UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : MANSOURI Mohammed

Théme

Modélisation Asymptotique du problème de Signorini d'une coque linéaire

Soutenu publiquement le : 31/05/2017

Devant le jury composé de :

Mr. GHEZAL Abderrazek	M.C.(B). Université KASDI Merbah Ouargla	Président
Mr. BENSAYAH Abdallah	M.C.(A). Université KASDI Merbah Ouargla	Examinateur
Mr. MEZABIA Mohammed Elhadi	M.A.(A). Université KASDI Merbah Ouargla	Rapporteur

شكر وعرفان

الحمد لله رب العالمين حمدا يليق بجلال وجهه عظيم و سلطانه والصلاة والسلام على قدوة المربين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين .

امتثالا لقوله تعالى : <<وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ ۖ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ>>

إبراهيم الأية7.

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم :

<<مَنْ لَمْ يَشْكُرِ القَلِيلْ لَمْ يَشْكُرِ الكَثِيرْ وَمَنْ لَمْ يَشْكُرِ النَّاسْ لَمْ يَشْكُرِ الله >>

رواه أحمد والترمذي .

ولأن شكر الله يستلزم شكر أصحاب الفضل.

فإننا نرفع شكرنا وتقديرنا إلى جامعة قاصدي مرباح ورقلة التي احتضنتنا في رحابها, بمدرائها وأساتذتها "**ع.بن السايح, ع:ر.غزال, إ.مرابط, ج-أ.شاشة, إ.طلاب, س-م.السعيد, ك. كليش**"و طلبتها وعمالها, وبالأخص **طلبة النمذجة والتحليل العددي** وإلى رئيس القسم "**مفلاح مبروك**"

نتقدم بالشكر الجزيل والعرفان الجميل :

إلى الأستاذ المشرف **محمد الهادي مزابية** الذي تفضل بالأشراف على هذه المذكرة, فكان نعم الأستاذ ونعم الموجه الذي لم يبخل علينا بعلمه ووقته فجزاه الله خيرا, نقول له بشراك قول رسول الله صلى الله عليه وسلم " إن الحوت، والطير في السماء, ليصلون على معلم الناس الخير " نسأل الله أن يجزيك خير الجزاء. لك منا أسمى معاني, التقدير والعرفان.

إلى كل من ساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الجامعي .

إلى كل من ساهم في إنجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد .

إلى أعضاء اللّجنة المناقشة **ع.بن السايح, ع:ر.غزال** لقبولهم مناقشة وإثراء هذه المذكرة .

إهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك و لا يطيب النهار إلا بطاعتك و لا
تطيب اللحظات إلا بذكرك و لا تطيب الجنة إلا برؤيتك تباركت ربنا و تعاليت
إلى من بلغ الرسالة و أدى الأمانة و نصح الأمة إلى نبي الرحمة سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم
إلى من بها أكبر و عليها اعتمد إلى معنى الحب و الحنان و التفاني إلى من كان دعاؤها
سر نجاحي و بها عرفت معنى الحياة أمي الغالية أطال الله عمرك في طاعته
إلى من أحمل اسمه بكل افتخار إلى من كلله الله بالهيبة و الوقار أسأل الله
أن يحفظك لنا و يشفيك وأن يبارك لنا في عمرك...
لترى ثمارا قد حان قطافها بعد طول انتظار والدي العزيز
إلى من آثروني على أنفسهم و علموني علم الحياة إخوتي
"السعيد, حمه قويدر,عبد الوهاب, الصادق"
و أخواتي كل واحدة باسمها
إلى عائلة "**منصوري : خميسي, سليمان, محمد الحبيب ...**" وكل واحد باسمه
إلى جميع الأقارب "**محمد, عبد الجبار ...**" وكل واحد باسمه
إلى كل من قاسمني حلو الحياة الجامعية ومرها وبالأخص"**صديق, علي, طارق,**
محمد, صهيب, هشام, رمزي, حمزة, مبروك, مسعود, العيد, إلياس, نور الدين, موسى, زكريا
ميلود, حمدان, عبد الله..."
إلى كل من عرفتهم وأخص بالذكر أصدقاء "**عبد الرزاق, حسين, خميسي...**"
إلى كل من كنت يوما تلميذا أو طالبا عنده...
إلى كل من نساه قلمي ولم ينساه قلبي...
إلى من أحببتهم"**جمال, عبد الحميد, عبد المالك**"
إلى من وقفوا إلى جانبي هذه المدة "**ماستر**" : "**عبد الحفيظ, فاتح**"
إلى صاحبي وصديقي بمعنى أخي"طـــه الأقرع"

منصوري محمد .

Table des matières

Table des figures

Introduction

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans les quelles un corps déformable entre en contact avec d'autres corps. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces.

La condition de contact a été formulée par Signorini [2] en 1959. La formulation variationnelle associée à ce type de condition a été étudiée mathématiquement par Fichera [11] en 1964.

On désigne par structures minces les corps solides dont l'une des dimensions (l'épaisseur) est petite devant les autres. Ce sont les plaques, les coques, les barres, les filaments.... L'intérêt pour une modélisation fine de ces structures est d'autant plus grand que le nombre des applications industrielles va croissant. Une modélisation fine doit prendre en compte la faible épaisseur et en déduire des simplifications au modèle de départ qui est tridimensionnel. De nombreux modèles bidimensionnels ont ainsi été décrits depuis plus d'un siècle. Ces cas ont été proposés par Kirchhoff, Love, Reissner, Von Kármán et Koiter. Suivant quelques hypothèses, ils ont posé des modèles. Parmi ces modèles le modèles de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner. Dans les trente dernières années, P.G. Ciarlet et Destuynder [13] et ses collaborateurs se sont attachés à donner des justifications mathématiques à ces modèles et à en construire de nouveaux. l'étude d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince contre un obstacle rigide avec frottement de coulomb a été faite par Dhia [12] en utilisant une méthode de pénalisation. En 2002, J.C.Paumier [10] réalise une modélisation asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince encastrée, de modèle de Kirchhoff-Love, contre un obstacle rigide où il a prouvé que ce problème tridimensionnel avec frottement tend vers un problème bidimensionnel sans frottement.

Le même résultat est obtenu formellement par Chacha et Bensayah [14] pour une plaque elastique non linéaire de type von Kàrmàn.

Le premier chapitre comporte les comporte les résultats essentiels et quelques perspectives.

Dans le deuxième chapitre on va garder la même situation que celle du premier chapitre en remplaçant le corps élastique par une coque élastique mince. Ce chapitre est divisé en trois sections. La première section comporte la géométrie des coques minces. Dans la deuxième section, on part du problème classique formulé en coordonnées cartésiennes et puisque les coordonnées curvilignes sont mieux adaptées pour les coques, on reformule le problème variationnel en coordonnées curvilignes et ce ci dans le cas sans frottement. Dans la troisième section on fait la même procédure pour le cas avec frottement de Coulomb.

Objectif de ce chapitre est de transformer le problème classique en coordonnées cartésiennes au problème variationnelle dans coordonnées curvilignes.

Dans le troisième chapitre, on garde la position du problème du chapitre précédent tout en proposant l'étude asymptotique des modèles bidimensionnels "membranaire" et "couplé flexion-membrane" pour des coques dans le cadre de l'élasticité linéaire, toujours en distinguant simultanément le cas sans frottement et le cas avec frottement de Coulomb.

Objectif de ce chapitre est de transformer le problème de la 3D en 2D en utilisant le analyse asymptotique formellement.

Notations et conventions

On utilise les conventions de notations suivantes : les indices ou exposants latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3\}$ tandis que les indices grecs prennent, à l'exception de ε, leurs valeurs dans l'ensemble $\{1,2\}$. La convention des indices répétés (muets) est adoptée.

- ➤ $u = (u_i)$ vecteur de composantes u_i.
- ➤ $u.v = u_i v_i$: produit scalaire euclidien.
- ➤ de composantes x_i dans la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^3$.
- ➤ $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à la variable x_i.
- ➤ a_3^ε est le vecteur unitaire normal à la surface moyenne
- ➤ $\partial_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i^\varepsilon}$ la dérivée par rapport x_i^ε
- ➤ $\widehat{\partial}_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_i^\varepsilon}$ la dérivée par rapport $\widehat{x}_i^\varepsilon$..
- ➤ $\widehat{n}^\varepsilon = (\widehat{n}_i^\varepsilon)$ est la normale unitaire extérieure le long de la frontière de la coque $\widehat{\Omega}^\varepsilon$
- ➤ l'indice T la composante tangentielle, et par l'indice N la composante normale
- ➤ $\widehat{\sigma}^\varepsilon = (\widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon)$ tenseur des contraintes sur $\partial\widehat{\Omega}^\varepsilon$.
- ➤ $\widehat{u}^\varepsilon = (\widehat{u}_i^\varepsilon)$ vecteur composantes.

- $A = A^{ijkl}$: tenseur d'ordre 4 de rigidité.
- Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^3$.

- La frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière.
- $\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R}^3$.
- $\widehat{f}^\varepsilon$ forces volumiques.

- $\widehat{h}^\varepsilon$ forces surfaciques.
- $\theta^\varepsilon : \overline{\omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$.
- $\widehat{u}^\varepsilon_N$ représente la normale contacter déplacement, $\widehat{G}^\varepsilon_N$ représente la normale contacter pression.

- $\widehat{u}^\varepsilon = (\widehat{u}^\varepsilon_i)$ vecteur de déplacement.
- $\widehat{\sigma}^\varepsilon = (\widehat{\sigma}^\varepsilon_{ij})$ sur $\partial\widehat{\Omega}^\varepsilon$ tenseur des contraintes.
- $\pi^\varepsilon : x = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega} \longrightarrow \pi^\varepsilon(x) = x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \overline{\Omega}^\varepsilon$. bijective .
- $\widehat{e}^i$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 1

Élasticité tridimensionnelle

1.1 Les équations d'équilibre

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière et soit $\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R}^3$. Dans tout la suite, l'ensemble $\overline{\Omega}$ représenta le volume occupé par un solide "non déformé" et sera appelé configuration de référence. Nous noterons x un point courant de l'ensemble $\overline{\Omega}$, de composantes x_i dans la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^3$, et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à la variable x_i. La structure est encastrée sur une partie de sa frontière $\Gamma_0 \subset \Gamma$ de $\partial\Omega$- mesure non nulle et est soumise à une distribution surfacique de force h sur Γ_- de telle sorte que $\Gamma_0 \cap \Gamma_- = \varnothing$, et de densité de force volumique f. Les aspects mécaniques du problème sont de deux sortes, les équations d'équilibre sont déduites de principes mécaniques généraux ne faisant pas intervenir la nature du matériau, les lois de comportement dépendent du matériau considéré et traduisent les relations "contraintes-déformations".

Nous appellerons déformation de la configuration de référence une application $\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suffisamment régulière, injective, et préservant l'orientation, c'est à dire vérifiant (voir Ciarlet P.G.[5]) :

$$\det \nabla\varphi(x) > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \tag{1.1}$$

A tout déformation φ, nous associons un déplacement, qui est le champ de vecteurs $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par la relation :

$$\varphi = I_d + u. \tag{1.2}$$

L'ensemble $\overline{\Omega}^{\varphi} = \varphi(\overline{\Omega})$ est appelé configuration déformé, sa frontière $\Gamma^{\varphi} = \varphi(\Gamma)$, et notons $F : \overline{\Omega} \longrightarrow M_3^+$ le gradient de la déformation $\varphi, \Delta F = \nabla_{\varphi} = I_3 + \nabla_u$.
Si φ est une déformation dérivable au point $x \in \overline{\Omega}$, le tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite $C = \nabla\varphi^T\nabla\varphi$, apparaît en formant la quantité :

$$|\varphi(x+\delta x) - \varphi(x)|^2 = \delta x^T \nabla\varphi^T(x)\nabla\varphi(x)\delta(x) + o(|\delta x|^2), \quad x, x+\delta x \in \overline{\Omega}, \tag{1.3}$$

il joue un rôle fondamental en théorie de l'élasticité.

On dit que φ est une déformation rigide, si $\nabla\varphi(x) = \mathrm{Q}, \ \ \forall x \in \overline{\Omega}$, telle que Q est une matrice orthogonale et $\det \mathrm{Q} > 0$, on a alors $C = I_3$ dans $\overline{\Omega}$ (voir théorème 1.1.2, ciarlet P.G.[5]).

Lemme 1.1.1 *Soit $V \subset \Omega$ un ouvert, de frontière ∂V suffisamment régulière, et soit $A \subset \partial V$, alors :*
pour $V^{\varphi} = \varphi(V)$,

$$\int_{V^{\varphi}} dx^{\varphi} = \int_V |\det \nabla\varphi(x)| dx, \tag{1.4}$$

élément de volume,
et pour $A^{\varphi} = \varphi(A)$,

$$\int_{A^{\varphi}} da^{\varphi} = \int_A |Cof \nabla\varphi(x) n(x)| da, \tag{1.5}$$

oú :
n : le vecteur normal extérieur unitaire le long de ∂V.

Preuve. voir([6], Théorème 1.3-1). ■

Théorème 1.1.1 *soit* $T^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \longrightarrow \mathbb{M}^3$ *champ de tenseurs, et soit* $T(x) = T^\varphi(x^\varphi)Cof\nabla\varphi(x)$ *la transformée de Piola, alors :*

$$divT(x) = \det \nabla\varphi(x) div^\varphi T^\varphi(x^\varphi) \tag{1.6}$$

avec :

$$div^\varphi = \sum \frac{\partial}{\partial x_i^\varphi}$$

et donc :

$$\int_{\partial V} T.\, nda = \int_V divTdx = \int_{V^\varphi} div^\varphi T^\varphi dx^\varphi = \int_{\partial V^\varphi} T^\varphi.\, n^\varphi da^\varphi. \tag{1.7}$$

Preuve. voir ([9], Théorème 1.7-1). ■

Introduisons enfin le tenseur des déformations de Green-Saint-Venant E (voir ciarlet P.G. et Rabier P. [9])

$$E(u) = \frac{1}{2}(C - I_3) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) + \nabla u.\, \nabla u^T, \tag{1.8}$$

mesurant l'écart entre une déformation donnée et une déformation rigide. Le tenseur E est symétrique $E_{ij} = E_{ji}$.

Dans le tenseur des déformations apparait une partie linéaire (par rapport au déplacement u) et une partie non linéaire. La partie linéaire :

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i). \tag{1.9}$$

est appelée tenseur linéarisé des déformations et intervient dans la théorie linéaire de l'élasticité (dans le cadre des petites déformations).

Nous supposons que le corps occupant une configuration déformée $\overline{\Omega}^\varphi$ est soumis à deux types de forces appliquées, forces appliquées de volume, correspondant à un champ de vecteurs $f^\varphi : \Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et forces appliquée de surfaces définies sur une portion $\Gamma_-^\varphi = \varphi(\Gamma_-)$ de la frontière Γ^φ, correspondant à un champ de vecteurs $h^\varphi : \Gamma_-^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Remarque 1.1.1 *Pour des questions de compatibilité avec le point de vue mécanique, il est nécessaire que* φ *soit un difféomorphisme global de* Ω *sur* $\varphi(\Omega)$ *et que* φ *préserve l'orientation, une condition à imposer est donc que :*

$$\det \nabla\varphi(x) > 0 \qquad \textit{Pour tout } x \in \overline{\Omega}. \tag{1.10}$$

Réciproquement, la condition $\det \nabla\varphi(x) > 0$ *entraîne que localement,* φ *est un difféomorphisme qui préserve l'orientation, mais cette seule hypothèse est insuffisante pour obtenir un résultat d'inversibilité global (voir [9] théorème 1.2-2).*

D'après le théorème de Cauchy qui est lui-même une conséquence de l'axiome connu sous le nom de principe des contraintes d'Euler-Cauchy, l'état d'équilibre statique de la configuration déformée est traduite par, il existe :

$$t^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \tag{1.11}$$

tel que :

Pour tout $A^\varphi \subset \Omega^\varphi$,

$$\int_{A^\varphi} f^\varphi dx^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi(x^\varphi))da^\varphi = 0, \tag{1.12}$$

$$\int_{A^\varphi} x^\varphi \wedge f^\varphi dx^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} x^\varphi \wedge t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi(x^\varphi))da^\varphi = 0, \tag{1.13}$$

$$t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi(x^\varphi))da^\varphi = h^\varphi(x^\varphi), \tag{1.14}$$

pour $\partial\Omega^\varphi$ presque partout $x^\varphi \in \partial A^\varphi \cap \Gamma_-^\varphi$, où :

$n^\varphi(x^\varphi)$ est le vecteur normal extérieur unitaire le long de ∂A^φ en x^φ,($n^\varphi(x^\varphi)$ existe da^φ presque partout $x^\varphi \in \partial A^\varphi$)

$$S_2 = \{v \in \mathbb{R}^3, |v| = 1\}.$$

Théorème 1.1.2 *Si* $t^\varphi(.\,, n^\varphi) : \overline{\Omega}^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est de classe* C^1 *pour tout* $n^\varphi \in S_2, t^\varphi(x^\varphi, .\,) : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est continue pour tout* $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$*, et* $f^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est continue.*
Alors :
$t^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est linéaire pour la deuxième variable.*

Preuve. (voir [9] ., théorème 2.3-1). ■

Autrement dit, il existe $T^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \longrightarrow \mathbb{M}^3$ de classe C^1 tel que :

$$t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi) = T^\varphi(x^\varphi)n^\varphi, \tag{1.15}$$

pour tout $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$ et pour tout $n^\varphi \in S_2$,

T^φ est appelé tenseur des contraintes de Cauchy.

Les équations d'équilibre dans la configuration déformée $\overline{\Omega}^\varphi$ doivent être satisfaites :

Théorème 1.1.3

$$-divT^\varphi(x^\varphi) = f^\varphi(x^\varphi) \quad pour\ tout\ x^\varphi \in \Omega^\varphi, \tag{1.16}$$

$$T^\varphi(x^\varphi)n^\varphi(x^\varphi) = h^\varphi(x^\varphi) \quad pour\ tout\ x^\varphi \in \Gamma_-^\varphi, \tag{1.17}$$

$$T^\varphi(x^\varphi) \in \mathbb{S}^3 \quad pour\ tout\ x^\varphi \in \Omega^\varphi \tag{1.18}$$

Preuve. (voir [9] ., théorème 2.4-1). ∎

Pour passer à la variable $x \in \overline{\Omega}(x^\varphi = \varphi(x))$ tout en préservant autant que possible la forme "de divergence" des équations, on introduit la transformée de Piola du champ de tenseurs T^φ : c'est le champ de tenseurs $T = (t_{ij}) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{M}^3$.

On a :

$$dx^\varphi = |\det \nabla\varphi(x)| dx, \tag{1.19}$$

$$n^\varphi da^\varphi = Cof\nabla\varphi(x)n(x)da, \tag{1.20}$$

et on définie $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $h : \Gamma_- \longrightarrow \mathbb{R}^3$, par :

$$f^\varphi(x^\varphi)dx^\varphi = f(x)dx, \tag{1.21}$$

$$h^\varphi(x^\varphi)da^\varphi = h(x)da. \tag{1.22}$$

On fera désormais l'hypothèse que les forces appliquées sont "mortes", dans le sens que les champs $f^\varphi, h^\varphi, f, h$ sont indépendants de la déformation φ.

En supposant que φ suffisamment régulière et utilisant le changement de variables dans (1.12), on déduit que :

pour tout $A \subset \Omega$,

$$\int_A f(x)dx + \int_{\partial A} T^\varphi(\varphi(x))Cof\nabla\varphi(x)n(x)da = 0 \tag{1.23}$$

On définie T par

$$T(x) = T^{\varphi}(\varphi(x))Cof\nabla\varphi(x) \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}, \tag{1.24}$$

est appelé en élasticité le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Donc :

$$\int_A f(x)dx + \int_{\partial A} T(x)n(x)da = 0. \tag{1.25}$$

Alors, T vérifie les équations d'équilibre dans la configuration de référence $\overline{\Omega}$:

$$-divT(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega, \tag{1.26}$$

$$T(x)n(x) = h(x) \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_-. \tag{1.27}$$

$$\nabla\varphi(x)^{-1}T(x) \in \mathbb{S}^3 \quad \text{pour tout } x \in \Omega \tag{1.28}$$

où :

$$\Gamma_- \subset \partial\Omega \text{ et } \Gamma_-^{\varphi} = \varphi(\Gamma_-). \tag{1.29}$$

Un inconvénient du premier tenseur de Piola-Kirchhoff est son absence de symétrie, alors que le tenseur de Cauchy est symétrique. On peut "récupérer " cette symétrie en introduisant le champ de tenseur $\Sigma = (\sigma_{ij}) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{S}^3$ définis par :

$$\Sigma(x) = \nabla\varphi(x)^{-1}T(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega. \tag{1.30}$$

Le tenseur Σ, appelé en élasticité le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, est évidemment symétrique ; on déduit en effet immédiatement de (1.26)-(1.28) les équations suivantes, qui représentent l'autre forme des équations d'équilibre dans la configuration de référence $\overline{\Omega}$:

$$-div(\nabla\varphi(x)\Sigma(x)) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega, \tag{1.31}$$

$$(\nabla\varphi(x)\Sigma(x))n(x) = h(x) \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_-. \tag{1.32}$$

$$\Sigma \in \mathbb{S}^3 \quad \text{pour tout } x \in \Omega \tag{1.33}$$

Ce qui équivaut :

$$-\partial_j(\sigma_{ij}) = f_i \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.34}$$

$$(\sigma_{ij})n_j = h_i \quad \text{sur } \Gamma_-. \tag{1.35}$$

en utilisant les relations :

$$\partial_j \varphi_i = \delta_{ij} + \partial_j u_i. \tag{1.36}$$

1.2 Les lois de comportement

Les lois de comportement expriment les relations qui existent entre le second tenseur de Piola-Kirchhoff σ et le tenseur des déformations de Green Saint-Venant e, ces relations dépendent de la nature du matériau.
On suppose dans toute la suite que l'ensemble $\overline{\Omega}$ dans la configuration de référence est occupé par un matériau élastique.

Définition 1.2.1 *On dit qu'un matériau occupant l'ensemble $\overline{\Omega}$ dans la configuration initiale est élastique s'il existe une fonction $\widehat{T} : \overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \longrightarrow \mathbb{M}^3$, tel que :*

$$T(x) = \widehat{T}(x, \nabla\varphi(x)) \quad \textit{pour tout } x \in \overline{\Omega} \tag{1.37}$$

$\widehat{T}$: est dite loi de comportement du premier tenseur de Piola-Kirchhoff.
Ce qui équivaut, il existe une fonction $\widehat{\Sigma} : \overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \longrightarrow \mathbb{S}^3$, tel que :

$$\Sigma(x) = \widehat{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)) \quad \textit{pour tout } x \in \overline{\Omega} \tag{1.38}$$

$\widehat{\Sigma}$: est dite loi de comportement du second tenseur de Piola -Kirchhoff.

Théorème 1.2.1 *Un matériau élastique satisfait le principe de l'indifférence matérielle si et seulement si :*

$$\widehat{T}(x, QF) = Q\widehat{T}(x, F) \tag{1.39}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}, Q \in \mathbb{O}^3_+$ et $F \in \mathbb{M}^3_+$
Ce qui équivaut :

$$\widehat{\Sigma}(x, QF) = \widehat{\Sigma}(x, F), \tag{1.40}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}, Q \in \mathbb{O}^3_+$ et $F \in \mathbb{M}^3_+$

Preuve. (voir [9] ,Théorème 3.3.1) ■

De (1.38), on déduit que :

$\widehat{\Sigma}$ dépend de F uniquement par la matrice $U = (F^T F)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{S}^3_>$.
D'oú en déduire que :

$$\widehat{\Sigma}(x, F) = \widehat{\Sigma}(x, U), \tag{1.41}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $F = RU \in \mathbb{M}^3_+$.

Cela implique que, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff Σ dèpond de φ uniquement par le tenseur métrique $C = \nabla\varphi^T \nabla\varphi$.
Donc :

$$\Sigma(x) = \widetilde{\Sigma}(x, C(x)) \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega} \tag{1.42}$$

où : $\widetilde{\Sigma} : \overline{\Omega} \times S^3_> \longrightarrow S^3$ est d éfinit par :

$$\widetilde{\Sigma}(x, C) = \widetilde{\Sigma}(x, C^{\frac{1}{2}}), \tag{1.43}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $C \in \mathbb{S}^3_>$.

Définition 1.2.2 *Un matériau est isotrope en $x \in \overline{\Omega}$ si les propriétés du matériau "sont les mêmes dans toutes les directions"; il s'agit donc d'une caractéristique d'un matériau donné, mais visiblement "raisonnable" pour certains matériaux, c'est une propriété de symétrie matérielle.*

Remarque 1.2.1 *Un matériau occupant la configuration de référence $\overline{\Omega}$ est isotrope s'il est isotrope en tout les points de $\overline{\Omega}$.*

Théorème 1.2.2 *Un matériau élastique occupant la configuration de référence $\overline{\Omega}$ est isotrope si et seulement si :*

$$\widehat{T}(x, FQ) = \widehat{T}(x, F)Q, \tag{1.44}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}, Q \in \mathbb{O}^3_+$ et $F \in \mathbb{M}^3_+$. Ce qui équivaut :

$$\widehat{\Sigma}(x, FQ) = Q^T \widehat{\Sigma}(x, F)Q, \tag{1.45}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}, Q \in \mathbb{O}^3_+$ et $F \in \mathbb{M}^3_+$.

Preuve. voir [9], théorème 3.4-1]). ■

Définition 1.2.3 *Un matériau élastique occupant la configuration de référence $\overline{\Omega}$ est hémogénie si sa loi de comportement est indépendante du point $x \in \overline{\Omega}$ considéré.*
Ce équivaut :
ils existent ; $\widehat{T} : \mathbb{M}^3_+ \longrightarrow \mathbb{M}^3$ et $\widehat{\Sigma} : \mathbb{M}^3_+ \longrightarrow \mathbb{M}^3$ et $\widehat{\Sigma} : \mathbb{M}^3_+ \longrightarrow \mathbb{S}^3$, tel que :

$$\widehat{T}(x, F) = \widehat{T}(F), \tag{1.46}$$

te

$$\widehat{\Sigma}(x, F) = \widehat{\Sigma}(F), \tag{1.47}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $F \in \mathbb{M}^3_+$.
La configuration de référence $\overline{\Omega}$ est un état naturel (les contraintes sont libres), si

$$\widehat{T}(x, I) = 0 \quad \textit{pour tout } x \in \overline{\Omega} \tag{1.48}$$

Ce qui équivaut :

$$\widehat{\Sigma}(x, I) = 0 \quad \textit{pour tout } x \in \overline{\Omega} \tag{1.49}$$

Théorème 1.2.3 *Si un matériau est isotrope et satisfait le principe de l'indifférence matérielle, alors il existe des fonctions $\gamma_i^{\xi} : \Omega \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que :*

$$\sum(x) = \gamma_0(x)I + \gamma_1(x)C(x) + \gamma_2(x)C^2(x) \quad \textit{pour tout } x \in \overline{\Omega} \tag{1.50}$$

Où :

$$\gamma_i(x) = \gamma_i^{\xi}(x, trC, tr(CofC), \det C)$$

Preuve. voir [9], théorème 3.4-1]). ■

1.3 La surface moyenne

Soit $\mathcal{E}^3$ l'espace euclidien habituel rapporté á un repère orthonormé fixe $(0, e_1, e_2, e_3)$, et soit ω un sous-ensemble ouvert borné du plan $\mathcal{E}^2$ dont la frontière est notée γ. Alors, la surface moyenne S de la coque est l'image dans $\mathcal{E}^3$ de l'ensemble $\overline{\omega}$ (ω est appelé domaine de référence)par l'application θ :

$$\theta : (\zeta^1, \zeta^2) \in \overline{\omega} \subset \mathcal{E}^2 \longrightarrow \theta(\zeta^1, \zeta^2) \in \overline{S} \subset \mathcal{E}^3.$$

θ est une application injective, qui est au moins de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\overline{\omega}$ et admet des dérivées secondes au sens faible.

Nous notons $\partial S = \theta(\gamma)$, de telle sorte que $\overline{S} = S \cup \partial S$, et nous supposons que θ et γ sont suffisamment régulières. En particulier, nous supposons que tous les points de la surface moyenne $\overline{S} = \theta(\overline{\omega})$ sont réguliers de telle sorte que les vecteurs,

$$a_\alpha = \frac{\partial\theta}{\partial\zeta^\alpha}, \qquad \alpha = 1.2,$$

sont linéairement indépendants pour tous les points $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) \in \overline{\omega}$. Ces deux vecteurs définissent le plan tangent á la surface $\overline{S}$ en tout point $\theta(\zeta)$. Le vecteur normal au plan tangent est donné par :

$$a_3(\zeta) = \frac{a_1(\zeta) \times a_2(\zeta)}{|a_1(\zeta) \times a_2(\zeta)|}.$$

On désigne par $|.|$ la norme euclidienne dans l'espace $\mathcal{E}^3$ équipé du produit scalaire habituel $(a, b) \longrightarrow a.b$ Alors , le point $\theta(\zeta)$ et les trois vecteurs a_i définissent un repère local pour la surface moyenne, *i.e.*, la base covariante attachée au point $\theta(\zeta)$. Nous désignons par $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ les première et seconde formes fondamentales de la surface moyenne S ; autrement dit,

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = a_\alpha a_\beta = \theta_{,\alpha}.\theta_{,\beta} \quad ,$$

et

$$b_{\alpha\beta} = a_3.\partial_\alpha a_\beta = -\partial_\alpha a_3.a_\beta = b_{\beta\alpha} = -a_\alpha.a_{3,\beta} = a_3.a_{\alpha,\beta} = a_3.a_{\beta,\alpha}.$$

Dans toute la suite, nous utilisons des lettres grecques, $\alpha, \beta, \ldots$, pour des indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$, des lettres latines, $i, j, \ldots$, pour les indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ nous adoptons la convention de sommation sur les indices répétés haut et bas. Aux vecteurs a_α, nous associons deux autres vecteurs

a^β du plan tangent définis par

$$a_\alpha . a^\beta = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = \beta \\ 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \end{cases} \text{ , en particulier } , a^3(x) = a_3(x).$$

Ces vecteurs sont reliés aux vecteurs a_α par les relations,

$$a_\alpha = a_{\alpha\beta} a^\beta, \quad a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_\beta \text{ et } a^{\alpha\beta} = a^\alpha a^\beta = a^{\beta\alpha},$$

où la matrice $(a^{\alpha\beta})$ est l'inverse de la matrice $(a_{\alpha\beta})$. Cette matrice est bien définie car tous les points de la surface moyenne S sont supposés réguliers.

L'ensemble (a^1, a^2, a^3) définit la base contravariant attachée au point $\theta(\zeta)$.
Pour un tenseur donnée, les tenseurs métriques $(a_{\alpha\beta})$ et $(a^{\alpha\beta})$ nous permettent d'associer les composantes covariantes, contravariantes et mixtes d'un tenseur donnée.
Par exemple, aux composantes covariantes $b_{\alpha\beta}$ de la seconde forme fondamentale, nous pouvons associer les composantes mixtes et la contravariantes correspondantes.

$$b_\alpha^\beta(\zeta) = a^{\beta\lambda}(\zeta) b_{\lambda\alpha}(\zeta).$$

et la troisième forme fondamentale par ses composantes covariantes

$$c_{\alpha\beta}(\zeta) = b_\alpha^\lambda(\zeta) b_{\lambda\beta}(\zeta),$$

Étant donnée que les bases (a_1, a_2, a_3) et (a^1, a^2, a^3) ne sont en général ni normées, ni orthogonales, il est commode d'introduire les symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ pour calculer les dérivées de ces vecteurs de base. Cette remarque a un sens pour introduire la base contravariant (duale de la covariante), les symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ représentent les composantes de $\partial_\beta a^\alpha$ dans le plan tangent.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = a^\lambda . \partial_\beta a_\alpha = -\partial_\beta a^\lambda . a_\alpha.$$

Il est également commode de préciser les expressions de quelques produits vectoriels des fonctions de base :

$$\begin{cases} a_\alpha \times a_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} a^3 \;\; ; \;\; a^\alpha a^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta} a_3 \\ a_3 \times a_\beta = \varepsilon_{\beta\lambda} a^\lambda \;\; ; \;\; a_3 \times a^\beta = \varepsilon^{\beta\lambda} a_\lambda \end{cases} \quad \text{où } a = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2 \neq 0 \quad \text{(points rgulies)} .$$

L'élément d'aire dS est donnée par :

$$dS = |a_1 \times a_2| d\zeta^1 d\zeta^2 = \sqrt{a} d\zeta.$$

Chapitre 2

Présentation générale du problème de Signorini pour les coques minces

Introduction

Ce chapitre est divisé en trois sections. La première section comporte la géométrie des coques minces. Dans la deuxième section, on part du problème classique formulé en coordonnées cartésiennes et puisque les coordonnées curvilignes sont mieux adaptées pour les coques, on reformule le problème variationnel en coordonnées curvilignes et ce ci dans le cas sans frottement. Dans la troisième section on fait la même procédure pour le cas avec frottement de Coulomb.

2.1 Description de la géométrie d'une coque mince

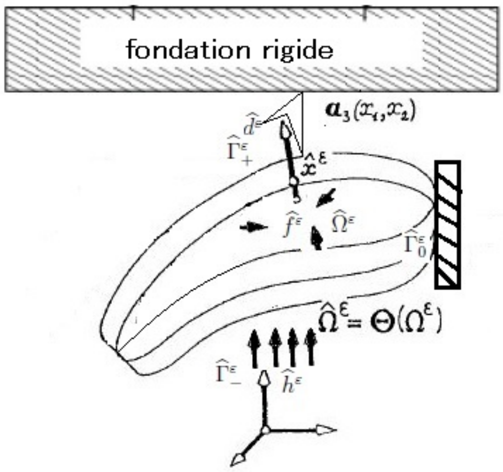

FIGURE 2.1 – Description de $\widehat{\Omega}^\varepsilon$

Soit $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^3$; tel que ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$, avec une frontière assez régulière γ. On note la frontière latérale de Ω^ε par $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, la face supérieure et la face inférieure sont notées, respectivement par Γ_+^ε et Γ_-^ε. Soit $\theta^\varepsilon : \overline{\omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^3. La configuration de référence de la coque est $\left\{\widehat{\Omega}^\varepsilon\right\}^-$, où $\widehat{\Omega}^\varepsilon = \Theta(\Omega^\varepsilon), \widehat{x}^\varepsilon = \Theta(x^\varepsilon)$, $\Theta(x^\varepsilon) = \theta(x_1, x_2) + x_3^\varepsilon a_3(x_1, x_2)$ pour tout $x^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \in \overline{\Omega}^\varepsilon$ et a_3^ε est le vecteur unitaire normal à la surface moyenne $\widehat{\omega} = \Theta(\overline{\omega})$ de la coque voir figure 2.2 [1] Pour ε assez petit, l'application $\Theta : \overline{\Omega}^\varepsilon \longrightarrow (\overline{\Omega}^\varepsilon)$ est un C^1-difféomorphisme (voir [6]) et on suppose aussi que Θ préserve l'orientation, i.e $\det \nabla^\varepsilon \Theta(x^\varepsilon) > 0, \quad \forall x^\varepsilon \in \overline{\Omega}^\varepsilon$.

On suppose que $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ est occupé par corps linéairement élastique, homogène et isotrope (voir chapitre 1, définition 1.2.1, 1.2.2 et 1.2.3). Dans sa configuration naturelle : une coque d'épaisseur 2ε dont les constantes de Lamé sont notées par $\lambda > 0, \mu > 0$ et sont supposées indépendantes de ε. On suppose que la coque en question est soumise à des forces volumiques de densité $\widehat{f}^\varepsilon \in (L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon))^3$, sa face inférieure $\widehat{\Gamma}^\varepsilon_- = \Theta^\varepsilon(\Gamma^\varepsilon_-)$ soumise à des forces surfaciques de densité $\widehat{h}^\varepsilon \in (L^2(\widehat{\Gamma}^\varepsilon_-))^3$ sa face latérale est encastrée uniquement sur

1. Cette figure et toutes les figures suivantes sont prises de[4]

$\Theta^\varepsilon(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ qui est une partie non vide de $\widehat{\Gamma}_0^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_0^\varepsilon)$ représentant sa face latérale totale. On suppose aussi que cette coque entre en contact unilatéral sur sa face supérieure $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_+^\varepsilon)$ contre une fondation rigide $\mathfrak{D}^\varepsilon = \{x^\varepsilon \in \mathbb{R}^3/(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \in \omega, x_3^\varepsilon \geq \widehat{d}^\varepsilon\}$, où $\widehat{d}^\varepsilon (\geq 0)$ est la fonction d'interstice définie sur $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon$ et qui désigne la distance entre la face supérieure et la fondation rigide mesurée dans la direction normale, Λ son coefficient de frottement. On suppose aussi que le système est en état statique. Notons que les indices Grecs appartiennent à l'ensemble $\{1, 2\}$, les indices Latin appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et la convention de sommation de Einstein par rapport aux indices et exposants répétés est systématiquement utilisées, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i^\varepsilon}$, $\widehat{\partial}_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_i^\varepsilon}$, $\widehat{n}^\varepsilon = (\widehat{n}_i^\varepsilon)$ est la normale unitaire extérieure le long de la frontière de la coque $\widehat{\Omega}^\varepsilon$. On note par l'indice T la composante tangentielle, et par l'indice N la composante normale, $\nu^\varepsilon = (\nu_\alpha^\varepsilon)$ et $\tau^\varepsilon = (\tau_\alpha^\varepsilon)$ sont respectivement la normale unitaire extérieure et le vecteur tangent unitaire tels que $\tau_1 = -\nu_2$ et $\tau_2 = \nu_1$ le long de la frontière de l'ensemble ω. Les opérateurs différentiels de la dérivée normale extérieure et de la dérivée tangentielle $\nu_\alpha \partial_\alpha$ et $\tau_\alpha \partial_\alpha$ le long de γ sont notées par ∂_ν et ∂_τ. Dans toute la suite, on utilise la convention de notation suivante : les notations comportant un chapeau sont exprimées dans un système de coordonnées cartésiennes, celles sans chapeau étant exprimées dans un système de coordonnées curvilignes, Soit $\widehat{u}_N^\varepsilon$ (respectivement $\widehat{G}_N^\varepsilon$) représente la normale contacter déplacement (respectivement, pression) sur $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon$. La fonction $\widehat{u}_N^\varepsilon$ (respectivement, $\widehat{G}_N^\varepsilon$) est le composant le long de $\widehat{n}^\varepsilon$ (respectivement, $\widehat{n}^\varepsilon \otimes \widehat{n}^\varepsilon$) de la trace sur $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon$ du Champ de déplacement (respectivement, du champ de contrainte).

2.2 Le cas sans frottement

Nous utilisons une décomposition classique dans la normale et les composantes tangentielles du vecteur de déplacement $\widehat{u}^\varepsilon = (\widehat{u}_i^\varepsilon)$ et de la tenseur des contraintes $\widehat{\sigma}^\varepsilon = (\widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon)$ sur $\partial\widehat{\Omega}^\varepsilon$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_N^\varepsilon &= \widehat{u}^\varepsilon \widehat{n}^\varepsilon, \;\; \widehat{u}_T^\varepsilon = \widehat{u}^\varepsilon - \widehat{u}_N^\varepsilon \widehat{n}^\varepsilon \\
\widehat{G}_N^\varepsilon &= \widehat{\sigma}^\varepsilon \widehat{n}^\varepsilon \cdot \widehat{n}^\varepsilon = \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon \widehat{n}_i^\varepsilon, \; \widehat{G}_T^\varepsilon = \widehat{\sigma}^\varepsilon \widehat{n}^\varepsilon - \widehat{G}_N^\varepsilon \widehat{n}^\varepsilon
\end{aligned}$$

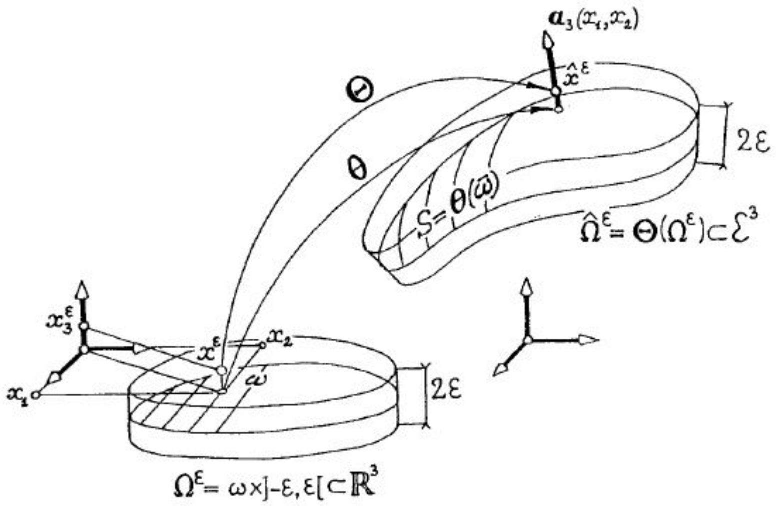

FIGURE 2.2 – Transformation du domaine voir[1]

2.2.1 Problème classique $(\widehat{P}^\varepsilon.C)$

Le problème classique à trois dimensions linéairement élastique pour la coque élastique $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ le contact unilatéral sans frottement avec la fondation rigide sur la frontière $\widehat{\Gamma}^\varepsilon_+$ est formulé suivant :

$$\widehat{P}^\varepsilon.C \begin{cases} \text{Trouver} \quad \widehat{u}^\varepsilon \quad \text{tel que :} \\ -\widehat{\partial}^\varepsilon_j \widehat{\sigma}^\varepsilon_{ij}(\widehat{u}^\varepsilon) = \widehat{f}^\varepsilon_i \quad \text{dans} \quad \widehat{\Omega}^\varepsilon \\ \widehat{\sigma}^\varepsilon_{ij}(\widehat{u}^\varepsilon)\widehat{n}^\varepsilon_j = \widehat{h}^\varepsilon_i \quad \text{sur} \quad \widehat{\Gamma}_- \\ \widehat{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \widehat{\Gamma}^\varepsilon_0 \\ \widehat{u}^\varepsilon_N \leq \widehat{d}^\varepsilon, \widehat{G}^\varepsilon_N \leq 0, \widehat{G}^\varepsilon_N(\widehat{u}^\varepsilon_N - \widehat{d}^\varepsilon) = 0, \widehat{G}^\varepsilon_T = 0 \quad \text{sur} \quad \widehat{\Gamma}^\varepsilon_+ \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$\widehat{\sigma}^\varepsilon_{ij}(\widehat{u}^\varepsilon) = \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon}\widehat{e}^\varepsilon_{kl}(\widehat{u}^\varepsilon), \tag{2.2}$$

$$\widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} = \lambda^\varepsilon \delta^{ij}\delta^{kl} + \mu(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}) : \lambda, \mu \text{ Coefficients élastiques ,} \tag{2.3}$$

$$\widehat{e}^\varepsilon_{ij}(\widehat{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\widehat{\partial}^\varepsilon_i \widehat{u}^\varepsilon_j + \widehat{\partial}^\varepsilon_j \widehat{u}^\varepsilon_i) \text{ Composantes du tenseur de déformation linéarisé.} \tag{2.4}$$

Remarque 2.2.1 *$\widehat{G}^\varepsilon_N$ présente la densité de force de pression et $\widehat{G}^\varepsilon_T$ les densités des forces de frottement.*

2.2.2 Problème variationnel $(\widehat{P}^\varepsilon.V)$

Théorème 2.2.1 *Le problème $(\widehat{P}^\varepsilon.C)$ est formellement équivalent au problème $(\widehat{P}^\varepsilon.V)$*

$$\widehat{P}^\varepsilon.V \begin{cases} \textit{Trouver} \quad (\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{G}^\varepsilon_N) \in \boldsymbol{K}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \times \boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma}^\varepsilon_+) \quad \textit{tel que} \ : \\ \widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) = \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon) + \langle \widehat{G}^\varepsilon_N, \widehat{v}^\varepsilon_N \rangle \quad \forall \widehat{v}^\varepsilon \in \boldsymbol{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \\ \langle \widehat{G}^\varepsilon_N, \widehat{v}_N - \widehat{u}^\varepsilon_N \rangle \geq 0, \quad \forall \widehat{v}^\varepsilon \in \boldsymbol{K}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) &= \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} \widehat{e}^\varepsilon_{kl}(\widehat{u}^\varepsilon) e^\varepsilon_{ij}(\widehat{v}) d\widehat{x}^\varepsilon \\ \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}) &= \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}^\varepsilon_i \widehat{v}_i \ \ d\widehat{x}^\varepsilon + \int_{\widehat{\Gamma}^\varepsilon_-} \widehat{h}^\varepsilon_i \widehat{v}_i \ \ d\widehat{\Gamma}^\varepsilon \\ \langle .,. \rangle & \quad \textit{Présente le produit de la dualité sur } \widehat{\Gamma}^\varepsilon_+, \\ \boldsymbol{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) &= \{\widehat{v}^\varepsilon = (\widehat{v}^\varepsilon_i) \in \boldsymbol{H}^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon), \widehat{v}^\varepsilon = 0 \ \ \textit{sur} \ \ \widehat{\Gamma}^\varepsilon_0\}, \boldsymbol{H}^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon) = (H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon))^3 \\ \boldsymbol{K}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) &= \{\widehat{v}^\varepsilon \in \boldsymbol{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) / \widehat{v}^\varepsilon_N \leq \widehat{d}^\varepsilon \ \ \textit{sur} \ \ \widehat{\Gamma}^\varepsilon_+\}, \ (H^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma}^\varepsilon_+))^3 = \boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma}^\varepsilon_+) \end{aligned}$$

Preuve. (voir [8] Théorème (1.1) du chapitre 1) ∎

2.2.3 Problème variationnel $(\widehat{P}^\varepsilon.V)$ en coordonnées curvilignes

On note par $\widehat{e}^i$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $(g^{m,\varepsilon}(x^\varepsilon))$ sa base contravariante au point $\widehat{x}^\varepsilon$, définie par $g^\varepsilon_i(x^\varepsilon) \cdot g^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \delta^j_i$, dont la base covariante est $(g^\varepsilon_i(x^\varepsilon))$ donnée par $g^\varepsilon_i(x^\varepsilon) = \partial^\varepsilon_i \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon)$ $\forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$. On note respectivement les symboles de Christoffel et les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique par :
$\Gamma^{k,\varepsilon}_{ij} = \partial^\varepsilon_i g^\varepsilon_i \cdot g^{k,\varepsilon}, g^\varepsilon_{ij} = g^\varepsilon_i \cdot g^\varepsilon_j, g^{ij,\varepsilon} = g^{i,\varepsilon} \cdot g^{j,\varepsilon}$, l'élément de volume de $\Theta^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$ est $\sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon$, où $g^\varepsilon = \det(g^\varepsilon_{ij})$. On note aussi les composantes contravariantes des forces volumiques et surfaciques respectivement par $\widehat{f}^\varepsilon_i(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i = f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) g^\varepsilon_i(x^\varepsilon)$ $\forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$, $\widehat{h}^\varepsilon_i(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i = h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) g^\varepsilon_i(x^\varepsilon)$ $\forall x^\varepsilon \in (\Gamma^\varepsilon_-)$. Les composantes de chaque champs de vecteurs $\widehat{v}^\varepsilon = (\widehat{v}^\varepsilon_i) \in \mathbf{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$ sont données par $\widehat{v}^\varepsilon_i(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i = v^\varepsilon_i(x^\varepsilon) g^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)$, $\forall \widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) \in \{\widehat{\Omega}^\varepsilon\}^-$, et on utilise les relations $v^\varepsilon_i(x^\varepsilon) = \widehat{v}^\varepsilon_j(\widehat{x}^\varepsilon)[g^\varepsilon_i(x^\varepsilon)]^j$ où $[g^\varepsilon_i(x^\varepsilon)]^j$ est la j^{eme} composante du vecteur $g^\varepsilon_i(x^\varepsilon)$. Pour plus de détails (voir [6] et [4]) (voir figure 2.3).
On définie ϕ^ε_3 dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\varepsilon_+)$ par :$\langle \phi^\varepsilon_3, v^\varepsilon_3 \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon \rangle = \langle \widehat{\phi}^\varepsilon_N, \widehat{v}^\varepsilon_N \rangle$ pour tout $\widehat{v}^\varepsilon \in (H^{\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma}^\varepsilon_+))^3$.

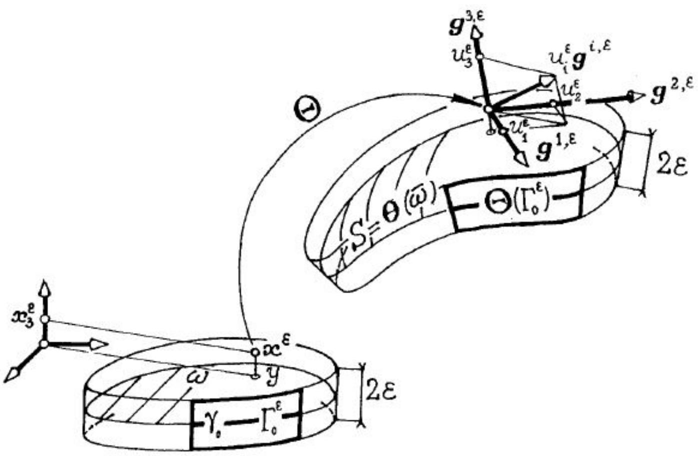

FIGURE 2.3 – Coordonnées curvilignes voir[1]

Soient (u_i^ε) les composantes covariantes du champs de vecteurs $\widehat{u}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i$ et $G^{i,\varepsilon}$ sont les composantes contravariantes du champs de vecteurs $\widehat{G}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i$, donc on transforme le problème précédent écrit en cordonnées cartésiennes $\widehat{x}^\varepsilon = (\widehat{x}_i^\varepsilon)$ en un problème écrit en cordonnées curvilignes $x^\varepsilon = (x_i^\varepsilon)$ mieux adaptées à l'étude des coques, est décrite au proposition suivant.

Proposition 2.2.1 *Soit (u_i^ε) être les composantes covariantes du champ vectoriel $\widehat{u}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i$ et $G^{i,\varepsilon}$ les composantes contravariantes du champ vectoriel $\widehat{G}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}_i$ alors le problème variationnelle $(\widehat{P}^\varepsilon \cdot V)$ en coordonnées curvilignes est formulé sous forme suivant :*

$$(P^\varepsilon \cdot V) \begin{cases} \textit{Trouver} \;\; (u^\varepsilon, G^{3,\varepsilon}) \in \boldsymbol{K}(\Omega^\varepsilon) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+^\varepsilon) \quad \textit{tel que} \;: \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \langle G^{3,\varepsilon}, v_3^\varepsilon\sqrt{g^\varepsilon}\rangle \quad \forall v^\varepsilon \in \boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon) \\ \langle G^{3,\varepsilon}, (v_3^\varepsilon - u_3^\varepsilon)\sqrt{g^\varepsilon}\rangle \geq 0 \qquad \forall v_3^\varepsilon \in K(\Omega^\varepsilon) \end{cases} \tag{2.6}$$

où

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e_{k\|l}^\varepsilon(v^\varepsilon)\sqrt{g^\varepsilon}dx^\varepsilon \\ A^{ijkl,\varepsilon} &= \lambda g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu(g^{ik,\varepsilon} g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon}) \\ e_{i\|j}^\varepsilon(v^\varepsilon) &= \frac{1}{2}(v_{i\|j}^\varepsilon + v_{j\|i}^\varepsilon), \quad v_{i\|j}^\varepsilon = \partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon - \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} v_k^\varepsilon \\ L^\varepsilon(v^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} h^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon, \quad \delta^\varepsilon = \sqrt{g^\varepsilon} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon) &= \{v^\varepsilon = (v_i^\varepsilon) \in H^1(\Omega^\varepsilon), v^\varepsilon = 0 \;\; sur \;\; \Gamma_0^\varepsilon\} \\ \boldsymbol{K}(\Omega^\varepsilon) &= \{v^\varepsilon \in \boldsymbol{V}(\Omega^\varepsilon)/v_3^\varepsilon \le d^\varepsilon \quad sur\ \Gamma_+^\varepsilon\}, d^\varepsilon = \widehat{d}^\varepsilon\end{aligned}$$

Preuve. ([1], théorème 1.2-1) ■

2.3 Le cas avec frottement

On va étudier dans cette partie, le même problème précédent en supposant que le contact unilatéral est avec frottement de Coulomb.

2.3.1 Problème classique $(\widehat{P}^\varepsilon.C)$

$$\begin{cases}\text{Trouver} \quad \widehat{u}^\varepsilon \quad \text{tel que :} \\ -\widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \widehat{f}_i^\varepsilon \ dans\ \widehat{\Omega}^\varepsilon \\ \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon)\widehat{n}_j^\varepsilon = \widehat{h}_i^\varepsilon \ sur\ \widehat{\Gamma}_- \\ \widehat{u}^\varepsilon = 0\ sur\ \widehat{\Gamma}_0^\varepsilon \\ \widehat{u}_N^\varepsilon \le \widehat{d}^\varepsilon, \widehat{G}_N^\varepsilon \le 0, \widehat{G}_N^\varepsilon(\widehat{u}_N^\varepsilon - \widehat{d}^\varepsilon) = 0,\ sur\ \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon \\ |\widehat{\sigma}_\tau^\varepsilon| < \nu|\widehat{\sigma}_N^\varepsilon| \Rightarrow \widehat{u}_\tau^\varepsilon = 0 \ \text{ sur } \ \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon \\ |\widehat{\sigma}_\tau^\varepsilon| = \nu|\widehat{\sigma}_N^\varepsilon| \Rightarrow \exists\delta > 0, \widehat{u}_\tau^\varepsilon = -\delta\widehat{\sigma}_\tau^\varepsilon\ sur\ \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon\end{cases} \tag{2.7}$$

tels que :

$$\widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon}\widehat{e}_{kl}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon), \quad \widehat{G}_i^\varepsilon = \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon \tag{2.8}$$

$$\widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} = \lambda^\varepsilon \delta^{ij}\delta^{kl} + \mu(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}) \tag{2.9}$$

$$\widehat{e}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\widehat{\partial}_i^\varepsilon \widehat{u}_j^\varepsilon + \widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{u}_i^\varepsilon). \tag{2.10}$$

2.3.2 Problème variationnel $(\widehat{P}^{\varepsilon}.V)$

Théorème 2.3.1 *Le problème précédent $(\widehat{P}^{\varepsilon}.C)$ est formellement équivalent au problème $(\widehat{P}^{\varepsilon}.V)$*

$$
\widehat{P}^{\varepsilon}.C \begin{cases} \textit{Trouver} \quad (\widehat{u}^{\varepsilon}, \widehat{G}^{\varepsilon}) \in \boldsymbol{K}(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) \times \boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{+}) \quad \textit{tel que} \ : \\ \widehat{a}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon}, \widehat{v}^{\varepsilon}) = \widehat{L}^{\varepsilon}(\widehat{v}^{\varepsilon}) + \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_{i}, \widehat{v}^{\varepsilon}_{i} \rangle \quad \forall \widehat{v}^{\varepsilon} \in \boldsymbol{V}(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) \\ \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_{N}, \widehat{v}_{N} - \widehat{u}^{\varepsilon}_{N} \rangle \geq 0, \quad \forall \widehat{v}^{\varepsilon} \in \boldsymbol{K}(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) \\ \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_{T}, \widehat{v}_{T} - \widehat{u}^{\varepsilon}_{T} \rangle + \langle \nu |\widehat{G}^{\varepsilon}_{N}|, |\widehat{v}^{\varepsilon}_{T}| - |\widehat{u}^{\varepsilon}_{T}| \rangle \geq 0, \quad \forall \widehat{v}^{\varepsilon} \in \boldsymbol{V}(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) \end{cases} \tag{2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon}, \widehat{v}^{\varepsilon}) &= \int_{\widehat{\Omega}^{\varepsilon}} \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} \widehat{e}^{\varepsilon}_{kl}(\widehat{u}^{\varepsilon}) e^{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v}) d\widehat{x}^{\varepsilon} \\
\widehat{L}^{\varepsilon}(\widehat{v}) &= \int_{\widehat{\Omega}^{\varepsilon}} \widehat{f}^{\varepsilon}_{i} \widehat{v}_{i} \quad d\widehat{x}^{\varepsilon} + \int_{\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{-}} \widehat{h}^{\varepsilon}_{i} \widehat{v}_{i} \quad d\widehat{\Gamma}^{\varepsilon} \\
\langle ., . \rangle & \qquad \textit{Présente le produit de la dualité sur } \widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{+}, \\
\boldsymbol{V}(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) &= \{ \widehat{v}^{\varepsilon} = (\widehat{v}^{\varepsilon}_{i}) \in \boldsymbol{H}^{1}(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}), \widehat{v}^{\varepsilon} = 0 \ \ sur \ \ \widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{0} \}, \boldsymbol{H}^{1}(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) = (H^{1}(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}))^{3} \\
\boldsymbol{K}(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) &= \{ \widehat{v}^{\varepsilon} \in \boldsymbol{V}(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) / \widehat{v}^{\varepsilon}_{N} \leq \widehat{d}^{\varepsilon} \ \ sur \ \ \widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{+} \}
\end{aligned}
$$

Preuve. (voir [8] théorème (1.7) chapitre 1). ■

Remarque 2.3.1 *Pour $\widehat{u}^{\varepsilon}$ assez régulier, alors les problème $\widehat{P}^{\varepsilon} \cdot C$ et $\widehat{P}^{\varepsilon} \cdot V$ sont équivalents.*

2.3.3 Problème variationnel $(\widehat{P}^{\varepsilon}.V)$ en coordonnées curvilignes

On transforme le problème précédent écrit en cordonnées cartésiennes $\widehat{x}^{\varepsilon} = (\widehat{x}^{\varepsilon}_{i})$ en un problème écrit en cordonnées curvilignes $x^{\varepsilon} = (x^{\varepsilon}_{i})$ mieux adaptées à l'étude des coques.

Théorème 2.3.2

$$
(P^{\varepsilon} \cdot V) \begin{cases} \textit{Trouver} \quad (u^{\varepsilon}, G^{\varepsilon}) \in \boldsymbol{K}(\Omega^{\varepsilon}) \times \boldsymbol{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^{\varepsilon}_{+}) \quad \textit{tel que :} \\ a^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon}) = L^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}) + \langle G^{i,\varepsilon}, v^{\varepsilon}_{i} \sqrt{g^{\varepsilon}} \rangle \quad \forall v^{\varepsilon} \in \boldsymbol{V}(\Omega^{\varepsilon}) \\ \langle G^{3,\varepsilon}, (v^{\varepsilon}_{3} - u^{\varepsilon}_{3}) \sqrt{g^{\varepsilon}} \rangle \geq 0 \quad \forall v^{\varepsilon}_{3} \in \boldsymbol{K}(\Omega^{\varepsilon}) \\ \langle G^{\varepsilon}_{T}, (v^{\varepsilon}_{T} - u^{\varepsilon}_{T}) \sqrt{g^{\varepsilon}} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,\varepsilon}|, (|v^{\varepsilon}_{T}| - |u^{\varepsilon}_{T}|) \sqrt{g^{\varepsilon}} \rangle \geq 0 \quad \forall v^{\varepsilon} \in \boldsymbol{V}(\Omega^{\varepsilon}) \end{cases} \tag{2.12}
$$

où

$$
\begin{aligned}
a^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon}) &= \int_{\Omega^{\varepsilon}} A^{ijkl,\varepsilon} e^{\varepsilon}_{k\|l}(u^{\varepsilon}) e^{\varepsilon}_{k\|l}(v^{\varepsilon}) \sqrt{g^{\varepsilon}} dx^{\varepsilon} \\
A^{ijkl,\varepsilon} &= \lambda g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu (g^{ik,\varepsilon} g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon}) \\
e^{\varepsilon}_{i\|j}(v^{\varepsilon}) &= \frac{1}{2}(v^{\varepsilon}_{i\|j} + v^{\varepsilon}_{j\|i}), v^{\varepsilon}_{i\|j} = \partial^{\varepsilon}_j v^{\varepsilon}_i - \Gamma^{k,\varepsilon}_{ij} v^{\varepsilon}_k \\
L^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}) &= \int_{\Omega^{\varepsilon}} f^{i,\varepsilon} v^{\varepsilon}_i \sqrt{g^{\varepsilon}} dx^{\varepsilon} + \int_{\Gamma^{\varepsilon}_{-}} h^{i,\varepsilon} v^{\varepsilon}_i \sqrt{g^{\varepsilon}} d\Gamma^{\varepsilon} \\
\boldsymbol{V}(\Omega^{\varepsilon}) &= \{v^{\varepsilon} = (v^{\varepsilon}_i) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega^{\varepsilon}), v^{\varepsilon} = 0 \quad sur \quad \Gamma^{\varepsilon}_0\} \\
, \quad \boldsymbol{K}(\Omega^{\varepsilon}) &= \{v^{\varepsilon} \in \boldsymbol{V}(\Omega^{\varepsilon}) / v^{\varepsilon}_3 \leq d^{\varepsilon} \quad sur\ \Gamma^{\varepsilon}_{+}\}, d^{\varepsilon} = \widehat{d^{\varepsilon}}
\end{aligned}
$$

Preuve. (voir [8] théorème (2.2) chapitre 2). ■

Chapitre 3

L'analyse asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une coque mince contre un obstacle rigide dans l'élasticité linéaire

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'obtention par l'analyse asymptotique formelle des modèles bidimensionnels "membranaire" et "couplé flexion-membrane" pour des coques élastiques minces.

L'idée de base d'une première famille de théories de coques est de prendre en compte la géométrie particulière d'un tel milieu et, par intégration sur l'épaisseur, d'obtenir un modèle bidimensionnel formulé sur la surface moyenne de la coque et représentant une bonne approximation du modèle tridimensionnel.

On considère une coque élastique mince dont l'épaisseur 2ε est petite par rapport à ses autres longueurs encastrée sur une partie de sa frontière, sous l'action des forces de volume et des forces de surface, il subit un champ de déplacement. Ce champ de déplacement et le tenseur des contraintes sont solutions d'un problème variationnel $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ en coordonnées curvilignes qui suivent de façon plus naturelle la géométrie de la coque. On écrit le problème variationnel sur un domaine indépendant de l'épaisseur. Le développement asymptotique permet d'obtenir formellement des modèles limites bidimensionnels posés sur la surface moyenne de la coque.

On considère une coque $\widehat{\Omega}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ de frontière $\widehat{\Gamma}^\varepsilon$,($\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$ de frontière Γ^ε),tel que ω est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontière γ lipschitzienne, d'épaisseur 2ε (ε est petit), de surface moyenne $S = \Theta(\overline{\omega})$, telle que $\Theta \in C^3(\omega, \mathbb{R}^3)$, constituée d'un matériau élastique homogène et isotrope, son tenseur de rigidité $A^\varepsilon = (A^{ijkl,\varepsilon})$ vérifie :

$$\begin{cases} A^{ijkl,\varepsilon}(X^\varepsilon) \in L^\infty(\Omega^\varepsilon) \\ A^{ijkl,\varepsilon} = A^{jikl,\varepsilon} = A^{klij,\varepsilon} = A^{klji,\varepsilon} \\ \exists C > 0, A^{ijkl,\varepsilon}\tau_{ij}\tau_{kl} \geqslant C\tau_{ij}\tau_{ij}, \forall \tau_{ij} = \tau_{ji} \end{cases} \tag{3.1}$$

La coque est soumise à des forces volumiques dans $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ et à des forces surfaciques sur $\widehat{\Gamma}^\varepsilon_-$,($\widehat{\Gamma}^\varepsilon_\pm = \Theta^\varepsilon(\Gamma^\varepsilon_\pm = \omega \times \{\pm\varepsilon\})$), les densités de ces forces sont respectivement données par leurs composantes contravariantes : $f^\varepsilon = (f^{i,\varepsilon}) \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3$ et $h^\varepsilon = (h^{i,\varepsilon}) \in (L^2(\Gamma^\varepsilon_-))^3$. De plus, la coque est encastrée sur la partie $\Theta^\varepsilon(\Gamma^\varepsilon_0), (\Gamma^\varepsilon_0 = \gamma_0 \times [-\varepsilon, +\varepsilon], \gamma_0 \subset \gamma)$ de la frontière latérale, alors $u^\varepsilon = 0$ sur Γ^ε_0, est entre en contact unilatéral avec un obstacle rigide occupant le domaine $\mathfrak{D}^\varepsilon = \{x^\varepsilon \in \mathbb{R}^3/(x^\varepsilon_1, x^\varepsilon_2) \in \omega, x^\varepsilon_3 > d^\varepsilon\}$, $d^\varepsilon \geq 0$ dans $H^2_0(\omega)$, d est une fonction d'interstice définie sur ω.

La condition de contact est définie par l'inégalité : $\overline{v}_3 \leq d$ d'où la notation :
$K(\Omega^\varepsilon) = \{v \in V(\Omega^\varepsilon)/ \ \overline{v}_3 \leq d\}$ est l'espace des déplacements admissibles avec condition de contact.

Dans l'étude asymptotique, on va procéder en déplacement u^ε qui vérifie le problème $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ en coordonnées curvilignes .

On va étudier chaque fois le cas de contact sans frottement puis le cas de contact avec frottement de Coulomb.

3.1 Le cas sans frottement

3.1.1 Position du problème variationnel sur un domaine indépendant de l'épaisseur

On considère le domaine fixe $\Omega = \omega \times]-1, +1[$ indépendant du paramètre d'épaisseur ε.

A tout point $x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3)$ de $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-1, +1[$, on associe le point $x = (x_1, x_2, x_3)$ de Ω par $x_\alpha^\varepsilon = x_\alpha$ et $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$.

On définit les ensembles suivants :

$\Omega = \omega \times]-1, +1[$ anisi que $\Gamma = \gamma \times [-1, +1]$, $\Gamma_0 = \gamma_0 \times [-1, +1]$ *et* $\Gamma_\pm = \omega \times \{\pm 1\}$.

On note $x = (x_i)$ un point de $\overline{\Omega}$ et on pose $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

On construit l'application π^ε bijective de $\overline{\Omega}$ dans $\overline{\Omega}^\varepsilon$ de la façon suivante :

$$\pi^\varepsilon : x = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega} \longrightarrow \pi^\varepsilon(x) = x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \overline{\Omega}^\varepsilon. \tag{3.2}$$

d'où :

$$\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha \text{ et } \partial_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3$$

. A toute fonction κ^ε définie sur Ω^ε, on associe la fonction "mise à l'échelle" définie sur Ω par :

$$\kappa^\varepsilon(x^\varepsilon) = \kappa(\varepsilon)(x), \quad x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \quad x \in \Omega$$

On définit ainsi les fonctions :

$$\lambda^\varepsilon = \lambda \quad , \quad \mu^\varepsilon = \mu \quad , \quad g^\varepsilon(x^\varepsilon) = g(\varepsilon)(x) \quad , \quad d^\varepsilon(x^\varepsilon) = d(\varepsilon)(x)$$

$$u_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = u_i(\varepsilon)(x), \quad v_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = v_i(x), \ f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = f^i(\varepsilon)(x), \quad \text{pour tout } x^\varepsilon = \pi^\varepsilon(x) \in \overline{\Omega^\varepsilon}$$

$$h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = h^i(\varepsilon)(x), A^{ijkl,\varepsilon}(x^\varepsilon) = A^{ijkl}(\varepsilon)(x) \text{ pour } x^\varepsilon \in \Gamma_-^\varepsilon \text{ et } x \in \Gamma_-$$

$$G^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^p G^3(\varepsilon)(x) \quad \text{pour } x^\varepsilon \in \Gamma_+^\varepsilon \text{ et } x \in \Gamma_+, p \in \{1, 3\}$$

$$e_{i\|j}^\varepsilon(v^\varepsilon)(x^\varepsilon) = e_{i\|j}(\varepsilon, v(\varepsilon))(x) = e_{i\|j}(\varepsilon; v)(x), \Gamma_{ij}^k(\varepsilon)(x) = \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon}(x^\varepsilon), \quad \forall x^\varepsilon \in \overline{\Omega^\varepsilon} \text{ et } x \in \Omega.$$

Alors, le problème variationnel (2.6) se reformule sur le domaine fixe comme suit :

$$P(\varepsilon,\Omega)\begin{cases}\text{Trouver} \quad (u(\varepsilon),G^3(\varepsilon))\in \mathbf{K}(\Omega)\times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+) \quad \text{tel que} \ : \\ \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon,u(\varepsilon))e_{i\|j}(\varepsilon,v)\sqrt{g(\varepsilon)}dx = L(v)+\varepsilon^{p-1}\langle G^3(\varepsilon),v_3\sqrt{g(\varepsilon)}\rangle \quad \forall v\in \mathbf{V}(\Omega) \\ \langle G^3(\varepsilon),(v_3-u_3(\varepsilon))\sqrt{g(\varepsilon)}\rangle \geq 0 \qquad \forall v_3\in K(\Omega)\end{cases} \tag{3.3}$$

où

$$L(v)=\int_\Omega f^i(\varepsilon)(x)v_i\sqrt{g(\varepsilon)}dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_-}h^i(\varepsilon)(x)v_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma.$$

tels que :

$$e_{i\|j}(\varepsilon,v)=\frac{1}{2}(v_{i\|j}(\varepsilon)+v_{j\|i}(\varepsilon))$$

$$v_{i\|j}(\varepsilon)=\partial_j v_i-\Gamma^k_{ij}(\varepsilon)v_k$$

$$\mathbf{V}(\Omega)=\{v=(v_i)\in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad , v=0 \quad sur \quad \Gamma_0\}$$

$$\mathbf{K}(\Omega)=\{v\in \mathbf{V}(\Omega)/ \quad v_3\leq d\}, \quad d=d^\varepsilon.$$

3.1.2 Identification d'un problème variationnel bidimensionnel

Etude asymptotique

L'objectif de l'analyse asymptotique est de connaître le comportement de la solution $u(\varepsilon)$ du problème $P(\varepsilon,\Omega)$ lorsque ε tend vers zéro. Nous commençons maintenant l'analyse asymptotique du problème variationnel $P(\varepsilon,\Omega)$.

On suppose que la solution de ce problème admet un développement asymptotique formel.

$$u(\varepsilon)=u^0+\varepsilon^1u^1+\varepsilon^2u^2+\dots \ \text{avec} \ u^0\in \mathbf{K}(\Omega), u^q\in \mathbf{H}(\Omega), q=0,1,2,\dots \ \text{et} \ u^0\neq 0 \tag{3.4}$$

$$G^3(\varepsilon)=\dots+\varepsilon^{-2}G^{3,-2}+\varepsilon^{-1}G^{3,-1}+G^{3,0}+\varepsilon G^{3,1}+\varepsilon^2G^{3,2}+\dots, \tag{3.5}$$

avec

$$G^{3,k}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+), \ k=-2,-1,0,1,2\dots,$$

$$e_{i\|j}(\varepsilon;u(\varepsilon))=\frac{1}{\varepsilon}e^{-1}_{i\|j}+e^0_{i\|j}+\varepsilon e^1_{i\|j}+\varepsilon^2e^2_{i\|j}+\dots,$$

$$e_{ij}(\varepsilon; v) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-1}_{i\|j}(v) + e^{0}_{i\|j}(v) + \varepsilon e^{1}_{i\|j}(v) + \varepsilon^2 e^{2}_{i\|j}(v) + \dots, \tag{3.6}$$

Le comportement asymptotique des fonctions $g(\varepsilon)$ et $A^{ijkl}(\varepsilon)$ implique que

$$g(\varepsilon) = a + O(\varepsilon)$$

$$\sqrt{g(\varepsilon)} = \sqrt{a} + \varepsilon(\sqrt{a})^1 + \varepsilon^2(\sqrt{a})^2 + O(\varepsilon^2) \tag{3.7}$$

$$A^{ijkl}\sqrt{g(\varepsilon)} = A^{ijkl}(0)\sqrt{a} + \varepsilon B^{ijkl,1} + \varepsilon^2 B^{ijkl,2} + O(\varepsilon^2), \tag{3.8}$$

où

$$\begin{cases} A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) = \lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \\ A^{\alpha\beta 33}(0) = \lambda a^{\alpha\beta}, \quad A^{\alpha 3\sigma 3}(0) = \mu a^{\alpha\sigma}, A^{3333}(0) = \lambda + 2\mu \\ A^{\alpha\beta\sigma 3}(0) = A^{\alpha 333}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

et

$$\begin{cases} e^{-1}_{\alpha\|\beta} = 0 \\ e^{-1}_{\alpha\|3} = \frac{1}{2}\partial_3 u^0_\alpha \\ e^{-1}_{3\|3} = \partial_3 u^0_3 \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} e^{0}_{\alpha\|\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\beta u^0_\alpha + \partial_\alpha u^0_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} u^0_\sigma - b_{\alpha\beta} u^0_3 \\ e^{0}_{\alpha\|3} = \frac{1}{2}(\partial_3 u^1_\alpha + \partial_\alpha u^0_3) + b^\sigma_\alpha u^0_\sigma \\ e^{0}_{3\|3} = \partial_3 u^1_3 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} e^{1}_{\alpha\|\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\beta u^1_\alpha + \partial_\alpha u^1_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} u^1_\sigma - b_{\alpha\beta} u^1_3 + x_3\{b^\sigma_{\beta|\alpha} u^0_\sigma + b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} u^0_3\} \\ e^{1}_{\alpha\|3} = \frac{1}{2}(\partial_3 u^2_\alpha + \partial_\alpha u^1_3) + b^\sigma_\alpha u^1_\sigma + x_3 b^\tau_\alpha b^\sigma_\tau u^0_\sigma \\ e^{1}_{3\|3} = \partial_3 u^2_3 \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} e^{-1}_{\alpha\|\beta}(v) = 0 \\ e^{-1}_{\alpha\|3}(v) = \frac{1}{2}\partial_3 v_\alpha \\ e^{-1}_{3\|3}(v) = \partial_3 v_3 \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} e^{0}_{\alpha\|\beta}(v) = \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3 \\ e^{0}_{\alpha\|3}(v) = \frac{1}{2}\partial_\alpha v_3 + b^\sigma_\alpha v_\sigma \\ e^{0}_{3\|3}(v) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} e^{1}_{\alpha\|\beta}(v) = x_3 b^\sigma_{\beta|\alpha} v_\sigma + x_3 b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} v_3 \\ e^{1}_{\alpha\|3}(v) = x_3 b^\tau_\alpha b^\sigma_\tau v_\sigma \\ e^{1}_{3\|3}(v) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

Théorème 3.1.1 *Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sa frontière γ, soit $\Omega = \omega\times]-1,1[$, et soit $w \in L^p(\Omega), p > 1$, vérifiant : $\int_\Omega w\partial_3 v dx = 0$ pour tout $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tel que $v = 0$ sur $\gamma \times [-1,1]$. Alors $w = 0$*

Preuve. Soit $\varphi \in D(\Omega)$ et on prend $v : \overline{\Omega} \longrightarrow R$ définie par :
$v(x_1,x_2,x_3) = \int_{-1}^{x_3} \varphi(x_1,x_2,\tau)d\tau$ pour tout $(x_1,x_2,x_3) \in \overline{\Omega}$.
alors $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $v = 0$ sur $\gamma \times [-1,1]$;
donc $\int_\Omega w\varphi dx = 0 = \int_\Omega w\partial_3 v dx = 0$ ce que entraîne $w = 0$ p.p sur Ω ∎

3.1.3 Modèle de coque membranaire

On se propose quelques modèles bidimensionnels de coques membranaires obtenus par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimensionnel de coques élastiques minces constituées d'un matériau isotrope et homogène.
On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,0} \in L^2(\Omega),\ h^{i,1} \in L^2(\Gamma_-)$ tel que

$$f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,0}(x), \forall x \in \Omega \tag{3.16}$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon h^{i,1}(x), \forall x \in \Gamma_- \tag{3.17}$$

$$G^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon G^3(\varepsilon)(x), \quad \forall x \in \Gamma_+$$

$$d(\varepsilon) = d$$

On substitue (3.4),(3.5),(3.6),(3.16) et (3.17) dans l'équation variationnel de (3.3), et on identifie les termes du même ordre de ε , on obtient à l'ordre ε^{-2}, ε^{-1} et ε^0 respectivement les équations :

$$P^{-2}\left\{ \int_\Omega A^{ijkl}(0)e^{-1}_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = \langle G^{3,-2}, v_3\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \right. \tag{3.18}$$

$$P^{-1}\left\{ \int_\Omega A^{ijkl}(0)\Big(e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v) + e^{-1}_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)\Big)\sqrt{a}dx = \langle G^{3,-2}, v_3(\sqrt{a})^1\rangle + \langle G^{3,-1}, v_3\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \right. \tag{3.19}$$

$$P^0\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0)\Big(e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)+e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)+e^{-1}_{k\|l}e^1_{i\|j}(v)\Big)\sqrt{a}dx+\\ \displaystyle\int_\Omega B^{ijkl,1}\Big(e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)+e^{-1}_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)\Big)dx+\int_\Omega B^{ijkl,2}e^{-1}_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\\ \displaystyle=\int_\Omega f^{i,0}v_i\sqrt{a}dx+\int_\Gamma h^{i,1}v_i\sqrt{a}d\Gamma\\ +\langle G^{3,0},v_3\sqrt{a}\rangle+\langle G^{3,-1},v_3(\sqrt{a})^1\rangle+\langle G^{3,-2},v_3(\sqrt{a})^2\rangle\quad\forall v\in V(\Omega)\end{cases}\tag{3.20}$$

De même, on remplace (3.4), (3.5) et (3.7) dans l'inéquation variationnelle de (3.3) on obtient :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon^2}\big(\langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle\big)+\dfrac{1}{\varepsilon}\big(\langle G^{3,-1},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle+\langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)(\sqrt{a})^1-u_3^1\sqrt{a}\rangle\big)+\\ \big(\langle G^{3,0},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle+\langle G^{3,-1},(v_3-u_3^0)(\sqrt{a})^1-u_3^1\sqrt{a}\rangle+\langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)(\sqrt{a})^2\\ -u_3^1(\sqrt{a})^1-u_3^2\sqrt{a}\rangle\big)+\varepsilon[\dots]+\dots\geqslant 0,\quad\forall v_3\in K(\Omega)\end{cases}\tag{3.21}$$

• **Étape a : Le problème de Signorini d'ordre ε^{-2}**

les termes d'ordre ε^{-2} dans (3.21) satisfaits

$$\langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0\quad\forall v_3\in K(\Omega)\tag{3.22}$$

En multiplie (3.21) par ε^2 est âpre entend ε ver 0 on obtient le problème de Signorini d'ordre ε^{-2}

$$(P_c^{-2})\begin{cases}\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^{-1}_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx=\langle G^{3,-2},v_3\sqrt{a}\rangle\quad\forall v\in V(\Omega)\\ \langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0\quad\forall v_3\in K(\Omega)\end{cases}\tag{3.23}$$

On choisir $v\in V(\Omega)$ est indépendant de x_3, sa en gendre $e^{-1}_{i\|j}(v)=0$, on obtient :

$$\begin{cases}\langle G^{3,-2},v_3\sqrt{a}\rangle=0\quad\forall v_3\in V(\omega)=\{\eta\in H^1(\omega)\ ;\quad\eta=0\text{ sur }\partial\omega\}\\ \langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0\quad\forall v_3\in K(\omega)=\{\eta\in V(\omega)\ ;\quad\eta\leqslant d\}\end{cases}\tag{3.24}$$

alors

$$G^{3,-2}=0\tag{3.25}$$

En utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$, on conséquence :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^{-1}_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx=0\quad\forall v\in V(\Omega),$$

D'après le théorème (3.1.1) on obtient : $\partial_3 u^0 = 0$ dans Ω alors le terme principale $u^0 \in V(\Omega)$ est indépendant de x_3 et peut être identifié avec un champ de vecteurs $\xi^0 \in H^1(\omega)$ satisfaisant $\xi^0 = 0$ sur γ_0.
D'après l'identification des coefficients de ε^{-2} on obtient les relations :

$$\xi^0 \in V(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in H^1(\omega); \eta = 0 \quad \text{sur } \gamma_0\}$$

$$e^{-1}_{i\|j} = 0 = e^{-1}_{i\|j}(u^0) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{3.26}$$

- **Étape b : Le problème de Signorini d'ordre** ε^{-1}

Si l'on injecte les résultats (3.25), (3.26) dans (3.19), on obtient l'équation simplifiée

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^{-1}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) \sqrt{a} dx = \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \tag{3.27}$$

De même, nous remplaçons (3.25) dans (3.21) et nous multiplions le résultat par ε, lors nous tendons ε à zéro, on obtient :

$$\langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a} \rangle \geqslant 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \tag{3.28}$$

problème de Signorini à l'ordre ε^{-1} est formulé comme suit :

$$(P_c^{-1}) \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^{0}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) \sqrt{a} dx = \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a} \rangle \geqslant 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{cases} \tag{3.29}$$

nous choisissons la fonction test $v \in V(\Omega)$ indépendant de x_3 dans (3.29), on trouve :

$$\begin{cases} \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle = 0 \quad \forall v_3 \in V(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega) \ ; \quad \eta = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a} \rangle \geqslant 0 \quad \forall v_3 \in K(\omega) = \{\eta \in V(\omega) \ ; \quad \eta \leqslant d\} \end{cases} \tag{3.30}$$

d'où

$$G^{3,-1} = 0 \tag{3.31}$$

Donc, de (3.9), (3.29) et (3.31) nous avons

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = \int_\Omega \Big(A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0)e^0_{\sigma\|\tau} + A^{\alpha\beta 33}(0)e^0_{3\|3}\Big)e^{-1}_{\alpha\|\beta}(v)\sqrt{a}dx +$$

$$4\int_\Omega A^{\alpha 3\sigma 3}(0)e^0_{\sigma\|3}e^{-1}_{\alpha\|3}(v)\sqrt{a}dx + \int_\Omega \Big(A^{33\sigma\tau}(0)e^0_{\sigma\|\tau} + A^{3333}(0)e^0_{3\|3}\Big)e^{-1}_{3\|3}(v)\sqrt{a}dx = 0 \quad \forall v \in V(\Omega)$$

de (3.1),(3.9) et (3.13) :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = \int_\Omega \Big(2\mu a^{\alpha\sigma}e^0_{\sigma\|3}\partial_3 v_\alpha + \big(\lambda a^{\alpha\beta}e^0_{\alpha\|\beta} + (\lambda+2\mu)e^0_{3\|3}\big)\partial_3 v_3\Big)\sqrt{a}dx = 0 \quad \forall v \in V(\Omega) \tag{3.32}$$

D'après le théorème (3.1.1) et(3.13) on obtient les équations :

$$e^0_{\sigma\|3} = 0 \text{ et } e^0_{3\|3} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\sigma\tau}e^0_{\sigma\|\tau} \text{ dans } \Omega.$$

• **Étape c : Le problème Signorini d'ordre ε^0**

Maintenant, nous nous intéressons à l'identification du problème où terme de commande (u^0, G^0) est la solution.

Tout d' abord, nous choisissons $v = (0,0,v_3) \in V(\Omega)$ dans (3.32), alors

$e^{-1}_{\alpha\|\beta}(v) = e^{-1}_{\alpha\|3}(v) = 0, \quad e^{-1}_{3\|3}(v) = \partial_3 v_3$ et

$$\int_\Omega \big(A^{33\sigma\tau}(0)e^0_{\sigma\|\tau} + A^{3333}(0)e^0_{3\|3}\big)\partial_3 v_3\sqrt{a}dx = 0 \tag{3.33}$$

D'après le théorème (3.1.1) à (3.33) on a

$$e^0_{3\|3} = \frac{A^{33\sigma\tau}(0)}{A^{3333}(0)} \quad , \quad e^0_{\sigma\|\tau} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\sigma\tau}e^0_{\sigma\|\tau} \tag{3.34}$$

Deuxièmement, nous choisis $v = (v_1, v_2, 0) \in V(\Omega)$ dans (3.32), alors

$e^{-1}_{\alpha\|\beta}(v) = e^{-1}_{3\|3}(v) = 0, e^{-1}_{\alpha\|3}(v) = \frac{1}{2}\partial_3 v_\alpha$ et

$$\int_\Omega A^{\alpha 3\sigma 3}(0)e^0_{\sigma\|3}\partial_3 v_\alpha\sqrt{a}dx = 0 \tag{3.35}$$

Qui implique lors de l'application du dernier théorème qui

$$e^0_{\sigma\|3} = 0 \tag{3.36}$$

En utilisant maintenant (3.25), (3.26), (3.31), (3.34) et (3.36) , alors le problème (P^0) est réduite à

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0)\Big(e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\Big)\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1}e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx = \\ \displaystyle\int_\Omega f^{i,0}v_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1}v_i\sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{3,0}, v_3\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \end{cases} \tag{3.37}$$

En remplaçant (3.25) et (3.31) dans (3.21) et en tendant ε à zéro, on obtient :

$$\langle G^{3,0}, (v_3 - u^0_3)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0. \tag{3.38}$$

Nous concluons que le problème de Signorini de l'ordre ε^0 est formulé comme suit :

$$(P^0_c)\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0)\Big(e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\Big)\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1}e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx = \\ \displaystyle\int_\Omega f^{i,0}v_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1}v_i\sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{3,0}, v_3\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \\ \langle G^{3,0}, (v_3 - u^0_3)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0, \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{cases} \tag{3.39}$$

Si nous choisissons la fonction de test dans l'équation variationnelle de (P^0_c) indépendant de x_3, $v = \eta(x_1, x_2)$ nous avons :

$$\begin{cases} e^{-1}_{i\|j}(v) = 0 \\ e^0_{\alpha\|\beta}(v) = e^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = e_{\alpha\beta}(\eta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\eta_\sigma - b_{\alpha\beta}\eta_3 \\ e^0_{\alpha\|3}(v) = e^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3 + b^\sigma_\alpha\eta_\sigma \\ e^0_{3\|3}(v) = e^0_{3\|3}(\eta) = 0 \end{cases} \tag{3.40}$$

Par conséquent, la première équation variationnelle est réduite à :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(\eta)\sqrt{a}dx = \int_\Omega f^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1}\eta_i\sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{3,0}, \eta_3\sqrt{a}\rangle \tag{3.41}$$

En utilisant (3.34), (3.36) et (3.40) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega A^{ijkl}(0)e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(\eta)\sqrt{a}dx &= \int_\Omega A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0)e^0_{\sigma\|\tau}e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx + \int_\Omega A^{\alpha\beta 33}(0)e^0_{3\|3}e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx \\ &= \int_\Omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}e^0_{\sigma\|\tau}e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx_1dx_2 \end{aligned} \tag{3.42}$$

où

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \tag{3.43}$$

Sont les composantes contravariants du tenseur d'élasticité bidimensionnelle à l'échelle de la coque.

Par conséquent, si nous choisissons la fonction test $v = \eta(x_1, x_2)$ dans (P_c^0) nous constatons que le problème de Signorini de l'ordre ε^0, ce qui est l'approximation asymptotique du problème $(P_M(\varepsilon))$ (3.3), est formulé comme suit :

$$\begin{cases} (u^0, G^{3,0}) \in K(\omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\omega) \\ \displaystyle\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} e^0_{\sigma\|\tau} e^0_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a} dx_1 dx_2 = \int_\omega p^i \eta_i \sqrt{a} dx_1 dx_2 + \langle G^{3,0}, \eta_3\sqrt{a}\rangle, \quad \forall \eta \in V(\omega) \\ \langle G^{3,0}, (\eta_3 - u_3^0)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0 \quad \forall \eta_3 \in K(\omega) \end{cases} \tag{3.44}$$

où

$$K(\omega) = \{\eta \in V(\omega)\ ; \quad \eta \leqslant d)\}$$
$$p^{i,0} = \int_{-1}^{1} f^{i,0} dx_3 + h^{i,1}(., -1)$$

on définie les espaces :

$$V(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega),\ (\eta) = 0 \quad \text{sur } \gamma_0\},\ V_0(\omega) = \{\eta \in V(\omega), \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \quad \text{dans } \omega\}$$

avec

$$e^0_{\alpha\|\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\zeta^0) \text{ et } e^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \quad \forall \eta \in V(\Omega)$$

3.1.4 Modèles couplé flexion-membranaires

On se propose de donner un modèle bidimensionnel obtenu par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimensionnel de coques élastiques minces constuées d'un matériau isotrope et homogène. On donne également les équations formelles vérifiées par le tenseur limite des contraintes . On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,2} \in L^2(\Omega),\ h^{i,3} \in L^2(\Gamma_-)$ telles que :

$$f^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon^2 f^{i,2}(x), \forall x \in \Omega \tag{3.45}$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon^3 h^{i,3}, \forall x \in \Gamma_- \tag{3.46}$$

$$G^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 G^3(\varepsilon)(x), \quad \forall x \in \Gamma_+ \tag{3.47}$$

on définie les espaces :

$$V_0(\omega) = \{\eta \in V(\omega), \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \quad \text{dans } \omega\}$$

et l'ensemble des déplacements intentionnelles

$$V_0(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega)\ ; \eta = 0 \ \text{ sur } \ \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0\ dans\ \omega\} \tag{3.48}$$

n'est pas réduit à $\{0\}$. On substitue (3.45) , (3.46) et(3.47) dans $(P(\varepsilon, \Omega))$, et on identifie les termes du même ordre de ε, on obtient à l'ordre $\varepsilon^{-1}, \varepsilon^0, \varepsilon^1$ et ε^2 respectivement : (D'après l'étape (a) , $e^{-1}_{i\|j} = 0$) :

$$P^{-1}\left\{ \int_\Omega A^{ijkl}(0) e^0_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = \langle G^{3,-3}, v_3\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \right. \tag{3.49}$$

$$P^0\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0)\left(e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\right)\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1}e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx \\ = \langle G^{3,-2}, v_3\sqrt{a}\rangle + \langle G^{3,-3}, v_3(\sqrt{a})^1\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.50}$$

$$P^1\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0)\left(e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^0_{k\|l}e^1_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\right)\sqrt{a}dx \\ \displaystyle + \int_\Omega B^{ijkl,1}\left(e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v) + e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)\right)dx = \langle G^{3,-3}, v_3(\sqrt{a})^2\rangle \\ + \langle G^{3,-2}, v_3(\sqrt{a})^1\rangle + \langle G^{3,-1}, v_3\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.51}$$

$$P^2\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0)\left(e^1_{k\|l}e^1_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^0_{k\|l}e^2_{i\|j}(v) + e^3_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\right)\sqrt{a}dx \\ \displaystyle + \int_\Omega B^{ijkl,1}\left(e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^0_{k\|l}e^1_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\right)dx \\ \displaystyle + \int_\Omega B^{ijkl,2}\left(e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v) + e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)\right) = \int_\Omega f^{i,2}v_i\sqrt{a}\ dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,3}v_i\sqrt{a}\ d\Gamma \\ \langle G^{3,-3}, v_3(\sqrt{a})^3\rangle + \langle G^{3,-2}, v_3(\sqrt{a})^2\rangle + \langle G^{3,-1}, v_3(\sqrt{a})^1\rangle + \langle G^{3,0}, v_3\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.52}$$

De même, on substituons (3.4), (3.47) et (3.7) dans l'inéquation variationnelle de (3.3) on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon}\Big(\langle G^{3,-3},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle\Big)+\Big(\langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle+\langle G^{3,-3},(v_3-u_3^0)(\sqrt{a})^1-u_3^1\sqrt{a}\rangle\Big)+\\ \varepsilon\Big(\langle G^{3,-1},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle+\langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)(\sqrt{a})^1-u_3^1\sqrt{a}\rangle+\langle G^{3,-3},u_3^1(\sqrt{a})^2-u_3^1(\sqrt{a})^1\\ -u_3^2\sqrt{a}\rangle\Big)+\varepsilon^2\Big(\langle G^{3,0},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle+\langle G^{3,-1},(v_3-u_3^0)(\sqrt{a})^1-u_3^0(\sqrt{a})^2-u_3^1\sqrt{a}\rangle+\\ \langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)(\sqrt{a})^2-u_3^1(\sqrt{a})^1-u_3^2\sqrt{a}\Big)+\varepsilon[\dots]+\dots\geqslant 0,\quad \forall v_3\in K(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.53}$$

• **Étape (i) : Le problème de Signorini d'ordre** ε^{-1}

les termes d'ordre ε^{-1} dans (3.53) satisfaits :

$$\langle G^{3,-3},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0\quad \forall v_3\in K(\Omega) \tag{3.54}$$

En multiplie (3.53) par ε est âpre entend ε ver 0

On obtient le problème de Signorini d'ordre ε^{-1} :

$$(P_c^{-1})\left\{\begin{array}{l} \int_\Omega A^{ijkl}(0)e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx=\langle G^{3,-3},v_3\sqrt{a}\rangle\quad \forall v\in V(\Omega)\\ \langle G^{3,-3},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0\quad \forall v_3\in K(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.55}$$

On suppose que l'espace $V_0(\omega)=\{\eta\in H^1(\omega)\ ;\ \eta=0\ \text{ sur }\ \gamma_0,\gamma_{\alpha\beta}(\eta)=0\ \textit{dans}\ \omega\}$ si l'espace $V_0(\omega)$ des déplacements n'est pas réduit à $\{0\}$,

D'après l'identification des coefficients de ε^{-1} et ε^0 (l'étape (b) et (c))

on déduit que :

$$\boxed{G^{3,-3}=0}$$

soit $\eta=\xi^0$, l'équation variationnelle du problème "$P_M(\omega)$" satisfaits :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^0)\gamma_{\alpha\beta}(\xi^0)\sqrt{a}d\Gamma=0$$

alors $\gamma_{\sigma\tau}(\xi^0)=0$ et donc $\xi^0\in V_0(\omega)$

Comme $e^0_{\alpha\|\beta}=\gamma_{\sigma\tau}(\xi^0)=0$, on obtient les équations : $e^0_{\alpha\|3}=0$ et $e^0_{3\|3}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}e^0_{\alpha\|\beta}$ dans Ω.

établies dans l'étape (b), alors : $\partial_3 u_3^1 = e_{3\|3}^0 = 0$

et

$$e_{\alpha\|3}^0 = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^1) + b_\alpha^\sigma u_\sigma^0 = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \xi_3^0 + \partial_3 u_\alpha^1) + b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0 = 0$$

alors :

$$\partial_3 u_\alpha^1 = -(\partial_\alpha \xi_3^0 + 2b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0), \quad u^1 \in V(\Omega).$$

La fonction $(\partial_\alpha \xi_3^0 + 2b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0)$ est indépendante de x_3 il existe $\xi^1 = (\xi_i^1) \in V(\omega)$ tel que $u_\alpha^1 = \xi_\alpha^1 - x_3(\partial_\alpha \xi_3^0 + 2b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0)$ et $u_3^1 = \xi_3^1$. Les premières relations exigent en plus que la fonction ξ_3^0. soit dans l'espace $H^2(\omega)$ et vérifie la condition au bord $\partial_\nu \xi_3^0 = 0$ sur γ_0. (∂_ν, dénote la dérivée normale extérieure le long γ). Comme $\xi_\alpha^0 = 0$ sur γ_0 d'après l'étape (a).

De ce que précède on a bien montrer que :

$$e_{i\|j}^0 = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\xi_0 \in K(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in V_F(\omega) / \ \ \eta_3 \leq d\}$$

$$u_\alpha^1 = \xi_\alpha^1 - x_3(\partial_\alpha \xi_3^0 + 2b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0), \text{ et } u_3^1 = \xi_3^1$$

où

$$\xi^1 = (\xi_i^1) \in V(\omega).$$

• Étapes (ii) : Le problème de Signorini d'ordre ε^0

les termes d'ordre ε^0 dans (3.53) satisfaits :

$$\langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in V(\Omega) \tag{3.56}$$

De même nous remplaçons $G^{3,-3} = 0$ dans (3.53), est âpre entend ε ver 0.

comme $e_{i\|j}^0 = 0$, l'annulation du coefficient de ε^0 en $P(\varepsilon, \Omega)$ on obtient :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e_{k\|l}^1 e_{i\|j}^{-1}(v)\sqrt{a}dx = \langle G^{3,-2}, v_3\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega)$$

Donc le problème de Signorini d'ordre ε^0 on obtient :

$$(P_c^0)\begin{cases} \int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = \langle G^{3,-2}, v_3\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \\ \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{cases} \tag{3.57}$$

D'après l'étape (i), choisissons la fonction de test dans l'équation variationnelle de (P_c^0) indépendant de x_3, $v = \eta(x_1, x_2)$ nous avons :

$$(P_c^0)\begin{cases} \langle G^{3,-2}, \eta_3\sqrt{a}\rangle = 0 \quad \forall \eta \in V(\Omega) \\ \langle G^{3,-2}, (\eta_3 - u_3^0)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0 \quad \forall \eta_3 \in K(\Omega) \end{cases}$$

on déduit que :

$$G^{3,-2} = 0$$

donc $\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = 0,$ nous obtenons : (voir [1])

$$e^1_{\alpha\|3} = 0 \text{ et } e^1_{3\|3} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}a^{\alpha\beta}e^0_{\alpha\|\beta} \text{ dans } \Omega, \quad \text{et } e^1_{\alpha\|\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\zeta^1) - x_3\rho_{\alpha\beta}(\zeta^0)$$

• **Étape (iii) : Le problème Signorini d'ordre ε^1**

les termes d'ordre ε^1 dans (3.53) satisfaits :

$$\langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in V(\Omega) \tag{3.58}$$

D'après l'étape (a) et (i), $e^{-1}_{i\|j} = e^0_{i\|j} = 0$

En multiplie (3.53) par ε^{-1} est âpre entend ε ver 0

On obtient le problème de Signorini d'ordre ε^1 :

$$(P_c^1)\begin{cases} \int_\Omega A^{ijkl}(0)\big(e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\big)\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1}e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx \\ = \langle G^{3,-1}, v_3\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{cases} \tag{3.59}$$

d'où

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)\big(e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)+e^2_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\big)\sqrt{a}dx+\int_\Omega B^{ijkl,1}e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx=\langle G^{3,-1},v_3\sqrt{a}\rangle$$

soit $v=\eta\in V(\omega)$ et $e^{-1}_{i\|j}(v)=0$ (3.40)

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(\eta)\sqrt{a}dx=\langle G^{3,-1},\eta_3\sqrt{a}\rangle,\quad \forall\eta\in V(\omega)$$

Par conséquent, si nous choisi la fonction test, P^1_c est formule comme suite :

$$(P^1_c)\begin{cases}\langle G^{3,-1},v_3\sqrt{a}\rangle=0 & \forall v\in V(\Omega)\\ \langle G^{3,-1},(v_3-u^0_3)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0 & \forall v_3\in K(\Omega)\end{cases}$$

alors

$$G^{3,-1}=0$$

soit $\eta=\xi^1$ dans le problème du variationnel précéder $P_M(\omega)$ on obtient :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^1)\gamma_{\alpha\beta}(\xi^1)\sqrt{a}dx_1dx_2=0$$

d'où : $\gamma_{\alpha\beta}(\xi^1)=0$ et par conséquent, $\xi^1\in V_0(\omega)$, tout que $\xi^1\in V(\omega)$ dans l'étape (i)

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)\big(e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)+e^2_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\big)\sqrt{a}dx+\int_\Omega B^{ijkl,1}e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx=0$$

pour tout $v\in V(\Omega)$.

Étant donné un élément arbitraire η dans l'espace $V_F(\omega)$.

soit $v(\eta)=(v_i(n))$ définie par

$$v_\alpha(\eta)=x_3\{2b^\sigma_\alpha\eta_\sigma+\partial_\alpha\eta_3\}\text{ et }v_3(\eta)=0$$

Tout que, on peut poser $v=(v(\eta))$ dans l'équations précédente ; ce qui donne les équations suivantes :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v(\eta))\sqrt{a}dx + 4\int_\Omega A^{\alpha3\sigma3}(0)e^2_{\sigma\|3}(b^\tau_\alpha\eta_\tau + \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3)\sqrt{a}dx$$
$$+ 4\int_\Omega B^{\alpha3\sigma3,1}e^1_{\sigma\|3}\big(b^\tau_\alpha\eta_\tau + \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3\big)dx = 0, \quad \forall\eta \in V_F(\omega)$$

• **Étape (v) : Le problème Signorini d'ordre ε^2**

les termes d'ordre ε^2 dans (3.53) satisfaits :

$$\langle G^{3,0}, (v_3 - u^0_3)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0 \ \ \forall v \in V(\Omega) \tag{3.60}$$

D'après l'étape (a), (i), (ii) et (iii), $e^{-1}_{i\|j} = e^0_{i\|j} = 0$

En multiplie (3.53) par ε^{-2} est âpre entend ε ver 0

On obtient le problème de Signorini d'ordre ε^2 :

$$P^2_c \begin{cases} \int_\Omega A^{ijkl}(0)\left(e^1_{k\|l}e^1_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^3_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\right)\sqrt{a}dx \\ + \int_\Omega B^{ijkl,1}\left(e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\right)dx + \int_\Omega B^{ijkl,2}e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx \\ = \int_\Omega f^{i,2}v_i\sqrt{a}\ dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,3}v_i\sqrt{a}\ d\Gamma + \langle G^{3,0}, v_3\sqrt{a}\rangle \ \ \forall v \in V(\Omega) \\ \langle G^{3,0}, (v_3 - u^0_3)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0 \ \ \forall v \in V(\Omega) \end{cases} \tag{3.61}$$

d'où

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)\left(e^1_{k\|l}e^1_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^3_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\right)\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,2}e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx +$$
$$\int_\Omega B^{ijkl,1}\left(e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\right)dx = \int_\Omega f^{i,2}v_i\sqrt{a}\ dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,3}v_i\sqrt{a}\ d\Gamma$$
$$+ \langle G^{3,0}, v_3\sqrt{a}\rangle \ \ \forall v \in V_F(\Omega)$$

soit $v = \eta \in V_F(\Omega)$, alors pour une telle fonction v

$$e^{-1}_{i\|j}(v) = 0$$
$$e^0_{\alpha\|\beta}(v) = \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0, \quad e^0_{\alpha\|3}(v) = \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3 + b^\sigma_\alpha\eta_\sigma, \ e^0_{3\|3}(v) = 0$$

D'autre part on a :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}e^1_{i\|j}(v(\eta))\sqrt{a}dx + 4\int_\Omega A^{\alpha 3\sigma 3}(0)e^2_{\sigma\|3}(b^\tau_\alpha\eta_\tau + \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3)\sqrt{a}dx +$$
$$4\int_\Omega B^{\alpha 3\sigma 3,1}e^1_{\sigma\|3}\big(b^\tau_\alpha\eta_\tau + \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3\big)dx = \int_\Omega p^{i,2}\eta_i\sqrt{a}dx_1dx_2 + \langle G^{3,0}, \eta_3\sqrt{a}\rangle, \quad \forall\eta\in V_F(\omega)$$

où

$$p^{i,2} = \int_{-1}^{1} f^{i,2}dx_3 + h^{i,3}(.,-1)$$

En soustrayant les équations trouvées dans l'étape (iii) de ces équations nous trouvons :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}\big(e^1_{i\|j}(\eta) - e^0_{i\|j}(v(\eta))\big)\sqrt{a}dx = \int_\omega p^{i,2}\eta_i\sqrt{a}dx_1dx_2 + \langle G^{3,0}, \eta_3\sqrt{a}\rangle, \quad \forall\eta\in V_F(\omega)$$

En premier les relations (à établi dans l'étape (ii))

$$e^1_{\alpha\|3} = 0 \text{ et } e^1_{3\|3} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}e^1_{\alpha\|\beta} \text{ dans } \Omega, \quad \text{et } e^1_{3\|3}(\eta) = e^0_{3\|3}(v(\eta)) = 0$$
$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}\big(e^1_{i\|j}(\eta) - e^0_{i\|j}(v(\eta))\big)\sqrt{a}dx = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta\sigma\tau}e^1_{\sigma\|\tau}\big(e^1_{\alpha\|\beta}(\eta) - e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta))\big)$$

d'où : $e^1_{\sigma\|\tau} = -x_3\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)$ alors :

$$e^1_{\alpha\|\beta}(\eta) - e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta)) = -x_3\rho_{\sigma\tau}(\eta), \quad \text{pour tout } \ \eta\in V_F(\omega)$$

Nous avons donc dérive les équations :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}\big(e^1_{i\|j}(\eta) - e^0_{i\|j}(v(\eta))\big)\sqrt{a}dx = \frac{1}{3}\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dx_1dx_2, \ \forall\eta\in V_F(\omega)$$

Pour résumer, nous avons établi que quand $V_0(\omega) \neq \{0\}$ le champ de vecteur ξ^0 (doit satisfaire) le problème variationnel $P_F(\omega)$.

$$\frac{1}{3}\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dx_1dx_2 = \int_\Omega p^{i,2}\eta_i\sqrt{a}dx_1dx_2 + \langle G^{3,0}, \eta_3\rangle, \ \forall\eta\in V_F(\omega)$$
$$\langle G^3(\varepsilon), (v_3 - u_3(\varepsilon))\sqrt{g(\varepsilon)}\rangle \geq 0 \ \ \forall v\in K(\Omega) \tag{3.62}$$
$$p^{i,2} := \int_{-1}^{1} f^{i,2}dx_3 + h^{i,3}(.,-1)$$
$$K(\Omega) = \{\eta\in V_F(\omega)/\eta_3 \leq d\}$$

3.2 Le cas avec frottement

On va étudier dans cette partie, le même problème précédent en supposant que le contact unilatéral est avec frottement de Coulomb. L'étude variationnelle de ce problème est déjà faite dans le chapitre 2, pour cela on s'intéresse qu'à l'étude asymptotique en utilisant l'approche en déplacement.

3.2.1 Position du problème variationnel sur un domaine indépendant de l'épaisseur

L'objectif de l'analyse asymptotique est de connaître le comportement de la solution u^ε du problème $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ lorsque ε tend vers zéro. Pour cela il est important que le domaine sur lequel est posé le problème ne dépend pas de ε .

On garde la même mise à l'échelle pour les données que celle faite dans le cas sans frottement.

On peut alors réécrire le problème variationnel $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ (2.12) sur l'ouvert fixe Ω :

$$P(\varepsilon,\Omega)\begin{cases}\text{Trouver } \ (u(\varepsilon),G(\varepsilon))\in\mathbf{K}(\Omega)\times\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+) \quad \text{tel que}\\ \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon,(u(\varepsilon))e_{i\|j}(\varepsilon,v)\sqrt{g(\varepsilon)}dx = L(v)+\varepsilon^{p-1}\langle G^i(\varepsilon),v_i\sqrt{g(\varepsilon)}\rangle \quad \forall v\in\mathbf{V}(\Omega)\\ \langle G^3(\varepsilon),(v_3-u_3(\varepsilon))\sqrt{g(\varepsilon)}\rangle\geq 0 \quad \forall v\in\mathbf{K}(\Omega)\\ \langle G_T(\varepsilon),\big((v-u(\varepsilon))-(v_T-u_T(\varepsilon))\big)\sqrt{g(\varepsilon)}\rangle+\langle\Lambda|G^3(\varepsilon)|,(|v_T|-|u_T(\varepsilon)|)\sqrt{g^\varepsilon}\rangle\geq 0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall v\in\mathbf{V}(\Omega)\end{cases} \tag{3.63}$$

tels que :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon,u(\varepsilon))e_{i\|j}(\varepsilon,v)\sqrt{g(\varepsilon)}dx =$$
$$\int_\Omega f^i(\varepsilon)v_i\sqrt{g(\varepsilon)}dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_-}h^i(\varepsilon)v_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma+\varepsilon^{p-1}\langle G^3(\varepsilon),v_3\sqrt{g(\varepsilon)}\rangle$$

$$e_{i\|j}(\varepsilon,v)=\frac{1}{2}(v_{i\|j}(\varepsilon)+v_{j\|i}(\varepsilon)) \tag{3.64}$$

$$v_{i\|j}(\varepsilon)=\partial_j v_i-\Gamma_{ij}^k(\varepsilon)v_k \tag{3.65}$$

$$\mathbf{V}(\Omega)=\{v=(v_i)\in\mathbf{H}^1(\Omega) \ \ ,v=0 \ \ sur \ \ \Gamma_0\} \tag{3.66}$$

$$\mathbf{K}(\Omega) = \{v \in \mathbf{V}(\Omega)/ \;\; v_3 \leq d\}. \tag{3.67}$$

3.2.2 Modèles de coques membranaires

On se propose quel que modèles bidimentionnels des coques membranaires obtenus par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimentionnel de coques élastiques minces constituées d'un matériau isotrope et homogène entrant en contact avec frottemen de Coulomb contre un obstacle rigide.
On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,0} \in L^2(\Omega)$, $h^{i,1} \in L^2(\Gamma_-)$ telles que :

$$f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,0}(x), \quad \forall x \in \Omega \tag{3.68}$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon h^{i,1}(x), \quad \forall x \in \Gamma_- \tag{3.69}$$

$$d(\varepsilon) = d$$

$$G^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon G^i(\varepsilon)(x), \quad \forall x \in \Gamma_+ \tag{3.70}$$

$$G^i(\varepsilon) = \ldots + G^{i,0} + \varepsilon G^{i,1} + \varepsilon^2 G^{i,2} + \ldots \tag{3.71}$$

On substitue (3.4),(3.71),(3.6),(3.68)et(3.69) dans (3.63), et on identifie les termes du même ordre de ε, on obtient à l'ordre ε^{-2}, ε^{-1} et ε^0 respectivement :

$$P^{-2}\left\{ \int_\Omega A^{ijkl}(0) e^{-1}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = \langle G^{i,-2}, v_i\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \right. \tag{3.72}$$

$$P^{-1}\left\{ \int_\Omega A^{ijkl}(0)\Big(e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v) + e^{-1}_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)\Big)\sqrt{a}dx = \langle G^{i,-2}, v_i(\sqrt{a})^1\rangle + \langle G^{i,-1}, v_i\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \right. \tag{3.73}$$

$$P^0\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0)\Big(e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v) + e^{-1}_{k\|l}e^1_{i\|j}(v)\Big)\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,2}e^{-1}_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v) \\ \displaystyle + \int_\Omega B^{ijkl,1}\Big(e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v) + e^{-1}_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)\Big)dx = \int_\Omega f^{i,0}v_i\sqrt{a}dx + \int_\Gamma h^{i,1}v_i\sqrt{a}d\Gamma \\ + \langle G^{i,0}, v_i\sqrt{a}\rangle + \langle G^{i,-1}, v_i(\sqrt{a})^1\rangle + \langle G^{i,-2}, v_i(\sqrt{a})^2\rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{array} \right. \tag{3.74}$$

De même, on substituons (3.4), (3.71) et (3.7) dans l'inéquation variationnelle de (3.63) on obtient :

$$\begin{cases} \Big[\varepsilon^d\langle G^{3,d},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle+\sum_{s>d}\varepsilon^s\langle\widetilde{G}^{3,s},(\widetilde{v}_3-\widetilde{u}_3^0)(\sqrt{\widetilde{a}})\rangle\Big]\geq 0\ \ \forall v_3\in K(\Omega), d=-2,-1,0\\ \Big[\varepsilon^d\Big(\langle G_T^d,\big((v-u^0)-(v_T-u_T^0)\big)\sqrt{a}\rangle+\langle\Lambda|G^{3,d}|,(|v_T|-|u_T^0|)\sqrt{a}\rangle\Big)\Big]+\\ \Big[\sum_{s>d}\varepsilon^s\Big(\langle\widetilde{G}_T^s,\big((\widetilde{v}-\widetilde{u}^0)-(\widetilde{v}_T-\widetilde{u}_T^0)\big)\sqrt{\widetilde{a}}\rangle+\langle\Lambda|\widetilde{G}^{3,s}|,(|\widetilde{v}_T|-|\widetilde{u}_T^0|)(\sqrt{\widetilde{a}})\rangle\Big)\Big]\geq 0\ \ \forall v\in K(\Omega) \end{cases} \tag{3.75}$$

- **Étape (1) : Le problème de Signorini d'ordre ε^{-2}**

les termes d'ordre ε^{-2} dans (3.75) satisfaits $\langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0$ et

$$\langle G_T^{-2},\big((v-u^0)-(v_T-u_T^0)\big)\sqrt{a}\rangle+\langle\Lambda|G^{3,-2}|,(|v_T|-|u_T^0|)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0,\quad\forall v\in K(\Omega)$$

En multiplie (3.75) par ε^2 est âpre entend ε ver 0

on obtient le problème de Signorini d'ordre ε^{-2} :

$$(P_c^{-2})\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0)e_{k\|l}^{-1}e_{i\|j}^{-1}(v)\sqrt{a}dx=\langle G^{i,-2},v_i\sqrt{a}\rangle\quad\forall v\in V(\Omega)\\ \langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in K(\Omega)\\ \langle G_T^{-2},\big((v-u^0)-(v_T-u_T^0)\big)\sqrt{a}\rangle+\langle\Lambda|G^{3,-2}|,(|v_T|-|u_T^0|)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in K(\Omega)\end{cases} \tag{3.76}$$

Pour tout $v\in V(\Omega)$ est indépendant de x_3 ; et d'après (3.13) le problème de Signorini d'ordre ε^{-2} se réduit à :

$$(P_c^{-2})\begin{cases} \langle G^{i,-2},v_i\sqrt{a}\rangle=0\quad\forall v\in V(\Omega)\\ \langle G^{3,-2},(v_3-u_3^0)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0,\ \forall v_3\in K(\Omega)\\ \langle G_T^{-2},\big((v-u^0)-(v_T-u_T^0)\big)\sqrt{a}\rangle+\langle\Lambda|G^{3,-2}|,(|v_T|-|u_T^0|)\sqrt{a}\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in K(\Omega)\end{cases} \tag{3.77}$$

on obtient :

$$G^{i,-2}=0,\quad\text{donc}\ \ G^{3,-2}=G^{\alpha,-2}=0\ \ /\ \ G_T^{-2}=G^{\alpha,-2} \tag{3.78}$$

En utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$ et $e_{k\|l}^{-1}$, on trouve :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e_{k\|l}^{-1}e_{i\|j}^{-1}(v)\sqrt{a}dx=0\quad\forall v\in V(\Omega),$$

D'après le théorème (3.1.1) on obtient : $\partial_3u^0=0$ dans Ω alors le terme principale $u^0\in V(\Omega)$ est indépendant de x_3 et peut être identifié avec un champ de vecteurs $\xi^0\in H^1(\omega)$

satisfaisant $\xi^0 = 0$ sur γ_0.

D'après l'identification des coefficients de ε^{-2} on obtient les relations :

$$\xi^0 \in V(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega); \eta = 0 \quad \text{on } \gamma_0\}$$

$$e^{-1}_{i\|j} = 0 = e^{-1}_{i\|j}(u^0) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{3.79}$$

• **Étape 2 : Le problème de Signorini d'ordre** ε^{-1}

D'après l'étape (1), On remplaçons (3.79) et (3.78) dans (3.75) on obtient

$$\begin{cases} \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0, \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \\ \langle G_T^{-1}, \big((v - u^0) - (v_T - u_T^0)\big)\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|G^{3,-1}|, (|v_T| - |u_T^0|)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0, \quad \forall v \in V(\Omega) \end{cases}$$

En multiplie (3.75) par ε^1 est âpre entend ε ver 0

on obtient le problème de Signorini d'ordre ε^{-1} :

$$(P_c^{-1}) \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^0_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = \langle G^{i,-1}, v_i\sqrt{a}\rangle \quad \forall v \in V(\Omega) \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0, \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \\ \langle G_T^{-1}, \big((v - u^0) - (v_T - u_T^0)\big)\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|G^{3,-1}|, (|v_T| - |u_T^0|)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0, \quad \forall v \in v(\Omega) \end{cases} \tag{3.80}$$

Pour tout $v \in V(\Omega)$ est indépendant de x_3 ; et d'après (3.13) le problème de Signorini d'ordre ε^{-1} se réduit à :

$$(P_c^{-1}) \begin{cases} \langle G^{i,-1}, v_i\sqrt{a}\rangle = 0 \quad \forall v \in V(\Omega) \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0, \ \forall v_3 \in K(\Omega) \\ \langle G_T^{-1}, \big((v - u^0) - (v_T - u_T^0)\big)\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|G^{3,-1}|, (|v_T| - |u_T^0|)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0, \ \forall v \in V(\Omega) \end{cases} \tag{3.81}$$

$$\text{alors } G^{i,-1} = 0, \quad \text{donc} \quad G^{3,-1} = G^{\alpha,-1} = 0 \ \ /G^{\alpha,-1} = G_T^{-1} \tag{3.82}$$

En utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$ et $e^{-1}_{k\|l}$, on trouve :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = \int_\Omega 4A^{\alpha 3\sigma 3}(0)e^0_{\alpha\|3}e^{-1}_{\sigma\|3}(v)\sqrt{a}dx$$
$$+\int_\Omega \Big(\big(A^{\alpha\beta 33}(0)e^0_{\alpha\|\beta} + A^{3333}(0)e^0_{3\|3}\big)e^{-1}_{3\|3}(v)\Big)\sqrt{a}dx =$$
$$\int_\Omega \Big(2\mu a^{\alpha\sigma}e^0_{\alpha\|3}\partial_3 v_\sigma + \big[\lambda a^{\alpha\beta}e^0_{\alpha\|\beta} + (\lambda+2\mu)e^0_{3\|3}\big]\partial_3 v_3\Big)\sqrt{a}dx = 0, \quad \forall v \in K(\Omega)$$

D'après le théorème (3.1.1) on obtient les équations :

$$e^0_{\alpha\|3} = 0 \text{ et } e^0_{3\|3} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}e^0_{\alpha\|\beta} \text{ dans } \Omega. \tag{3.83}$$

• Étape 3 : Le problème de Signorini d'ordre ε^0

On applique l'étape (1) et (2), dans (3.74) on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0)\Big(e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\Big)\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1}e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx = \\ \displaystyle\int_\Omega f^{i,0}v_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1}v_i\sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{i,0}, v_i\sqrt{a}\rangle \ \ \forall v \in V(\Omega) \end{cases} \tag{3.84}$$

En remplaçons (3.78) et (3.82) dans (3.75) et en tendant ε à zéro, on obtient :

$$\begin{cases} \langle G^{3,0}, (v_3 - u^0_3)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0 \\ \langle G^0_T, \big((v-u^0) - (v_T - u^0_T)\big)\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|G^{3,0}|, (|v_T| - |u^0_T|)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0, \quad \forall v \in K(\Omega) \end{cases} \tag{3.85}$$

le problème Signorini de l'ordre ε^0 :

$$(P^0_c)\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A^{ijkl}(0)\Big(e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\Big)\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1}e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx = \\ \displaystyle\int_\Omega f^{i,0}v_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1}v_i\sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{i,0}, v_i\sqrt{a}\rangle \ \ \forall v \in V(\Omega) \\ \langle G^{3,0}, (v_3 - u^0_3)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0, \ \forall v_3 \in K(\Omega) \\ \langle G^0_T, \big((v-u^0) - (v_T - u^0_T)\big)\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda|G^{3,0}|, (|v_T| - |u^0_T|)\sqrt{a}\rangle \geqslant 0, \ \forall v \in V(\Omega) \end{cases} \tag{3.86}$$

donc

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)\Big(e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\Big)\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1}e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx =$$
$$\int_\Omega f^{i,0}v_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1}v_i\sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{i,0}, v_i\sqrt{a}\rangle \ \ \forall v \in V(\Omega)$$

soit $v = \eta \in V(\omega).i, e,\ v \in V(\Omega)$ et v indépendant de x_3 alors :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^0_{k\|l} e^0_{i\|j}(\eta)\sqrt{a}dx = \int_\Omega \Big(A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) e^0_{\sigma\|\tau} + A^{\alpha\beta 33}(0) e^0_{3\|3} \Big) e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$$
$$= \int_\Omega \Big(\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu\big(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma}\big)\Big) e^0_{\sigma\|\tau} e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx + \int_\Omega \lambda a^{\alpha\beta} e^0_{3\|3} e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} e^0_{\sigma\|\tau} e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$$
$$= \int_\Omega f^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1}\eta_i\sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{i,0}, \eta_i\sqrt{a}\rangle \quad \forall \eta \in V(\omega),$$

où

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda u}{\lambda + 2u} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2u(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})$$

tels que

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta) := \frac{1}{2}(\partial_\beta\eta_\alpha + \partial_\alpha\eta_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\eta_\sigma - b_{\alpha\beta}\eta_3$$

$$e^0_{\alpha\|\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\xi^0) \text{ et } e^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \quad \forall \eta \in V(\omega)$$

Alors d'après l'étape (3) le champs de vecteurs ξ^0 devrait satisfaire le problème variationnel bidimensionnel "$P_M(\omega)$" :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^0)\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dx_1 dx)2 = \int_\omega p^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dx_1 dx)2 + \langle G^{i,0}, \eta_i\sqrt{a}\rangle \quad \forall \eta \in V(\omega)$$

$$\langle G^{3,0}, (\overline{\eta}_3 - \overline{\xi}^0_3)\sqrt{a}\rangle \geq 0 \quad \forall \eta \in K(\omega) \tag{3.87}$$

$$\langle G^0_T, \big((\overline{\eta} - \overline{\xi}^0) - (\overline{\eta}_T - \overline{\xi}^0_T)\big)\sqrt{a}\rangle + \langle \Lambda |G^{3,0}|, (|\eta_T| - |\xi^0_T|)\sqrt{a}\rangle \geq 0,\ \forall \eta \in \mathbf{V}(\Omega). \tag{3.88}$$

$$p^{i,0} := \int_{-1}^{1} f^{i,0}dx_3 + h^{i,1}(.,-1)$$

Conclusion

On conclut de ce travail, dans le cas des coques minces, en utilisant la méthode des développements asymptotiques formelles que dans le cas sans frottement, on trouve un problème bidimensionnel de Signorini sans frottement et dans le cas avec frottement de Coulomb, on trouve un problème bidimensionnel de Signorini avec frottement. Donc, dans chaque cas, on dérive un problème bidimensionnel de même type. Et ceci en utilisant l'étude asymptotique formelle.

Bibliographie

[1] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity Volume III : Theory of shells, Studies in Mathematics and its Applications 29, Noth Holland.* Springer (2005).

[2] *A.Signorini. Questioni de elasticita non linearizzata e semi-linearizzata.* Rend de Matematica, Rome, 1959

[3] Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, vol II, Theory of Plates,* North-Holland, Amsterdam, 1997.

[4] Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, vol III, Theory of Shells,* North-Holland, Amsterdam, 1999.

[5] Ciarlet,P.G., *Élasticité Tridimensionnelle,* Masson,Paris New York,1986.

[6] Ciarlet P.G., *An introduction to differential geometry with applications to elasticity*, J. Elast, 78-79 (2005), 1-215.

[7] A. Léger, B. *Miara, the obstacle problem for shallow shells in curvilignes coordinates* . C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 2010

[8] MEZABIA, M-E. *M. MAGISTER : Modélisation du problème de Signorini pour les coques minces*, 2011

[9] Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, vol I, Three-Dimensional Elasticity,* North-Holland, Amsterdam, 1988. .

[10] J.C.Paumier, *Modélisation asymptotique d'un problème de plaque mince en contact unilatéral avec frottement sur un obstacle rigide.* Rapport technique LMC-IMAG,juillet 2002 http://www-lmc.imag.fr/epamier/signoplaque.ps]

[11] G. Fichera *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno,* Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I., 5, 1964

[12] H.B.Dhia, *Equilibre d'une plaque mince élastique avec contact unilatéral et frottement de type Coulomb,* C. R. Acad. Sci. Paris, Scr. I, 308 (1989) 293-296.

[13] P.G.Cialet, P.Destuynder : A *justification of the two dimensional plate model,* J. Mécanique,18 (1989) 315-344.

[14] D.A. Chacha, A. Bensayah, *Asymptotic modeling of a Coulomb frictional Signorini problem for the von Kármán plates.* C.R. Mecanique, Vol.336(2008),846-850.

Résumé

L'objectif de ce t travail de mémoire présente une étude asymptotique d'un problème de Signorini sans frottement et avec frottement de Coulomb pour une coque linéairement élastiques

Dans la première partie : il est un des concepts généraux sur élasticité tridimensionnelle linéaires.

Dans la deuxième partie : Modélisation en sans frottement et 3D avec frottement de Coulomb pour une coque, et nous avons utilisé coordonnées curvilignes pour faciliter l'étude.

Dans la troisième partie : Utilisation de l'analyse asymptotique, la transformation des couques d'épaisseur 2ε vers épaisseur 2, et on trouve un problème bidimensionnel de Signorini de même .type.

Mots Clés : Analyse asymptotique, problème de Signorini, frottement de Coulomb, couques, coordonnées curvilignes, bidimensionnel.

Abstract

The objective of this work of memory presents an asymptotic study of a problem of Signorini without friction and with Coulomb friction for a linearly elastic shell.

In the first part : it is one of the general concepts on linear three-dimensional elasticity

In the second part: Frictionless and 3D modeling with Coulomb friction for a shell, and we used curvilinear coordinates to facilitate the study

In the third part: Using asymptotic analysis, the transformation of the 2ε to thick thicknesses, and we find a two-dimensional problem of Signorini of the same type

Key words : Asymptotic analysis, Signorini problem, Coulomb friction, shell, curvilinear coordinates, two-dimensional.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة النمذجة المقاربة لهياكل متعددة الانحناء ذات مرونة خطية لـمشكلة سينيورني، في حالة عدم احتكاك وحالة احتكاك كولوم .

في الجزء الأول : هو عبارة عن مفاهيم عامة حول المرونة الخطية الثلاثية الأبعاد.

في الجزء الثاني : نمذجة ثلاثية الأبعاد لهياكل متعددة الانحناء في حالة عدم احتكاك وحالة احتكاك كولوم، واستخدمنا الإحداثيات المنحنية لتسهيل دراستها.

في الجزء الثالث باستخدام تقنيات التحليل المقارب حولنا هياكل متعددة الانحناء ذات سمك 2ε إلى سمك 2، وهناك مشكلة سينيورني ثنائية الأبعاد من نفس النوع .

الكلمات المفتاحية : النمذجة المقاربة، مسألة سينيورني، لهياكل متعددة الانحناء، مرونة خطية، احتكاك كولوم، الإحداثيات المنحنية، ثنائية الأبعاد