Nř d'ordre : /

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE KASDI MERBAH DE OUARGLA

Faculté des Sciences et téchnologie

et Sciences de la matière

DEPARTEMENT DE :

MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Spécialité : A.N

Par

Djellouli Feirouz

THÈME

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE NEWTON SUR UN SYSTÈME DYNAMIQUE DISCRET NON LINÉAIRE.

Soutenu publiquement, le

devant le jury composé de :

Mr	B. Tellab	MAA	l'université de Ouargla	Président.
Mr	M. Kouidri	MAA	l'université de Ouargla	Examinateur
Mr	M. Mammeri	MAA	l'université de Ouargla	Rapporteur

Remerciments

Tout d'abord, je remercie Dieu qui nous guident pour terminer ce travail humble.

J'exprime ma gratitude, mes remerciements á mes parents qui ont fait de leur mieux pour m'aider.

Je tiens a remercier vivement :

Mon encadreur Mr.Mohammed Mammeri qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début á la fin de ce travail.

A Mr.M.Kouidri, Mr.B.Telleb, qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je remercie aussi les personnes qui m'ont aidé et encouragé le long de ce travail.

Table des matières

Notations et conventions

∘ O : Orbite

∘ $\dot{X}$: dérévable de X

∘ λ_i : les valeurs propres

∘ DG : le jacobien de G

∘ J : Matrice de Jacobian

$^\circ$ $d(f^t(u), A)$: La distence

$^\circ$ **H** : Application de Hénon

$^\circ$ G : Application

$^\circ$ $\sum$: La somme

$^\circ 1D$: Démonsion 1

$^\circ 2D$: Démonsion 2

Introduction générale

Un système dynamique discret est un ensemble fini d'éléments, prenant chacun un nombre fini d'états, et évoluant, dans un temps discret, par interactions mutuelles. En mathématiques un système dynamique discret, est de la forme : $X_{n+1} = f(X_n)$ où f est une application régulière engendrée par l'itération d'une application.

Chaos, ou un système chaotique c'est un système produira des comportements très différents à long terme lorsque les conditions initiales sont perturbées très légèrement, depuis la fin des années 70, la théorie du chaos a envahi la plupart des sciences : Physique, Chimie, Mécanique Géophysique, Astronomie, Psychologie, Economie, Sociologie, ..., elle a même envahi le flux et le reflux de la vie élargissant considérablement les possibilités d'emploi des modèles déterministes. L'ecologie est un domaine qui, depuis une vingtaine d'années, a reçu une stimulation décisive grâce aux mathématiques du chaos. Si le monde est un chaudron fait de millions d'espèces en interactions, alors comment ces diverses populations évoluent-elles ? Qu'arriverait-il à une population animale si les ressources venaient à manquer, si des prédateurs survenaient, si une épidémie se déclarait ?...

Les systèmes dynamiques discrets sont présentés comme source de chaos de référence dans beaucoup d'études. Comme exemple les systèmes quadratiques (application logistique en $1D$, application de Henon en $2D$) qui sont principalement des systèmes discrets dont l'état chaotique dépendent d'un ou plusieurs paramètres de bifurcation.

Ce travail réalisé dans le cadre de ce mémoire porte '' l'obtention d'un point périodique par la méthode de Newton ''. L'objet de notre mémoire est d'étudier l'existence des points périodiques à laid de la méthode de Newton d'un système dynamique discret nous commençons donc dans le premier chapitre, par présenter les notions concernant les systèmes dynamiques continues discrets tell que : le flot, la trajectoire, l'espaces de phases, Orbites périodiques, Point fixes, stabilité de point fixe, ... Dans le deuxième chapitre on présente après introduction on traite en détail les notions de base qui concernent chaos et des attracteurs chaotiques tels que : attracteurs, le bassin d'attraction, les différents types d'attracteurs, attracteurs étranges, les différents types d'attracteurs, en passant par la théorie de bifurcation, et les exposants de Lyapunov des attracteurs chaotiques. Dans le troisième chapitre on donne la notion de la méthode de Newton, et on applique cette méthode pour obtenir les points périodiques d'un système dynamique discret donné on termine par la représentation des quelques attracteurs chaotiques.

Chapitre 1

Système dynamique

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels qu'assez tardivement. Ils sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaitre dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles.

Définition 1.1 *Pour définir un système dynamique, on doit spécifier :*

- un espace de configurations du système, ou "espace des phases";

- une loi d'évolution, qui donne l'état futur du système en fonction de l'état présent.

Etant donnés un espace de configuration et une loi d'évolution, le dynamicien s'intéresse au comportement asymptotique du système : que se passe-t-il quand on attend un temps infini ?

1.1 Système dynamique continue

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet $(X, t, G$

) constitué de l'espace d'état X du domaine temporel T, et d'une application (champ de vecteurs) de transition d'état $G : X \times T \longrightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.

Dans le cas où la composante du temps est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = G(x(t), t, \mu) \quad \text{où} \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n \text{ et } \ \mu \in \mathbb{R}^r \tag{1.1}$$

Connaissant l'état intial du système $x(t_0)$ à $t = t_0$,on peut déterminer l'état futur du système $x(t)$ à nimporte quel instant $t > t_0$

Système dynamique autonome

Définition 1.2 *un système autonome est un système à évoluation temporelle continue qui qui a une indépendance explicite du temps t :*

$$\frac{dx}{dt} = G(x(t)) \tag{1.2}$$

Système dynamique non autonome

Définition 1.3 *un système non autonome est un système à évoluation temporelle continue qui dépend explicitement du temps t :*

$$\frac{dx}{dt} = G(x(t), t) \tag{1.3}$$

1.1.1 Le Flot

Définition 1.4 *On appelle flot de l'équation* (1.3) *l'application φ définie par :*

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad \mathbb{R} \times X \longrightarrow X \\ (t, x_0) \quad &\longrightarrow \quad \varphi(t, x_0) = \varphi_t(x_0) = x(t, x_0) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Soit $x_0 \in X$ une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution de l'équation (1.3)*. L'ensemble des points $\{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$ est la trajectiore (ou orbite) dans l'espace d'etat passant par le points x_0 à l'instant $t = 0$.*

- Deux trajectiores identiques émanent obligatoirement du même état initial.
- La trajectiore d'un système dynamique autonome ne dépend que l'état initial.

1.1.2 La trajectoire

Définition 1.5 *Une trajectoire $x(t)$ de ce système est une application de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$:*

$$x : \begin{array}{c} I \to \mathbb{R}^n, \\ t \to x(t), \end{array} \tag{1.5}$$

qui vérifie à tout instant $t \in I$ la relation $x' = f(x, \lambda)$ .C'est en d'autres termes une solution des équations du système

L'existence et L'unicité

La question de l'existence et de l'unicité d'une solution dépend de conditions sur f. Notamment, un résultat majeur est le suiv ant, pour λ fixé :

Théorème 1.1 *Si f est $C^r (r \geq 1)$ dans un voisinage $V(x_0)$, alors il existe un réel $a > 0$ tel que le problème :*

$$\begin{cases} x' = f(x, \lambda) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution unique $x(t)$ sur $[-a, a]$.

L'existence et l'unicité d'une solution, dans le cas où l'application f n'est pas continûment différentiable, restent des problèmes ouverts. Un cas particulier, celui où la fonction f et sa matrice jacobienne sont Lipshchitziennes, est toutefois résolu : le théorème des *fonctions implicites peut être appliqué, et on retrouve les résultats d'existence et d'unicité. On parlera indistinctement dans la suite de la trajectoire $x(t)$, au sens du trajet parcouru dans l'espace des phases au cours du temps, ou de la solution $x(t)$ (sous-entendu : des équations du système).[6]*

1.1.3 L'espace de phases

Définition 1.6 *Dès que la dimension n du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment le système évolue. L'outil de base pour y palier est l'espace de phase. On considère chaque composante Xi de X comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension n. L'évolution suivant t du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.[8]*

1.1.4 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifes

Définition 1.7 *Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Mais n'oublions pas que les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, alors pour préciser cette définition, on arrive à dire qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 un et un seul état final $x(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective φ de l'espace des phases*

$$\phi : X \times \mathbb{R} \to X$$
$$(x,t) \mapsto \phi_t(x) = \phi(x,t)$$

Qu'on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\phi_t(x_0) = x_0$$
$$\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0)) \text{ pour tout } t, s \in \mathbb{R}$$

Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.[8]

Exemple 1.1 *cas continu(L'oscillateur de Duffing)*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \varpi t \end{cases}$$

Où δ *,* γ *,*ϖ*, sont des paramètres physiques réels (variables statiques)*

L'espace des phases est : $\mathbb{R}^2$*, l'espace des paramètres est :* $\mathbb{R}^3$*.*

Ce système est non linéaire, non autonome, il peut être dissipatif ou conservatif (suivant le mouvement avec ou sans frottement).[8]

1.1.5 Point critique

Définition 1.8 *Un point critique (ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation* $\dot{X} = F(X)$ *est un point* $\bar{X}$ *de l'espace des phases vérifiant* $F(\bar{X}) = 0$*.*

Remarque 1.1 *Par un changement de variable* $z = x - a$ *on peut ramener le point à l'origine (0).*

1.1.6 Solution périodique

Définition 1.9 *une solution du système (1.1) passant au point* x_0 *est appelée solution périodique de période* T *s'il existe* $T > 0$ *tel que :*

$$\{x(0) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t+T) = x(t),$$

on prendra naturellement pour T la période minimale, s'il existe bien que n'importe quel multiple entier de T vérifie éhalement la définition.

Branche de solutions périodiques On peut montrer, en appliquant le théorème des fonctions implicites, l'existence de branches de solutions périodiques, lorsque le paramètre λ varie continûment, de la même manière que pour les solutions statiques.

Stabilité On étudie la stabilité asymptotique d'une solution périodique par analyse linéaire des trajectoires au voisinage de cette solution.

Soit $x_0(t)$ une solution périodique de (1.1) de période T_0, pour une valeur donnée du paramètre λ_0. Construisons une solution perturbée $x(t)$ arbitrairement proche de $x_0(t) : x(t) = x_0(t) + y(t), |y(0)| << |x_0(0)|$. On linéarité alors l'équation d'évolution du système autour de la trajectoire $x_0(t)$, par développement de Taylor à l'ordre 1 en chaque instant :

$$y'(t) = J(x_0(t), \lambda_0)y(t)$$

où l'on néglige les termes d'ordre supérieur en y. On obtient ainsi un système dynamique linéaire dont la matrice d'évolution $J(x_0(t), \lambda_0)$ est périodique de période T_0.[6]

1.2 Système dynamique discret

1.2.1 Définitions

Définition 1.10 *Systèmes dynamiques discrets, ou, dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes. Un système dynamique discret est de la forme :*

$$x_{k+1} = G(x_k) \tag{1.6}$$

Un difféomorphisme de classe $\mathbf{C}^r$ est une application bijective de classe $\mathbf{C}^r$ dont la réciproque est aussi de classe $\mathbf{C}^r$.

Définition 1.11 *On définit un système dynamique discret dans $\mathbb{R}^n$ par une application itérative continue G, tell'que :*

$$\begin{cases} G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = G(x_k) \end{cases} \text{ou } x_k \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Elle opère de la façon suivante : étant donné une condition initiale x_0 de l'état du système, le premier état suivant est $x_1 = G(x_0)$, le second état qui suit immédiatement le premier est $x_2 = G(x_1) = G(G(x_0) = G \circ G(x_0) = G^2(x_0)$, et ainsi de suite de telle sorte que la $(k+1)$-*ième* état est donné par

$$x_{k+1} = G(x_k) = ...G^{k+1}(x_0)$$

1- On définit le flot du système à temps discret par :

$$\varphi_k(x) = G \circ G \circ ... \circ G(x) = G^k(x), \quad k > 0 \text{ et}$$

2- $\varphi_k(x)$ est défini pour $k < 0$ lorsque G est inversible.

3- Dans la pratique : $x_0,\ x_1 = \ G(x_0)$, $x_2 = \ G(x_1), ..., x_{k+1} = G(x_k)$, représentent les valeurs d'une certaine quantité au temps $t = 0, 1, 2, ...$

4- La valeur de la quantité au temps $m + 1$ dépend de sa valeur au temps m.

1.2.2 Orbite périodique

Définition 1.12 *On appelle cycle(ou trajectoire périodique ou orbite périodique) une trajectoire $\varphi_t(x)$ qui n'est pas réduite à un point et telle qu'il existe $T > 0$ vérifiant $\varphi_T(x) = x$. Le plus petit réel T strictement positif tel que $\varphi_T(x) = x$ est appellé période, il est indépendant du point x pris sur la trajectoire.*

Définition 1.13 *Une orbite* $(G^K(x))^{K \geq O}$ *un système* x_{K+1} *est dite périodiuque si* $G(x) \neq x$ *et s'il existe* $K > 2$ *tel que* $G^K(x) = x$. *le plus petit entier* $K \geq 2$ *tel que* $G^K(x) = x$ *est alors appelé période.*

$$x_{K+1} = G(x_K)$$

Comme pour les cycles limites, on peut définir une notion de stabilité (asymptotiquement) autour d'une orbite périodique.

1.2.3 Orbites négatives et orbites positives

Définition 1.14 *Une orbite positive* O^+ *d'un point* x_0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *est la suite des images de* x_0 *par les composées successives de* G *:*

$$O^+(x_0) = \left\{x_0, G(x_0), G^2(x_0), ..., G^k(x_0), ..\right\}$$

Si G inversible alors :

$$\underbrace{G^{-k}(x_0) = G^{-1} \circ G^{-1} \circ ... \circ G^{-1}}_{k\text{ -}fois}(x_0)$$

Définition 1.15 *Une orbite négative* O^- *d'un point* x_0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *est la suite des images de* x_0 *par les composées successives de* G *:*

$$O^-(x_0) = \left\{x_0, G^{-1}(x_0), G^{-2}(x_0), ..., G^{-k}(x_0), ..\right\}$$

Définition 1.16 *Si* $O^+(x_0)$ *et* $O^-(x_0)$ *existent alors l'orbite* $O(x_0)$ *de* x_0 *est l'ensemble :*

$$O(x_0) = O^+(x_0) \cup O^-(x_0)$$

1.2.4 Stabilité du point fixe

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectoreil définie une application disecrèt, Soit $Df(x_0)$ sa matrice Jacobienne évaluée au point fixe x_0 de l'application f, pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe x_0 on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

Définition 1.17 *Les valeurs propres du Jacobien $Df(x_0)$ sont appelées multiplicateurs caractéristiques de f en x_0.*

Définition 1.18 *Le point fixe x_0 de f est dit asymptotiquement stable si ses multiplication caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.*

Définition 1.19 *Le point fixe x_0 de f est dit instable si l'un des multiplication caractéristiques et de module strictement supérieur à 1.*

Définition 1.20 *Le point fixe x_0 de f est dit point selle si au moins un multiplication est de module strictement inférieur à 1 et les autres multiplication caractéristiques sont tous de module strictement supérieur à 1.*

Exemple 1.2 *On considère le système suivant :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ah(y_n) + x_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \tag{1.8}$$

et h est un fonction définit par :

$$h(y) = \begin{cases} by - c \text{ si } y \geq 0, \\ by + c \text{ si } y < 0, \end{cases}$$

Pour tout les valeurs $a \geqslant 0, c > 0$ et $b > 0$ le système (1.8) admet deux points fixes, sont défîné par :

$$P_1 = (\frac{c}{b}, \frac{c}{b}), \quad P_2 = (-\frac{c}{b}, -\frac{c}{b})$$

Les points fixes du système (1.8) est les solutions réel du système :

$$-ah(y) + x = x, \quad x = y$$

Donc, on peut facilement obtient l'equation

$$h(y) = 0, \qquad x = y$$

finalement, on obtenir

$$y_1 = \frac{c}{b} > 0, y_2 = -\frac{c}{b} < 0 \text{ et } x_i = y_i, i = 1, 2.$$

La matrice Jacobian de le système présedent evalué aux points fixes $P1$ et $P2$ sont le même et il est donnée par :

$$J_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et le polynômes caractéristique pour $J_{1,2}$ sont donnée par :

$$\lambda^2 - \lambda + ab = 0$$

Nous avons prouvé le résultat suivant :

Les deux points $P1$ et $P2$ sont la même stabilité puisqu'ils ont le même polynôme caractéristique.

La stabilité locale de $P1$ et de $P2$ est étudiée par le fait d'évaluer les valeurs propre de la matrice jacobian, nous supposons $a > 0$, $c > 0$ et $b > 0$, on a le résultat suivant :

(1) Si $0 \leq a \leq \frac{1}{b}$, alors les deux points fixés $P1$ et $P2$ sont stable.

(2) If $a > \frac{1}{b}$, alors tous les deux ont points fixés $P1$ et $P2$ sont instables[11].

Alors résumons les caractérisés des points fixes dans le tableaus suivante[9] :

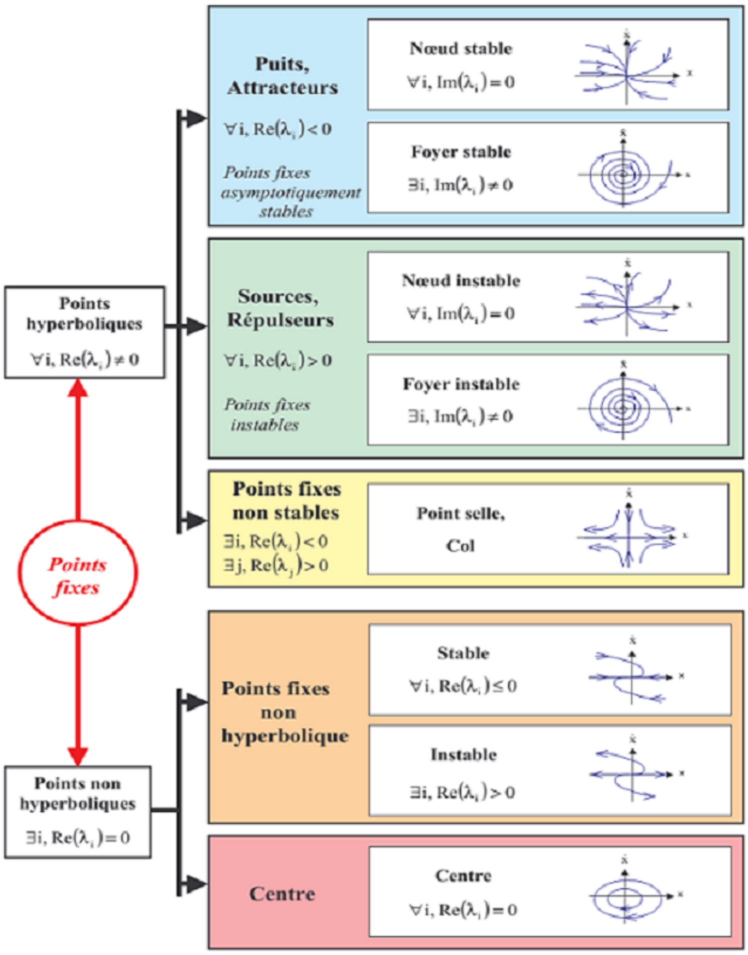

FIG. 1-1 – Les différents types d'état diquilibre

Chapitre 2

Attracteurs et Attracteurs chaotiques

Dans ce chapitre nous donnons des notions de base dont nous avons besoin, concernant : Attracteurs, Ensemble invariant, Bassin d'attraction, propriétés d'attracteur, Différents type d'attracteur, Attracteurs chaotique, Exposant de Lyapunov

Dans l'étude des systémes dynamiques, un attracteur (ou ensemble-limite) est un ensemble ou un espace vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations. Constituants de base de la théorie du chaos.

2.1 Chaos

La théorie du chaos traite des système dynamiques déterministes qui présentent un phénomène fondamantal d'instabilité appelé "sensibilité aux conditions initiales", ce qui les rend non prédictibles en pratique sur le "long" terme. Le Chaos est défini généralement comme un comportement semblant alétoire (ou imprévisible) d'un système dynamique défini par des équations déterministes.

Il n'ya aucune définition standard du chaos néanmoins.

Définition 2.1 *Soit un ensemble V. L'application $f : V \to V$ est dite chaotique sur V*

si :

1. *f possède une sensibilité aux conditions initiales.*
2. *f est topologiquement transitive.*
3. *Les points périodiques sont denses dans V.*

2.2 Attracteurs

Dans la littérature on trouve plusieurs définitions. En général, un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

2.2.1 Ensemble invariant

Définition 2.2 *Un ensemble $M \subset X$ est dit invariant par un champ de vecteurs si toute solution $X(t)$ du système différentiel associe au champ de vecteurs issue de M vérifier $X(t) \subset M$ pour tout t pour lequel cette solution est définie.*

2.2.2 Définitions d'attracteurs

Définition 2.3 *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toute les trajectoires points de l'espace des phases, c'est-à-dire une situation(ou un ensemble de situation) vers lesquelles évolue un système, quelle que soient ses conditions initiales.*

Mathématique, l'ensemble A est un attracteur si :

pour tout voisinage U de A, il existe un voisinage V de A tel que toute solution

$$\begin{cases} x(x_0, t) = \varphi_t(x_0) \text{ restra dans } U \text{ si } x_0 \in V \\ \bullet \cap \varphi_t(V) = A, t \geq 0 \end{cases}$$

il existe une orbite dense dans A.

Définition 2.4 *soit (x, f) un système dynamique discret. Une sous-partie A de x est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivants sont réalisées :*

1. A est fermée.

2. A est positivement invariante.

3. A est attractive, c'est –à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :

a) U est positivement invariant.

b) U est attiré par A.

$$\forall u \in U, \lim_{t \to \infty} d(f^t(u), A) = 0.$$

Tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions 3.a) et 3.b) est appelé voisinage attiré par A. Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré U, on peut pas affirmer qu'il est unique en effet A peutqs plusieurs voisinages attiré par lui-meme.

On appelle basin d'attraction B(A) de A le plus grand des tels voisinages ittirés, c'est-à-dire :

$$B(A) = \cup\{U \in p(x) : U \text{ est un voisinage attiré par } A\}.$$

2.2.3 Bassin d'attraction

Le bassin d'attraction d'un attracteur S_E est l'ensemble B_E qui comprend les conditions initiales X_0 telles que :

$$\lim_{t \to \infty} \phi_t(X_0) \to S_E$$

2.2.4 Propriétés d'attracteurs

1_Un sus ensemble borné A de l'espace est de volume nul invariant par flot- autrement dit tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t.

2_ Il existe un ensemble $B \supset A$tel que pour voisinage de A, la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A. Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans B tend vers l'attracteur cette "zone d'influence" est le (Bassin d'attraction).

3_Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs s'est pas un attracteur.

2.2.5 Différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs sont : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges au chaotiques.

A_Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de système non chaotiques, et peuvent être de trois sortes.

Le point fixe : c'est le cas le plus simple d'attracteur dans lequel le système évolue vers un état de repos (point) Notons points fixes ont en effet toujors au mons une "vois de sortie" à chaque valeur propre du Jacobien de partie réelle positive est associé un vecteur propre qui pointe dans une direction où la trajectoire de phase s'éloigne du point fixe.

Le cycle limite pseudopériodique : c'est preque un cas particulier du précédent.

Le système présente au moins deux périodes simultanées dont le rapport est irrationnel.

La trajectoire de phases ne se referme pas sur elle-meme, mais s'enroule sur une variété de dimension 2(par exemple un tore).

B_Attracteurs chaotique

Avons-nous maintenant fait le tour des différentes solutions possibles ? Ou bien pouvons-nous trouver des attracteurs qui ne seraient ni des points, ni des courbes closes, ni des surfaces bidimensionnelles bornées c'est-à-dire des tores dans un espace de phase tridimensionnel ?si tel est le cas, nous aurons un problème de dimension. En effet, puis-qu' un attracteur est un ensemble le invariant sa dimension dans un espace tridimensionnel doit être strictement inférieure à 3. Mais nous cherchons également unattracteur dont la dimension n'est ni 1(point fixe) ni 2(cycle).

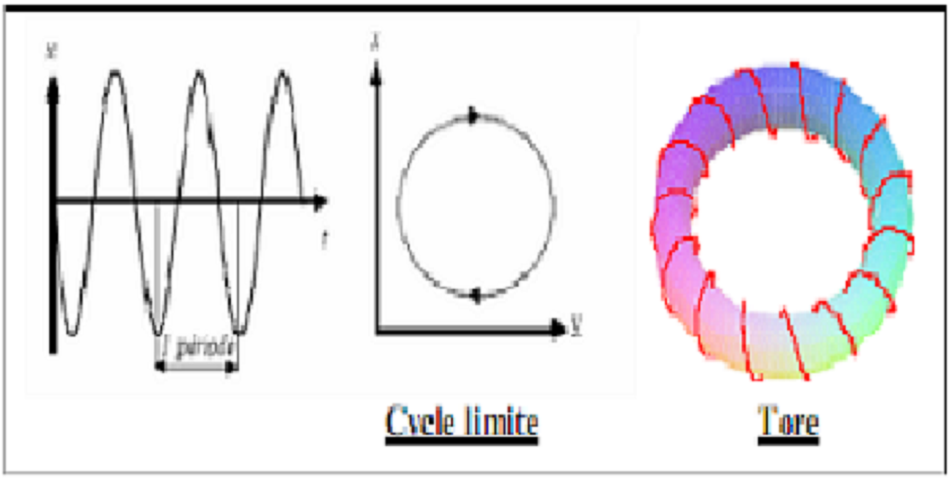

FIG. 2-1 – Les différents types des attracteurs rguliers

Attracteurs étrange(chaotique) Il n'existe pas à proprement parler de définition positive des orbites chaotique. Un mouvement chaotiques est non déterministe mais il ne s'agit pas d'un mouvement aléatoire. Il possède un spectre fréquentiel continu (caractère erratique) et présente en outre une extrême sensibilité aux conditions initiales. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé.

On peut définir un attracteur chaotique (ou attracteur étrange) comme étant un attracteur de volume nul qui n'est ni un point fixe, ni cycle limite, ni quasi-périodique.

Dans une section de poincaré, un attracteur chaotique décrit une infinité de points dont l'ensemble possède une structure topologique auto-similaire avec une dimension fractale non entière. De ce fait, on ne peut pas réduire un mouvement chaotique à un point fixe ou un cycle limite comme pour les autres comportements asymptotiques. Néanmoins, les solutions chaotique présentent des propriétés de périodicité dans l'espace non pas euclidien mais celui d'Hausdorff.

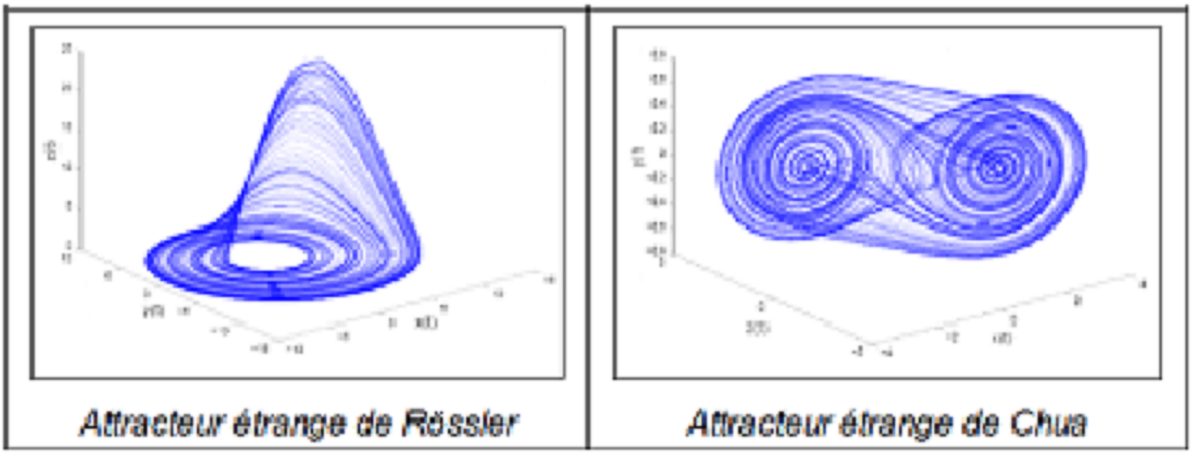

FIG. 2-2 – Quelques exemples d'attracteurs trangs

2.3 Attracteurs chaotique

Définition 2.5 *L'attracteur chaotique (ou étrange) est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques .*

Définition 2.6 *Un sous-ensemble borné A de l'espaces est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage R de A, c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans R vérifiant les propriétés suivantes :*

1- Attraction R est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans R, est entièrement contenue dans R. De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.

2- Il est contenu dans un espace fini, son volume est nul sa dimension est fractale(non entière).

3- Presque toute trajectoire sur l'attracteur à la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajctoire est presque sûrement apériodique.

4- Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).

Exemple 2.1 *Attracteur de Hénon*

L'attracteur de M.Hénon(1976), associé à une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forme* $(x, y) \to (X = 1 - ax^2 + y, Y = bx)$.

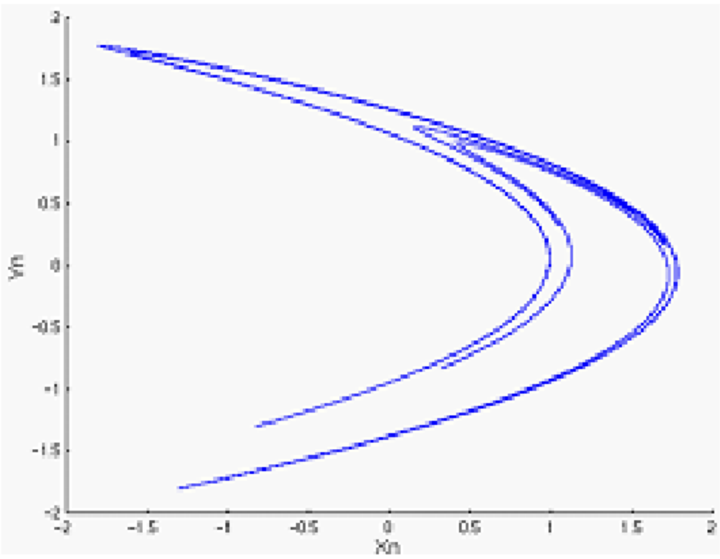

FIG. *2-3 – Attracteur de Hénon*

2.4 Exposants de Lyapunov

Certains systèmes dynamiques sont très sensibles aux variations de leurs conditions initiales, ces variations peuvent rapidement prendre d'énormes proportions.

Le mathématicien russe Alexander Markus-Lyapunov (1857-1918) s'est penché sur ce phénomène et a développé une quantité permettant de mesurer la vitesse ces petites variations peuvent s'amplifier, cette quantité appelée "exposant de Lyapunov" mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique, autrement dit, le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange.

L'exposant de Lyapunov est une mesure quantitative possible du chaos, et Lyapunov a démontré que le nombre d'exposants de Lyapunov est égale à la dimension de l'espace des phases.

Par ailleurs, parmi les exposants retenus pour un système donné on considère généralement l'exposant le plus élevé.

Considérons la formule suivante :

$$\left|\frac{d_n}{d_0}\right| = \left|\frac{d_n}{d_{n-1}}\right|\left|\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}\right|...\left|\frac{d_1}{d_0}\right| \text{ d'où : } \frac{1}{n}\ln\left|\frac{d_n}{d_0}\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{d_i}{d_{i-1}}$$

Où $\frac{d_i}{d_{i-1}}$ décrit en fait de quelle façon une petite erreur d_i à la $i^{éme}$ itération, est augmentée ou diminuée dans l'itération suivante. Lyapunov a montré en suite que cette erreur tendait vers une limite "Exposant de Lyapunov".

2.4.1 Exposants de lyapunov d'un système dynamique en temps discret

Considérons un système dynamique dont la loi d'évolution est donnée, à temps discret, par l'application.

$$x(t+1) = f(x(t))$$

Le vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ détermine de façon unique un état du système. Nous supposons que f est une fonction différentiable, que l'évolution est bien définie pour des intervalles de temps arbitrairement longs, et que le mouvement a lieu dans une région limitée de l'espac e des phases. Nous voulons étudier la séparation entre deux trajectoires, $x(t)$ et $x^{'}(t)$, partant de deux conditions initiales proches, respectivement $x(0)$ et soit les petites variations $\delta x(0)$ de la conditions initiale $x(0)$ telle que :

$$x^{'}(0) = x(0) + \delta x(0).$$

2.5 Bifurcations

Définition 2.7 *La théorie de la bifurcation étude le changement que subit une application sous la variation d'un paramètre ou plus donc la bifurcation signifie un changement dans le comportement qualitatife d'un application, suit à une variation d'un paramètre de l'application. Par exemple déstabilisation d'un point fixe stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur. La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation. Noton que la transition vers le chaos s'opère selon des bifurcation, il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constante dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est progressive, mais marquée des changements qu'on a déjà appelé bifurcation.*

2.6 Différents types des bifurcations

Dans cette section, on considère trois types de bifurcations locales : La bifurcation de doublement de période, la bifurcation point selle (ou noeud-col) et la bifurcation de Neimark. Ces bifurcations sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation de la application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite. Tous les types de bifurcations étudiées correspondent toujours à $|\lambda_i| = 1$ (où λ_i représente les multiplicateurs).

2.6.1 Bifurcation ftip ou doublement de période ($\lambda = -1$)

Cette bifurcation a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égales à -1. Un cycle d'ordre k qui subie cette bifurcation va changer de nature et crée un cycle d'ordre $2k$ de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

2.6.2 Bifurcation fold ou noeud-col ($\lambda = +1$)

La bifurcation $\lambda = +1$ correspond à la situation où l'un des multiplicateurs est égale à $+1$. Ce type de bifurcation donne naissance à deux cycle d'ordre k en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable.

2.6.3 Bifurcation de Neimark ($\rho = 1$)

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobienne possède deux multiplicateurs complexes conjuguées $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ et de plus $|\lambda_{i=1,2}| = 1$.

2.6.4 Diagramme de bifurcation

Le diqgramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnnaire du système en fonction du paramètre du contrôle.Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée.

Chapitre 3

Point periodique d'un système dynamique discret

La méthode de Newton est un procédé itératif classique d'approximation des zéros (ou racines) d'une fonction différentiable. Cette technique a été appliquée initialement sur ladroite réelle de la manière suivante : Étant donnée une fonction différentiable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous voulons trouver un point $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $f(\xi) = 0$. Si x_0 est une approximation d'un zéro de $f(x_0)$, la méthode de Newton raffine cette approximation en prenant pour nouvelle valeur la solution x_1 de l'équation linéarisée au voisinage de x_0 :

$$f(x_0) + (x - x_0)f(x_0)\grave{} = 0$$

Lorsque $f(x_0)$ est non-nulle, on obtient

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0)\grave{}}$$

D'où le procédé itératif suivant

$$x_{K+1} = Nf(x_K) = x_K - \frac{f(x_K)}{f(x_K)\grave{}}.$$

L'idée de résoudre une équation en améliorant une estimation de la solution, par l'ajout d'un terme correcteur est fort ancienne.

3.1 Application de Hénon

L'application de Hénon $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ à deux réel paramètres a et b, elle est donnée par :

$$\mathbf{H}_{a,b}(x, y, z) = (a - x^2 + by, x + z, -x)$$

3.1.1 Propriétés

$\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}^{-1}$ sont quadratiques.

Si $b = 0$, l'application $\mathbf{H}$ donne la naissance de route de doublement de période vers le chaos [3],[4].

Si $b \neq 0, \mathbf{H}_{a,b}(x, y, z) = (a - x^2 + by, y + z, -x)$ est diffeomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même, l'inverse de l'application est donnée par :

$$\mathbf{H}_{a,b}^{-1}(x, y, z) = (-z, b^{-1}x - b^{-1}a + b^{-1}z^2, y + z)$$

$\mathbf{H}$ est conservative si $|b| < 1$, et dissipatife si $|b| > 1$.

Notons aussi que dans le cas $|b| < 1$, $\mathbf{H}_{a,b^{-1}} = T^{-1}\mathbf{H}^{-1}T$, où T est donnée par $T(x, y, z) = (y, x + z, -x)$ [2].

L'application $\mathbf{H}$ admet deux points fixes sont :

$$(x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad y = 0, \quad z = -x).$$

Alors les points fixes de l'application de Hénon $\mathbf{H}$ sont :

$$\begin{aligned}(x &= \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, y=0, z=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}),\\ (x &= \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, y=0, z=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2})\end{aligned}$$

Ainsi à ce point nous devons attirons notre attention que la première itération est donnée par :

$$\mathbf{H}^2(x,y,z) = \mathbf{H}(\mathbf{H}(x,y,z))$$

Alors

$$\mathbf{H}^2(x,y,z) = (a-(a-x^2+by)^2+b(x+y), a-x^2+by-x, -a+x^2-by).$$

Notons il est difficile de trouver les points fixes de l'application $\mathbf{H}^2$.

3.2 Méthode de Newton

Il y des algorithmes numériques pour obtenir un point fixe périodique d'un système dynamique nous constatons que la méthode de Newton est l'une des milleurs méthodes.

La formule recurence de Newton est :

$$x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1} f(x_n)$$

Ou $n = 0, 1, 2, ...$et $(Df)(x)$ est le Jacobian de l'application f au vecteur x. Nous voyons que cette application f est égal à $(\mathbf{H}^K - I)$ dans notre cas, où Kest la période appropriée.

Le point initial $(x_{0,}y_{0,}z_0)$,

Donc

$$\mathbf{H}(x_0, y_0, z_0) = (a - x_0^2 + by_0, x_0 + z_0, -x_0) = (x_{1,}y_1, z_1)$$

Alors

$$\mathbf{H}^2(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{H}(\mathbf{H}(x_0, y_0, z_0)) = \mathbf{H}(x_{1,}y_1, z_1)$$

La formule de récurence suivante de l'application de Henon peut être établie.

$x_n = a - x_{n-1}^2 + by_{n-1}$, $y_n = y_{n-1} + z_{n-1}$ et $z_n = -x_{n-1}$ où $n = 1, 2, 3, ...$

Depuis que le Jacobian de $\mathbf{H}^K$ (K l'itération de temps de l'application de Hénon) est le produit du Jacobian de chaque itération de l'application, nous procédons comme suit décrire notre récurence pour la matrice Jacobianne.

Le Jacobian J_1 de l'application

$\mathbf{H}(x_0, y_0, z_0) = (a - x_0^2 + by_0, y_0 + z_0, -x_0) = (x_{1,}y_1, z_1)$ est

$J_1 = \begin{pmatrix} -2x & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \\ G_1 & H_1 & I_1 \end{pmatrix}$ où $A_1 = -2x, B_1 = b, C_1 = 0, D_1 = 1, E_1 = 0, F_1 = 1, G_1 = -1, H_1 = 0, I_1 = 0.$

Ensuite le Jacobian J_2 pour l'application

$$\mathbf{H}^2(x_{0,}y_{0,}z_0) = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\mathbf{H}(x_1, y_{1,}z_1) = (a - x_1^2 + by_1, x_1 + z_1, -x_1) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(x_0, y_0, z_0) = (a - x_0^2 + by_0, x_0 + z_0, -x_0).$$

Alors nous avons

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \begin{pmatrix} -2x & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \\ G_1 & H_1 & I_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2xA_1 + bD_1 & -2xB_1 + bE_1 & -2xC_1 + bF_1 \\ A_1 + G_1 & B_1 + H_1 & C_1 + I_1 \\ -A_1 & -B_1 & -C_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ D_2 & E_2 & F_2 \\ G_2 & H_2 & I_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Où

$$
\begin{aligned}
&A_2 = -2xA_1 + bD_1, \;\; D_2 = A_1 + G_1, \; G_2 = -A_1, \\
&B_2 = -2xB_1 + bE_1, \quad E_2 = B_1 + H_1, \; H_2 = -B_1, \\
&C_2 = -2xC_1 + bF_1, \;\; F_2 = C_1 + I_1, \quad I_2 = -C_1.
\end{aligned}
$$

Nous appliquons ce processus de même manière, nous obtenons le Jacobian de $\mathbf{H}^m$ comme

$$
(\mathrm{K}) \begin{cases} A_m = -2xA_{m-1} + bD_{m-1}, \;\; D_m = A_{m-1} + G_{m-1}, G_m = -A_{m-1}, \\ B_m = -2xB_{m-1} + bE_{m-1}, \quad E_m = B_{m-1} + H_{m-1}, H_m = -B_{m-1}, \\ C_m = -2xC_{m-1}bF_{m-1}, \;\; F_m = C_{m-1} + I_{m-1}, \quad I_m = -C_{m-1}. \end{cases}
$$

Proof. Prouvons l'exprision (K) par recurence

Suppossons que l'exprission (K) est vrai pour "m" c'est-à-dire J_m est vrie pour toute $m \in \mathbb{N}$, et nous montrons que l'exprission (K) est vrai pour $m+1$ c'est-à-dire J_{m+1} est satisfaite.

On a :

$$
J_1 = \begin{pmatrix} -2x & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \\ G_1 & H_1 & I_1 \end{pmatrix}
$$

où $A_1 = -2x, B_1 = b, C_1 = 0, D_1 = 1, E_1 = 0, F_1 = 1, G_1 = -1, H_1 = 0, I_1 = 0$.

Supposons que J_m prend la forme est :

$$J_m = \begin{pmatrix} A_m & B_m & C_m \\ D_m & E_m & F_m \\ G_m & H_m & I_m \end{pmatrix}$$

Supposons que l'exprision (K) est vrai pour tout m, et en prouvons sa validité pour $m+1$

$$\begin{pmatrix} -2x & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_m & B_m & C_m \\ D_m & E_m & F_m \\ G_m & H_m & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xA_m + bD_m & -2xB_m + bE_m & -2xC_m + bF_m \\ A_m + G_m & B_m + H_m & C_m + I_m \\ -A_m & -B_m & -C_m \end{pmatrix}$$

Alors, les formules de recurence sont

$A_{m+1} = -2xA_m + bD_m, \;\; D_{m+1} = A_m + G_m, \quad G_{m+1} = -A_m,$

$B_{m+1} = -2xB_m + bE_m, \quad E_{m+1} = B_m + H_m, \quad H_{m+1} = -B_m, m = 1, 2, 3.......$

$C_{m+1} = -2xC_m bF_m, \qquad F_{m+1} = C_m + I_m, \qquad I_{m+1} = -C_m.$

Donc (K) est vrai pour $m+1$. ■

Le point fixé de L'application $\mathbf{H}$ est le zéro de l'application

$\mathbf{H}'(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y, z) - (x, y, z)$, le Jacobian de $\mathbf{H}^{'(K)}$ est donné par :

$$J_K - I = \begin{pmatrix} A_K - 1 & B_K & C_K \\ D_K & E_K - 1 & F_K \\ G_K & H_K & I_K - 1 \end{pmatrix}$$

Sont inverse $(J_K - 1)^{-1}$

$$\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (E_K - 1)(I_K - 1) - F_K H_K & F_K G_K - D_K(I_K - 1) & D_K H_K - G_K(E_K - 1) \\ C_K H_K - B_K(I_K - 1) & (A_K - 1)(I_K - 1) - C_K G_K & B_K G_K - (A_K - 1)H_K \\ B_K F_K - C_K(E_K - 1) & C_K D_K - (A_K - 1)F_K & (A_K - 1)(E_K - 1) - D_K B_K \end{pmatrix}$$

Où

$\Delta = \det(J - 1) = (A_K - 1)[(E_K - 1)(I_K - 1) - F_K H_K] - D_K[B_K(I_K - 1) - C_K H_K] + G_K[(A_K - 1)(E_K - 1) - B_K D_K].$

Par conséquent est le déterminant de Jacobian.

Donc, la méthode de Newton donne la formule de recurence suivante pour donné les points périodiques de **H**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[(E_K-1)(I_K-1)-F_KH_K](\bar{x}_n-x_n)+[F_KG_K-D_K(I_K-1)](\bar{y}_n-y_n)+[D_KH_K-G_K(E_K-1)](\bar{z}_n-z_n)}{\Delta}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{[C_KH_K-B_K(I_K-1)](\bar{x}_n-x_n)+[(A_K-1)(I_K-1)-C_KG_K](\bar{y}_n-y_n)+[B_KG_K-(A_K-1)H_K](\bar{z}_n-z_n)}{\Delta}$$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{[B_KF_K-C_K(E_K-1)](\bar{x}_n-x_n)+[C_KD_K-(A_K-1)F_K](\bar{y}_n-y_n)+[(A_n-1)(E_K-1)-D_KB_K](\bar{z}_n-z_n)}{\Delta}$$

et

$$H(x,y,z) = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$$

Exemple

L'application $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ de deux paramtres reéls α et β est donnee par :

$$\mathbf{F}_{a,b}(x,y) = (\alpha y - 1, x^2 - \beta x)$$

F est dissipative si $|\alpha| < 1$, et conservatifs si $|\alpha| > 1$.

Et l'inverse de l'application **F** est donnée par :

$$\mathbf{F}^{-1}(x,y) = (\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2+4y}}{2}, \alpha^{-1}x + \alpha^{-1})$$

Notez aussi que le cas $|\alpha| \neq 0$ depuis $\mathbf{F}_{\alpha^{-1},\beta} = R^{-1}\mathbf{F}^{-1}R$ où choisire R est donnée par $R(x,y,z) = (-y,-x)$.

L'application **F** Possède deux points fixes, sont les solutions de l'équation $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$

nous trouvons :

$$(x = \frac{(\alpha\beta+1) \pm \sqrt{(\alpha\beta+1)^2 - 4\alpha}}{2\alpha}, y = \frac{x+1}{\alpha})$$

Donc

$$(x = \frac{(\alpha\beta+1) \pm \sqrt{(\alpha\beta+1)^2 - 4\alpha}}{2\alpha}, y = \frac{(\alpha\beta+1) \pm \sqrt{(\alpha\beta+1)^2 - 4\alpha} + 1}{2\alpha^2}).$$

Alors les points fixes de l'application **F** sont :

$$(x = \frac{(\alpha\beta+1) + \sqrt{(\alpha\beta+1)^2 - 4\alpha}}{2\alpha}, y = \frac{(\alpha\beta+1) + \sqrt{(\alpha\beta+1)^2 - 4\alpha} + 1}{2\alpha^2}) \quad et$$
$$(x = \frac{(\alpha\beta+1) - \sqrt{(\alpha\beta+1)^2 - 4\alpha}}{2\alpha}, y = \frac{(\alpha\beta+1) - \sqrt{(\alpha\beta+1)^2 - 4\alpha} + 1}{2\alpha^2})$$

et

$$\mathbf{F}^2(x,y) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(x,y))$$

Alors

$$\mathbf{F}^2(x,y) = (\alpha(x^2 - \beta x) - 1, (\alpha y - 1)^2 - \beta(\alpha y - 1))$$

Appliquons la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1} f(x_n)$$

$Df(x_n)$ est la matrice de Jacobian

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 2x - \beta & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$J_2 = \begin{pmatrix} \alpha(2x - \beta) & 0 \\ 0 & 2\alpha(\alpha y - 1) - \alpha\beta \end{pmatrix}$$

On a :

$$J_2 - I = \begin{pmatrix} \alpha(2x-\beta)-1 & 0 \\ 0 & 2\alpha(\alpha y-1)-\alpha\beta-1 \end{pmatrix}$$

Inverse $(J_2 - I)$ sont

$$(J_2 - I)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2\alpha(\alpha y-1)-\alpha\beta-1 & 0 \\ 0 & \alpha(2x-\beta)-1 \end{vmatrix}$$

Où $\Delta = |J_2 - I| = (\alpha(2x-\beta)-1)(2\alpha(\alpha y-1)-\alpha\beta-1)$, Le déterminant Jacobian.

Donc, les points fixes de $\mathbf{F}^2$ est-il :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{(2\alpha(\alpha y-1)-\alpha\beta-1)(\bar{x}_n - x_n)}{\Delta} \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{(\alpha(2x-\beta)-1)(\bar{y}_n - y_n)}{\Delta} \end{aligned}$$

Alors, la formule de recurence de la methode de Newton pour les points périodique de $\mathbf{F}^K$ donnée par :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{(D_K-1)(\bar{x}_n - x_n) - B_K(\bar{y}_n - y_n)}{\Delta} \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{(-C_K)(\bar{x}_n - x_n) + (A_K-1)(\bar{y}_n - y_n)}{\Delta} \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$\mathbf{F}_K = \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{F}_K - I = \begin{pmatrix} A_K - 1 & B_K \\ C_K & D_K - 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\mathbf{F}_K - I)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} D_K - 1 & -B_K \\ -C_K & A_K - 1 \end{pmatrix}$.

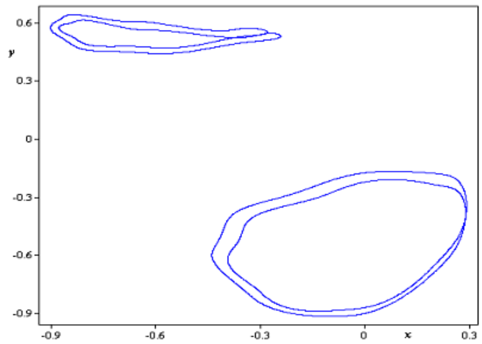

FIG. 3-1 – Attracteurs de l'application (**H**)

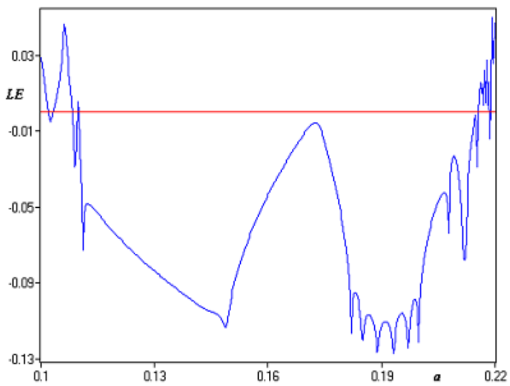

FIG. 3-2 – Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application de Hénon pour $0.1 \leq a \leq 0.22$ et $b = -0.685$

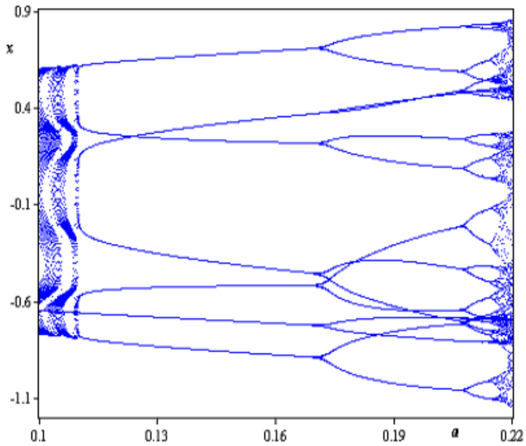

FIG. 3-3 – Diagramme bifurcation de l'application de Hénon (**H**) pour $0.1 \leq a \leq 0.22$ et $b = -0.685$

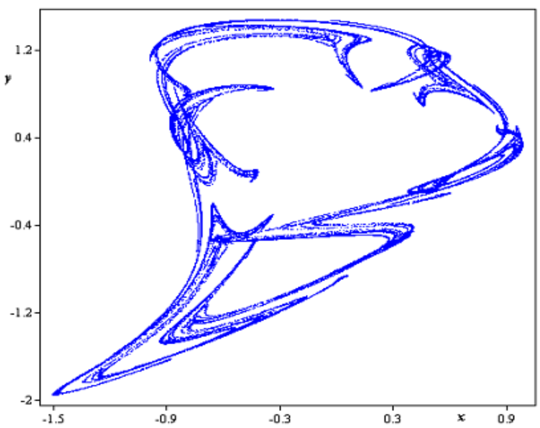

FIG. 3-4 – Attracteur chaotique de l'application de Hénon pour $a = 0.289$ et $b = -0.685$

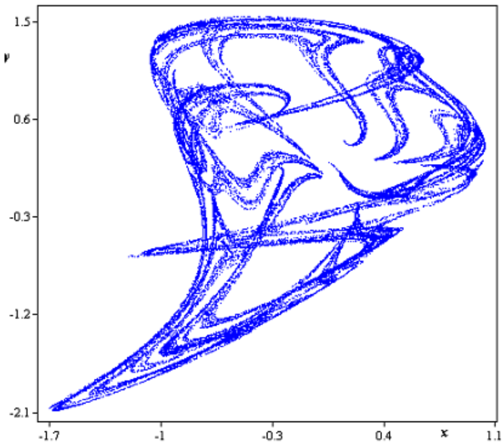

FIG. 3-5 – Attracteur chaotique de l'application de Hénon pour $a = 0.266$ et $b = -0.68$

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons appliqué la méthode de Newton pour obtenir les points périodiques d'un système dynamique discret donné, on termine par la représentation des quelques attracteurs chaotiques.

Bibliographie

[1] Gabriela A. Casas et Paulo C. Rech.Numerical Study of a Three-Dimensional Hénon Map.Departamento de Física, Universidade do Estado de Santa Catarina, 89223-100 Joinville, Brazil.Received 19 September 2010.

[2] Hemanta Kr. Sarmah and Ranu Paul .Period doubling route to chaos in a two parameter invertible map with constant Jacobian ,Guwahati – 781014, Assam, India.

[3] Peitgen H. O., Jurgen H. and Saupe D., Chaos and Fractals, Springer Verlag, New York 1992.

[4] Guckenheimer J. and Holmes P., Non-Linear Oscillations, Dynamical Systems And Bifurcations Of Vector Fields (Applied Mathematical Sciences, 42), Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986.

[5] Cyril Touzé, ENSTA-UME, Unité de recherche en Mécanique, Chemin de la Hunière 91761 Palaiseau cedex.

[6] Sami Karkar.M ethodes num eriques pour les syst emes dynamiques non lin eaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants. Acoustique [physics.class-ph]. Aix-Marseille Universit e, 2012. Francais..

[7] Tidjani.M.Synchronisation des systémes dynamiques dérivées fractionnaires.

[8] ABDUL RAHUMAN Ahmed.Analyse des Systèmes Non-linéaires à Dynamiques Complexes.

[9] Toni.AMADO.MODELISATION D'UN SYSTEME DYNAMIQUE A EUR DU GROUPE MOTO-PROPULSEUR.

[10] THESE.Z. EL H A D J. etude de quelques types des systèmes chaotiques : généralisation d'un modele issu de modele de chen.

[11] Zeraoulia Elhadj.On the rigorous determination of chaotic behavior in a piecewise linear planar map 2006.