_m^{\alpha,\beta}$. La quadrature de Gauss-Jacobi s'écrit alors,

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} H_i f(x_i) + E,$$

o ? x_i est la $i^{\text{iéme}}$ zéro de $P_m^{\alpha,\beta}(x)$ et

$$H_i = \frac{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}{\Gamma(m+\alpha+\beta+1)} \frac{2^{m+\alpha+\beta+1)}m!}{(1-x^2)\left(\frac{dP_m^{\alpha,\beta}(x)}{dx}\right)^2},$$

$$E = \frac{m!(m+2)!}{(2m)!}\left[\frac{(m+1)!}{(2m+2)!}\right]^2 \frac{2^{2m+3}}{2m+3} f^{(2m)}(\zeta), \qquad |\zeta| < 1.$$

Pour plus de détails sur ces résultats, on renvoit à [11].(Voir [5])

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce mémoire a pour but l'étude de quelques théorèmes et applications des polynômes orthogonaux.

Rappelons que la motivation de ce mémoire était de donner une introduction suffisamment exhaustive et rigoureuse à la théorie des polynômes orthogonaux. Dans ce sens, nous avons établi les équivalences existantes entre les principales définitions que nous les on rencontre pour les polynômes orthogonaux. Nous avons ensuite présenté certaines propriétés de base sur les polynômes orthogonaux ainsi quelques exemples, et finalement, nous avons abordé les applications des polynômes orthogonaux.

En bref, les objets en apparence simples mais pleins de potentiel que les polynômes sont encore étudiés de plusieurs angles. Il est donc justifié de croire que la théorie continuera encore de se développer et de donner des applications intéressantes. Voir [9].

Bibliographie

[1] B. Simon and V. Totik, Limits of zeros of orthogonal polynomials on the circle, to appear in Math. Nachr.

[2] B. Simon, Fine structure of the zeros of orthogonal polynomials, III. Periodic recursion coefficients, to appear in Comm. Pure Appl. Math.

[3] B. Simon, Orthogonal polynomials on the unit circle : New results, Int. Math. Res. Not. 53(2004), 2837-2880.

[4] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, V.2 : Spectral Theory, AMS Colloquium Series, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[5] D. M'Bainguesse, Solution Haute précision d'un problème d'advection sur u domine a géométrie complexe utilisant des éléments spectraux et une technique de paramétrisation résiduelle dans les multigrilles, thèse de Doctorat de 3^{me} cycle, $30/04/2001$.

[6] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, Coll. Publ. XXIII, Amer. Math. Soc. Providence, 1975.

[7] J.P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles. EDP Sciences, 2006.

[8] J.P. Grivet, Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur. EDP. Sciences, 2009.

[9] M. Lavioie, Polynômes orthogonaux, Maîtrisen mathématiques Québec, Canada (2015).

[10] P. Nevai, Orthogonal Polynomials, Memoirs Amer. Math. Soc. 213 (1979).

[11] P. W. Henker, On the order of prolongations and restrictions in multigrid procedure J. Comput. Appli. Math.Vol 32 pp 423 - 429 (1990).

[12] V. Ludocic, Généralités sur les polynômes orthogonaux. DEA. Polynômes orthogonaux, 2000, pp. 49.

[13] W.A. Al-Salam, Characterization theorems for orthogonal polynomials, in : Orthogonal Polynomials : Theory and Practice, M. Ismail and P. Nevai (eds), NATO ASI Series C, 294, Cluwer, Dordrecht, 1990.

الملخص

في بداية هذه المذكرة تطرقنا إلى التذكير ببعض المفاهيم و التعاريف الضرورية لفضاء هيلبرت، ثم قدمنا ابرز التعريفات و الخصائص التي تتعلق بكثيرات الحدود المتعامدة، و كذلك قدمنا بعض الأمثلة مثل(تشيبيشف، ليجندر ، جاكوبي..........) مع بعض خصائصها. ثم قدمنا بعض تطبيقات كثيرات الحدود المتعامدة استنادا إلى استقطاب لاغرانج و استقطاب هرميت.

الكلمات المفتاحية: كثيرات الحدود المتعامدة، الإسقاط العمودي، غرام شميت، الجداء السلمي و الهرميتي، صيغة رودريغز.

Résumé

Au début de ce mémoire , nous avons donné des rappels et quelques concepts et définitions nécessaires des espaces de Hilbert, puis nous avons cité les définitions et les caractéristiques les plus importantes qui se portent sur polynômes orthogonaux et on a donné quelques exemples comme (Tchebychef, Legender, Jacobi,…………..) ainsi que leurs propriétés. Ensuite, nous avons présenté quelques applications des polynômes orthogonaux en se basant sur l'interpolation de Lagrange et l'interpolation d'Hermite.

Mots clés: Les polynômes orthogonaux, Projection orthogonal, Gram-Shmidt, Produit scalaire, produit Hermitien, Formule de Rodrigez.

Abstract

At the beginning of this paper, we have given some reminders and some necessary concepts and definitions of Hilbert spaces, and then we have given the most important definitions and features of orthogonal polynomials, and we have given some examples such as (Tchebychef, Legender, Jacobi,………. ..) and their properties. Next, we have presented some applications of orthogonal polynomials based on Lagrange .interpolation and Hermite interpolation

Key words: Orthogonal polynomials, Orthogonal projection, Gram-