UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et sciences de la matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : Nadjari Mourad

Théme

Existence de solutions d'une inéquation variationnelle hyperbolique Méthode de compacité

Soutenu publiquement le : 05/06/2016

Devant le jury composé de :

Mr.Chacha Djamal Ahmed	Pr. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.Merabet Ismail	M.C.A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.Ghazel Abderrazek	M.C.B. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Bensayah Abdallah	M.C.B. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Table des matières

Notations et Préliminaires **iii**

Introduction **1**

1 Préliminaires mathématiques **3**

1.1 Rappels 3

1.2 Les espaces fonctionnelles 6

1.2.1 L'espace $L^p(0,T;V)$ 6

1.2.2 Les Espaces L^p 6

1.2.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ 7

1.3 Théorème de Stampacchia 9

1.4 Théorème de représentation de Riesz 9

1.5 Théorème de la Projection 10

2 Inéquation variationnelles elliptique et parabolique **14**

2.1 Inéquation variationnelles elliptique 14

2.1.1 Inéquation variationnelles elliptique de 1^{re}espèce 14

2.1.2 Inéquation variationnelles elliptique de 2^{e}espèce 17

2.2 Inéquation variationnelles parabolique 21

2.2.1 Inéquation variationnelles parabolique de 1^{re}espèce 21

2.2.2 Inéquation variationnelle parabolique de 2^{e}espèce 21

3 Existence de solution d'un inéquation variationnelle hyperbolique **23**

3.1 Problème classique (P.C) 23

3.2 Problème variationnelle (P.V) 24

3.3 Problème approché 25
3.4 Existence d'une solution 26
3.5 Estimation à priori indépendante de k> 0 34
3.6 La convergence des solutions approchées. 38

Conclusion **45**

Bibliographie **49**

Notations et Préliminaires

- Ω : un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

- V : espace de Hilbert avec le produit scalaire (.,.) et la norme associée $\|.\|$.

- K : est un ensemble non vide convexe fermé de V.

- $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, continue et coercive sur $V \times V$
  continue :$\exists\, c > 0\ \forall u, v \in V\ |a(u,v)| \leq c\|u\|_V \|v\|_V$.
  coercive :$\exists\, \alpha > 0\, \forall v \in V\ |a(v,v)| \geq \alpha \|v\|_V^2$.

- $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

- $\partial_{tt} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$.

- $\nabla g = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial g}{\partial x_n}\right)$.

- $V^{'}$: l'espace dual de V.

- $\longrightarrow$ convergence forte.

- $\rightharpoonup$ convergence faible.

Introduction

La première formulation du problème de contact (sans frottement) a été établie en 1933 par Signorini [3]. En 1963, Fichera [4] a établi une analyse mathématique du problème en utilisant un problème de minimisation équivalent. Puisque les problèmes de Signorini sont généralement modélisées par des inégalités variationnelles, en 1967-1968, Lions-Stampacchia [6], Lions [10], ont établi de nombreux résultats d'existence pour le problème sans frottement. En 1972, Duvaut et Lions [17] ont prouvé certains résultats d'existence pour une classe de problèmes là où ils ont souligné un problème ouvert de l'existence et unicité dans le cas de la loi de frottement de Coulomb (locale). En 1980, Nécas, et Jarusek Haslinger [24] ont établi un théorème d'existence d'une solution sous la condition que le coefficient de frottement est assez petit. En 1984, Cocou [21] a prouvé l'existence d'une solution du problème de Signorini avec frottement de Coulomb. Et montre également que pour un coefficient de frottement assez petit, le problème a une solution unique. En 1984, Lebeau et Shatzman [6] a résolu le problème dynamique (sans frottement) par des techniques microlocales sur un domaine demi-espace. En 1989, Kim [6] a suivi une technique de multiplicateur et compacité compensé du problème dynamique (sans frottement) sur un domaine plus général. Après cela, des résultats plus généraux ont été établis par Kato [25], Eck et Jarusek [22]. Hassani, Hild et Ionescu [26] ont trouvé une condition suffisante pour un résultat de non unicité.
Ce mémoire est divisé en 3 chapitres.
On début notre travail par un chapitre reprend de façon générale, les définitions, et les résultats fondamentaux qui seront essentiels pour comprendre les chapitres suivantes.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude l'existence et l'unicité d'inéquation variationnelle elliptique et inéquation variationnelle parabolique .

Au dernier chapitre, on détaille le théorème d'existence d'une classe d'inéquations variationnelles elliptique prouvé par Kim [6].

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre, nous abordons certains concepts mathématiques que nous devrions connaître pour un usage dans notre thème.

1.1 Rappels

Définition 1 *Une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :*

$\forall (x, y) \in V^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition 2 *Une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe si :*

$\forall (x, y) \in V^2$, $x \neq y, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition 3 *Soit J une fonctionnelle convexe de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi continue inférieur faiblement (s.c.i) pour la topologie forte. Si v_n est une suite de V faiblement convergente vers v alors $J(v) \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \inf J(v_n)$*

Définition 4 *Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue supérieurement sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes*

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}; \{u \in V, J(u) \geq \alpha\}$ *fermé.*
- *Si u_n est une suite de V faiblement convergente vers $\bar{u}$ alors :* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup J(u) \leq J(\bar{u})$.

Définition 5 *Un ensemble C est dit convexe si :*

$$\forall x, y \in C \qquad \forall \lambda \in [0,1] \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

Définition 6 *Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup +\infty$ est semi-continue inférieurement sur V si :*

- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \{u \in V, J(u) \leq \alpha\}$ *est fermé.*

Définition 7 *Soit J une fonctionnelle de V dans $\bar{\mathbb{R}}$, convexe et semi-continue inférieurement. Soit K un sous-ensemble convexe, non vide et fermé de V. J est propre c'est-a-dire qu'il existe un élément v_0 de K tel que*
$J(v_0) < +\infty$.

Définition 8 *Soit l'espace V avec produit scalaire$(\cdot,\cdot)_V$ et la norme $\|\cdot\|_V$ .Soit $A : V \to V$*

(1) A est un opérateur monotone si :

$$(Au - Av, u - v)_V \geq 0, \forall u, v \in V \tag{1.1}$$

(2) A est un opérateur strictement monotone si

$$(Au - Av, u - v)_V > 0, \forall u, v \in V, u \neq v,$$

(3) A est fortement monotone s'il existe un constante $m > 0$ telle que :

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m \|u - v\|_V^2 . \forall u, v \in V$$

(4) A est un opérateur contractant si :

$$\|Au - Av\|_V \leq \|u - v\|_V . \forall u, v \in V$$

(5) A est Lipschitzienne continue s'il existe $M > 0$ telle que

$$\|Au - Av\|_V \leq M \|u - v\|_V , \forall u, v \in V$$

(6) A opérateur est hemicontinue si la fonction de valeur réelle
$\Phi \to (A(u + \Phi v), w)_V$ *est continue dans* $\mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in V$.

Proposition 9 *Soit $(V, (., .)_V)$ est un espace de produit scalaire et soit $\phi : V \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable aux sens Gâteaux, les condition suivantes sont équivalentes :*

(a) ϕ *est une fonction convexe*; (1.2)

(b) ϕ *satisfait l'ingalit* : $\phi(v) - \phi(u) \geq (\nabla\phi(u), v - u)_V, \forall u, v \in V$; (1.3)

(c) *le gradient de* ϕ *est un oprateur monotone i.e* : $(\nabla\phi(u) - \nabla\phi(v), u - v)_V \geq 0 \forall u, v \in V$ (1.4)

Preuve. voire[[1]] ■

1.2 Les espaces fonctionnelles

1.2.1 L'espace $L^p(0,T;V)$

Soit un intervalle $[0,T] \subset \mathbb{R}$ (en général $T < +\infty$)et un espace de Banach V avec un norme $\|.\|_V$, on désigne par $L^P(0,T,V)$ l'espaces des classes de fonctions $t \longrightarrow f(t)$, qui sont mesurables à partir de $[0,T] \longrightarrow V$ pour la mesure dt et telles que :

$$\|f\|_{L^p(0,T,V)} = (\int_0^T \|f(x)\|_V^p dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty \qquad (p \neq +\infty)$$

$$\|f\|_{L^\infty(0,T,V)} = \sup_{t\in[0,T]} ess\|f(t)\|_V < +\infty$$

Les espaces $L^p(0,T,V)$ sont des espaces de Banach pour la première norme si $p \neq +\infty$, et pour la deuxième norme si $p = +\infty$.
Si V est un espace de Hilbert équipée avec un produit scalaire $(.,.)_V$, alors l'espace $L^2(0,T,V)$ est aussi un espace de Hilbert pour la produit scalaire :

$$(f,g)_{L^2(0,T,V)} = \int_0^T (f,g)_V dx$$

1.2.2 Les Espaces L^p

soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, pour p donné avec $1 \leq p < +\infty$ On désigne pour $L^p(\Omega)$ l'espaces des fonctions v mesurables sur Ω et telle que :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{1.5}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme(1.5)est un espace de Banach Pour $p = 2, L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondante a la norme(1.5)étant donné par

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx$$

On va identifier l'espace $L^p(\Omega)$ a son dual(ce qui n'est pas vrais dans d'autres cas, pour $p \neq 2$).

Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$, est l'espace des(classes de) fonction v mesurables et essentiellement bornées sur Ω i.e.il existe une constant C telle que $|v(x)| \leq C$ p.p sur Ω. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup ess_{x\in\Omega}|v(x)| = \inf\{C; |v(x)| \leq C \ \ p.p \ \ x \in \Omega\}$$

-La notion de convergence faible dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ devient comme suit :

- Si $1 \leq p < +\infty$, alors $v_n \rightharpoonup v$, faible dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ si :

$$\int_\Omega v_n(x)u(x)\,dx \longrightarrow \int_\Omega v(x)u(x)\,dx \ \forall u \ \in L^q(\Omega)((L^p)^{'} = L^q \ q \quad \text{est conjugué de } p)$$

- Si $p = \infty$, alors $v_n \rightharpoonup v$ faible étoile dans $L^\infty(\Omega)$ si :

$$\int_\Omega v_n(x)u(x)dx\,dx \longrightarrow \int_\Omega v(x)u(x)dx \ \ \forall u \ \in L^1(\Omega)$$

1.2.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on a $D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow D^{'}(\Omega)$, soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, C'est la définition de l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

$$W^{m,p} = \{v, D^\alpha v \in L^p(\Omega), \ \ pour \ \ |\alpha| \leq m\}$$

ou $D^\alpha v$ est la dérivée au sens des distributions pour tout $v \in L^p(\Omega)$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

- si $p = \infty$

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

De façon évidente, on a $W^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. La semi-norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

- si p $\neq \infty$

$$|v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Dans le cas $p = 2$, on utilise la notation

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

$$H^m(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega) : \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, w \in L^2(\Omega), 0 \leq \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq m \right\},$$

$$H_0^m(\Omega) = \text{ complite } C_0^\infty(\Omega) \text{ dans } H^m(\Omega),$$

$$H^{-m}(\Omega) = \text{ dual } H_0^m(\Omega),$$

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \left\{ w \in H^1(\Omega) : w = 0 \text{ dans } \Gamma_1 \right\}$$

Définition 10 *Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach, on dit que B_1 s'injecte d'une façon continue dans B_2 si $\|v\|_{B_2} \leq \|v\|_{B_1}$.*
On dit que B_1 s'injecte d'une façon compacte dans B_2, si l'image de tout borné de B_1 est relativement compact dans B_2.

Théoréme 11 *(Rellich-Kondrachov)).On suppose Ω borné de classe C^1. On a*

(1)- si $p < N$, alors $W^{l,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

(2)- si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$,

(3)- si $p > N$, alors $W^{l,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, avec injections compactes .

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$avec injection compacte pour tout p.

Preuve. voir[1] ■

1.3 Théorème de Stampacchia

Théoréme 12 *(Stampacchia) Soit V un espace de Hilbert et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V. Soit $K \neq 0$ un sous ensemble fermé et convexe de V. et $L(.)$ de forme linéaire ,il existe un unique $u \in K$ telle-que*
$a(u, v-u) \geq L(v-u), \forall v \in K$
Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de K qui minimise la fonctionnelle $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$ pour tout v de K, en particulier :

$$\exists! u \in K \quad J(v) = \min_{v \in K} J(u)$$

Preuve. voir. [1] ■

1.4 Théorème de représentation de Riesz

Théoréme 13 *Soit V un espace de Hilbert, pour tout $F \in V'$ (dual de V), il existe un unique $v \in V$ telle que :*

$$F(u) = (u, v), \quad \forall u \in V$$

et en plus :

$$\|F\|_{V'} = \|v\|_V$$

Théoréme 14 *Soit V un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$. Soit K un partie convexe fermé non vide de V.*

Si $a(u,v)$ une forme bilinéaire qui soit

Continue sur $V \times V$: $\exists c > 0 \, \forall u, v \in V, \ \mid a(u,v) \mid \leq c\|u\|\|v\|$

Coercive sur V : $\exists \alpha > 0 \ \forall u \in V \ \ a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$

Si $L(.)$ une forme linéaire continue sur V

Sous ces conditions, il existe un unique u dans K tel que

$$\forall v \in K \ \ a(u, v-u) \geq L(v-u)$$

Preuve. voir [1] ■

1.5 Théorème de la Projection

Théoréme 15 *(Projection sur un convexe fermé). Soit $K \subset V$ est un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in V$, il existe $u \in K$ unique tel que :*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$(u - f, u - v) \leq 0, \forall v \in K$$

On note $u = P_K f =$ Projection de f sur K .

Preuve. voir [1] ■

Pour s est réel positif ou nul, $H^s(\Omega)$ est définie par interpolation et $H^{-s}(\Omega)$ est le double de $H_0^s(\Omega)$. Nous désignons par $<,>$ l'appariement de dualité entre $H^{-\alpha}(\Omega)$ et $H^{\alpha}(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. Ensuite, pour $g \in L^2(\Omega), h \in H^{\alpha}(\Omega), 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, nous avons $< g, h >= \int_\Omega ghdx$. La forme bilinéaire $a(,)$ est définie par $a(g,h) = \int_\Omega \nabla g.\nabla h dx$ et

$$G = \left\{ w \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega) : w \geq \phi \quad \text{dans} \quad \Gamma_2 \right\}$$

où $\phi(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ et $\phi(x) \leq 0$ sur Γ_2.
Ensuite, nous définissons la fonction de distance d par $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$ et l'ensemble

$$V_\delta = \left\{ x \in \bar{\Omega} : d(x) < \delta \right\}$$

Soit δ_0 un nombre positif, tel que $1/\delta_0$ Bounds les principaux des courbures $\partial\Omega$. Étant donné que Ω est bornée et $\partial\Omega \in C^2$, il est connu que $d(x) \in C^2(V_{\delta_0})$; voir [[20]]. Nous avons également mis Ensuite,

$$U_\delta = \{x \in \Omega : d(x) < \delta\}$$

$$s_\delta = \{x \in \Omega : d(x) = \delta\}$$

alors s_δ est une C^2 surface pour $0 \leq \delta \leq \delta_0$. Nous allons utiliser les lemmes suivants tard.

Lemme 1 *Il existe une fonction $h(x) \in C^1(\bar{\Omega})^n$ tel que $h(x)$ est le vecteur normal extérieur en x sur S_δ si $d(x) = \delta \leq \frac{\delta_0}{2}$ et $h(x) = 0$ si $d(x) \geq \delta_0$.*

Preuve. voir [20] ■

Lemme 2 *Soit $g \in L^1(\Omega)$. Puis, pour $0 < \delta^* < \delta_0$,*

$$\int_{U_{\delta^*}} g \quad dx = \int_0^{\delta^*} \delta^* \int_{\delta^*} g \quad d\sigma_\delta d\delta \tag{1.6}$$

détient où $d\sigma_\delta$ est l'élément de surface sur S_δ.

Lemme 3 *Soit u_k une suite de fonctions telles que*

$$\|u_k\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq M \tag{1.7}$$

$$\|\partial_t u_k\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq M, \tag{1.8}$$

où M est une constante positive indépendante de k et chacun u_k satisfait

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \Delta u_k = g_k \tag{1.9}$$

où g_k est une suite bornée dans $L^2(\Omega \times (O,T))$, et, en tant que $k \longrightarrow \infty$,

$$u_k \longrightarrow u \quad \textit{faiblement dans} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{1.10}$$

Puis, comme $k \longrightarrow \infty$

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2 - |\nabla u_k|^2 \longrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - |\nabla u|^2 \tag{1.11}$$

dans $D'(\Omega \times (0,T))$.

Preuve. voir [20] ■

Lemme 4 *Soit u_k une suite de fonctions de telle sorte que $k \longrightarrow \infty$,*

$$u_k \longrightarrow u \quad \textit{faible * dans} \quad L^\infty(0,T,H^\beta(\Omega)) \tag{1.12}$$

$$\partial_t u_k \longrightarrow \partial_t u \quad \textit{faiblement dans} \quad L^2(0,T,H^\alpha(\Omega)) \tag{1.13}$$

où $-1 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Alors,

$$u_k \longrightarrow u \quad \textit{dans} \quad C([0,T];H^r(\Omega)) \tag{1.14}$$

pour tout $r < \beta$.

Preuve. voir [20] ■

Lemme 5 ***(Gronwall)*** *Soient φ, ψ et y trois fonctions continue sur un segment $[a,b]$. à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a,b]\,, y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [a,b]\,, y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)ds$$

Chapitre 2

Inéquation variationnelles elliptique et parabolique

2.1 Inéquation variationnelles elliptique

2.1.1 Inéquation variationnelles elliptique de 1^{re}espèce

Définition 16 *On appelle inéquation variationnelle elliptique de 1^{re}espace est un' inéquation de la forme :*

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K\ \ tq \\ a(u, v-u) \geq L(v-u)\ \ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

tel que

* $K \subset V$ *espace de Hilbert.*

* $a(,)$ *forme bilinéaire sur* $V \times V$.

* $f \in V'$, V' *duale de* V.

* $L(v) = \langle f, v \rangle$.

Théoréme 17 *Soit V espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, Si $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive sur un espace vectoriel V, $L(.) :\longrightarrow \mathbb{R}$ forme linaire sur V est K sous ensemble convexe non vide de V alors l'inéquation variationnelle (2.1) admet une solution unique .*

Preuve.

1 L'unicité :

Supposons u_1, u_2 solution de (2.1) Alors

$$a(u_1, v - u_1) \geq L(v - u_1) \ \forall v \in K \tag{2.2}$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq L(v - u_2) \ \forall v \in K \tag{2.3}$$

On prend $v = u_2$ dans (2.2) et $v = u_1$ dans (2.2)
On obtient

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq L(u_2 - u_1) \tag{2.4}$$

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq L(u_1 - u_2) \tag{2.5}$$

On additionnée (2.4) et (2.5) on trouve $a(u_1, u_2 - u_1) + a(u_2, u_1 - u_2) \geq 0$ alors $a(u_2 - u_1, u_1 - u_2) \geq 0$ et a cette inéquation on trouve $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$ alors

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$
$$\Longrightarrow \|u_1 - u_2\|_V = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2$$

d'où l'unicité .

2 L'existence :

Soit $\rho > 0$ et soit le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} Trouverw \in K \\ (w, v - w) \geq \rho(-a(u, v - w) + L(v - w)) + (u, v - w) \forall v \in K \end{cases}$$

u fixé dans V.
$a(u,v) = (Au,v)$ *et* $L(v) = (l,v)$ d'après Théorème de représentation de Riez donc on a :

$$(w, v-w) \geq (-\rho Au + \rho l + u, v-w) \forall v \in K$$

On pose $F_{\rho,u} := \rho(-Au + l) + u$
On obtient

$$(w, v-w) \geq (F_{\rho,u}, v-w) \forall v \in K$$

D'aprés la théorème de projection w est existe et unique $w = P_k F_{\rho,u}$.
On définit $T_\rho : u \longrightarrow w$ pour $\rho > 0$ fixé $T_\rho u = w$ Si T_ρ admet un point fixé $T_\rho u = w$ alors u est solution de (2.1.1) alors solution de (2.1).
Donc il suffit de montrer que T_ρ est strictement contractantente C-à-d

$$\|T_{\rho,u_1} - T_{\rho,u_2}\| \leqq C\|u_1 - u_2\|$$

$$\|w_1 - w_2\| \leq C\|u_1 - u_2\|$$

Avec $C < 1$
$u_1 \longrightarrow w_1, \quad u_2 \longrightarrow w_2$

$$(w_1, v-w_1) \geq (F_{\rho,u_1}, v-w_1), \forall v \in K \tag{2.6}$$

$$(w_2, v-w_2) \geq (F_{\rho,u_2}, v-w_2), \forall v \in K \tag{2.7}$$

Donc pour $v = w_2$ dans (2.6) et $v = w_1$ dans (2.7)
On a
$(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \geq (F_{\rho,u_1} - F_{\rho,u_2}, w_1 - w_2)$
D'ou

$\|w_1 - w_2\|^2 \leq \|F_{\rho,u_1} - F_{\rho,u_2}\| \|w_1 - w_2\|^2$
$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\| \leq \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\| = \|(-\rho A + I)(u_1 - u_2)\| \leq \|-\rho A + I\|_{\mathcal{L}(v)}.\|u_1 - u_2\|$

$$\exists\, \rho > 0 \quad tq\ \|-\rho A + I\| \leq 1$$

On a :

$$\|(-\rho A+I)v\|_V^2 = ((-\rho A+I)v,(-\rho A+I)v) = \rho^2(Av,Av) - 2\rho(Av,v) + (v,v) \leq$$

$$\leq \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho(Av,v) + \|v\|^2 \leq$$

$$\leq \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho\|A\|\|v\|^2 + \|v\|^2$$

On utilise la coercivité ($2\rho(Av,v) \leq -2\rho\alpha\|v\|^2$) donc

$$\|(-\rho A+I)v\|_V^2 \leq (\rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 - 2\rho(Av,v) + \|v\|^2) \Longrightarrow \leq (\rho^2\|A\|^2 - 2\rho\alpha + 1)\|v\|^2$$

Pour $\rho \in \left]0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}\right[\Longrightarrow \|-\rho A + I\| < 1$

D'où $T_\rho(0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2})$est strictement contraction alors :

T_ρ admet un point fixe unique alors $w = u = T_\rho u$
- Par conséquent u vérifie (2.1)

■

2.1.2 Inéquation variationnelles elliptique de 2^{e}espèce

Définition 18 *On appelle Inéquation variationnelle elliptique de 2^{e}espèce toute inéquation de la forme*

$$\begin{cases} Trouver \quad u \in K \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u) \ \forall v \in K \end{cases}$$

Théoréme 19 *Soient V un espèce de Hilbert,$K \neq \emptyset$ convexe fermé de V $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre convexe et semi continue inférieurement $a(.,.)V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et*

coercive $f \in V$

Alors l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K \\ a(u, v-u) + j(v) + j(u) \geq (f, v-u)\ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.8}$$

Admet une solution unique.

Preuve.

1 L'unicité :

Supposons u_1 et u_2 solution de(2.8) alors

$$a(u_1, v-u_1) + j(v) - j(u_1) \geq (f, v-u_1) \quad \forall v \in K \tag{2.9}$$

$$a(u_2, v-u_2) + j(v) - j(u_2) \geq (f, v-u_2) \quad \forall v \in K \tag{2.10}$$

On prend $v = u_2$ dans (2.9) et $v = u_1$ dans (2.10)

On obtient

$$a(u_1, u_2-u_1) + j(u_2) - j(u_1) \geq (f, u_2-u_1) \quad \forall v \in K \tag{2.11}$$

$$a(u_2, u_1-u_2) + j(u_1) - j(u_2) \geq (f, v-u_2) \quad \forall v \in K \tag{2.12}$$

On trouve par sommation de (2.11) et (2.12) :

$$a(u_1, u_2-u_1) + a(u_2, u_1-u2) \geq (f, u_2-u_1) + (f, u_1-u_2)$$

$$\alpha\|u_1-u_2\|^2 \leq a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \|u_1-u_2\| = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2$$

D'où l'unicité .

2 L'existence :

On définit le problème auxiliaire pour u fixé dans K et $\rho > 0$

$$\begin{cases} Trouverw \in K \\ (w, v-w) + \rho j(v) - \rho j(w) \geq -\rho(a(u, v-w) - (f, v-w)) + (u, v-w)\ \forall v \in K \end{cases} \tag{2.13}$$

Le problème (2.13) admet une solution unique (d'âpre le théorème de Weierstrass) $T_\rho : u \longmapsto w$ w solution du problème (2.13),on montre que T_ρ admet un point fixe. Il suffit de montrer que T_ρ est strictement contractant c.à.d
$\|T_\rho(u_1) - T_\rho(u_2)\| \leq C\|u_1 - u_2\| \ \forall u_1, u_2 \in V.\ c < 1$
$\|w_1 - w_2\| \leq C\|u_1 - u_2\|\ tq\ w_i = T_\rho(u_1)\ i = 1, 2$
Alors :

$$(w_1, v - w_1) + \rho j(v) - \rho j(w_1) \geq -\rho a(u_1, v - w_1) + \rho(f, v - w_1) + (u_1 - v - w_1) \quad (2.14)$$

$$(w_2, v - w_2) + \rho j(v) - \rho j(w_2) \geq -\rho a(u_2, v - w_2) + \rho(f, v - w_2) + (u_2 - v - w_2) \quad (2.15)$$

On prend $v = w_2$ et $v = w_1$ respectivement dans (2.14) et (2.15) on obtient

$$-\|w_1 - w_2\|^2 \geq \rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) - (u_1 - u_2, w_1 - w_2)$$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\|^2 \leq -\rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) - (u_1 - u_2, w_1 - w_2) \leq$$

$$\leq (-\rho A(u_1 - u_2) + (u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq ((-\rho A + I)(u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq$$

$$\leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|\|w_1 - w_2\|$$

$$\Longrightarrow \|w_1 - w_2\| \leq \|-\rho A + I\|.\|u_1 - u_2\|$$

Alors $\exists \rho > 0?\ \ tq\ \ \|I - \rho A\| < 1$

$\|(I - \rho A)v\|^2 = (v - \rho Av, v - \rho Av) = (v, v) - 2\rho(Av, v) + \rho^2(Av, Av) \leq$

$\leq \|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \rho^2\|Av\|^2$

On utilisant la coercivité $(Av, v) \geq \alpha\|v\|^2 \Longrightarrow -2\rho(Av, v) \leq -2\rho\alpha\|v\|^2$

alors $\|(I - \rho A)v\|^2 \leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \rho^2\|A\|^2.\|v\|^2 \leq$

$\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho\|A\|^2)\|v\|^2$

si $\rho \in \left]0, \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}\right] \Longrightarrow 1 - 2\alpha\rho + \rho^2\|A\|^2 < 1$

$\Longrightarrow \|I - \rho A\| < 1$ alors T_ρ est strictement contractante $\Longrightarrow T_\rho$ admet un point fixe unique .

$T_\rho u = u = w$ d'où u vérifié le problème (2.8)

■

2.2 Inéquation variationnelles parabolique

Soient V un espace de Hilbert et K sous ensemble de V.

2.2.1 Inéquation variationnelles parabolique de 1^{re}espèce

Définition 20 *On appelle inéquation variationnelle parabolique de 1^{re}espèce tout inéquation de la forme : trouver $u \in K$ telle que*

$$\int_0^T (u^{'}(t), v(t) - u(t)) + \int_0^T a(u(t), v(t) - u(t)) \geq \int_0^T (f, v(t) - u(t)) \ \forall v \in K.$$

Théoréme 21 *On suppose que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire coercive, soient K un convexe fermé de V et $L(.)$ une forme linéaire continue sur V, Il existe un élément u de K et un seul tel que*

$$\begin{cases} \textit{Trouver} \ \ u(t) \in K \ \ \textit{tel que} \\ \left[u^{'}(t), v - u\right] + [Au, v - u] \geq [f, v - u], \forall v(t) \in K \ \ p.p \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.16}$$

Preuve. voir ([16]) ■

2.2.2 Inéquation variationnelle parabolique de 2^{e}espèce

Définition 22 *On appelle inéquation variationnelle de 2^{e}espèce tout inéquation de la forme trouver $u \in K$ telle que*

$$\int_0^T (u^{'}(t), v(t) - u(t)) + \int_0^T a(u(t), v(t) - u(t)) + \int_0^T j(v(t)) - \int_0^T j(u(t)) \geq \int_0^T (f, v(t) - u(t)) \, \forall v \in K \tag{2.17}$$

Théoréme 23 *Soient V un espace de Hilbert , $K \neq \emptyset$ convexe fermé de V et $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre et semi-continue inférieurement $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive ,$f \in V$ alors l'inéquation variationnelle parabolique suivant*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \ u(t) \in K \ \ \textit{tel que} \\ \left[u^{'}(t), v-u\right] + [Au, v-u] + \int_0^T j(v) - \int_0^T j(u) \geq [f, v-u], \forall v(t) \in K \ \ p.p \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.18}$$

admet une solution unique.

Preuve. voir ([16]) ■

Chapitre 3

Existence de solution d'un inéquation variationnelle hyperbolique

3.1 Problème classique (P.C)

Dans cet mémoire, nous allons discuter d'une inéquation variationnelle hyperbolique associée à le problème de valeur initiale-limite suivante :

$$\text{Trouver} \quad u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{satisfait}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad dans \quad \Omega \times (0,T), \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x) \quad dans \quad \Omega, \tag{3.2}$$

$$u = 0 \quad dans \quad \Gamma_1 \times (0,T), \tag{3.3}$$

$$u(x,t) \geq \phi(x) \quad sur \quad \Gamma_2 \times (0,T), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0, \quad (u-\phi)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \Gamma_2 \times (0,T). \tag{3.5}$$

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, nous supposons que Γ_1 et Γ_2 sont des sous-ensembles disjoints non vides ouverts, tel que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \bar{\Gamma}_1 \cup \Gamma_2$ et $\partial\Gamma_1 = \partial\Gamma_2 \in C^2$. Les fonctions $f(x,t), u_0(x), u_1(x)$ et $\phi(x)$ sont données, et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ désigne le dérivée normale vers l'extérieur

sur $\partial\Omega$, et $f \in W^{2,\infty}(0,T,L^2(\Omega))$.
tel que
$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
$\phi \leq 0$ et $u_0 \geq \phi$ dans Γ_2.
$u_0, u_1 \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$.

3.2 Problème variationnelle (P.V)

On a le cadre fonctionnel

$$G = \left\{ w \in H^1(\Omega) : w = 0 \ \text{ dans } \ \Gamma_1 \ \text{ et } \ w \geq \phi \ \text{ dans } \ \Gamma_2 \right\}$$

G n'est pas un sous espace vectoriel.
On pose fonction test est $(w-u)$, on multiple (3.1) par $(w-u)$ et on intégre, on obtient :

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(w-u) \ \ dx - \int_\Omega \Delta u(w-u) \ \ dx = \int_\Omega f(w-u) \ \ dx \tag{3.6}$$

On utilisant la formule de Green on obtient :

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(w-u) \ \ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(w-u) \ \ d\sigma + \int_\Omega \nabla u.\nabla(w-u) \ \ dx = \int_\Omega f(w-u) \ \ dx \tag{3.7}$$

on a :

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(w-u) \ \ d\sigma = -\int_{\partial\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta}(w-u) \ \ d\sigma - \int_{\partial\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta}(w-u) \ \ d\sigma \tag{3.8}$$

et

$$-\int_{\partial\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta}(w-u) \ \ d\sigma = 0, \tag{3.9}$$

car $u = 0 \quad \text{et} \quad w = 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma_1$,
et

$$-\int_{\partial\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta}(w-u) \ \ d\sigma = -\int_{\partial\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta}(w-\phi+\phi-u) \ \ d\sigma \tag{3.10}$$

$$= -\int_{\partial\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta}(w-\phi) \ \ d\sigma - \int_{\partial\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta}(\phi-u) \ \ d\sigma \tag{3.11}$$

On a :

$$-\int_{\partial\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta}(\phi-u) \ \ d\sigma = 0, \tag{3.12}$$

car :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\phi - u) \;\; d\sigma = 0 \;\; \text{dans} \;\; \Gamma_2, \tag{3.13}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(w - \phi) \;\; d\sigma \geq 0, \tag{3.14}$$

car

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \geq 0 \;\; \text{dans} \;\; \Gamma_2, \tag{3.15}$$

et

$$(w - \phi) > 0, \tag{3.16}$$

Alors problème variationnelle :

$$\text{Trouver} \;\; u \;\; \text{satisfait} \tag{3.17}$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, w - u \right\rangle - a(u, w - u) \geq \langle f, w - u \rangle \qquad \forall w \in G \tag{3.18}$$

tel que :

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, w - u \right\rangle = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.(w - u) \;\; dx, \tag{3.19}$$

$$a(u, w - u) = \int_\Omega \nabla u.\nabla(w - u) \;\; dx, \tag{3.20}$$

$$\langle f, w - u \rangle = \int_\Omega f.(w - u) \;\; dx. \tag{3.21}$$

3.3 Problème approché

Dans cette section, nous allons considérer un problème approché avec un paramètre de pénalité $k > 0$. Le problème est le suivant :

$$\text{Ttrouver} \;\; u_k(x,t) \;\; \text{tel que}$$

$$\partial_{tt} u_k(x,t) \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \partial_t u_k(x,t) \in L^\infty(0, T, H^1_{\Gamma_1}(\Omega)) \tag{3.22}$$

$$u_k(x, 0) = u_{0k}(x), \quad \partial u_k(x, 0) = u_{1k}(x) \tag{3.23}$$

$$\langle \partial_{tt} u_k, w \rangle + a(u_k, w) = \langle f_k, w \rangle + \int_{\Gamma_2} k(u_k - \phi)^- w d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{1}{k} \partial_t u_k w d\sigma \tag{3.24}$$

avec $\left\{\int_{\Gamma_2} k(u_k-\phi)^- w d\sigma\right\}$ est un terme Pénalisation, et $\left\{-\int_{\Gamma_2} \frac{1}{k}\partial_t u_k w d\sigma\right\}$ est un terme viscosité on a pour tout $w \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$, p.p $t \in (0,T)$. Ici $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$ et $g^- = max(0,-g)$.

Notre stratégie consiste en trois étapes.

(Étape 1) L'existence d'une solution de Problème approximation.

(Étape 2) Estimation à priori indépendante de $k > 0$.

(Étape 3) Passez $k \longrightarrow \infty$ pour arriver à une solution du problème original.

3.4 Existence d'une solution

Nous supprimons l'indice k .

Proposition 24 *Soit $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\Omega), f \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ et $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ avec $\phi \leq 0$ sur Γ_2.*

Il existe une solution de (3.24).

Preuve. On pose $u = v + u_0 + tu_1$ et $u \in L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$. Alors

$$v(x,0) \equiv 0, \quad \partial_t v(x,0) \equiv 0, \tag{3.25}$$

et (3.24) est équivalent à

$$\begin{aligned} \langle \partial_{tt} v, w\rangle + a(v,w) &= \langle f, w\rangle \\ + \langle \Delta(u_0+tu_1), w\rangle &+ k\int_{\Gamma_2} (v-\phi)^- w d\sigma \\ &- \frac{1}{k}\int_{\Gamma_2} \partial_t v \;\; w d\sigma \end{aligned} \tag{3.26}$$

pour tout $w \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$, p.p $t \in (0,T)$.

On utilise le procéder de Galerkin. Soit $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ une base pour $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ où chaque $w_j \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$. Soit

$$v_m = \sum_{j=1}^m a_{mj}(t) w_j(x) \tag{3.27}$$

où chaque $a_{mj}(t)$ est déterminée à partir

$$a_{mj}(0) = \partial_t a_{mj}(0) = 0, \tag{3.28}$$

et

$$\begin{aligned} \langle \partial_{tt} v_m, w_j \rangle + a(v_m, w_j) &= \langle f, w_j \rangle \\ + \langle \Delta(u_0 + tu_1), w_j \rangle + k \int_{\Gamma_2} (v_m - \phi)^- w_j d\sigma \\ - \frac{1}{k} \int_{\Gamma_2} (\partial_t v_m)\ w_j d\sigma \quad j = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{3.29}$$

On remplace (3.27) en (3.29) on trouve le système (3.29) est un système différentiel ordinaire non linéaires. Pour chaque m, il ya un ensemble unique de fonctions $a_{mj}(t) \in C^2([0,T]),\ \ j = 1, ..., m$, qui satisfaient (3.28) et (3.29).

Nous obtenons les prochaines estimations indépendantes de m. On multiplie (3.29) par $\partial_t a_{mj}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \partial_{tt} v_m, \partial_t a_{mj}(t) w_j \rangle + a(v_m, \partial_t a_{mj}(t) w_j) &= \langle f, \partial_t a_{mj}(t) w_j \rangle \\ + \langle \Delta(u_0 + tu_1), \partial_t a_{mj}(t) w_j \rangle + k \int_{\Gamma_2} (v_m - \phi)^- \partial_t a_{mj}(t) w_j d\sigma \\ - \frac{1}{k} \int_{\Gamma_2} (\partial_t v_m)\ \partial_t a_{mj}(t) w_j\ d\sigma \quad j = 1, ..., m. \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_{tt} v_m, \sum_{j=1}^{m} \partial_t a_{mj}(t) w_j \right\rangle + a\left(v_m, \sum_{j=1}^{m} \partial_t a_{mj}(t) w_j \right) &= \left\langle f, \sum_{j=1}^{m} \partial_t a_{mj}(t) w_j \right\rangle \\ + \left\langle \Delta(u_0 + tu_1), \sum_{j=1}^{m} \partial_t a_{mj}(t) w_j \right\rangle + k \int_{\Gamma_2} (v_m - \phi)^- \sum_{j=1}^{m} \partial_t a_{mj}(t) w_j d\sigma \\ - \frac{1}{k} \int_{\Gamma_2} (\partial_t v_m)\ \sum_{j=1}^{m} \partial_t a_{mj}(t) w_j d\sigma \quad j = 1, ..., m. \end{aligned}$$

On prend $\partial_t v_m = \sum_{j=1}^{m} \partial_t a_{mj}(t) w_j(x)$, on trouve

$$\langle \partial_{tt} v_m, \partial_t v_m \rangle + a\left(v_m, \partial_t v_m\right) = \langle f, \partial_t v_m \rangle$$

$$+\langle\Delta(u_0+tu_1),\partial_t v_m\rangle+k\int_{\Gamma_2}(v_m-\phi)^-\partial_t v_m d\sigma$$
$$-\frac{1}{k}\int_{\Gamma_2}(\partial_t v_m)\ \partial_t v_m d\sigma \quad j=1,...,m.$$

donc

$$\langle\partial_{tt}v_m,\partial_t v_m\rangle=\int_\Omega(\partial_{tt}v_m,\partial_t v_m)\,dx$$
$$=\int_\Omega\frac{d}{2\ dx}(\partial_t v_m,\partial_t v_m)\,dx$$
$$=\frac{d}{2\ dt}\|\partial_t\ v_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et

$$a\,(v_m,\partial_t v_m)=\int_\Omega\nabla v_m\nabla\partial_t v_m dx$$
$$=\int_\Omega\frac{d}{2\ dt}\nabla v_m\nabla v_m dx$$
$$=\frac{d}{2\ dt}a(v_m,v_m)$$

et

$$-\frac{1}{k}\int_{\Gamma_2}(\partial_t v_m)\ \partial_t v_m d\delta=-\frac{1}{k}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)}$$

donc (3.29) alors

$$\frac{d}{2\ dt}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{d}{2\ dt}a(v_m,v_m)+k\frac{d}{2\ dt}\left\|(v_m-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)}$$
$$=\langle f,\partial_t v_m\rangle+\langle\Delta(u_0+tu_1),\partial_t v_m\rangle-\frac{1}{k}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \tag{3.30}$$

On intégre sur intervalle $[0,T]$, on obtient :

$$\int_0^T\frac{d}{2\ dt}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\int_0^T\frac{d}{2\ dt}a(v_m,v_m)dt+\int_0^T k\frac{d}{2\ dt}\left\|(v_m-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)}dt$$
$$=\int_0^T\langle f,\partial_t v_m\rangle\,dt+\int_0^T\langle\Delta(u_0+tu_1),\partial_t v_m\rangle\,dt-\int_0^T\frac{1}{k}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)}dt \tag{3.31}$$

alors

$$\left[\frac{1}{2}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right]_0^T+\left[\frac{1}{2}a(v_m,v_m)\right]_0^T+\left[k\frac{1}{2}\left\|(v_m-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)}\right]_0^T$$

$$= \int_0^T \langle f, \partial_t v_m \rangle \, dt + \int_0^T \langle \Delta(u_0 + tu_1), \partial_t v_m \rangle \, dt - \int_0^T \frac{1}{k} \|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt \tag{3.32}$$

alors

$$\left[\frac{1}{2}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right]_0^T + \left[\frac{1}{2}a(v_m, v_m)\right]_0^T + \left[k\frac{1}{2}\left\|(v_m - \phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)}\right]_0^T + \int_0^T \frac{1}{k}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt$$

$$= \int_0^T \langle f, \partial_t v_m \rangle \, dt + \int_0^T \langle \Delta(u_0 + tu_1), \partial_t v_m \rangle \, dt \tag{3.33}$$

alors

$$\frac{1}{2}\|\partial_t v_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\partial_t v_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}a(v_m(T), v_m(T)) - \frac{1}{2}a(v_m(0), v_m(0))$$

$$+k\frac{1}{2}\left\|(v_m(T) - \phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} - k\frac{1}{2}\left\|(v_m(0) - \phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + \int_0^T \frac{1}{k}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt$$

$$= \int_0^T \langle f, \partial_t v_m \rangle \, dt + \int_0^T \langle \Delta(u_0 + tu_1), \partial_t v_m \rangle \, dt \tag{3.34}$$

car $a_{mj} = 0$ et $\partial_t a_{mj} = 0$, alors :

$$\frac{1}{2}\|\partial_t v_m(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{3.35}$$

$$\frac{1}{2}a(v_m(0), v_m(0)) = 0 \tag{3.36}$$

$$k\frac{1}{2}\left\|(v_m(0) - \phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} = k\frac{1}{2}\left\|(-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \tag{3.37}$$

on remplace (3.35) , (3.36) et (3.37) dans (3.34), on trouve

$$\frac{1}{2}\|\partial_t v_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}a(v_m(T), v_m(T)) + k\frac{1}{2}\left\|(v_m(T) - \phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + \int_0^T \frac{1}{k}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt$$

$$= \int_0^T \langle f, \partial_t v_m \rangle \, dt + \int_0^T \langle \Delta(u_0 + tu_1), \partial_t v_m \rangle \, dt + k\frac{1}{2}\left\|(-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \tag{3.38}$$

alors

$$\frac{1}{2}\|\partial_t v_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_m(T)\|_{L^2(\Omega)} + k\frac{1}{2}\left\|(v_m(T) - \phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + \int_0^T \frac{1}{k}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt$$

$$\leq \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)} \, dt + \int_0^T \|\Delta(u_0 + tu_1)\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)} \, dt + k\frac{1}{2}\left\|(-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \tag{3.39}$$

on a

$$\frac{1}{2}\|\partial_t v_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\|v_m(T)\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$$

$$\text{et} \quad k\frac{1}{2}\left\|(v_m(T)-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \geq 0$$

$$\text{et} \quad \int_0^T \frac{1}{k}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt \geq 0 \tag{3.40}$$

alors

$$\frac{1}{2}\|\partial_t v_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)} dt$$

$$+\int_0^T \|\Delta(u_0+tu_1)\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)} dt + k\frac{1}{2}\left\|(-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \tag{3.41}$$

on a

$$\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)} dt = C_1 \int_0^T \|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\int_0^T \|\Delta(u_0+tu_1)\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)} dt = C_2 \int_0^T \|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)}$$

$$k\frac{1}{2}\left\|(-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} = C_3 \tag{3.42}$$

on remplacent (3.42) dans (3.41), on obtient :

$$\frac{1}{2}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^T \|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)} dt + C_3 \tag{3.43}$$

on utilisant la formule $ab \leq \dfrac{\alpha a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2\alpha}$ dans (3.43), avec $\alpha = 1$, on trouve :

$$\frac{1}{2}\|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_4 + \frac{1}{2}\int_0^T \|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Omega)} dt \tag{3.44}$$

on utilisant lemme de Gronwall dans (3.44), on trouve :

$$\|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \tag{3.45}$$

$v_m - \phi \in C^1([0,T]\times\Omega)$ et par conséquent $(v_m-\phi)^-$ est Lipschitz continue et

$$\frac{d}{dt}\left\|(v_m-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \in L^\infty(0,T). \tag{3.46}$$

d'après (3.45) et (3.39), on obtient :

$$\|\partial_t v_m\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] \tag{3.47}$$

$$\|v_m\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)} \leq M, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] \tag{3.48}$$

$$\|(v_m - \phi)^-\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq M, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] \tag{3.49}$$

$$\int_0^T \|\partial_t v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)}\, dt \leq M, \tag{3.50}$$

où M désigne constantes positives indépendantes de m.

On dérive (3.29) par rapport t, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \partial_{ttt} v_m, w_j\rangle + a(\partial_t v_m, w_j) &= \langle \partial_t f_k, w_j\rangle \\
+ \langle \Delta(u_{1k}), w_j\rangle + k\int_{\Gamma_2} \partial_t[(v_m-\phi)^-] w_j d\sigma \\
- \frac{1}{k}\int_{\Gamma_2} (\partial_{tt} v_m)\ w_j d\sigma \quad j = 1, ..., m.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

om multiple (3.51) par $\partial_{tt} a_{mj}(t)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial_{ttt} v_m, \sum_{j=1}^m \partial_{tt}\ a_{mj} w_j \right\rangle + a\left(\partial_t v_m, \sum_{j=1}^m \partial_{tt}\ a_{mj} w_j\right) &= \left\langle \partial_t f, \sum_{j=1}^m \partial_{tt}\ a_{mj} w_j \right\rangle \\
+ \left\langle \Delta\left(u_{1k}\right), \sum_{j=1}^m \partial_{tt}\ a_{mj} w_j \right\rangle + k\int_{\Gamma_2} \partial_t[(v_m-\phi)^-] \sum_{j=1}^m \partial_{tt}\ a_{mj} w_j\ d\sigma \\
- \frac{1}{k}\int_{\Gamma_2} (\partial_{tt} v_m)\ \sum_{j=1}^m \partial_{tt}\ a_{mj} w_j\ d\sigma \quad j = 1, ..., m.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

on prend $\partial_{tt} v_m = \sum_{j=1}^m \partial_{tt}\ a_{mj}(t)\ w_j(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \partial_{ttt} v_m, \partial_{tt} v_m\rangle + a(\partial_t v_m, \partial_{tt} v_m) &= \langle \partial_t f, \partial_{tt} v_m\rangle \\
+ \langle \Delta(u_{1k}), \partial_{tt} v_m\rangle + k\int_{\Gamma_2} \partial_t[(v_m-\phi)^-] \partial_{tt} v_m\ d\sigma \\
- \frac{1}{k}\int_{\Gamma_2} (\partial_{tt} v_m)\ \partial_{tt} v_m\ d\sigma \quad j = 1, ..., m.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
\langle \partial_{ttt} v_m, \partial_{tt} v_m\rangle &= \int_\Omega (\partial_{ttt} v_m, \partial_{tt} v_m)\, dx \\
&= \int_\Omega \frac{d}{2\ dt} (\partial_{tt} v_m, \partial_{tt} v_m)\, dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{d}{2\ dt}\|\partial_{tt}\ v_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et

$$a\left(\partial_t v_m, \partial_{tt} v_m\right) = \int_\Omega \nabla\partial_t v_m \nabla\partial_{tt} v_m dx$$
$$= \int_\Omega \frac{d}{2\ dt}\nabla\partial_t v_m \nabla\partial_t v_m dx$$
$$= \frac{d}{2\ dt} a(\partial_t v_m, \partial_t v_m)$$

et

$$-\frac{1}{k}\int_{\Gamma_2}\left(\partial_{tt} v_m\right)\ \partial_{tt} v_m d\sigma = -\frac{1}{k}\|\partial_{tt} v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)}$$

et

$$\langle \partial_t f, \partial_{tt} v_m\rangle \leq \|\partial_t f\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_{tt} v_m\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\langle \Delta u_1, \partial_{tt} v_m\rangle \leq \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_{tt} v_m\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\int_{\Gamma_2}\partial_t\left\{(v_m-\phi)^-\right\}\partial_{tt} v_m d\sigma \leq \int_{\Gamma_2}\left|\partial_t\left\{(v_m-\phi)^-\right\}\right|\left|\partial_{tt} v_m\right| d\sigma \tag{3.54}$$

on utilisant la formule $ab \leq \frac{\alpha a^2}{2} + \frac{b}{2\alpha}$ dans (3.54) et prend $\alpha = k^2$, on obtient :

$$\leq \frac{1}{2}k^2\left\|\partial_t\left\{(v_m-\phi)^-\right\}\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + \frac{1}{2k^2}\|\partial_{tt} v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)}$$

donc (3.53) alors

$$\frac{d}{2\ dt}\|\partial_{tt} v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{2\ dt}a(\partial_t v_m, \partial_t v_m)$$
$$\leq \|\partial_t f\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_{tt} v_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_{tt} v_m\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \frac{d}{2\ dt}k^3\left\|\partial_t\left\{(v_m-\phi)^-\right\}\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} - \frac{1}{2k}\|\partial_{tt} v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \tag{3.55}$$

Nous considérons (3.29) à $t = 0$ et remplacent $\partial_{tt} v_m(0)$, on trouve :

$$\|\partial_{tt} v_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \langle f(0), \partial_{tt} v_m(0)\rangle + \langle \Delta u_0, \partial_{tt} v_m(0)\rangle \tag{3.56}$$

Nous avons utilisé le fait que $v_m(0) = \partial_t v_m(0) = 0$. Donc (3.56) implique

$$\|\partial_{tt} v_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M, \tag{3.57}$$

M étant une constante indépendante positif de m. On intégré la formule (3.55) pat rapport t, on obtient :

$$\int_0^T \frac{d}{2\ dt}\|\partial_{tt}v_m\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T \frac{d}{2\ dt}a(\partial_t v_m, \partial_t v_m)dt$$
$$\leq \int_0^T \|\partial_t f\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{tt}v_m\|_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^T \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{tt}v_m\|_{L^2(\Omega)}\, dt$$
$$+ \frac{d}{2\ dt}k^3 \int_0^T \left\|\partial_t \left\{(v_m - \phi)^-\right\}\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt - \frac{1}{2k}\int_0^T \|\partial_{tt}v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)}dt \tag{3.58}$$

alors

$$\int_0^T \frac{d}{2\ dt}\|\partial_{tt}v_m\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T \frac{d}{2\ dt}a(\partial_t v_m, \partial_t v_m)dt + \frac{1}{2k}\int_0^T \|\partial_{tt}v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)}dt$$
$$\leq \int_0^T \|\partial_t f\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{tt}v_m\|_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^T \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{tt}v_m\|_{L^2(\Omega)}\, dt$$
$$+ \frac{d}{2\ dt}k^3 \int_0^T \left\|\partial_t \left\{(v_m - \phi)^-\right\}\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt \tag{3.59}$$

donc

$$\frac{1}{2}\|\partial_{tt}v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}a(\partial_t v_m, \partial_t v_m) + \frac{1}{2k}\int_0^T \|\partial_{tt}v_m\|^2_{L^2(\Gamma_2)}dt$$
$$\leq \int_0^T \|\partial_t f\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{tt}v_m\|_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^T \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{tt}v_m\|_{L^2(\Omega)}\, dt$$
$$+ \frac{d}{2\ dt}k^3 \int_0^T \left\|\partial_t \left\{(v_m - \phi)^-\right\}\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt \tag{3.60}$$

$$\|\partial_{tt}v_m\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T], \tag{3.61}$$

$$\|\partial_t v_m\|_{H^1(\Gamma_1)} \leq M, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T], \tag{3.62}$$

où M désigne constantes positives indépendantes de m. A l'aide de (3.48), (3.61) et (3.62), nous peut extraire une sous-suite encore notée $\{v_m\}$ tel que

$$v_m \longrightarrow v \quad \text{faible * dans} \quad L^\infty(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega)) \tag{3.63}$$

$$\partial_t v_m \longrightarrow \partial_t v \quad \text{faible * dans} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \tag{3.64}$$

pour une certaine fonction v. En vertu du lemme 4, nous avons

$$(v_m - \phi)^- \longrightarrow (v - \phi)^- \quad \text{dans} \quad C([0,T]; L^2(\partial\Omega)) \tag{3.65}$$

on utilise de (3.63) à (3.65) pour dériver (3.25) et (3.26) grâce à une procédure standard. ■

Remarque 25 *Le but de lui terme* $\frac{1}{k}\partial_t u_k$ *en (3.24) est d'obtenir des solutions approximatives qui sont suffisamment régulière pour justifier les manipulations en utilisant une technique de multiplication dans la section suivante. L'utilité de ce terme est vu dans (3.55).*

3.5 Estimation à priori indépendante de k> 0

Nous supprimons encore l'indice k.
Soit $u(x,t)$ une solution construite dans (Proposition 24) pour un fixe $k>0$. On remplacent w par $\partial_t u$ dans (3.24), on trouve :

$$\langle \partial_{tt}u, \partial_t u\rangle + a\left(u, \partial_t u\right) = \langle f, \partial_t u\rangle + k\int_{\Gamma_2}(u-\phi)^- \partial_t u d\sigma - \frac{1}{k}\int_{\Gamma_2}\left(\partial_t u\right)^2 d\sigma \tag{3.66}$$

donc

$$\begin{aligned}\langle \partial_{tt}u, \partial_t u\rangle &= \int_\Omega \partial_{tt}u\partial_t u dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2dt}\partial_t u\partial_t u dx = \frac{1}{2dt}\left\|\partial_t u\right\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.67}$$

et

$$\begin{aligned}a\left(\partial_t u, u\right) &= \int_\Omega \nabla\partial_t u\nabla u dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2dt}\nabla u\nabla u dx = \frac{1}{2dt}a\left(u,u\right)\end{aligned} \tag{3.68}$$

on remplacent (3.67) et (3.68) dans (3.66), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) = \langle f, \partial_t u\rangle \\ &-\frac{1}{2}k\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_2}\left\{(u-\phi)^-\right\}^2 d\sigma - \frac{1}{k}\int_{\Gamma_2}(\partial_t u)^2 d\sigma,\end{aligned} \tag{3.69}$$

on intègre la formule (3.69) par rapport t, on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}a(u,u)dt = \int_0^T \langle f, \partial_t u\rangle\, dt$$

$$-\frac{1}{2}k\int_0^T \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_2}\left\{(u-\phi)^-\right\}^2 d\sigma dt - \frac{1}{k}\int_0^T\int_{\Gamma_2}(\partial_t u)^2 d\sigma, \tag{3.70}$$

alors

$$\frac{1}{2}\left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}a(u,u) = \int_0^T \langle f, \partial_t u\rangle\, dt$$

$$-\frac{1}{2}k\int_0^T \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_2}\left\{(u-\phi)^-\right\}^2 d\sigma - \frac{1}{k}\int_0^T \left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \tag{3.71}$$

alors

$$\frac{1}{2}\left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{k}\int_0^T \left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)}$$

$$+\frac{1}{2}k\left\|(u-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \leq C_1\int_0^T \left\|\partial_t u\right\|_{L^2(\Gamma_2)} + C_2 \tag{3.72}$$

on utilisant la formule $ab \leq \dfrac{\alpha a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2\alpha}$ dans (3.72), on trouve :

$$\frac{1}{2}\left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{k}\int_0^T \left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)}$$

$$+\frac{1}{2}k\left\|(u-\phi)^-\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \leq C\int_0^T \left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + C_3 \tag{3.73}$$

alors

$$\frac{1}{2}\left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^T \left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + C_3 \tag{3.74}$$

on utilisant lemme de Gronwall, on trouve :

$$\left\|\partial_t u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] \tag{3.75}$$

$$\left\|u\right\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)} \leq M, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] \tag{3.76}$$

$$\left\|(u-\phi)^-\right\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq M/\sqrt{k}, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] \tag{3.77}$$

$$\int_0^T \left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt \leq M\ k, \tag{3.78}$$

où M désigne des constantes positives indépendantes de k, et ne dépendent que du nombre L tel que :

$$\left\|u_0\right\|_{H^1_0(\Omega)} + \left\|u_1\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|f\right\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \leq L. \tag{3.79}$$

Ensuite, nous allons adapter une technique de multiplication pour calculer certaines estimations uniformes dans un quartier $\partial\Omega$. Soit

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \delta\} \tag{3.80}$$

pour $0 < \delta \leq \delta_0$. Évidemment, $\partial\Omega_\delta = S_\delta$, qui a été défini à l'article 1([20]). Nous avons besoin d'observer que solution u de (3.24) présente une régularité suffisante pour justifier manipulations à l'aide d'un technique multiplicateur. Tout d'abord, (3.24) implique que

$$\partial_{tt}u - \Delta u = f \tag{3.81}$$

tient dans $D^{'}(\Omega \times (0,T))$ et l'hypothèse que $f \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$, nous en déduisons que

$$\Delta u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \tag{3.82}$$

En fait, (3.81) holdups en $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$. Alors

$$u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega_\delta)), \tag{3.83}$$

pour chaque $\delta > 0$. En raison de la condition de frontière mixte sur $\partial\Omega$, on ne peut pas prétendre que $u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega))$. Nous notons également que (2-1) implique

$$u \in C([0,T]; H^1_{\Gamma_1}(\Omega)),\ \partial_t u \in C([0,T]; L^2(\Omega)), \tag{3.84}$$

éventuellement après une modification sur un ensemble de mesure nulle en t.
Nous passons maintenant à obtenir les estimations. Utilisation de la fonction $h(x)$ construit dans le lemme 1, nous multiplions les deux côtés de (3.81) par $(h \cdot \nabla)u$ et intègre sur $\Omega_\delta \times (0,T), 0 < \delta \leq \delta_0/2$:

$$\int_0^T \int_{\Omega_\delta} (\partial_{tt}u)((h \cdot \nabla)u)dxdt$$

on intègre par partie, on obtient :

$$= \int_{\Omega_\delta} (\partial_t u(T))((h \cdot \nabla)u(T)dx - \int_{\Omega_\delta} u_1((h \cdot \nabla)u_0)dx$$

$$- \int_0^T \int_{\Omega_\delta} (\partial_t u)((h \cdot \nabla)\partial_t u)dxdt$$

$$= \int_{\Omega_\delta} (\partial_t u(T))((h \cdot \nabla)u(T)dx - \int_{\Omega_\delta} u_1((h \cdot \nabla)u_0)dx$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega_\delta} (\partial_t u)^2 d\delta dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega_\delta} (\nabla \cdot h)(\partial_t u)^2 dxdt \tag{3.85}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_\delta} (-\Delta u)(h \cdot \nabla)dxdt$$

$$= -\int_0^T \int_{\Omega_\delta} (\frac{\partial u}{\partial v})d\sigma_\delta dt + \int_0^T \int_{\Omega_\delta} \nabla u \cdot \nabla \left\{(h \cdot \nabla)u\right\} dxdt \tag{3.86}$$

$$= -\int_0^T \int_{\Omega_\delta} (\frac{\partial u}{\partial v})d\sigma_\delta dt + \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial h_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dxdt \tag{3.87}$$

$$- \int_0^T \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{2}(\nabla \cdot h) \left|\nabla u\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left|\nabla u\right|^2 d\sigma_\delta dt \tag{3.88}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial v}$ est l'unité et à l'extérieur de la dérivée normale sur la S_δ, i,e., $\dfrac{\partial}{\partial v} = h \cdot \nabla$ sur S_δ. La combinaison de (3.85) et (3.85), on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega_\delta} (\partial_t u)^2 d\sigma_\delta dt - \sqrt{\frac{1}{2}}\int_0^T \int_{\Omega_\delta} \left|\nabla u\right|^2 d\sigma_\delta dt$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega_\delta} (\frac{\partial u}{\partial v})^2 d\sigma_\delta dt = C(\delta), \tag{3.89}$$

où

$$c(\delta) = -\int_0^T \int_{\Omega_\delta} f((h \cdot \nabla)u)dxdt$$

$$+ \text{ Termes évidents (3.85) et (3.85)} \tag{3.90}$$

Rappel (3.75) et (3.76), il est évident que

$$|C(\delta)| \leq M, \text{ pour tout } 0 < \delta \leq \delta_0/2, \tag{3.91}$$

où M est une constante positive qui est indépendant de k et ne dépend que du nombre L tel que :

$$\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \leq L. \tag{3.92}$$

Nous choisissons prochaine tout $\rho(s) \in C(\mathbb{R})$ tel que pour tout s, $0 \leq |\rho(s)| \leq 1$, et $\psi(x) = \rho(dist(x, \partial\Omega))$. Alors, $\psi(x)$ est une fonction continue et constante sur chacune est $S_\delta, 0 < \delta \leq \delta_0$. Par conséquent, il résulte de (3.89) qui

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_0^{\delta^*} \int_{S_\delta} \psi(x)(\partial_t u)^2 d\sigma_\delta d\delta dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \int_0^{\delta^*} \int_{S_\delta} \psi(x) \left|\nabla u\right|^2 d\sigma_\delta d\delta dt$$

$$+\int_0^T \int_0^{\delta^*} \int_{S_\delta} \psi(x)((h \cdot \nabla)u)^2 d\sigma_\delta d\delta dt =$$

(en utilisant le lemme (2)), on obtient

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \int_{u_{\delta^*}} \psi(x)(\partial_t u)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{u_{\delta^*}} \psi(x) \left|\nabla u\right|^2 dxdt$$

$$+\int_0^T \int_{u_{\delta^*}} \psi(x)((h \cdot \nabla)u)^2 dxdt = 0(\delta^*) \tag{3.93}$$

pour chaque $0 < \delta^* \leq \delta_0/2$, où $0(\delta^*)$ est un nombre tel que

$$|0(\delta^*)| \leq M\delta^* \tag{3.94}$$

où M est le nombre positif même que dans (3.91). (3.93) sera utilisé dans la section suivante.

3.6 La convergence des solutions approchées.

Nous supposons que $u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega), f \in L^2(\Omega \times (0,T)), \phi \in C^1(\bar{\Omega})$ avec $\phi \leq 0$ sur Γ_2, et définir une solution de (3.1) à (3.5).

Définition 26 *Une fonction $u(x,t)$ est une solution de (3.1) à (3.5) si*

$$u \in L^\infty(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega)), \partial_t u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap C([0,T]; H^{\frac{-1}{2}}(\Omega)), \tag{3.95}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), \tag{3.96}$$

$$u(t) \in G, \quad p.p \quad t \in (0,T), \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t u(T), w(T) - u(T)\rangle - \langle u_1, w(0) - u_0\rangle \\ &- \int_0^T \langle \partial_t u, \partial_t w - \partial_t u\rangle \, dt + \int_0^T a(u, w-u) dt \\ &\geq - \int_0^T \langle f, w-u\rangle \, dt, \end{aligned} \tag{3.98}$$

pour chaque w *tel que* $w \in L^m(O,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega)), \partial_t w \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), w(t) \in G$, *p.p* $t \in (0,T)$.

Nous allons justifier cette définition. Supposons que u *est une solution selon la définition ci-dessus. En prenant* $w = u \pm \xi, \xi \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$, *dans (3.98), nous constatons que (3.1) est satisfaite dans* $D'(\Omega \times (0,T))$. *(3.3) et(3.4) sont satisfaits dans le sens* $u(t) \in G$, *p.p* $t \in (0,T)$. *Maintenant, nous supposons une outre régularité sur* u *:*

$$\partial_{tt} u \in L^2(0,T; L^2(\Omega \backslash E_\delta)) \tag{3.99}$$

$$u \in L^2(0,T; H^2(\Omega \backslash E_\delta)) \tag{3.100}$$

pour chaque $\delta > 0$, *où*

$$E_\delta = \left\{ x \in \bar{\Omega} : dist(x, \partial\Gamma_1) \leq \delta \right\} \tag{3.101}$$

On a $\partial\Gamma_1 = \partial\Gamma_2$ *est de dimension* $(n-2)$. *Puis, (3.1) dans un sentiment plus fort :*

$$\int_0^T \langle \partial_{tt} u, w\rangle \, dt - \int_0^T \langle \Delta u, w\rangle \, dt = \int_0^T \langle f, w\rangle \, dt \tag{3.102}$$

pour chaque $w \in L^2(\Omega \times (0,T))$ tel que $suppw(x,t) \cap E_\delta$ est vide, p.p t, pour certaines $\delta > 0$.

Ensuite, choisissez une fonction non négative $\xi(x) \in C_0^1(\Gamma_2)$. Alors, nous pouvons étendre $\xi(x)$ tel que $\xi(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ et $supp\ \xi \cap E_\delta \cup \Gamma_1$ est vide depuis un certain $\delta > 0$.

Choisissez une fonction non négative$\eta(t) \in C_0^1((0,T))$ et de prendre $w = u + \xi(x)\eta(x)$

dans (3.98). Par le biais de l'intégration par parties et le théorème de la divergence (cette procédure est justifiée par (3.99) et (3.100), on obtient :

$$\int_0^T \langle \partial_{tt} u, \xi(x)\eta(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle \Delta u, \xi(x)\eta(t)\rangle \, dt$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) \xi(x)\eta(t) d\delta dt \geq \int_0^T \langle f, \xi(x)\eta(t)\rangle \, dt \tag{3.103}$$

Il résulte de (3.102) et (3.103) qui

$$\int_0^T \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) \xi(x)\eta(t) d\delta dt \geq 0, \tag{3.104}$$

ce qui est vrai pour toutes les fonctions non négatifs $\xi(x) \in C_0^1(\Gamma_2)$ et $\eta(t) \in C_0^1((0,T))$. Ainsi nous pouvons conclure que

$$\frac{\partial u}{\partial v} \geq 0, \quad \text{presque partout dans} \quad \Gamma_2 \times (0,T) \tag{3.105}$$

Il reste à montrer la deuxième partie de (3.5). Choisissons une fonction $\xi_\delta \in C^1(\overline{\Omega})$ tel que $0 \leq \xi_\delta(x) \leq$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $\xi_\delta \equiv 1$ sur $\Gamma_2 \setminus E_\delta$ et $supp\xi_\delta \cap \{E_{\delta\setminus 2} \cup \Gamma_1\}$ est vide. Nous choisissons aussi $\eta(t) \in C_0^1((0,T))$ tel que $-1 \leq \eta(t) \leq 1$ pour tout t. Puis, nous avons

$$w = u + \xi_\delta(x)\eta(t)(u - \phi)$$

en (3.98). Comme ci-dessus, nous l'utilisons intégration par parties, le théorème de la divergence et (3.102) pour arriver à

$$\int_0^T \int_{\Gamma_2} \xi_\delta(x)\eta(t) \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) (u - \phi) d\sigma dt = 0 \tag{3.106}$$

on a l'égalité, car $-\eta(t)$ peut être également choisi à la place de $\eta(t)$. Depuis $u - \phi \geq 0$ presque par tout dans $\Gamma_2 \times (0,T)$ et $\xi \geq 0$ est arbitraire, (3.105) et (3.106) impliquent

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) (u - \phi) = 0, \qquad \text{presque partout dans} \;\; \Gamma_2 \times (0,T). \tag{3.107}$$

Ceci termine la justification de la définition ci-dessus d'une solution.
Nous allons maintenant présenter le résultat principal.

Théoréme 27 *pour $u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega) \times ((0,T))$., il est une solution de (3.1) par (3.5).*

Preuve. Choisissez séquences $\{u_{0k}\}, \{u_{1k}\}$ en $C_0^\infty(\Omega)$ et f_k en $C^1([0,T]\,; L^2(\Omega))$ tel que $k \longrightarrow \infty$,

$$u_{0k} \longrightarrow u_0 \ \text{ dans } \ H_0^1(\Omega), \tag{3.108}$$

$$u_{1k} \longrightarrow u_1 \ \text{ dans } \ L^2(\Omega), \tag{3.109}$$

$$f_k \longrightarrow f \ \text{ dans } \ L^2(\Omega \times (0,T)). \tag{3.110}$$

pour chaque k, soit u_k être une solution construite dans la Proposition (24). Alors, chaque u_k satisfait

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle \partial_{tt} u_k, w - u_k \rangle dt + \int_0^T a(u_k, w - u_k) dt \\
&= \int_0^T \langle f_k, w - u_k \rangle dt + k \int_0^T \int_{\Gamma_2} (u_k - \phi) - (w - u_k) d\sigma dt \\
&\qquad - \frac{1}{k} \int_0^T \int_{\Gamma_2} (\partial_t (w - u_k) d\sigma dt,
\end{aligned} \tag{3.111}$$

pour chaque $w(x,t)$ tel que $w \in L^\infty(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega)), \partial_t w \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ et $w(t) \in G$, p.p $t \in (0,T)$. Utilisation de l'intégration par parties et

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Gamma_2} (u_k - \phi) - (w - u_k) d\sigma dt \\
&= \int_0^T \int_{\Gamma_2} (u_k - \phi) - (w - \phi) d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_2} (u_k - \phi) - (u_k - \phi) d\sigma dt \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.112}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_t u_k(T), w(T) - u_k(T) \rangle - \langle \partial_t u_{1k}, w(0) - u_{0k} \rangle \\
&\quad - \int_0^T \langle \partial_t u_k, \partial_t w \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega (\partial_t u_k)^2 dx dt \\
&\quad + \int_0^T a(u_k, w) dt - \int_0^T \int_{\Gamma_2} \mid \nabla u_k \mid^2 dx dt \\
&\geq \int_0^T \langle f, w - u_k \rangle dt - \frac{1}{k} \int_0^T \int_{\Gamma_2} (\partial_t u_k) w d\sigma dt
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2k}\int_{\Gamma_2}(u_k(T))^2 d\sigma. \tag{3.113}$$

En vertu de (3.75) et ((3.75)), nous pouvons extraire une suite encore notée $\{u_k\}$ tel que $k \longrightarrow \infty$,

$$u_k \longrightarrow u \ \text{ faible * dans } \ L^\infty(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega)), \tag{3.114}$$

$$\partial_t u_k \longrightarrow \partial_t u \ \text{ faible * dans } \ ^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.115}$$

Chaque u_k satisfait (3.81), nous déduisent (3.110) et (3.114) Alors

$$\partial_{tt} u_k \longrightarrow \partial_{tt} u \ \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.116}$$

Ainsi, d'après le lemme (4), nous constatons que

$$\partial_t u_k \longrightarrow \partial_t u \ \text{ dans } \ C([0,T]\,;H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)), \tag{3.117}$$

$$u_k \longrightarrow u \ \text{ fible dans } \ C([0,T]\,;H^{\frac{1}{2}}(\Omega)), \tag{3.118}$$

tel que

$$\langle \partial_t u_k(T), w(T)-u_k(T)\rangle \longrightarrow \langle \partial_t u(T), w(T)-u(T)\rangle \tag{3.119}$$

$k \longrightarrow \infty$, pour chaque w. Dans l'intervalle, nous remarquons que

$$\frac{1}{k}\left|\int_0^T\int_{\Gamma_2}(\partial_t u_k) w d\sigma dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{k}\left(\int_0^T\int_{\Gamma_2}(\partial_t u_k)^2 d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_{\Gamma_2} w^2 d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

(en utilisant (3.78)),

$$\leq M\left(\int_0^T\int_{\Gamma_2} w^2 d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}}/\sqrt{k} \longrightarrow 0, \tag{3.120}$$

$k \longrightarrow \infty$, pour chaque w, nous allons montrer que

$$\int_0^T\int_\Omega\left((\partial_t u)^2 - \mid \nabla u \mid^2\right) dxdt \geq \lim_{k\longrightarrow\infty} \ sup \int_0^T\int_\Omega\left((\partial_t u_k)^2 - |\nabla u_k|^2\right) dxdt \tag{3.121}$$

L'introduire la notation :

$$A_k = \frac{1}{2}(\partial_t u_k)^2 - \frac{1}{2}\mid \nabla u_k \mid^2 + ((h.\nabla)u_k)^2,$$

$$B_k = ((h.\nabla)u_k)^2,$$
$$A = \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} \mid \nabla u \mid^2 + ((h.\nabla)u)^2,$$
$$B = ((h.\nabla)u)^2.$$

par le lemme (3), $k \longrightarrow \infty$,

$$A_k - B_k \longrightarrow A - B \quad \text{dans} \quad D^{'}(\Omega \times (0,T)). \tag{3.122}$$

Depuis la séquence $\{A_k - B_k\}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$, nous observons que $k \longrightarrow \infty$,

$$\int_0^T \int_{\Omega_2} \psi(x)(A_k - B_k)dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega_2} \psi(x)(A - B)dxdt \tag{3.123}$$

pour chaque $\psi(x) \in C_0(\Omega)$. Soit définir un fonction

$$\rho_\delta(s) \in C(\mathbb{R})$$

tel que $\rho_\delta(s)$ est décroissante dans s et

$$\rho_\delta(s) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout} \quad s \leq \delta/2 \\ 1 & \text{pour tout} \quad s \geq \delta. \end{cases} \tag{3.124}$$

Nous avons ensuite mis $\psi_\delta(x) = \rho_\delta(dist(x, \partial\Omega))$. Fixer tout $0 \leq \delta \leq \delta_0/2$. selon (3.123),

$$\int_0^T \int_{\Omega} \psi_\delta(x)(A_k - B_k)dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \psi_\delta(x)(A - B)dxdt \tag{3.125}$$

comme $k \longrightarrow \infty$. Avec l'aide de (3.123), on obtient :

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\psi_\delta(x) - 1)A_k dxdt = \int_0^T \int_{U_\delta} (\psi_\delta(x) - 1)A_k dxdt = 0_1(\delta), \tag{3.126}$$

où l'on peut estimer $0_1(c)$ en utilisant le nombre M dans (3.91), et (3.108)(3.109), et (3.110),

$$\mid 0_1(\delta) \mid \leq M\delta, \qquad \text{pour tout} k. \tag{3.127}$$

En attendant, nous avons aussi

$$\int_0^T \int_{\Omega} B_k dxdt \geq \int_0^T \int_{\Omega} \psi_\delta(x) B_k dxdt, \tag{3.128}$$

pour chaque k, depuis B_k est positive et intégrable, et $0 \leq \psi_\delta(x) \leq 1$, pour tout x. since $A - B \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$, il est évident que

$$\int_0^T \int_\Omega (1-\psi_\delta(x))(A-B)dxdt = \int_0^T \int_{U_\delta} (1-\psi_\delta(x))(A-B)dxdt = 0_2(\delta) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \delta \longrightarrow 0. \tag{3.129}$$

Choisissez tout $\epsilon > 0$. Alors, (3.127) et (3.129), il est $0 < \delta(\epsilon) < \delta_0/2$ tel que

$$\mid 0_1(\delta) \mid + \mid 0_2(\delta) \mid \leq \epsilon \tag{3.130}$$

pour tout $0 < \delta \leq \delta(\epsilon)$ et tout k. Utilisation (3.125), on obtient pour $0 < \delta < \delta_0/2$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega (A-B)dxdt &= \int_0^T \int_\Omega \psi_\delta(x)(A-B)dxdt + 0_2(\delta) \\
&= 0_2(\delta) + \lim_{k\longrightarrow\infty} \int_0^T \int_\Omega \psi_\delta(x)(A_k - B_k)dxdt \\
&= 0_2(\delta) + \lim_{k\longrightarrow\infty} \{ \int_0^T \int_\Omega (A_k - B_k)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega (\psi_\delta(x) - 1)A_k dxdt - \int_0^T \int_\Omega \psi_\delta(x) B_k dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega B_k dxdt \}.
\end{aligned} \tag{3.131}$$

pour $0 < \delta \leq \delta(\epsilon)$, nous utilisons (3.126),(3.128)and (3.130) pour arriver à

$$\int_0^T \int_\Omega (A-B)dxdt \geq -\epsilon + \lim_{k\longrightarrow\infty} sup \int_0^T \int_\Omega (A_k - B_k)dxdt. \tag{3.132}$$

Depuis ϵ est arbitraire, on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega (A-B)dxdt \geq \lim_{k\longrightarrow\infty} sup \int_0^T \int_\Omega (A_k - B_k)dxdt, \tag{3.133}$$

on montre que (3.121). La combinaison ,(3.113) (3.114), (3.115), (3.119), (3.120) et (3.121), on concluons que (3.97) est satisfaite. Enfin, (3.118) implique

$$(u_k - \phi)^- \longrightarrow (u - \phi)^- \quad \text{dans} \quad C([0,T]\,; L^2(\Gamma_2)). \tag{3.134}$$

chacun u_k satisfais (3.77) et donc

$$u \geq \phi, \qquad \text{presque partout dans} \quad \Gamma_2, \text{pour chaque} \quad t, \tag{3.135}$$

d'où (3.97) vérifiée. Enfin la preuve du théorème.

■

Conclusion

- Dans ce mémoire, on établit des résultats d'existence et d'unicité de L'IV type hyperbolique de première espèce on trouve une solution faible au sens de défintion (26) , et les problèmes avec frottement resté ouvert de même pour les problèmes non linéaire.

Résumé

Le travail principal de ce mémoire est étudier L'existence et l'unicité d'inéquation variationnelle type hyperbolique par la méthode de Compacité.

Les mots clés : Inéquation variationnelles elliptique, Inéquation variationnelles parabolique, Inéquation variationnelles hyperbolique, Compacité.

Abstract

The main work of this thesis is to study the existence and uniqueness of parabolic variational inequality.

Keywords : elliptic variational inequality, parabolic variational inequality, hyperbolic variational inequality

Bibliographie

[1] H. Brézis, Analyse fonctionnelle théories et application.Dunod 1999.

[2] R.Glowinski.Lectures on Numerical Methods For Non-Linear variational Problems.Bombay 1980.

[3] A.Signorini,Sopra alcune questioni di elastostatica, Atii Societa Italianna per il Progresso della Scienze, 1933.

[4] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964.

[5] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[6] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967.

[7] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1, 1-168, 1972.

[8] H. Brézis, équations et inéquations non linéires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1, 115-175, 1968.

[9] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[10] J. L. Lions, Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire Dunod, Paris, 1969.

[11] U. Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[12] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[13] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[14] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières, Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.

[15] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1984.

[16] Matthew Rudd and Klaus Schmitt, Variational Inequalities of Elliptic and Parabolic Type, Salt Lake City, Utah 84112-0090,May 20,2002.

[17] G.Duvaut J.L.Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Berlin Heidelberg New York,1976.

[18] Jacques-Louis Lions, Sur les problémes unilatéral, 1968/69, N°350.

[19] R.Glowisski, Lectures on Numerical Methods for Non-Linear variational Problems,1980, Bomby.

[20] J. U. Kim, A boundary thin obstacle problem for a wave equation, Comm. Partial Differential equations 14 (1989) 1011-1026.

[21] M. Cocou, Existence of solutions of Signorini problems with friction. International Journal of Engineering Science 1984 ; 22(5) :567–575.

[22] Eck and Jarusek, Existence results for the static contact problem with Coulomb friction, Math. Models Methods Appl. Sci., 8, 445-468 (1998).

[23] M. T. Cao, P. Quintela, Existence of solutions for a dynamic Signorini's contact problem, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 355-360.

[24] Nécas, Jarusek and Haslinger, On the solution of the variational inequality to the signorini problem with small friction, Boll. 1981.

[25] Y. Kato, Signorini problem with friction in linear elasticity, Japan J. Appl. Math., 4, 237-268 (1987).

[26] R. Hassani, P. Hild et I. Ionescu, Sufficient conditions of non-uniqueness for the Coulomb friction problem.Math. Meth. Appli. Sci. 2004 ; 27 :47-67.