جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

فرع: رياضيات

اختصاص: نمذجة وتحليل عددي

من اعداد الطالبة : شنقلة اليامنة

الموضوع

المصــفوفات التنفيذية لدوال برنشتين وتطبيقاتها

لجنة المناقشة :

قويدري محمد	الرتبة	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
بن الشيخ ع الكريم	الرتبة	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
معمري محمد	الرتبة	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
عباسي حسين	الرتبة	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

شكر وعرفان

الحمد لله لرب العالمين حمدا يليق بجلال وجهه وعظيم سلطانه والصلاة والسلام على قدوة المربين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين .

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم :

<<من لم يشكر القليل لم يشكر الكثير ومن لم يشكر الناس لم يشكر الله >>

رواه أحمد والترميذي .

نتقدم بالشكر الجزيل والعرفان الجميل :
إلى الأستاذ المشرف عباسي حسين الذي لم يخل علينا بنصائحه وتوجيهاته، لك منا كل معاني التقدير والعرفان .
إلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الإبتدائي والمتوسط والثانوي.
إلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الجامعي .
إلى كل من ساهم في إنجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد .
إلى أعضاء اللجنة المناقشة لقبولهم مناقشة وإثراء هذه المذكرة .

إهداء

الفهـــــــــرس

ترميز

الرمز	مدلوله
$B_{i,n}$	كثير حدود برنشتين
$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$	توفيقة
$\phi(x)$	شعاع أساس كثيرات حدود برنشتين
Δ_n	الأساس القانوني n
P	المصفوفة التنفيدية للتكامل
D	المصفوفة التنفيدية للإشتقاق
$\psi(x)$	الناتج المصفوفي
B_{ij}^{n+m}	كثير حدود برنشتين ذو متغيرين
$B_{n,m}f$	حدود برنشتين ذو متغيرين المرفق بالدالة f

مقدمة

في السنوات الأخيرة اعتمد العديد من العلماء على تقريب الدوال باستعمال كثيرات الحدود من أجل حل العديد من المسائل الرياضية ، حيث ظهرت الكثير من الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية معتمدة على كثيرات الحدود ولقد حاولنا من خلال مذكرتنا هذه التطرق إلى أحد كثيرات الحدود القديم نسبيا والذي يعود انشاءه إلى سنة 1912 من طرف العالم الرياضي برنشتين في هذا الإطار قمنا بإنجاز مذكرتنا حيث قسمنها إلى ثلاثة فصول .

ففي الفصل الأول تعرضنا بإختصار إلى التعريف بدوال برنشتين مع ذكر بعض خواصها وكيفية استعمالها لتقريب تابع .

أما في الفصل الثاني فقد تعرضنا إلى المصفوفات التنفيذية لدوال برنشتين نخص بالذكر المصفوفةالتنفيذية للتكامل واالمصفوفة التنفيذية للإشتقاق ،كما تطرقنا إلى كثير حدود برنشتين ذو متغيرين .

أما في الفصل الثالث والأخير فقد أثبتنا مدى فاعلية هذه الطريقة من خلال تعرضنا إلى أمثلة حول استعمال المصفوفة التنفيذية للتكامل والمصفوفة التنفيذية للإشتقاق في تقريب في حل بعض المعادلات التفاضلية .

الفصل الأول
دوال برنشتين وخصائصها

قائمة المحتويـــــــات

1.1 أساس كثيرات حدود برنشتين المكونة من الدوال

تعريف 1.1.1 (دوال برنشتين)
تسمى دوال برنشتين $B_{i,n}$ من الدرجة n والتي تؤلف أساس لكثيرات الحدود من الدرجة n المعرفة على المجال $[0.1]$ بالعلاقة التالية :

$$B_{i,n}(x) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i(1-x)^{n-i}, 0 \leq i \leq n$$

ويمكن أن يستبدل الرمز $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ بالرمز C_n^i هو توفيقة لـi من العناصر المأخودة من n

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

أما الصيغة العامة لكثيرات حدود برنشتين من الدرجة n المعرفة على المجال $[a.b]$ يعطى بالعلاقة التالية :

$$B_{i,n}(x) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{(b-a)^n}(x-a)^i(b-x)^{n-i}$$

بواسطة استخدام ثنائي الحد لنيوتن $(1-x)^{n-i}$ نجد أن

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i(1-x)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-i \\ k \end{pmatrix} x^{i+k}$$

بإستعمال أساس كثيرات حدود برنشتين نجد شعاع برنشتين

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(x) \\ B_{1,n}(x) \\ \vdots \\ B_{n,n}(x) \end{bmatrix}$$

ونستطيع أيضا كتابته على الشكل التالي

$$\phi(x) = A\Delta_n(x)$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} (-1)^0 \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} & \dots & (-1)^{n-0} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-0 \\ n-0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (-1) \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

،

$$\Delta_n(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

مثال 1.1.1
أساس كثيرات حدود برنشتين من الدرجة 3 مكون من الدوال

$$\begin{aligned} B_{0,3}(x) &= -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \\ B_{1,3}(x) &= x^3 - 2x^2 + x \\ B_{2,3}(x) &= -x^3 + x^2 \\ B_{3,3}(x) &= x^3 \end{aligned}$$

ومنه $\phi(x)$ تكتب على النحو التالي

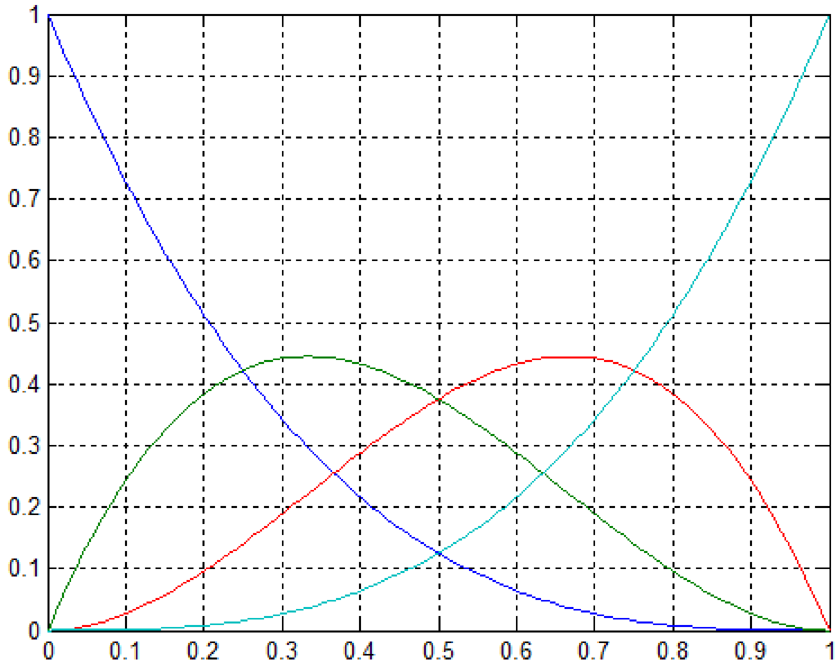
$$\phi(x) = \begin{bmatrix} B_{0,3}(x) \\ B_{1,3}(x) \\ B_{2,3}(x) \\ B_{3,3}(x) \end{bmatrix}$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\ x - 2x^2 + x^3 \\ x^2 - x^3 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$\phi(x) = A\Delta_3(x)$$



رسم كثيرات حدود برنشتين من الدرجة الثالثة

مثال 2.1.1

أساس كثيرات حدود برنشتين من الدرجة 5 مكون من الدوال

$$\begin{aligned}
B_{0,5}(x) &= -x^5+5x^4-10x^3+10x^2-5x+1\\
B_{1,5}(x) &= x^5-4x^4+6x^3-4x^2+x\\
B_{2,5}(x) &= -x^5+3x^4-3x^3+x^2\\
B_{3,5}(x) &= x^5-2x^4+x^3\\
B_{4,5}(x) &= x^4-x^5\\
B_{5,5}(x) &= x^5
\end{aligned}$$

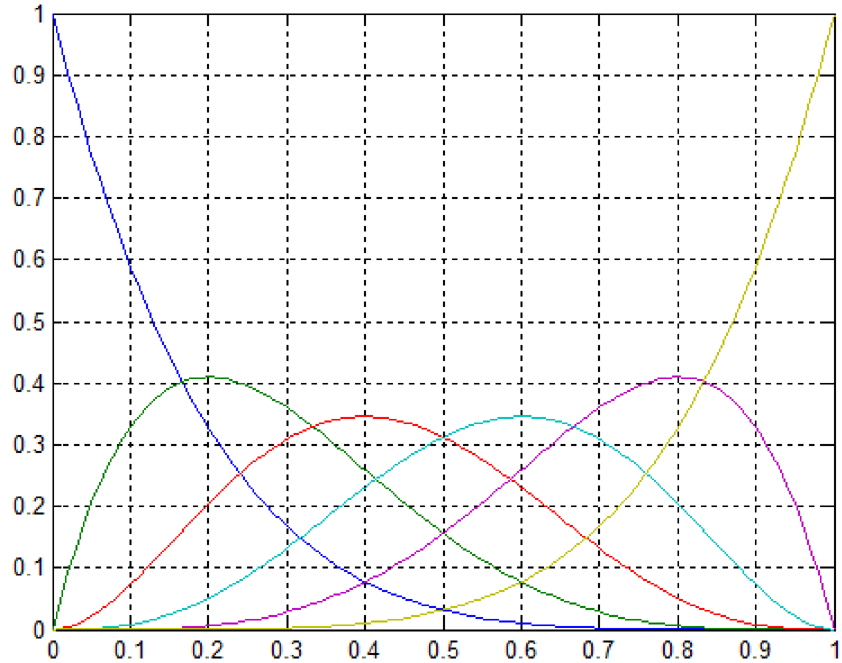
ومنه $\phi(x)$ تكتب على النحو التالي

$$\phi(x)=\begin{bmatrix} B_{0,5}(x)\\ B_{1,5}(x)\\ B_{2,5}(x)\\ B_{3,5}(x)\\ B_{4,5}(x)\\ B_{5,5}(x)\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1\\ 0 & 5 & -20 & 30 & -20 & -5\\ 0 & 0 & 10 & -30 & 30 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Delta_5(x)=\begin{bmatrix} 1\\ x\\ x^2\\ x^3\\ x^4\\ x^5\end{bmatrix}$$

$$\phi(x)=A\Delta_5(x)$$



رسم كثيرات حدود برنشتين من الدرجة الخامسة

2.1 كثير حدود برنشتين ذو متغيرين

كثير حدود برنشتين يعطى بالعلاقة التالية :

$$B_{ij}^{n+m}(x,t)=\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} x^i t^j (1-x)^{n-i}(1-t)^{m-j}$$

وبتحليل ثنائي الحد لنيوتن نجد أن

$$B_{ij}^{n+m}(x,t)=\sum_{k=i}^{n}\sum_{l=j}^{m}(-1)^{k-i}(-1)^{l-j}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} x^k t^l$$

قضية

المكاملة على البلاطة $[0.1] \times [0.1]$ كثيرات حدود لبرنشتين من الدرجة mn تعطى بالعلاقة التالية

$$\int_0^1 \int_0^1 B_{i,j}^{n+m}(x,t)dxdt = \frac{1}{(n+1)(m+1)}$$

البرهان

كثير حدود برنشتين ذو متغيرين من الدرجة (m,n) المرفق بالدالة f يعطى بالعبارة التالية

$$(B_{n,m}f)(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{m}\right) p_{i,n}(x)p_{k,m}(y)$$

حيث

$$p_{j,s}(z) = \begin{pmatrix} s \\ j \end{pmatrix} z^j(1-z)^{s-j}$$

ومنه

$$(B_{n,m}f)(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{i}{n},\frac{k}{m}\right) \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i(1-x)^{n-i} \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} y^j(1-y)^{m-j}$$

3.1 خصائص كثيرات حدود برنشتين

خاصية 1.3.1

كثيرات حدود برنشتين موجبة

$$\forall x \in [0.1], B_{i,n}(x) \geq 0$$

برهان 3.1.1

$$B_{i,n}(x) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i(1-x)^{n-i}, 0 \leq i \leq n$$

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} > 0, x \in [0,1], x \geqslant 0, 1-x \geqslant 0 \Longrightarrow x^i \geqslant 0, (1-x)^{n-i} \geqslant 0$$

إذن

$$\forall x \in [0,1], B_{i,n}(x) \geqslant 0$$

خاصية 2.3.1
مجموع جميع كثيرات الحدود من نفس الدرجة n تساوي 1

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = 1$$

برهان 3.2.1

$$\begin{aligned} 1 = [(1-x)+x]^n &= \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) \end{aligned}$$

خاصية 3.3.1
كثيرات حدود برنشتين تحقق العلاقة التناظرية

$$B_{n,i}(x) = B_{n-i,n}(1-x)$$

برهان 3.3.1

$$\begin{aligned} B_{n-i,n}(1-x) &= \begin{pmatrix} n \\ n-i \end{pmatrix} (1-x)^i (1-(1-x))^{n(n-i)} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ n-i \end{pmatrix} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= B_{i,n}(x) \end{aligned}$$

خاصية 4.3.1
كثيرات حدود برنشتين تحقق العلاقة التراجعية التالية

$$B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)$$

برهان 3.4.1

$$\begin{aligned}(1-x)B_{i,n-1}(x)+xB_{i-1,n-1}(x) &= (1-x)\begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix} x^i(1-x)^{n-1-i} \\ &+ x\begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix} x^{i-1}(1-x)^{n-1-(i-1)} \\ &= \begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix} x^i(1-x)^{n-i} + \begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix} x^i(1-x)^{n-i} \\ &= \left[\begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix}\right] x^i(1-x)^{n-i} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i(1-x)^{n-i} \\ &= B_{i,n}(x)\end{aligned}$$

خاصية 5.3.1

كثيرات حدود برنشتين تحقق العلاقة التالية

$$\frac{dB_{i,n}(x)}{dx} = n(B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x))$$

برهان 3.5.1

$$\begin{aligned}\frac{dB_{i,n}(x)}{dx} &= \frac{d\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i(1-x)^{n-i}}{dx} \\ &= \frac{in!}{i!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} + \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!}x^i(1-x)^{(n-i)-1} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!((n-i)-1)!}x^i(1-x)^{(n-i)-1} \\ &= n(\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!((n-i)-1)!}x^i(1-x)^{(n-i)-1}) \\ &= n(B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x))\end{aligned}$$

خاصية 6.3.1

$$x = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x)\frac{i}{n}$$

برهان 3.6.1

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x)\frac{i}{n} = x(\sum_{i=1}^{n} B_{i-1,n-1}(x))$$
$$= x$$

خاصية 7.3.1

$$B_{i,n-1}(x) = \frac{m-i}{m}B_{i,n}(x) + \frac{i+1}{m}B_{i+1,n}(x)$$

برهان 3.7.1
نضع

$$\begin{aligned}
A &= \frac{m-i}{m}B_{i,n}(x) + \frac{i+1}{m}B_{i+1,n}(x)\\
&= x^i(1-x)^{(n-1)-i}\left[\frac{m-i}{m}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}(1-x) + \frac{i+1}{m}\begin{pmatrix} n \\ i+1 \end{pmatrix}x\right]\\
&= x^i(1-x)^{(n-1)-i}\left[\begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix}(1-x)\begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix}x\right]\\
&= x^i(1-x)^{(n-1)-i}\left[\begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix}(1-x+x)\right]\\
&= x^i(1-x)^{(n-1)-i}\begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix}\\
&= B_{i,n-1}(x)
\end{aligned}$$

4.1 تقريب تابع باستعمال كثيرات حدود برنشتين

كل تابع $f(x)$ يحلل باستعمال كثيرات حدود برنشتين على النحو التالي :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i B_{i,n}(x) = u^T \phi(x)$$

حيث

$$U^T = [u_0, u_1, ..., u_n]$$

و

$$\phi(x) = [B_{0,n}, B_{1,n}, ..., B_{n,n}]$$

$$B_{i,n}(x) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i (1-x)^{n-i}$$

لدينا من البداية

$$f(x) = U^T \phi(x)$$

ومنه

$$\begin{aligned} \langle f(x), \phi(x) \rangle &= \langle U^T \phi(x), \phi(x) \rangle \\ &= U^T \langle \phi(x), \phi(x) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f(x), \phi(x) \rangle &= \int_0^1 f(x)\phi(x)dx \\ &= [\langle f, B_{0,n} \rangle, \langle f, B_{1,n} \rangle, ..., \langle f, B_{n,n} \rangle] \end{aligned}$$

تعطى العبارة

$$U = Q^{-1} \langle f, \phi(x) \rangle$$

حيث Q هي مصفوفة من الرتبة $(n+1)(n+1)$ ومنه

$$\begin{aligned} Q = \langle \phi(x), \phi(x) \rangle &= \int_0^1 \phi(x)\phi(x)^T \\ &= \int_0^1 A\Delta_n(x)(A\Delta_n(x))^T dx \\ &= A \left[\int_0^1 \Delta_n(x)(\Delta_n(x))^T \right] A^T \\ &= AHA^T \end{aligned}$$

حيث أن المصفوفة H هي إجراء التكاملات التالية

$$H = \begin{bmatrix} \int_0^1 1 \times 1dx & \dots & \int_0^1 1 \times x^n dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 x^n \times 1dx & \dots & \int_0^1 x^n \times x^n dx \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dfrac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{n+1} & \dots & \dfrac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

كل عنصر من عناصر Q يعطى بالعلاقة التالية

$$\begin{aligned} Q_{i+1,j+1} &= \int_0^1 B_{i,n}(x)B_{j,n}(x)dx \\ &= \binom{n}{i}\binom{n}{j}\int_0^1 (1-x)^{2n-(i+j)}x^{i+j}dx \\ &= \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{(2n+1)\binom{2n}{i+j}} \end{aligned}$$

حيث $i, j = 0, 1, ..., n$

مثال 1.4.1

مصفوفة Q لكثير حدود برنشتين من الدرجة 3 تعطى أولا المصفوفة H

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة Q تعطى بالعلاقة $Q = AHA^T$ حيث أن المصفوفة A التي تكلمنا عليها سابقا ومنه

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{35} & \frac{1}{140} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{35} & \frac{9}{140} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{35} & \frac{9}{140} & \frac{3}{35} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{140} & \frac{1}{35} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

مثال 2.4.1

مصفوفة Q لكثير حدود برنشتين من الدرجة 5 تعطى أولا المصفوفةH

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة Q تعطى بالعلاقة $Q = AHA^T$ حيث أن المصفوفة A التي تكلمنا عليها سابقا ومنه

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{1}{22} & \frac{2}{99} & \frac{1}{132} & \frac{1}{462} & \frac{1}{2772} \\ \frac{1}{22} & \frac{5}{99} & \frac{5}{132} & \frac{25}{231} & \frac{25}{2772} & \frac{1}{462} \\ \frac{2}{99} & \frac{5}{132} & \frac{10}{231} & \frac{25}{693} & \frac{5}{231} & \frac{1}{132} \\ \frac{1}{132} & \frac{5}{231} & \frac{25}{693} & \frac{10}{231} & \frac{5}{132} & \frac{2}{99} \\ \frac{1}{462} & \frac{25}{2772} & \frac{5}{231} & \frac{5}{132} & \frac{5}{99} & \frac{1}{22} \\ \frac{1}{2772} & \frac{1}{462} & \frac{1}{132} & \frac{2}{99} & \frac{1}{22} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

5.1 إيجاد الشعاع بعد تغيير الأساس من برنشتين إلى الأساس القانوني

نهدف لإيجاد الشعاع a انطلاقا من الشعاع $b = [b_0, b_1, b_2, ..., b_n]^T$ شعاع معاملات كثيرات حدود برنشتين

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i (1-x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

أي

$$b^T \phi(x) = u^T \Delta_n(x)$$

$$b^T A \Delta_n(x) = u^T \Delta_n(x)$$

$$b^T A = u^T$$

$$b^T = u^T A^{-1}$$

$$b = (A^{-1})^T u$$

وكنتيجة فورية لمعاملات برنشتين للدالة x^i تعطى بالعلاقة

$$x^i = d^T \Delta_n(x)$$

$$[0, ..., 0, 1, 0, ..., 0]\Delta_n(x) = d^T A\Delta_n(x)$$

$$[0, ..., 0, 1, 0, ..., 0] = d^T A$$

$$d^T = [0, ..., 0, 1, 0, ..., 0]A^{-1}$$

ومنه

$$d = ([0, ..., 0, 1, 0, ..., 0]A^{-1})T$$

التعامل مع المصفوفات K نأخد المصفوفة K حيث

$$K_{m,i} = [I_m, O_{m\times i}]_{m\times(m+i)}$$

$$K'_{m,i} = [O_{m\times i}, I_m]_{m\times(m+i)}$$

الفصل الثاني

المصفوفات التنفيذية لدوال برنشتين

قائمة المحتويـــــــات

1.2 المصفوفة التنقيذية (العملية) للتكامل

أثناء حلنا للمعادلات التكاملية نتصادف كثيرا مع تكامل $\int_0^x \phi(t)dt$ وحيث أن الناتج هو دالة يمكن تحليلها باستعمال دوال برنشتين على النحو التالي

$$\int_0^x \phi(t)dt = P\phi(x)$$

إن المصفوفة P تدعى المصفوفة التنفيذية للتكامل وهي من الرتبة $(n+1)(n+1)$ وتعطى بالعبارة التالية

$$\int_0^x \phi(t)dt = \int_0^x A\Delta_n(t)dt = A\int_0^x \Delta_n(t)dt$$

$$= A\begin{bmatrix} x \\ \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^3}{3} \\ \vdots \\ \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= A_p X_p$$

حيث أن المصفوفة A_p من الرتبة $(n+1)(n+1)$

$$A_p = A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots.. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix} X_p = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

نقوم بتقريب مركبات الشعاع X_p باستعمال $\phi(x)$ لدينا

$$\phi(x) = A\Delta_n(x)$$

ومنه

$$\Delta_n(x) = A^{-1}\phi(x)$$

ومنه من أجل كل $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$ لدينا

$$x^k = A_{[k+1]^{-1}}\phi(x)$$

حيث أن $A^{-1}_{[k+1]}$ هو السطر $k+1$ للمصفوفة A^{-1} ويبقى تقريب قيمة العدد x^{n+1} غير الممكن تقريبها بالطريقة السابقة

$$x^{n+1} \simeq U_{n+1}^{T}\phi(x)$$

ولنقربها نستعمل العلاقة التي تمكننا من معرفة المعاملات أي

$$U = U_{n+1}^{T}\phi(x)$$

ومنه

$$U_{n+1} = Q^{-1}\int_0^1 x^{n+1}\phi(x)dx$$
$$= Q^{-1}\begin{bmatrix} \int_0^1 x^{n+1}B_{0,n}(x)dx \\ \int_0^1 x^{n+1}B_{1,n}(x)dx \\ \int_0^1 x^{n+1}B_{2,n}(x)dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x^{n+1}B_{n,n}(x)dx \end{bmatrix}$$

$$U_{n+1} = \frac{Q^{-1}}{2n+2}\begin{bmatrix} \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}} \\ \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+2 \end{pmatrix}} \\ \vdots \\ \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2n+1 \end{pmatrix}} \end{bmatrix}$$

بهذه الطريقة يمكننا إيجاد عناصر الشعاع U_{n+1} لنضع B مصفوفة حيث

$$B = \begin{bmatrix} A_{[1]}^{-1} \\ A_{[2]}^{-1} \\ \vdots \\ A_{[n]}^{-1} \\ U_{n+1}^{T} \end{bmatrix}$$

ومنه

$$X_p \simeq B\phi(x)$$

وعليه

$$P = A_p B$$

وهي المصفوفة التنفيذية للتكامل

مثال 1.1.2

المصفوفة A هي مصفوفة معاملات برنشتين من الدرجة 3 أي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وأن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة Q لما $n = 3$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{35} & \frac{1}{140} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{35} & \frac{9}{140} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{35} & \frac{9}{140} & \frac{3}{35} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{140} & \frac{1}{35} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

و

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -24 & 16 & 4 \\ -24 & \frac{208}{3} & \frac{-172}{3} & 15 \\ 16 & \frac{-172}{3} & \frac{208}{3} & -24 \\ -4 & 16 & -24 & 16 \end{bmatrix}$$

الشعاع U_{n+1} لما $n = 3$

$$U_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{35} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة B

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{59}{70} & \frac{-753}{70} & \frac{1077}{70} & \frac{71}{70} \end{bmatrix}$$

المصفوفة A_p

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ومنه المصفوفة P

$$P = A_pB = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{59}{70} & \frac{-753}{70} & \frac{1077}{70} & \frac{71}{70} \end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix} \frac{59}{280} & \frac{1033}{280} & \frac{-937}{280} & \frac{211}{4} \\ \frac{-59}{280} & \frac{-753}{280} & \frac{1217}{280} & \frac{-353}{12} \\ \frac{59}{280} & \frac{753}{280} & \frac{-1077}{280} & \frac{493}{12} \\ \frac{-59}{280} & \frac{-753}{280} & \frac{1077}{280} & \frac{-71}{4} \end{bmatrix}$$

مثال 2.1.2

المصفوفة A هي مصفوفة معاملات برنشتين من الدرجة 5 أي

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -20 & 30 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & -30 & 30 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وأن

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة B

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{462} & \frac{5}{330} & \frac{1}{332} & \frac{10}{55} & \frac{11}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة Q لما $n = 5$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{1}{22} & \frac{2}{99} & \frac{1}{132} & \frac{1}{462} & \frac{1}{2772} \\ \frac{1}{22} & \frac{5}{99} & \frac{5}{132} & \frac{25}{231} & \frac{25}{2772} & \frac{1}{462} \\ \frac{2}{99} & \frac{5}{132} & \frac{10}{231} & \frac{25}{693} & \frac{5}{231} & \frac{1}{132} \\ \frac{1}{132} & \frac{5}{231} & \frac{25}{693} & \frac{10}{231} & \frac{5}{132} & \frac{2}{99} \\ \frac{1}{462} & \frac{25}{2772} & \frac{5}{231} & \frac{5}{132} & \frac{5}{99} & \frac{1}{22} \\ \frac{1}{2772} & \frac{1}{462} & \frac{1}{132} & \frac{2}{99} & \frac{1}{22} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

و

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 36 & -450 & 1200 & -900 & 180 & -6 \\ -450 & 9300 & -29700 & 24480 & -5190 & 180 \\ 1200 & -29700 & 114480 & -106440 & 24480 & -900 \\ -900 & 24480 & -106440 & 114480 & -29700 & 1200 \\ 180 & -5190 & 24480 & -29700 & 9300 & -450 \\ -6 & 180 & -900 & 1200 & -450 & 36 \end{bmatrix}$$

الشعاع U_{n+1} لما $n = 5$

$$U_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{462} \\ \frac{5}{330} \\ \frac{1}{132} \\ \frac{10}{55} \\ \frac{11}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A_p

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -20 & 30 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & -30 & 30 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-5}{2} & \frac{10}{3} & \frac{-5}{2} & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{-4}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

ومنه المصفوفة P

$$P = A_pB = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-5}{2} & \frac{10}{3} & \frac{-5}{2} & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{-4}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ \frac{1}{462} & \frac{5}{330} & \frac{1}{332} & \frac{10}{55} & \frac{11}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2772} & \frac{395}{396} & \frac{2987}{1992} & \frac{119}{66} & \frac{3}{10} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2772} & \frac{1}{396} & \frac{997}{1992} & \frac{13}{66} & \frac{7}{10} & \frac{1}{30} \\ \frac{-1}{2772} & \frac{-1}{396} & \frac{-1}{1992} & \frac{10}{33} & \frac{-9}{20} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{2772} & \frac{1}{396} & \frac{1}{1992} & \frac{1}{33} & \frac{37}{60} & \frac{1}{60} \\ \frac{-1}{2772} & \frac{-1}{396} & \frac{-1}{1992} & \frac{-1}{33} & \frac{-11}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{2772} & \frac{1}{396} & \frac{1}{1992} & \frac{1}{33} & \frac{11}{30} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2.2 المصفوفة التنفيذية (العملية) للاشتقاق

مشتق الشعاع $\phi(x)$ يمكن نشره باستعمال برنشتين كما يلي :

$$\phi^{'}(x) = D\phi(x)$$

حيث أن المصفوفة D من الرتبة $(n+1)(n+1)$ تدعى المصفوفة التنفيذية للاشتقاق الخاصة بكثيرات حدود برنشتين وكما نعرف أن

$$\phi(x) = A\Delta_n(x)$$

ومنه

$$\phi^{'}(x) = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ \vdots \\ nx^{n-1} \end{bmatrix}$$

نعرف المصفوفة V ذات الرتبة $(n+1)(n)$ والشعاع $\Delta_n^*(x)$ حيث

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots\ldots.. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

والشعاع $\Delta_n^*(x)$

$$\Delta_n^*(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix}$$

ومنه يمكننا كتابة العلاقة

$$\phi^{'}(x) = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ \vdots \\ nx^{n-1} \end{bmatrix} = AV\Delta_n^*(x)$$

نقوم بتقريب الشعاع $\Delta_n^*(x)$ باستعمال كثيرات الحدود لبرنشتين كما فعلنا في المصفوفة التنفيذية للتكامل أي

$$\Delta_n^*(x) = B^*\phi(x)$$

حيث

$$B^* = \begin{bmatrix} A_{[1]}^{-1} \\ A_{[2]}^{-1} \\ \vdots \\ A_{[n]}^{-1} \end{bmatrix}$$

وعليه فإن قيمة $\phi^{'}(x)$ تصبح كالاتي

$$\phi^{'}(x) = AVB^*\phi(x)$$

ومنه المصفوفة التنفيذية للإشتقاق D تعطى بالعلاقة

$$D = AVB^*$$

وعليه في حالة تقريب دالة

$$u(x) \approx U^T\phi(x)$$

وإذا كان n عددا طبيعيا أكبر أو يساوي 2 فإن تقريب المشتق النوني للدالة $u(x)$ يكون بالشكل التالي

$$u^n(x) = U^T\phi^{(n)}(x) = D^n\phi(x)$$

مثال 1.2.2

A مصفوفة معاملات برنشتين من الدرجة 3 حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة V لما $n = 3$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة B^* لما $n = 3$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة D لما $n = 3$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 2.2.2

A مصفوفة معاملات برنشتين من الدرجة 5 حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة V لما $n=5$

$$V=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&3&0&0\\ 0&0&0&4&0\\ 0&0&0&0&5 \end{bmatrix}$$

المصفوفة B^* لما $n=5$

$$B^*=\begin{bmatrix} 0&1&4&6&4&1\\ 0&0&1&3&3&1\\ 0&0&0&1&2&1\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة D لما $n=5$

$$D=\begin{bmatrix} 0&-5&0&0&0&0\\ 0&1&-4&0&0&0\\ 0&0&2&-3&0&0\\ 0&0&0&3&-2&0\\ 0&0&0&0&4&-1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

3.2 الناتج المصفوفي لجداء مصفوقتين تنفيذيتين

في هذا النوع من المعادلات نجد أنفسنا دائما في حاجة لمعرفة قيمة الجداء $\phi(x)\times\phi(x)^T$ لظهوره كثيرا والذي يسمى المنتوج المصفوفي لكثيرات الحدود برنشتين

لنضع

$$\psi(x)=\phi(x)\times\phi(x)^T$$

نقوم بضرب المصفوفة $\psi(x)$ بشعاع المعاملات لبرنشتين نحصل على مايلي

$$U^T\times\psi(x)=\phi(x)^T\times\hat{U}$$

حيث $\hat{U}$ مصفوفة من الرتبة $(n+1)(n+1)$

$$U^T \times \psi(x) = U^T \times \phi(x) \times \phi(x)^T$$

لدينا من قبل أن $\phi(x) = A \times \Delta_n(x)$ ومنه

$$\begin{aligned} U^T \times \psi(x) &= U^T \times \phi(x) \times (A \times \Delta_n(x))^T \\ &= U^T \times \phi(x) \times \Delta_n(x)^T A^T \end{aligned}$$

وحيث أن $\Delta_n(x)^T = [1, x, x^2, ..., x^n]$ فإن

$$\begin{aligned} U^T \times \psi(x) &= U^T \times \phi(x) \times [1, x, x^2, ..., x^n] \times A^T \\ &= [U^T \times \phi(x), xU^T \times \phi(x), x^2U^T \times \phi(x), ..., x^nU^T \times \phi(x)] \times A^T \end{aligned}$$

لدينا كذلك

$$U^T \times \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i B_{i,n}(x)$$

ومنه

$$U^T \times \psi(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} u_i B_{i,n}(x), \sum_{i=1}^{n} u_i x B_{i,n}(x), \sum_{i=1}^{n} u_i x^2 B_{i,n}(x), ..., \sum_{i=1}^{n} u_i x^n B_{i,n}(x)\right] \times A^T$$

نقوم الان بتقريب الدوال $x^k B_{i,n}(x)$ باستعمال الدوال $\phi(x)$ لنضع الشعاع $e_{k,i}$ حيث

$$e_{k,i} = \begin{bmatrix} e_0^{k,i} \\ e_1^{k,i} \\ e_2^{k,i} \\ \vdots \\ e_n^{k,i} \end{bmatrix}$$

ومنه بالتقريب نجد أن

$$x^k B_{i,n}(x) \cong e_{k,i} \times \phi(x)$$

باستعمال الطريقة السابقة في التقريب نجد أن الشعاع $e_{k,i}$ يعطى بالعلاقة التالية

$$e_{k,i} = Q^{-1}\int_0^1 x^k B_{i,n}(x)\phi(x)dx = Q^{-1}\begin{bmatrix} \int_0^1 x^k B_{i,n}B_{0,n}(x)dx \\ \int_0^1 x^k B_{i,n}B_{1,n}(x)dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x^k B_{i,n}B_{n,n}(x)dx \end{bmatrix}$$

$$= \frac{Q^{-1}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}}{2n+k+1}\begin{bmatrix} \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n+k \\ i+k \end{pmatrix}} \\ \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n+k \\ i+k+1 \end{pmatrix}} \\ \vdots \\ \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n+k \\ i+k+n \end{pmatrix}} \end{bmatrix}$$

يمكن أن نجد في النهاية مايلي

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} u_i x^k B_{i,n}(x) &= \sum_{i=1}^{n} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} e_j^{k,i} B_{j,n}(x)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} B_{j,n}(x)\left(\sum_{i=1}^{n} u_i e_j^{k,i}\right) \\ &= \phi(x)^T \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} u_i e_0^{k,i} \\ \sum_{i=1}^{n} u_i e_1^{k,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} u_i e_1^{k,i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i x^k B_{i,n}(x) = \phi(x)^T [e_{k,0}, e_{k,1}, ..., e_{k,n}] U$$
$$= \phi(x)^T E_{k+1} U$$

ومنه الكتابة السابقة أي

$$U^T \times \psi(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} u_i B_{i,n}(x), \sum_{i=1}^{n} u_i x B_{i,n}(x), \sum_{i=1}^{n} u_i x^2 B_{i,n}(x), ..., \sum_{i=1}^{n} u_i x^n B_{i,n}(x) \right] \times A^T U^T$$

حيث E_{k+1} مصفوفة من الرتبة $(n+1)(n+1)$ و الأشعة $e_{k,i}$ تمثل الأعمدة أين يكون $k = 0, 1, ..., n$ نعرف U

$$\tilde{E}_{k+1} = E_{k+1} U$$

عند اختيارنا لمصفوفة من الرتبة $(n+1)(n+1)$ وبالاعتماد على حل المعادلات السابقة

$$\tilde{U} = [\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, ..., \tilde{E}_n]$$

$$U^T \times \psi(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} u_i B_{i,n}(x), \sum_{i=1}^{n} u_i x B_{i,n}(x), \sum_{i=1}^{n} u_i x^2 B_{i,n}(x) \right] \times A^T$$

وأخيرا يمكن وضع $\hat{U} = \tilde{U} A^T$ وهي مصفوفة المعاملات

الفصل الثالث

استعمال المصفوفات التنفيذية في حل المعادلات التفاضلية والتفاضلية التكاملية الخطية

قائمة المحتويـــــــات

1.3 استعمال مصفوفة تنفيذية للتكامل لحل معادلة تفاضلية

لدينا معادلة تفاضلية من درجة أولى

$$\begin{cases} ay' + y = f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

نبحث عن الحل التقريبي باستعمال كثيرات حدود برنشتين

$$\int_0^x ay'(t)dt + \int_0^x y(t)dt = \int_0^x f(t)dt \tag{1.3}$$

$$ay(x) + \int_0^x y(t)dt = \int_0^x f(t)dt \tag{2.3}$$

لدينا $y = Y^T\phi(x)$ بتعويضها في (2.3) نجد

$$aY^T\phi(x) + \int_0^x Y^T\phi(t)dt = \int_0^x U^T\phi(t)dt \tag{3.3}$$

$$aY^T\phi(x) + Y^T\int_0^x \phi(t)dt = U^T\int_0^x \phi(t)dt \tag{4.3}$$

نضع $\int_0^x \phi(t)dt = P\phi(x)$ بتعويضها في (4.3) نجد

$$aY^t\phi(x) + Y^TP\phi(x) = U^TP\phi(x) \tag{5.3}$$

P هي المصفوفة التنفيذية للتكامل

$$aY^T + Y^TP = U^TP$$

$$(aY^T)^T + (Y^TP)^T = (U^TP)^T$$

$$aY + P^TY = P^TU$$

$$(aI + P^T)Y = P^TU$$

نضع $G = aI + P^T$ و $B = P^TU$ نجد

$$GY = B \Longrightarrow Y = G^{-1}B$$

تطبيق عددي

في حالة $n = 3$

$$\begin{cases} 5y^{'} + y = 5cosx + sinx \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

حيث أن الحل الدقيق لها هو $y(x) = sinx$ نجد النتائج التالية

$$U_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5.0520 \\ 4.5478 \\ 3.5430 \end{bmatrix}$$

فنحصل على

$$B = \begin{bmatrix} -0.0002 \\ 1.6678 \\ 3.3558 \\ 4.5365 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5.2107 & -0.2107 & 0.2107 & -0.2107 \\ 3.6893 & 2.3107 & 2.6893 & -2.6893 \\ -3.3464 & 4.3464 & 1.1536 & 3.8464 \\ 0.7536 & -29.4167 & 41.0833 & -12.7500 \end{bmatrix}$$

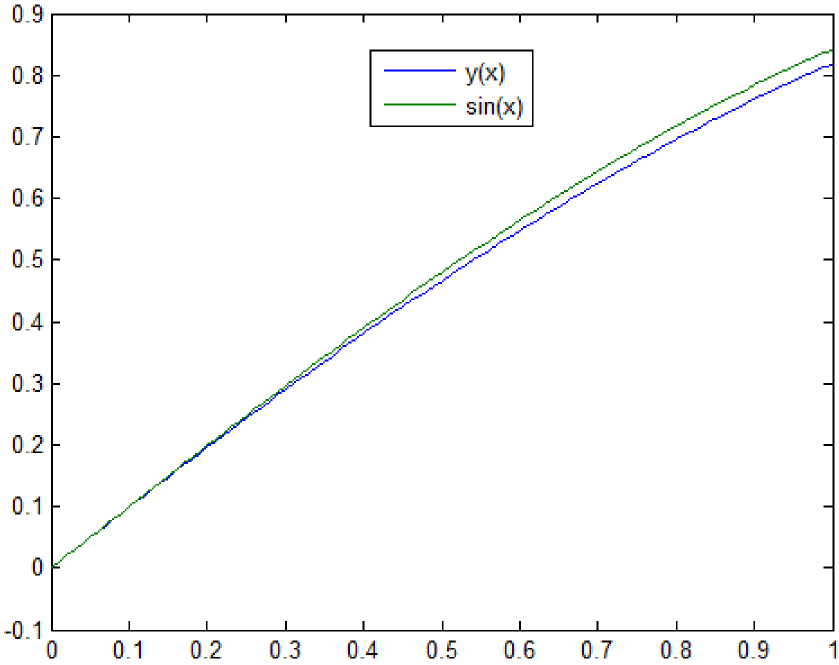
$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1980 & -0.0036 & 0.0052 & -0.0009 \\ -0.0654 & 0.1546 & 0.0659 & -0.0116 \\ 0.0237 & 0.0508 & 0.0971 & 0.0182 \\ 0.2391 & -0.1931 & 0.1609 & 0.0069 \end{bmatrix}$$

إذن

$$Y = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.3339 \\ 3.6366 \\ 0.8176 \end{bmatrix}$$

نقوم بضرب Y في $\phi(x) = A\Delta_n(x)$ نجد

$$y(x) = -0.0001 + 1.0020x - 0.0939x^2 - 0.0904x^3$$



رسم منحنيي الحل الدقيق و الحل التقريبي y(x) لما n=3

في حالة لما $n = 5$ نجد أن

$$U_6 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5.0990 \\ 4.9947 \\ 4.6913 \\ 4.2009 \\ 3.5430 \end{bmatrix}$$

فنحصل على

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2.0248 \\ 3.0065 \\ 3.8795 \\ 4.5882 \end{bmatrix}$$

و

$$G = \begin{bmatrix} 4.9996 & 0.0004 & -0.0004 & 0.0004 & -0.0004 & 0.0004 \\ 0.9975 & 5.0025 & -0.0025 & 0.0025 & -0.0025 & 0.0025 \\ 1.4995 & 0.5005 & 4.9995 & 0.0005 & -0.0005 & 0.0005 \\ 1.8030 & 0.1970 & 0.3030 & 5.0303 & -0.0303 & 0.0303 \\ 0.3000 & 0.7000 & -0.4500 & 0.6167 & 4.6333 & 0.3667 \\ 0.1667 & 0.0333 & 0.0167 & 0.0167 & 0.0333 & 5.1667 \end{bmatrix}$$

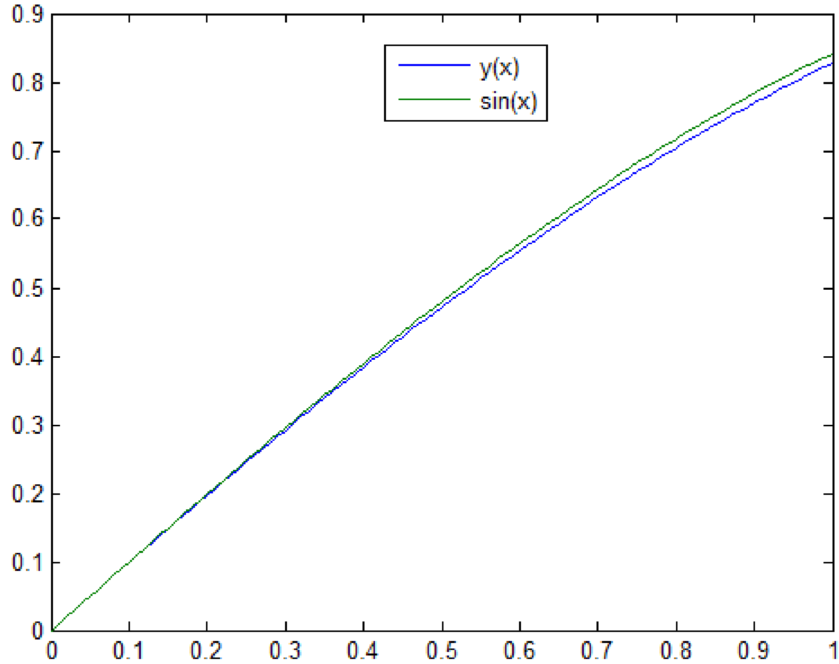
$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0399 & 0.1999 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0001 & -0.0001 \\ -0.0560 & -0.0200 & 0.2000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0667 & -0.0068 & -0.0119 & 0.1986 & 0.0013 & -0.0012 \\ -0.0030 & -0.0312 & 0.0211 & -0.0264 & 0.2157 & -0.0151 \\ -0.0058 & -0.0010 & -0.0007 & -0.0005 & -0.0014 & 0.1937 \end{bmatrix}$$

إذن

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.20000 \\ 0.3950 \\ 0.5716 \\ 0.7186 \\ 0.8272 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد

$$y(x) = x - 0.0505x^2 - 0.1323x^3 + 0.0089x^4 + 0.0011x^5$$



رسم منحنيي الحل الدقيق و الحل التقريبي y(x) لما n=5

n=5	n=3	y(x)	x
0	-0.0001	0	0
0.0994	0.0991	0.0998	0.1
0.1969	0.1958	0.1987	0.2
0.2920	0.2896	0.2955	0.3
0.3837	0.3799	0.3894	0.4
0.4714	0.4661	0.4794	0.5
0.5545	0.5478	0.5646	0.6
0.6322	0.6243	0.6442	0.7
0.7039	0.6951	0.7174	0.8
0.7691	0.7597	0.7833	0.9
0.8272	0.8176	0.8415	1

النتائج العددية للحل التقريبي والحل الدقيق

2.3 استعمال مصفوفة تنفيذية للإشتقاق لحل معادلة تفاضلية

لدينا معادلة تفاضلية من درجة ثانية

$$\begin{cases} y^{''}(x) + ay^{'} + y(x) = g(x) \\ y(0) = 0; y(1) = 1 \end{cases}$$

نبحث عن الحل التقريبي باستعمال كثيرات حدود برنشتين

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i B_{0,n}(x) = U^T \phi(x) \tag{6.3}$$

$$y^{'}(x) = U^T D\phi(x) \tag{7.3}$$

$$y^{''}(x) = U^T (D)^2 \phi(x) \tag{8.3}$$

بتعويض (6 . 3) و (7 . 3) و (8 . 3) في معادلة تفاضلية

$$\begin{cases} U^T(D)^2\phi(x) + aU^T D\phi(x) + U^T\phi(x) = g(x) \\ U^T\phi(0) = 0; U^T\phi(1) = 1 \end{cases}$$

نطبق الشروط الإبتدائية لإيجاد U

$$[0, u_1, u_2, 1](D)^2(x)\phi(x) + a[0, u_1, u_2, 1]D\phi(x) + [0, u_1, u_2, 1]\phi(x) - g(x) = 0$$

نضع $x = \frac{1}{2}$ في المعادلة التالية فنجد U

ومنه نتحصل على الحل التقريبي وهو $y(x)$

تطبيق عددي

في حالة $n = 3$

$$\begin{cases} y^{''}(x) + e^{\frac{1}{x}}y^{'} + y(x) = 6x + x^3 + 3x^2e^{\frac{1}{x}} \\ y(0) = 0; y(1) = 1 \end{cases}$$

حيث أن الحل الدقيق لها هو $y(x) = x^3$ نجد النتائج التالية

$$D = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, (D)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

و

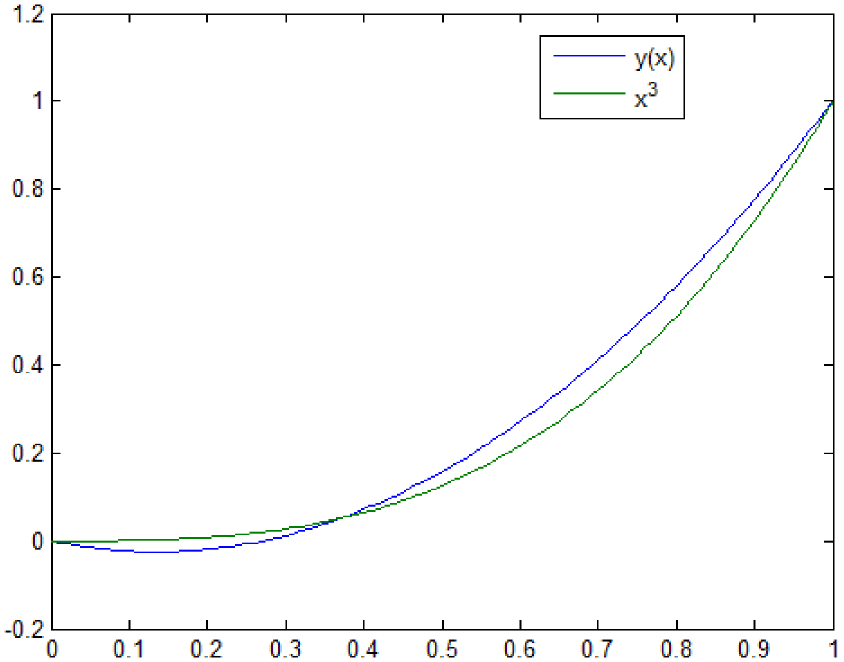
$$\phi(x) = \begin{bmatrix} (1-x)^2 \\ 2x(1-x) \\ x^2 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$U_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.18515 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن

$$y(x) = 1.3703x^2 - 0.3703x$$



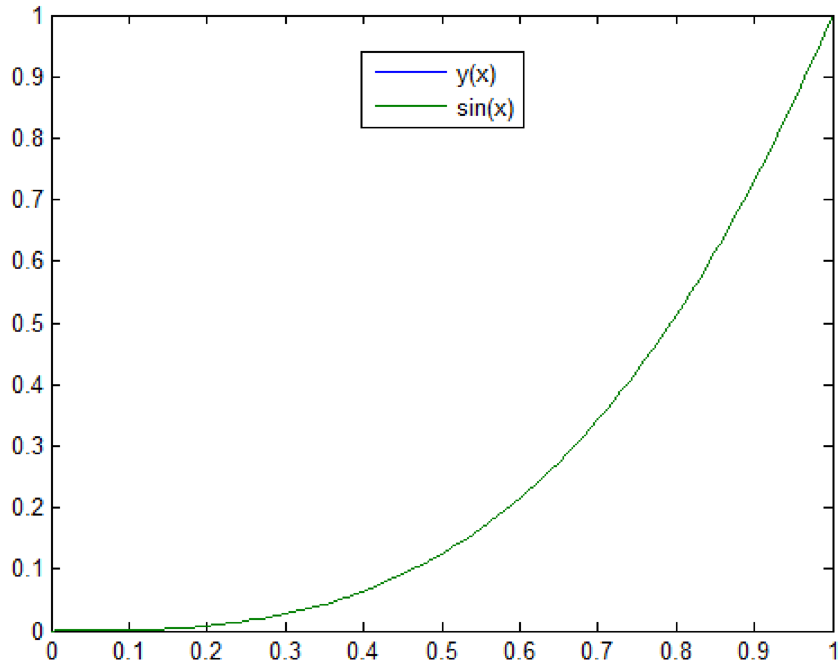
رسم منحني الحل الدقيق والحل التقريبي y(x) لما n=2

بتطبيق نفس طريقة لما $n = 5$ نجد أن

$$U_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.11661 \times 10^{-9} \\ 0.7 \times 10^{-10} \\ 0.10 \\ 0.40 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$y(x) = -1.17 \times 10^{-10}x^5 - 2.32 \times 10^{-10}x^4 + 1.000000001x^3 - 1.6322 \times 10^{-9}x^2 + 0.58305 \times 10^{-9}x$$



رسم منحنيي الحل الدقيق و الحل التقريبي $y(x)$ لما n=5

x	y(x)	n=3	n=5
0	0	0	0
0.1	10^{-3}	-0.023327	1.000000043×10^{-3}
0.2	8×10^{-3}	-0.019248	8.000000059×10^{-3}
0.3	9×10^{-3}	-0.012273	0.0270
0.4	64×10^{-3}	-0.071128	0.063999
0.5	125×10^{-3}	-0.157425	0.124999
0.6	216×10^{-3}	-0.271128	0.215999
0.7	343×10^{-3}	0.412237	0.342999
0.8	512×10^{-3}	0.80752	0.5119999
0.9	729×10^{-3}	0.776673	0.728999
1	1	1	0.999999

النتائج العددية للحل التقريبي والحل الدقيق

خاتمة

لقد حاولنا من خلال هذا العمل المتواضع إعطاء لمحة قصيرة عن دوال برنشتين وخصائصها والمصفوفات التنفيذية لدوال برنشتين واستعمالها في حل بعض المعادلات التفاضلية .

واقتصرت تطبيقاتها على بيان كيفية تطبيق المصفوفة التنفيدية للتكامل في مثال والمصفوفة التنفيذية في مثال اخر وتطلعنا إلى مثال اخر أين نطبق المصفوفتين التنفيذيتين في مثال واحد إلا أن الوقت داهمنا. ونشير بأن استفادتنا من هذه المذكرة لم تحصر فيما سبق بل نتعدى ذلك للتعرف على إستعمال برنامج ماتلاب .

وختاما إننا لا ندعي أننا أوفينا البحث حقه كاملا إلا أننا اجتهدنا قدر الإمكان فيما يسمح به إنجاز وقت المذكرة.

المراجع العلمية

[1] K.Parand,Sayyed A.Kaviani ,*Application of the Exact Operational Matrices Based on the Bernstein Polynomial,Journal of mathematics and computer science,2013.*

[2] K.Maleknejad,B.Basirat,E.Hashemizadeh,*A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order linear Volterra-Fredholm integro-differential equations, Mathematical and Computer Modelling,17october2011*

[3] S.A.Yousefi,M.Behroozifar,Mehdi Dehghan, *Numerical solution of the non linear age-structured population models by using the operational matrices of Bernstein polynomials,Applied Mathematical Modelling,22july2011 .*

[4] Kenneth I.Joy, *BERNSTEIN POLYNOMIALS,On-Line Geometric Modeling Notes,2000.*

[5] Jean-Louis Rouget , *Polynômes de BERNSTEIN,2007 .*

[6] Behrooz Basirat,MohSammed Amin Shahdadi*Numerical Solution of Non linear Integro-Differential Equations With Initial Conditions by Bernstein Operational Matrix of Derivative , 2013 .*

ملخص

الهدف الأساسي لهذه المذكرة هو التعريف بطريقة جديدة لحل المعادلات التفاضلية الخطية باستعمال دوال برنشتين ، إن السمة الأساسية لهذه الطريقة هي تحويل المعادلات المذكورة إلى جملة معادلات جبرية يسهل حلها ، حيث أن الفكرة الأساسية التي تقوم عليها هذه الطريقة هي تحويل تكاملات ومشتقات الدوال إلى مصفوفات تسمى بالمصفوفات التنفيذية يسهل التعامل معها وسنبين مدى الفاعلية التي تكتسيها هذه الطريقة من خلال تطبيقها على بعض الأمثلة.
الكلمات المفتاحية:
جمل المعادلات التفاضلية، المصفوفات التنفيدية، دوال برنشتين.

Abstract

The main objectif of this memoire is to introduce a new way to solve linear differential equations using the Bernstein functions. The basic feature of this method is to convert the equations in question into a series of algebraic equations that are easy to solve. The basic idea of this method is to convert integrals and function derivatives into matrices called matrices The executive makes it easy to deal with, and we will demonstrate the effectiveness of this method by applying them to some examples.
Keywords: Equations of Differential Equations, Operating Matrices, Bernstein Functions.

Résume

L'objective principal de cette mémoire est d'introduire une nouvelle façon de résoudre linéaire en utilisant les fonctions équations différentielles Bernstein, la caractéristique fondamentale de cette méthode est de convertir les équations mentionnées à la systéme équations algébriques plus faciles à résoudre, car l'idée de base qui sous-tend cette méthode est de transformer les intégrales et dérivés fonctions aux matrices appelées le matrices opérationnelles facile à manipuler exécutif, et nous montrerons que l'efficacité de cette méthode en l'appliquant à quelques exemples.
Mots clés: systémes équations différentielles, les matrices opérationnelles, les fonctions Bernstein.