جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الفيزياء


رقم الترتيب:.............

الرقم التسلسلي:..........

**مذكرة: ماستر أكاديمي**

مجال: علوم المادة

فرع: فيزياء

تخصص:فيزياء الإشعاعات، كاشف وبصريات إلكترونية


من إعداد الطالبة: قزال فتيحة


بعنوان:

# النظرية الكهرومغناطيسية في الفضاء اللاتبادلي

نوقشت يوم:...../2017/05

أمام لجنة المناقشة المكونة من:

| | | | |
|---|---|---|---|
| مفتاح محمد الطيب | أستاذالتعليم العالي | جامعة ورقلة | رئيسا |
| بن الزاير هجيرة | أستاذ محاضر (أ) | جامعة ورقلة | مناقشا |
| بن بيتور محمد عبد الوهاب | أستاذ محاضر (أ) | جامعة ورقلة | مشرفا |

**الموسم الجامعي: 2017/2016**

# إهداء

أهدي هذا العمل المتواضع

إلى الشمعة التي أضاءت ليالي مضحية بأغلى ما لديها............أمي الغالية.

إلى النور الذي ينير درب نجاحي، أبي الحبيب

إلى زينة الحياة وشموع الدرب إخوتي وأخواتي

لزهرات منزلنا بنات وأولاد إخوتي

إلى من قاسموني الفرحة و الحزن أقاربي الأعزاء

إلى من شاركوني النجاح وشجعوني للنهوض من جديد بعد الفشل.....صديقاتي

إلى كل طلبة سنة ثانية ماستر فيزياء الإشعاعات كاشف وبصريات إلكترونية.دفعة 2017.

إلى كل من هو منقوش في عمق القلب ولم يذكره حبر القلم

أهدي هذا العمل

"فتيحة قزال"

# شكر وعرفان


بسم الله الرحمن الرحيم وصلّى الله على سيدنا ومولانا محمد معلم البشرية وخير البرية وعلى آله وصحبه وسلم تسليما كثيرا

الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله، ومن باب الاعتراف بالجميل لا يسعني إلا أن أتقدم ببالغ عبارات الشكر و الامتنان للأستاذ الفاضل **"بن بيتور محمد عبد الوهاب"** مشرفي في المذكرة وموجهي في كل مشكلة، لم يبخل علي في حل أي معضلة، أشكره لما بذله من جهد ومتابعة طيلة مدة الإشراف، كما أتقدم بالشكر والتقدير إلى الأستاذ الفاضل" **مفتاح محمد الطيب**"على قبوله ترؤس اللجنة المناقشة و الأستاذة المحترمة **"بن الزاير هجيرة"** على قبولها مناقشة هذه المذكرة،أشكرهم على جهودهم المبذولة لتقييم هذا البحث،فآراءهم قيمة وبناءة للمذكرة

كما أشكر طاقم مخبر فيزياء الإشعاع و البلازما وفيزياء السطوح و بالأخص رئيس المخبر أستاذنا الفاضل **"خلفاوي فتحي"**

و الشكر من الأعماق إلى الأستاذ**"عيادي كمال الدين"** على قبوله ترأس اللجنة بداية, قبل إجراء بعض التغييرات

ولا أمر بدون أن أتقدم بأسمى عبارات الشكر و العرفان إلى جميع أساتذتي الكرام الذين أشرفوا ا على تكويني طيلة مشواري الجامعي ،

وإلى من وضعوا لي لبنة العلم أساتذتي في جميع مستوياتي الدراسية

كما أشكر كل من ساهم في هذا العمل وقدم لي يد المساعدة

إلى من كانوا لنا عونا في جميع حاجياتنا الإدارية.....إدارة كلية علوم المادة من مكتب العميد إلى مكتب شؤون الطلبة وقسم الدراسات

لا ننسى شكر كل عمال الجامعة من أعوان الأمن إلى..... أعوان النظافة

إلى كل من قرأ صفحة من مذكرتنا فهو شرف لنا أن نكون مصدر عون لغيرنا .....

"فتيحة قزال"

## فهرس المحتويات

## الفصل الثاني:النظرية الكهرومغناطيسية في لفضاء اللاتبادلي



## الفصل الثالث: تطبيق التصحيحات اللاتبادلية لدراسة كرة مشحونة

# مقدمة عامة

# مقدمة عامة:

– تعتبر النظرية الكهرومغناطيسية من بين أهم نظريات الفيزياء بدراستها للمجالات الكهربائية و المغناطيسية معا.

– دراسة هذه النظرية في الفضاء اللاتبادلي ظهرت حديثا لتفتح مجالات أكبر لاكتشاف العديد من الإشكاليات، بحيث تفرض فكرة "لاتبادل الفضاء" المستوحاة من نظرية الأوتار الفائقة،بمعنى أن فضاء الزمكان غير تبديلي في سلم بلانك:

$$\left[x_{\mu}, x_{\nu}\right] = i\theta_{\mu\nu}$$

على غرار مكانيك الكم التي تسلم بمبدأ هيزنبرغ الذي يعتبر فضاء الأطوار فقط غير تبديلي،أما المركبات الزمكانية فتبقى تبديليه .

– نهدف في هذا البحث إلى دراسة النظرية الكهرومغناطيسية في الفضاء اللاتبادلي، لإظهار تأثير لاتبادل الفضاء على كرة مشحونة.

- ✓ فما هي الطرق والوسائل التي تمكننا من دراسة النظرية الكهرومغناطيسية في الفضاء الغير تبديلي ؟
- ✓ وهل يمكن حدوث تغيرات بإمكانها وضع توقعاتنا في وجود تشوه للتوزيع الكهربائي بعد التصحيح ؟

– للإجابة عن هذه الإشكاليات قسمنا العمل إلى ثلاثة فصول:

1) **الفصل الأول"معادلات ماكسويل الكلاسيكية "**:محتوى هذا الفصل هو البرهان الرياضي على معادلات ماكسويل في الفضاء التبادلي بشكلها النسبي و اللانسبي

2) **الفصل الثاني "النظرية الكهرومغناطيسية في الفضاء اللاتبادلي"**:في هذا الفصل نتوصل إلى الطرق و الوسائل(المعادلات) التي تمكننا من دراسة النظرية الكهرومغناطيسية في الفضاء اللاتبادلي

3) **الفصل الثالث"تطبيق التصحيحات اللاتبادلية على كرة مشحونة"**:نطبق المعادلات المتحصل عليها في الفصل الثاني لإظهار إن كان هناك تشوهات تطرأ على التوزيعات الكهربائية بعد التصحيح،كما سنظهر الخاصية الجديدة التي تميز الشحنة الساكنة في الفضاء الغير تبديلي.

# الفصل الأول

## معادلات ماكسويل في الإلكتروديناميك الكلاسيكي

## مقدمة الفصل:1-1)

معادلات ماكسويل, عبارة عن أربع معادلات تصف سلوك وتغيرات المجالين الكهربائي والمغناطيسي , وتأثرهما مع المادة , وقد نشر جيمس كلارك ماكسويل هذه المعادلات بين 1861 و1862 بحيث أخذت 25 عاما لإثباتها في التجارب العملية, وهذه المعادلات تصف العلاقات المتبادلة بين كل المجالات الكهربائية و المغناطيسية والشحنات الكهربائية والتيار الكهربائي [1] .

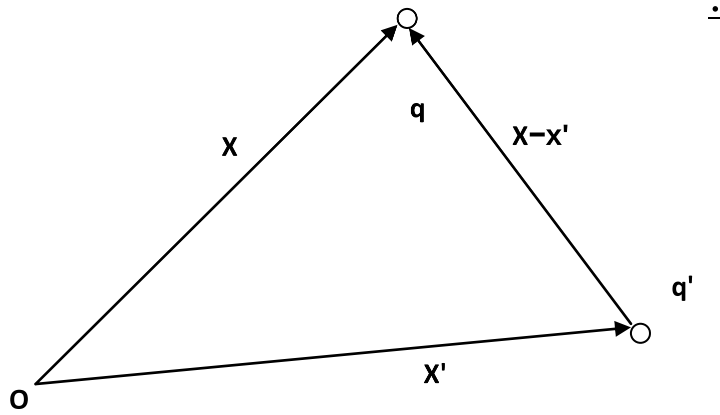
في هذا الفصل سنبرهن على معادلات ماكسويل الكلاسكية, كما سنتوصل إلى هذه المعادلات في النسبية ,ونتعرف أيضا على المقادير التنسورية التي نستخدمها في التعبير على النظرية الكهرومغناطيسية في النسبية.

## 1-2) معادلات ماكسويل اللانسبية:

### 1-2-a) نظرية غاوس Gauss:

نظرية غاوس هي نظرية رياضية تعنى بتدفق الحقول الشعاعية و عند تطبيقها على الحقل الكهربائي نتحصل على معادلة تربط بين تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح مغلق (يدعى سطح غاوس قد يكون سطحا حقيقيا أو افتراضيا) والشحنة الكهربائية الموجودة داخل الحجم المحاط :"التدفق الكهربائي عبر سطح مغلق وموجه يساوي مقدار الشحنة الكلية داخل ذلك السطح مقسوما على السماحية الكهربائية للوسط [2].

❖ **البرهان على النظرية :**




الشكل 1-1

إذا وضعنا شحنة كهربائية q بجوار شحنة كهربائية q' فإنه ينشأ عن الشحنة q قوة تستطيع جذب أو دفع الشحنة q' بقوة تتعلق طرديا بمقدار كلا الشحنتين وعكسيا مع مربع البعد بينهما,تعطى هذه القوة بالقانون التالي و هو قانون كولوم [2].

$$\vec{F} = \frac{qq'}{|x-x'|^3}|\vec{x}-\vec{x}'| .........1.1$$

- حيث $\vec{x}$ هو موضع الشحنة q و $\vec{x'}$ موضع الشحنة q'.

$$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\,\frac{N}{m} / k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}10 SI$$

إن المنطقة المحيطة بالشحنة و التي تظهر فيها آثار القوى الكهربائية على غيرها من الشحنات تسمى مجال الحقل الكهربائي للشحنة بحيث يعطى الحقل الكهربائي بالعبارة الآتية [2]:

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x-x'}{|x-x'|^3}=-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{x-x'}\right)..............2.1$$

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i'\frac{x-x_i'}{|x-x_i'|^3}...............3.1$$

لنعتبر توزيع شحني معطى بكثافة الشحنة $\rho$ يمكننا حساب الحقل الكلي الناتج عن هذا التوزيع في نقطة معينة $\vec{x}$

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}d^3x\cdot\rho(x')\frac{x-x'}{|x-x'|^3}..........4.1$$

$$\vec{E}(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}d^3x\cdot\rho(x')\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)...............5.1$$

$$\vec{E}(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\int_{v'}d^3x'\cdot\left(\frac{\rho(x')}{|x-x'|}\right)................6.1$$

إذا اعتبرنا شحنات نقطية موزعة في الفضاء فإنّ الكثافة تعطى بدالة التوزيع لديراك

$$\rho(x')=\sum_i q_i'\delta(x'-x_i')..............7.1$$

$$\vec{\nabla}\vec{E}(x)=\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}d^3x'\rho(x')\frac{x-x'}{|x-x'|^3}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}d^3x'\rho(x')\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|x-x'|}\right).....8.1$$

$$\vec{\nabla}\vec{E}(x)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}d^3x'\rho(x')\nabla^2\left(\frac{1}{|x-x'|}\right).....9.1$$

نستخدم:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{x-x'}\right)=4\pi\delta(x-x')......10.1$$

$$\vec{\nabla}\vec{E}(x)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{v'}d^3x'\rho(x')\delta(x-x')=\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}......12.1$$

ومنه تعطى معادلة غاوس بالشكل الآتي:

$$\boxed{\nabla E(x)=\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}}$$ .[3]

### b-2-1) Biot-savart:

يقوم هذا القانون بحساب الحقل المغناطيسي الناتج عن تدفق الشحنات (تيار), لنفترض تيار كهربائي يسري داخل ناقل,تعطى عبارة المجال المغناطيسي العنصري $d\vec{B}$ الناتج عن التيار وفق العبارة التالية [2].

$$d\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0 I'}{4\pi}\vec{dl}'\times\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^3}\text{..........}1.13 \quad [4]$$

مع العلم أن وحدة الحقل المغناطيسي في نضام SI تعطى ب (T) Tesla [2] [4]

لدينا $\vec{j}$ يمثل شعاع كثافة التيار ويعطى

بوحدة A/m² بحيث:

$$I'dl'=\vec{j}d^3x'$$

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}d^3x'.\vec{j}'(\vec{x}')\times\frac{x-x'}{\left|x-x'\right|^3}\text{..............}1.14$$

$$\vec{B}(\vec{x})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}d^3x'\vec{j}'(\vec{x}')\times\vec{\nabla}\frac{1}{\left|x-x'\right|}\text{..............}1.15$$

ليعطى قانون Biot-savart بالآتي:

لدينا

$$\vec{a}\times\vec{\nabla}\cdot\alpha=-\vec{\nabla}\times(\alpha\vec{a})+\alpha\vec{\nabla}\times\vec{a}$$

$$-\vec{j}(x')\wedge\vec{\nabla}_x\left(\frac{1}{\left|x-x'\right|}\right)=\vec{\nabla}\wedge\left(\frac{\vec{j}(x')}{\left|x-x'\right|}\right)$$

ومنه

$$\vec{B}(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\wedge\int d^3x'\frac{j(x')}{\left|x-x'\right|}\text{...}16.1$$

لدينا : $\nabla \cdot \nabla \times a = 0$

$$\nabla \cdot B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \nabla \times \int_V d^3x' \frac{\vec{j}(x')}{|x - x'|} = 0 \text{.....} 17.1$$

.[3]

$$\nabla \times B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \nabla \times \int_{v'} d^3x' \frac{j(x')}{|x - x'|} \right) \text{......} 18.1$$

لدينا:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

ومنه: $$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3x' \vec{\nabla} \frac{j(\vec{x}')}{|x - x'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}) \Delta \left( \frac{1}{|x - x'|} \right) \text{......} 19.1$$

$$\vec{\nabla}\left( \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}\left( \frac{1}{|x - x'|} \right) \right) = \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \frac{1}{|x - x'|} \right) + (\vec{j} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla}\left( \frac{1}{|x - x'|} \right) \text{......} 20.1$$

اذا: $$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \; \vec{j}(\vec{x}') \nabla^2 \left( \frac{1}{|x - x'|} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' (\vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|x - x'|} \right) \text{.......} 21.1$$

لدينا: $$\vec{\nabla}\left( \frac{1}{|x - x'|} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{|x - x'|} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \nabla^2 \left( \frac{1}{|x - x'|} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' (\vec{j}(\vec{x}') \vec{\nabla}') \nabla' \left( \frac{1}{|x - x'|} \right) \text{.......} 22.1$$

لنجد التكامل الآتي:

$$\int d^3\vec{x}' (\vec{j}(\vec{x}') \vec{\nabla}') \nabla' \left( \frac{1}{|x - x'|} \right) \text{........} 23.1$$

$$= e_k \int d^3x' \nabla \left\{ j(x') \left[ \frac{\partial}{\partial x'_k} \left( \frac{1}{|x - x'|} \right) \right] \right\} - \int d^3x' [\nabla' \cdot j(x')] \nabla' \left( \frac{1}{|x - x'|} \right) \text{....} 24.1$$

$$\int_v (\nabla \cdot a) d^3x = \oint_s ds \cdot a$$

$$\Rightarrow$$

$$= e_k \int_s ds \cdot j(x') \frac{\partial}{\partial x'_k}\left(\frac{1}{|x-x'|}\right) - \int_{v'} d^3x [\nabla' \cdot j(x')] \nabla' \left(\frac{1}{|x-x'|}\right) .......25.1$$

نلاحظ أن أول تكامل مهمل لأنه حسب نظرية غاوس تكامل سطح على مجال واسع بعيد عن موقع المنبع $j(x')$

يكون مهمل , وبما أنا التيار مستقر فإنه: $\nabla' \cdot j(x') = 0$

$$\nabla \times B(x) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} d^3x' \, j(x') \nabla^2 \left(\frac{1}{|x-x'|}\right) .......26.1$$

لدينا:

$$-\nabla^2 \left(\frac{1}{|x|}\right) = 4\pi \delta(x-x') \; .........27.1$$

$$\nabla \times B(x) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} d^3x' \, j(x') \delta(x-x') = \mu_0 j(x) ....28.1$$

ومنه تعطى معادلة آمبير بالشكل الآتي:

$$\boxed{\nabla \times B(x) = \mu_0 j(x)} \quad .....................-29.1$$

.[3]

- **انزياح التيار لماكسويل:**

لتكن $j(t,x)$ كثافة التيار الكهربائي متغيرة مع الزمن .

في المعادلة 28-1 تكون كثافة التيار $\nabla . j(x) = 0$ , أما في حالة مصدر غير مستقر(يتغير مع الزمن)فإن الحقل يحقق معادلة الاستمرارية $\nabla . j(t,x) = \frac{-\partial \rho(t,x)}{\partial t}$

لإيجاد معادلة آمبير في هذه الحالة نستخدم نفس الخطوات السابقة فنجد المعادلة 1-25

$$\nabla \times B(x) = e_k \int_s ds.j(x') \frac{\partial}{\partial x_k'}\left(\frac{1}{|x-x'|}\right) - \int_{v'} d^3x\left[\nabla'\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)\right]......25.1$$

$$= e_k \int d^3x' \nabla \left\{ j(x') \left[ \frac{\partial}{\partial x'_k}\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)\right]\right\} - \int d^3x' [\nabla' \cdot j(x')] \nabla' \left(\frac{1}{|x-x'|}\right)....24.1$$

$$= \mu_0 j(t,x) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 E(t,x).......31.1$$

بحيث

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\int_{v'} d^3x' \rho(t,x')\nabla'\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'} d^3x' \rho(t,x')\nabla\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)\right]........32.1$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int_{v'} d^3x' \frac{\rho(t,x')}{|x-x'|}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} E(t,x)......33.1$$

ومنه يعطى قانون آمبير المعدل ب:

.

$$\boxed{\nabla \times B(x) = \mu_0 j(t,x) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 E(t,x)....34.1}$$

.[4،3]

## C-2-1) قانون فاراداي هنري:

إذا اعتبرنا ناقلا كهربائيا يكون دارة مغلقة موجودة تحت تأثير حقل مغناطيسي خارجي متغير مع الزمن B(r,t) يلاحظ مرور تيار كهربائي في الدارة , إن وجود التيار الكهربائي يدل على القوة المحركة الكهربائية $V_\varepsilon$ التي تؤثر في الدارة وقياس هذه القوة يبين أنها تتعلق بسرعة تدفق الحقل المغناطيسي $\phi_B$ لكن بإشارة معاكسة [2].

$$V_{\varepsilon} = -\frac{d\phi}{dt} \;....35.1$$

حيث : $\phi_B = \iint \vec{B} d\vec{s} \;.....36.1$

القوة المحركة الكهربائية $V_{\varepsilon}$ تنتج حقل كهربائي يرتبط بها عن طريق العلاقة التالية :

$$V_{\varepsilon} = \oint \vec{E} d\vec{l} \;.....37.1$$

بإستخدام المعادلات (37.1),(36.1),(35.1) نكتب:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d \iint B \cdot ds}{dt} \;........38.1$$

بتطبيق نضرية ستوكس على الحقل الكهربائي:

$$-\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint \left(-\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{s} \;.....39.1$$

وتعويضها في المعادلة 1-38 نجد:

$$\iint \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\vec{S} = 0 \;........40.1$$

وبما أن هذه المعادلة تكن صالحة من أجل أي سطح غير مغلق مرتكز على أي محيط مغلق وبالتالي يجب أن تحقق المعادلة التالية

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial B}{\partial t} \;........45.1$$

ومنه نكتب معادلة فاراداي – هنري بالشكل الموالي:

.[2]

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \;........ 46.1}$$

## 3-1) شعاع الكمون الرباعي:

يمكن أن تعين الظواهر الكهربائية والمغناطسية انطلاقا من كمون رباعي مركباته في فضاء Minkowski رباعي البعد $A^{\mu}\left(\vec{A},\frac{V}{C}\right)$ حيث يمثل $\vec{A}$ الكمون الشعاعي و V الكمون السلمي .

لدينا في معادلة ماكسويل $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$ إذن يوجد شعاع $\vec{A}$ يحقق $\vec{B}=\vec{rot}\,\vec{A}$, لكن إذا عرفنا $\vec{A}$ بهذه الطريقة لا يمكن تعيينه بشكل وحيد بينما الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ مقداران يعينان بصورة وحيدة.[2].

❖ إذا فرضنا: $A'^{\mu}\left(A',\frac{V'}{C}\right)$ كمون شعاعي آخر بحيث $\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}f$

$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}(\vec{A}+\vec{\nabla}f)=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)$ [2].

لذا نستعمل المعيار (gauge) وهو شرط lorentz اوشرط colomb وهما على التوالي :

$$\begin{cases} div\vec{A}+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial V}{\partial t}=0......47.1 \\ div\vec{A}=0.....48.1 \end{cases}$$

❖ وبذلك نقول أن الظواهر الكهربائية و المغناطيسية يمكن دراستها انطلاقا من كمون رباعي مركباته في فضاء Minkowski رباعي البعد $A^{\mu}\left(\vec{A},\frac{V}{C}\right)$ [2،5]

وتعطى عبارتي الحقل الكهربائي والمغناطيسي كالآتي :

$$[2]\begin{cases} E(x,t)=-\vec{\nabla}V-\dfrac{\partial A}{\partial t}...........49.1 \\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}......50.1 \end{cases}$$

## 4-1) مبدأ الفعل الأدنى:

ينص هذا المبدأ على أنه في حالة الجمل الهولومونية المقيدة بقيود مثالية و التي تؤثر عليها قوى فعالة كمونية,على أنه يوجد بين مجموعة الطرق الممكنة لإنتقال الجملة الميكانكية من وضع A إلى آخر B,طريق واحد حقيقي هو ذلك الموافق للقيمة الحدية لتابع الفعل المحدد بالعلاقة

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt........51.1$$

وبكلمات أخرى يؤول تغير لتابعي S إلى الصفر من أجل مسار الحركة الحقيقية للجملة الميكانكية

$$\partial S = \partial \int Ldt = 0.......52.1$$

تنتج من مبدأ الفعل الأصغر نتيجة هامة, وهي أن تابع لاغرانج لجملة ميكانكية ما محدد فقط بدقة إمكانية إضافة إليه مشتق كلي بالنسبة للزمن من تابع ما للإحداثيات والزمن بالفعل لنأخذ تابعي لاغرانج لجملة ميكانيكية واحدة $L$ و $L'$ تربط بينهما العلاقة التالية:[4]

$$L' = L + \frac{d}{dt} f.......53.1$$

ولدينا

$$S' = \int L'dt = \int \left( L + \frac{d}{dt} f \right) dt \Rightarrow S' = \int Ldt + cont.....54.1:$$

ومنه: .

$$\boxed{\delta S' = \delta S = 0.......55.1}$$

.[6]

## 5-1) معادلات ماكسويل النسبية(الشكل الموتوري(التنسوري) لمعادلات ماكسويل):

### 1-5-1) مفاهيم:

إن التعبير عن النظريات و الظواهر الفيزيائية يعتبر صعب في أغلب المسائل, لذلك نلجئ إلى مفاهيم رياضية بدون المساس بالمعنى الفيزيائي.[2].

❖ نعرف شعاع الكمون الرباعي المعاكس التغير Contravariant الذي مربعه يبقى صامد أمام تحويلات لورنس Lorentz ب: 56.1..........

$$A^{\mu} \equiv \begin{pmatrix} \frac{V}{C} = A^0 \\ A^1 = A_x \\ A^2 = A_y \\ A^3 = A_z \end{pmatrix}$$

وشعاع الكمون الرباعي الموافق التغير convariant ب: 57.1........

$$A_{\mu} = \begin{pmatrix} A_0 = \frac{V}{C} \\ A_1 = -A_x \\ A_2 = -A_y \\ A_3 = -A_z \end{pmatrix}$$

بحيث:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{V}{C} & -A_x & -A_y & -A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{V}{C} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{V^2}{C^2} - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2 \text{.......58.1}$$

[7،5،2]

$$\boxed{A^2 = \frac{V^2}{C^2} - \vec{A}^2 \text{......59.1}}$$

❖ $A^{\mu} = e^{\mu} e_{\nu} A_{\nu} \Rightarrow A^{\mu} = \eta^{\mu\nu} A_{\nu}$ عملية الجمع تكون بالدليل $\nu$ بينما الدليل $\mu$ يكون هنا ثابت وتعطى مترية الفضاء $\eta$ بالمصفوفة التالية: 60.1........

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

بحيث $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$

1-5-2) الصيغة الرباعية لمعيار Lorentz: ذكرنا سابقا معيارين 45-1 و44-1 على التوالي:

1. معيار coulomb يعرف ب: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$.......61.1

2. معيار Lorentz يعرف ب: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t}=0$.....62.1

لكن معيار coulomb لا يوافق التغيير Contravariant بمعنى "أنه إذا كان محقق في معلم ما لن يكون محقق في معلم آخر عطالي".

لهذا نستخدم في النسبية معيار Lorentz : $\vec{\nabla}.\vec{A}-\frac{1}{C}\frac{\partial V}{\partial t}=0$ , فلنكتب الصيغة الرباعية لهذا المعيار:

لدينا : $x^0=Ct\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x^0}=\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}$.......63.1 فنكتب $\vec{\nabla}.\vec{A}-\frac{\partial\left(\frac{V}{C}\right)}{\partial x^0}=0$.....64.1 $\Leftrightarrow\frac{\partial\left(V/C\right)}{\partial x^0}-\vec{\nabla}\vec{A}=0$

مع العلم أنّ $\partial^\mu\equiv\begin{pmatrix}\partial_\mu & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$ و $\partial^\mu\equiv\begin{pmatrix}\partial^0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$

$$=\frac{\partial}{\partial x^0}A^0-\frac{\partial}{\partial x}A_x-\frac{\partial}{\partial y}A_y-\frac{\partial}{\partial z}A_z=\frac{\partial}{\partial x^0}A^0+\frac{\partial}{\partial x}\left(-A_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-A_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-A_z\right)\ ...65.1$$

$$=\partial^0A_0+\partial^1A_1+\partial^2A_2+\partial^3A_3=\partial^\mu A_\mu......66.1$$

ومنه فالشكل التونسوري لمعيار لورنتز هو: $\boxed{\partial^\mu A_\mu=0......67.1}$ [5،2]

1-5-3) تنسور الحقل الكهرومغناطيسي:Tenseur du champs Electromagnétique:

يعرّف تنسور الحقل الكهرومغناطيسي $F_{\mu\nu}$ بدلالة الكمون الرباعي $A_\mu$ و المشتق التفاضلي $\partial_\mu$ كما يلي:

$$\boxed{F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu.......68.1}$$

يمكن الحصول على عناصر مصفوفة التنسور الكهرومغناطيسي بدلالة مركبات الحقل الكهرومغناطيسي كالآتي:

لدينا: $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$.........69.1

1) 
$$i = 0 \Rightarrow F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 .......70.1$$
$$j = 1 \Rightarrow -\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}A_x - \frac{\partial}{\partial x}\frac{V}{C} = -\frac{1}{C}\left(\frac{\partial}{\partial t}A_x + \frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{E_x}{C} .......71.1$$

نعمم من أجل $i = 1,2,3$ : 72.1..................
$$\left.\begin{array}{ll}\Leftrightarrow F_{0i} = \dfrac{E_i}{C} & \text{(عناصر السطر الأول)}\\ \Leftrightarrow F_{i0} = -\dfrac{E_i}{C} & \text{(عناصر العمود الأول)}\end{array}\right\}$$

2) من أجل $i = 1$ و $j = 2$

$$F_{12} = -\frac{\partial}{\partial x}A_y + \frac{\partial}{\partial y}A_x = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -B_z ...........73.1$$

نعمم من أجل $i = 1,2,3$ و $j = 1,2,3$ : 74.1..
$$\left.\begin{array}{l} i \neq j \Rightarrow F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B_k = -F_{ji}\\ i = j \Rightarrow F_{ij} = 0\end{array}\right\} \text{(باقي عناصر المصفوفة)}$$

ومنه مصفوفة التنسور الكهرومغناطيسي تعطى ب: 75.1.....
$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{C} & \frac{E_y}{C} & \frac{E_z}{C} \\ -\frac{E_x}{C} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{C} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{C} & -B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- يمكن الحصول على عناصر مصفوفة التنسور الكهرومغناطيسي $F^{\mu\nu}$ المعاكس للتنسور $F_{\mu\nu}$ بنفس الطريقة:

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} ......76.1$$

1)

$$i=0 \Rightarrow F_{0i}=\partial^0 A^j-\partial^j A^0 \;.....77.1$$

$$j=1 \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}A_x+\frac{\partial}{\partial x}\frac{V}{C}=\frac{1}{C}\left(\frac{\partial}{\partial t}A_x+\frac{\partial V}{\partial x}\right)=-\frac{E_x}{C}\;.......78.1$$

نعمم من أجل $i=1,2,3$ :

$$\left.\begin{aligned} &\Leftrightarrow F^{0i}=-\frac{E_i}{C} && \text{(عناصر السطر الأول)}\\ &\Leftrightarrow F^{i0}=\frac{E_i}{C} && \text{(عناصر العمود الأول)}\end{aligned}\right\}.....79.1$$

2) من أجل $i=1$ و $j=2$ :

$$F^{12}=-\frac{\partial}{\partial x}A_y+\frac{\partial}{\partial y}A_x=\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}=-B_z\;..........80.1$$

نعمم من أجل $i=1,2,3$ و $j=1,2,3$ :

$$\left.\begin{aligned} &i\neq j \Rightarrow F_{ij}=-\varepsilon_{ijk}B_k=-F_{ji}\\ &i=j \Rightarrow F_{ij}=0\end{aligned}\right\}..........81.1$$

(باقي عناصر المصفوفة)

ومنه فإن المصفوفة المعاكسة لتنسور الحقل الكهرومغناطيسي هي:

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-E_x}{C} & \frac{-E_y}{C} & \frac{-E_z}{C}\\ \frac{E_x}{C} & 0 & -B_z & B_y\\ \frac{E_y}{C} & B_z & 0 & -B_x\\ \frac{E_z}{C} & -B_y & -B_x & 0\end{pmatrix}........82.1$$

## 1-5-4) تنسور الحقل الكهرومغناطيسي $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ (Le teuseur dual):

ويعرّف كما يلي: $\widetilde{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\;.......1-52$

نحصل على عناصر مصفوفة $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ كالآتي:

$$\tilde{F}_{01}=\frac{1}{2}\varepsilon_{0123}F_{23}+\frac{1}{2}\varepsilon_{0132}F_{32}..........83.1$$

$$=\frac{1}{2}(-1)(-B_x)+\frac{1}{2}B_x\Rightarrow\tilde{F}_{01}=B_x........84.1$$

$$\tilde{F}_{12}=\frac{1}{2}\varepsilon_{1230}F_{30}+\frac{1}{2}\varepsilon_{1203}F_{03}..........85.1$$

$$=\frac{1}{2}(-1)\left(-\frac{E_z}{C}\right)+\frac{1}{2}(1)\frac{E_z}{C}\Rightarrow\tilde{F}_{12}=\frac{-E_z}{C}..........86.1$$

$$\tilde{F}_{13}=\frac{1}{2}\varepsilon_{1302}F_{02}+\frac{1}{2}\varepsilon_{1320}F_{20}.......87.1$$

$$=\frac{1}{2}(-1)\left(\frac{-E_y}{C}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{E_y}{C}\right)\Rightarrow\tilde{F}_{13}=\left(\frac{E_y}{C}\right)..........88.1$$

بنفس الطريقة نكمل بقية العناصر : [5،2]

$$\tilde{F}_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -B_x & -B_y & -B_z\\ B_x & 0 & \frac{-E_z}{C} & \frac{E_y}{C}\\ B_y & \frac{E_z}{C} & 0 & \frac{-E_x}{C}\\ B_z & -\frac{E_y}{C} & \frac{E_x}{C} & 0\end{pmatrix}........89.1$$

## 1-5-5) معادلات أولر لاغرونج (Euler-lagrange) و الصيغة النسبية لمعادلات ماكسويل:

نعرّف كثافة لاغرونج للحقل الكهرومغناطيسي ب: $L=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.....90.1$

كما نعرف معادلات أولر لاغرونج (Euler-lagrange) ب: $\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right)-\frac{\partial L}{\partial A_\nu}=0.......91.1$

يمكن إيجاد المعادلات النسبية لماكسويل باستخدام 53-1 و 54-1 :

$$L=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)$$

$$=-\frac{1}{4}\left[(\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu)-(\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu)-\partial_\nu A_\mu\partial^\mu A^\nu+\partial_\nu A_\mu\partial^\nu A^\mu\right]......92.1$$

نلاحظ أنّ :

$$\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu = \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu \text{..........}93.1$$

ومنه :

$$L = -\frac{1}{4}\left[\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu\right) - \left(\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu\right) - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu\right] \text{.......}94.1$$

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = -\frac{1}{4}\left[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu\right] = -\frac{1}{4}\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial^\nu A^\mu \text{......}95.1$$

$$\partial\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right) = -\frac{1}{4}\partial^\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu \partial^\nu A^\mu = -\frac{1}{4}\square A^\nu \text{..........}96.1$$

كما أنّ :

$$\frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0 \text{......}97.1$$

أي أنّ : $\square \quad A^\nu = 0 \text{.......}98.1$ بحيث يسمى $\square$ رمز الدالمباير (d'Alembert):

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \text{.........}99.1$$

وبالتالي

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \text{.......}100.1$$

$$= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \underbrace{\cancel{\partial^\nu \partial_\mu A^\mu}}_{\text{gauge}} = 0 \text{..........}101.1$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \text{.........}102.1$$

ومنه فإن معادلات ماكسويل النسبية تكتب كالآتي :

$$\begin{cases}\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0\end{cases} \text{........}103.1$$ [7،5،2]

<u>لنستخرج معادلات ماكسويل اللانسبية انطلاقا من معادلات ماكسويل النسبية:</u>

1)

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \text{..........}104.1$$

$$\partial^\mu F_{\mu 0} = \partial^0 \cancel{F_{00}} + \partial^1 F_{10} + \partial^2 F_{20} + \partial^3 F_{30} \text{.........}105$$

$$= \frac{1}{C}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{C}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{1}{C}\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \text{........}106.1 \Leftrightarrow$$ معادلة غاوس في الفراغ

2)

$$\partial^{\mu} F_{\mu 1} = \partial^0 F_{01} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{21} + \cancel{\partial^3} F_{31} .......107.1$$

$$= \frac{1}{C}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = 0.........108.1$$

$$= \frac{1}{C}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_x = 0 \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_x \Rightarrow \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_x = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} .......109.1$$

$$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .......110.1 \Leftrightarrow .$$ معادلة أمبير في الفراغ

3)

$$\partial^{\mu}\tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial^{\mu}F_{\mu 0} = \partial^0 F_{00} + \partial^1 F_{10} + \partial^2 F_{20} + \partial^3 F_{30} = 0......111.1$$

$$\partial^{\mu}F_{\mu 0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-B_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-B_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-B_z\right) = 0......112.1$$

$$\partial^{\mu}F_{\mu 0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0.....113.1$$

$$\partial^{\mu}F_{\mu 1} = \partial^0 F_{01} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} = 0......114.1$$

$$\partial^{\mu}F_{\mu 1} = \frac{1}{C}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{1}{C}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = 0......115.1$$

$$\frac{1}{C}\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{1}{C}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = \nabla\times E.........116.1 \Leftrightarrow$$ قانون فراداي – هنري

## 6-1) جدول يلخص معادلات ماكسويل:

| المعنى الفيزيائي | الصيغة التكاملية | الصيغة التفاضلية | المعادلة |
|---|---|---|---|
| تدفق الحقل المغناطيسي عبر سطح مغلق و موجه يكون معدوم(التدفق محفوظ). | $\oiint_s \vec{B}\vec{ds} = 0$ | $div\vec{B} = 0$ | 1 |
| تجوال الحقل الكهربائي عبر محيط مغلق و موجه يساوي إلى التناقص في سرعة تدفق المغناطيسي عبر السطح المغلق المرتكز على المحيط | $\oint \vec{E}\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}\vec{ds}$ | $\overrightarrow{Rot\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | المغلق(التحريض الكهرومغناطيسي). |
| 3 | $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ | $\oiint_s (\varepsilon_0 \vec{E})\overrightarrow{ds} = \sum q_{\text{int}}$ | تدفق الحقل $\varepsilon_0 \vec{E}$ عبر سطح مغلق وموجه يساوي مجموع الشحن الموجودة داخله(نظرية Gauss). |
| 4 | $\overrightarrow{Rot \frac{\vec{B}}{\mu_0}} = \left( J + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ | $\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} dl = \iint_s \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t} \right) \overrightarrow{ds}$ | تجوال الحقل $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ عبر محيط مغلق وموجه يساوي إلى تدفق شعاع التيار الكلي $\left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t} \right)$ عبر السطح الغير مغلق المرتكز على المحيط المغلق. |

[2]

## 7-1) خلاصة:

بعد الحصول على معادلات ماكسويل في الفضاء التبادلي بشكلها النسبي و الغير نسبي, نشير إلى أنّ تطبيقها ذا مجال واسع،مكّن من تطور الكثير من التقنيات، فهي معادلات تربط بين الكهرباء والمغناطيسية .

تعرُّفنا عليها في هذا الفصل وخاصة بشكلها التنسوري سيساهم في تسهيل عملية بحثنا العلمي(في الفضاء اللاتبادلي) و التي سنتطرق إلى إستخدامها في الفصول الآتية.

# الفصل الثاني

## النظرية الكهرومغناطيسية في الفضاء اللاتبادلي

## 2-1) مدخل:

في مكانيك الكم نسلم بمبدأ هيزنبرغ :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \Leftrightarrow \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

هذا يعني أنّ فضاء الأطوار في مكانيك الكم يصبح غير تبديلي , أمّا المركبات الزماكانية فتبقى تبديليه $[x_\mu, x_\nu] = 0$

إلاّ أنّ نظرية الأوتار ذهبت الى أبعد من هذا و اعتبرت أنّ فضاء الزمكان غير تبديلي أيضا في سلّم بلانك :

$$[x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu}$$

و إستوحاءا من هذه الفرضية جاءت فكرة "لا تبادل الفضاء" , وقد قاد هذا أيضا إلى أنّ كل حقول Jauge غير تبديلية ومن بين هذه الحقول , الحقل الكهرومغناطيسي .

- ✓ نهدف في هذا الفصل إلى الوصول لعبارة الحقلين الكهربائي و المغناطيسي ومعادلات ماكسويل اللاتبادلية.
- ✓ فما هي الطرق و الوسائل التي تمكننا من دراسة النظرية الكهرومغناطيسية في الفضاء الغير تبديلي ؟
- ✓ وهل تتغير عبارات المقادير الكهرومغناطيسية توقعا لإحداث تشوّه في التوزيعات الكهربائية بعد التصحيح؟

## 2-2) مفاهيم:

- ✓ يعبر عن المقادير الفيزيائية في الفضاء اللاتبادلي بمؤثرات[8]
- ✓ نستخدم كآلية للبحث التحليل التنسوري للكهروديناميك
- ✓ يتأسس عملنا في الكهرومغناطيسية في الفضاء اللاتبادلي على الفرضية المستوحاة من نظرية الأوتار الفائقة [8،9،10] $[x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu}$......1.2 وهي تعني لاتبادل فضاء الزمكان , بحيث $\theta^{\mu\nu}$ هي مركبات تنسور ضد تناظري $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$ (Anti Symétrique), مصفوفته تعطى كالآتي :

$$\theta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\ -\varepsilon^1 & 0 & \beta^3 & -\beta^2 \\ -\varepsilon^2 & -\beta^3 & 0 & \beta^1 \\ -\varepsilon^3 & \beta^2 & -\beta^1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta^{0i} = \varepsilon^i \\ \theta^{ij} = \varepsilon^{ijk}\beta_k \end{cases} \text{..........2.2}$$

- يعطى محدد التنسور $\theta_{ij}$ في حدود سلم بلانك : $[9،8]\left|\theta_{\mu\nu}\right| = \dfrac{1}{\lambda_{NC}^2} \approx 1{,}5395.10^{-36} m^2 [4]$

مع العلم أنّ طول بلانك يأخذ القيمة : $l_p = \sqrt{\dfrac{Gh}{2\pi C^3}} \approx 1{,}6.10^{-36} m$

- ✓ في الفضاء اللاتبادلي نعرّف عبارة جداء النجم فيما بين المقادير الفيزيائية كالآتي [8,9].:

$$\left(\hat{f} * \hat{g}\right)(x) := e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu \partial'_\nu} \hat{f}(x)\ \hat{g}(x')_{|x=x'} .......3.2$$

- ✓ ذكرنا آنفا أنّ كل المقادير الفيزيائية في الفضاء اللاتبادلي تصبح مؤثرات وللتعامل معها نستخدم تطبيق Seiberg – Witten [11]

## 3-2) تطبيق Seiberg – Witten [11]:

- ❖ يسمح هذا التطبيق بكتابة حقول gauge $\left(\hat{A}_\mu\right)$ في الفضاء اللاتبادلي على شكل سلسلة اضطراب لحقول gauge التبادلية

- ❖ هو تطبيق صالح لكل نظرية gauge التي تفرض الشرط:

$$\left[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu\right] = i\theta^{\mu\nu} ..........4.2$$

- ❖ أين يعتبر $\theta^{\mu\nu}$ معامل الاضطراب في هذا التطبيق [9،11،8]

- ❖ العلاقة بين $\hat{A}_\mu$ من نظرية gauge اللاتبادلية ونظرية التبادل $A_\nu$ والتي أنشئت من قبل تطبيق S.W تعطى ب:

$$[9،11]\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial \theta^{\alpha\beta}} = -\dfrac{1}{8}\left\{\hat{A}_\alpha, \partial_\beta \hat{A}_\mu + \hat{F}_{\beta\mu}\right\}_* - (\alpha \leftrightarrow \beta) \\ \hat{A}_{\mu|\theta=0} = A_\mu \end{cases} ..........5.2$$

- ❖ حل المعادلات السابقة يعني تحديد كل حد اضطراب:

$$[11]\quad \begin{aligned} \hat{A}_\mu &= A_\mu + \hat{A}_\mu^{(1)} + A_\mu^{(2)} + .....\ \ .......6.2 \\ \hat{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} + \hat{F}_{\mu\nu}^{(1)} + \hat{F}_{\mu\nu}^{(2)} + .....\ \ ........7.2 \end{aligned}$$

أي أن المقدار اللاتبادلي يساوي المقدار التبادلي مضاف إليه عدّة تصحيحات (اضطرابات) , مع العلم أننا سنكتفي في هذا البحث بالتصحيح الأوّل فقط [11] , فهو التصحيح الذي له تأثير أكبر .

❖ يتعلق كل حد اضطراب بدرجة معينة ل $\theta^{\alpha\beta}$ , و يعطي التطبيق الحد الأول لتصحيح مؤثري كمون الحقل و تنسور الحقل الكهرومغناطيسي ب :

$$[8]\quad \begin{aligned} \hat{A}_{\mu}^{(1)} &= -\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}A_{\alpha}\left(\partial_{\beta}A_{\mu}+F_{\beta\mu}\right).....8.2 \\ \hat{F}_{\mu\nu}^{(1)} &= \theta^{\gamma\delta}\left(F_{\mu\gamma}F_{\nu\delta}-A_{\gamma}\partial_{\delta}F_{\mu\nu}\right)........9.2 \end{aligned}$$

## 4-2) مبدأ الفعل الأدني:

كما تمّ ذكر نص هذا المبدأ في الفصل الأول, فسنكون بحاجة للعمل به في هذا الفصل لتبسيط بعض العبارات في الفضاء اللاتبادلي بحيث يعطى تابع الفعل ب:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} ldt \Leftrightarrow S=\int L\ d^4x........10.2$$

مع العلم أن $l=\iiint L\ dx$ بحيث $L$ هي كثافة لاغرونج $L=\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}........11.2$

أي أن تابع العمل في الفضاء اللاتبادلي :

$$[12]\ \hat{S}=-\frac{1}{4}\int d^4x\hat{F}^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}+A_{\mu}J^{\mu}........12.2$$

## 5-2) *عبارة كثافة لاغرونج المصححة إلي الحد الأول في الفضاء اللاتبادلي :*

- يعطي تطبيق S-W تصنيف لعدّة تصحيحات لعبارة كثافة لاغرونج في الفضاء اللاتبادلي حسب درجة معامل الاضطراب θ :

$$[8.9.10.11]\ L=L+\hat{L}^{(1)}+...........13.2$$

- مع العلم أنّنا سنبقي على التصحيح الأوّل [9] (ذو التأثير الأكبر) ونهمل بقية التصحيحات (ذات التأثيرات الصغرى)

$$L=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.......14.2$$

$$\hat{L}^{(1)}=-\frac{1}{2}\hat{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}......15.2$$

- بتعويض.14.2 و11.2 في 13.2 نجد:

$$\hat{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{F}^{\mu\nu(1)}F_{\mu\nu} ......15.2$$

$$\hat{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{F}^{(1)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} ........16.2$$

لدينا :

$$\hat{F}^{\mu\nu(1)} = \theta^{\alpha\beta}\left(F_{\mu\alpha}F^{\mu\beta} - A_\alpha\partial_\beta F_{\mu\nu}\right) .....17.2$$

بتعويض 17.2 في 16.2 نجد:

$$\hat{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\mu\beta}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}A_\alpha\partial_\beta F^{\mu\nu} .......18.2$$

لنقم بتبسيط الحد $F_{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}A_\alpha\partial_\beta F^{\mu\nu}$.....19.2 :

لدينا : $1.18 = \theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\beta A_\alpha\right)F^2 + \theta^{\alpha\beta}A_\alpha\left(\partial_\beta F_{\mu\nu}\right)F^{\mu\nu} + \theta^{\alpha\beta}A_\alpha\left(\partial_\beta F^{\mu\nu}\right)F_{\mu\nu} ......20.2$

$$\Rightarrow \theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\beta F^{\mu\nu}\right)F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\beta\left(\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}A_\alpha F^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\beta A_\alpha\right)F^2 .........21.2$$

$$\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\beta A_\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\theta^{\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha + \theta^{\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\theta^{\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha + \theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\right) ......22.2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta^{\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha - \theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\right) .......23.2$$

لدينا $F_{\beta\alpha} = \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta ......24.2$

$$1.22 = \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\beta\alpha} = -\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} .......25.2$$

$$\theta^{\alpha\beta}A_\alpha\left(\partial_\beta F^{\mu\nu}\right)F_{\mu\nu}. = .......26.2$$

$$1.18 = \frac{1}{2}\partial_\beta\left(\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}A_\alpha F^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^2 .........27.2$$

وبالتالي فإن دالة كثافة لاغرونج تعطى ب:

$$[6]\left[-\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\mu\beta}F^{\mu\nu} + \frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^2 + \frac{1}{2}\partial_\beta\left(\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}A_\alpha F^{\mu\nu}\right).\right] . + A_\mu J^\mu = 0......28.2$$

حسب الخاصية المعطاة من قبل مبدأ الفعل الأدنى:

$$L \rightarrow L + \partial_\mu \overset{0}{F} .......29.2$$

ومنه فعبارة كثافة لاغرونج المصححة إلى الحد الأوّل في الفضاء اللاتبادلي بدلالة تنسور الحقل الكهرومغناطيسي و معامل الاضطراب هي:

$$\boxed{\hat{L} = -\frac{1}{4}\left[F^2\left(1-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)+2\theta_{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\mu\beta}F^{\mu\nu}\right] \text{..........}30.2}$$ [6]

ولكتابة هذه العبارة بدلالة الحقلين الكهربائي والمغناطيسي نقوم بإجراء المجاميع التالية:

مع العلم أنّ: $F^{0i} = -E^i$ و $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B^k$ و $F^{ij} = \varepsilon^{ijk}B_k$ و $\theta_{ij} = \varepsilon_{ijk}\beta^k$ و $\theta^{ij} = -\varepsilon^{ijk}\beta_k$

أولا: إيجاد المجموع $\left(1-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)F^2 \text{........}31.2$ بدلالة $E$ و $B$:

$$F^2 = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \left(F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F^{ij}F^{ij}\right)\text{......}32.2$$
$$= \left(-2E^iE_i - \varepsilon^{ijl}B_l\varepsilon_{ijk}B^k\right) = \left(-2\vec{E}^2 + 2B^kB^k\right) = -2\left(E^2 - B^2\right)\text{......}33.2$$

$$\left(\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)F^2 = -\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\left(E^2 - B^2\right)\text{........}34.2$$
$$= -\frac{1}{4}\left(2\theta^{0i}F_{0i} + \theta^{ij}F_{ij}\right)\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)\text{.......}35.2$$
$$= -\frac{1}{4}\left(2\theta^{0i}F_{0i} + \theta^{ij}F_{ij}\right)\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)\text{.....}36.2$$
$$= -\frac{1}{4}\left(2\vec{\varepsilon}\vec{E} + 2\beta_lB^l\right)\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)\text{........}37.2$$
$$\left(\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)F^2 = -\frac{1}{2}\left(\vec{\varepsilon}.\vec{E} - \vec{\beta}.\vec{B}\right)\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)\text{........}38.2$$

ثانيا:ايجاد المجموع $-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}F^{\mu\nu}\text{.......}39.2$ :

$$-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\theta^{0i}F_{j0}F_{\nu i}F^{j\nu} - \frac{1}{2}\theta^{i0}F_{\mu i}F_{j0}F^{\mu j} - \frac{1}{2}\theta^{ij}F_{\mu i}F_{\nu j}F^{\mu\nu}.34.2$$
$$= -\varepsilon_iE_iE^j + \left(-\varepsilon_{kil}B^l\right)\left(\varepsilon^{jks}B_s\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijl}\beta_l\left(-E_i\right)\left(-E^k\right)\left(-\varepsilon_{kjs}B^s\right)..35.2$$
$$-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}F^{\mu\nu} = \left(\vec{\varepsilon}.\vec{E}\right)E^2 - \varepsilon^iE_j\left(\delta_i^j\delta_l^s - \delta_i^s\delta_l^j\right)B^lB_s - \frac{1}{2}\beta_lE_iE^kB^s\left(\delta_k^i\delta_s^l - \delta_s^j\delta_k^l\right)..36.2$$
$$-\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}F^{\mu\nu} = \left(\vec{\varepsilon}.\vec{B} + \vec{\beta}.\vec{E}\right)\left(\vec{E}.\vec{B}\right) + \left(\vec{\varepsilon}.\vec{E}\right)\left(E^2 - B^2\right) - \left(\vec{\beta}.\vec{B}\right)E^2.37.2$$

ومن فإن كثافة لاغرانجيان في الفضاء اللاتبادلي بدلالة كل من الحقل الكهربائي و المغناطيسي:

$$\boxed{\hat{L} = -\frac{1}{2}\left(\vec{\varepsilon}.\vec{E} - \vec{\beta}.\vec{B}\right)\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) + \left(\vec{\varepsilon}.\vec{B} + \vec{\beta}.\vec{E}\right)\left(\vec{E}.\vec{B}\right) + \left(\vec{\varepsilon}.\vec{E}\right)\left(E^2 - B^2\right) - \left(\vec{\beta}.\vec{B}\right)E^2 \text{...}38.2}$$

## 6-2) تصحيح عبارتي الحقلين الكهربائي و المغناطيسي في الفضاء اللاتبادلي:

D هو تصحيح عبارة الحقل الكهربائي و H هو تصحيح لعبارة الحقل المغناطيسي و لإيجاد عبارتهما نطبق:

$$D^i = \frac{\partial L}{\partial E_i} ......39.2$$

$$H^i = \frac{\partial L}{\partial B_i} .......40.2$$

$$D^i = \frac{\partial L}{\partial E_i} = E + \frac{1}{2}\varepsilon\left(E^2 - B^2\right) - \left(\vec{\beta}.\vec{B} - \vec{\varepsilon}.\vec{E}\right)E + \beta\left(\vec{E}.\vec{B}\right) + \left(\vec{\varepsilon}.\vec{B}\right)B .....39.2$$

$$E - E(\beta B - \varepsilon E) + B(\beta E + \varepsilon B) + \beta(EB) + \frac{1}{2}\left(E^2 - B^2\right)\varepsilon ......40.2$$

$$H^i = -\frac{\partial}{\partial B_i} = B + \frac{1}{2}\beta\left(E^2 - B^2\right) - B(\beta B - \varepsilon E) - \varepsilon(EB) + B(\beta E + \varepsilon B) ......41.2$$ [7]

## 7-2) معادلات ماكسويل في الفضاء اللاتبادلي :

تحصلنا مسبقا عى معادلات ماكسويل في الفضاء التبادلي بشكلها الرباعي ( النسبي) وذلك إنطلاقا من معادلات أولر لاغرونج :

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu ....42.2 \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = J^\nu ....43.2 \end{cases}$$ (معادلات ماكسويل النسبية)

- ✓ بحيث يمثل $J^\nu$ شعاع التيار الرباعي و الذي يكتب بدلالة شعاع التيار الثلاثي البعد $\vec{J}$

وكثافة الشحنة الكهربائية $\rho$ كما يلي: $\vec{J}^\mu = \left(\rho C, \vec{J}\right) ..44.2$

- ✓ في الفضاء اللاتبادلي نستخدم أيضا معادلات أولر لاغرونج للحصول على معادلات ماكسويل المصححة إلى الحد الأول:

لنطبّق معادلات أولر لاغرونج على عبارة لاغرونج المصححة إلى الحد الأول:

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0....45.2$$ (معادلات أولر لاغرونج)

$$L = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{8}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}F^2 - \frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}F^{\alpha\rho}F^{\beta\sigma} + A_\mu J^\mu + \Theta\left(\theta^2\right) .....46.2$$

نعني بهذا الرمز $\Theta\left(\theta^2\right)$ هو إهمال الحدود المتعلقة ب $\theta^2$

❖ أولا: إيجاد $\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$......47.2

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-\frac{1}{2}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^{\rho\sigma}+\frac{1}{8}\theta_{\alpha\beta}\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^2+\frac{1}{4}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^{\rho\sigma}.......48.2$$

$$-\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^{\alpha\rho}F^{\beta\sigma}-\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\alpha\rho}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^{\beta\sigma}.......49.2$$

$$-\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}F^{\alpha\rho}\frac{\partial F^{\beta\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}.......50.2$$

ملاحظة: نستخدم:

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=\left(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma-\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho\right)..51.2$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-\frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}-F^{\nu\mu}\right)+\frac{1}{8}\theta_{\alpha\beta}\left(\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}-\delta^{\alpha\nu}\delta^{\beta\mu}\right)+\frac{1}{4}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\left(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma-\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho\right)F^{\rho\sigma}.....52.2$$

$$-\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}\left(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma-\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho\right)F^{\alpha\rho}F^{\beta\sigma}-\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}\left(\delta^{\alpha\mu}\delta^{\rho\nu}-\delta^{\alpha\nu}\delta^{\rho\mu}\right)F^{\beta\sigma}.....53.2$$

$$-\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}F^{\alpha\rho}\left(\delta^{\beta\mu}\delta^{\nu\sigma}-\delta^{\beta\nu}\delta^{\sigma\mu}\right).....54.2$$

ملاحظة نستخدم:

$$F_{\alpha\beta}\delta^\sigma_\beta=F^\sigma_\alpha....55.2$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-F^{\mu\nu}+\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}F^2+\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}\left(F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu}-F^{\alpha\nu}F^{\beta\mu}\right).....56.2$$

$$-\frac{1}{2}\left(\theta^\mu_\beta F^\nu_\sigma-\theta^\nu_\beta F^\mu_\sigma\right)F^{\beta\sigma}-\frac{1}{2}\left(\theta^\mu_\alpha F^\nu_\rho-\theta^\nu_\alpha F^\mu_\rho\right)F^{\alpha\rho}.....57.2$$

$$=-F^{\mu\nu}+\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}F^2+\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu}+\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\nu}F^{\beta\mu}-\frac{1}{2}\theta^\mu_\beta F^\nu_\sigma F^{\beta\sigma}.....58.2$$

$$-\frac{1}{2}\theta^\mu_\beta F^\nu_\sigma F^{\beta\sigma}+\frac{1}{2}\theta^\nu_\beta F^\mu_\sigma F^{\beta\sigma}-\frac{1}{2}\theta^\mu_\alpha F^\nu_\rho F^{\alpha\rho}+\frac{1}{2}\theta^\nu_\alpha F^\mu_\rho F^{\alpha\rho}......59.2$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-F^{\mu\nu}+\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}F^2+\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu}+\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F^{\beta\nu}F^{\alpha\mu}....60.2$$

$$-\frac{1}{2}\theta^{\mu}_{\beta}F^{\nu}_{\alpha}F^{\beta\alpha}+\frac{1}{2}\theta^{\nu}_{\beta}F^{\mu}_{\alpha}F^{\beta\alpha}-\frac{1}{2}\theta^{\mu}_{\beta}F^{\nu}_{\alpha}F^{\beta\alpha}+\frac{1}{2}\theta^{\nu}_{\beta}F^{\mu}_{\alpha}F^{\beta\alpha}\text{......}61.2$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}=-F^{\mu\nu}+\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}F^{2}+\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}-\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu}-\theta^{\mu}_{\beta}F^{\nu}_{\alpha}F^{\beta\alpha}+\theta^{\nu}_{\beta}F^{\mu}_{\alpha}F^{\beta\alpha}\text{......}62.2$$

ومنه فإنّ:

$$\partial_{\mu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}=-\partial_{\mu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\left(F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\right)+\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\partial_{\mu}F^{2}-\theta^{\nu}_{\beta}\partial_{\mu}\left(F^{\mu}_{\alpha}F^{\alpha\beta}\right)$$
$$+\theta^{\mu}_{\beta}\partial_{\mu}\left(F^{\nu}_{\alpha}F^{\alpha\beta}\right)+\theta_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\left(F^{\beta\mu}F^{\alpha\nu}\right)\text{.....}63.2$$

❖ ثانيا: إيجاد $\frac{\partial L}{\partial(A_{\nu})}=J^{\nu}\text{.....}64.2$

$$\frac{\partial}{\partial A_{\nu}}\left(A_{\mu}J^{\mu}\right)=\delta^{\nu}_{\mu}J^{\mu}=J^{\nu}\text{....}65.2$$

بتعويض المشتقات في معادلات أولر لاغرونج

$\partial_{\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}\right)-\frac{\partial L}{\partial A_{\nu}}=0\text{....}66.2$ نجد معادلات ماكسويل في الفضاء اللاتبادلي :

$$\boxed{\begin{aligned}&-\partial_{\mu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\left(F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\right)+\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\partial_{\mu}F^{2}-\theta^{\nu}_{\beta}\partial_{\mu}\left(F^{\mu}_{\alpha}F^{\alpha\beta}\right)\\&+\theta^{\mu}_{\beta}\partial_{\mu}\left(F^{\nu}_{\alpha}F^{\alpha\beta}\right)+\theta_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\left(F^{\beta\mu}F^{\alpha\nu}\right)=J_{\nu}\text{.....}67.2\end{aligned}}\quad[12.10]$$

## 2-8) خلاصة:

وبالتالي نكون قد توصلنا إلى الطرق و الوسائل التي تمكننا من دراسة النظرية الكهرومغناطيسية في الفضاء الغير تبديلي.

كما اتضح أن عبارات المقادير الكهرومغناطيسية تتغير في الفضاء الغير تبديلي, توقعا لإحداث تشوّهات في التوزيعات الكهربائية بعد التصحيح.

و في خلاصة هذا الفصل, نحصل بشكل أساسي على معادلات ماكسويل التي يعبر عنها بدلالة تنسور الحقل الكهرومغناطيسي و شعاع الحقل الكهربائي, وقد تستخدم هذه المعادلات لكثير من الدراسات في مجال الكهرومغناطيسية اللاتبادلية, إلا أن تطبيقنا لها سيُبيَن في الفصل الثالث.

# الفصل الثالث

## تطبيق التصحيحات اللاتبادلية لدراسة كرة مشحونة

## *3-1) مدخل الفصل:*

في هذا الفصل وبعد التوصل إلى التصحيحات الآتية:

- ✓ تصحيح عبارة شعاع الكمون الكهربائي و تنسور الحقل الكهرومغناطيسي من قبل تطبيق S.W
- ✓ إيجاد عبارة لاغرونج في الفضاء الغير تبادلي بدلالة تنسور الحقل الكهرومغناطيسي و كثافة التيار الرباعي المصححة إلى الحد الأول
- ✓ عبارة لاغرونج بدلالة معامل الاضطراب و الحقلين الكهربائي و المغناطيسي.
- ✓ معادلة ماكسويل في الفضاء الغير تبديلي المصححة إلى الحد الأول انطلاقا من معادلات أولر لاغرونج

سنقوم بتطبيقها لإظهار تأثير هذه التصحيحات على خواص الشحنة الساكنة

- فكيف يمكن تطبيق العبارات المتحصل عليها في الفضاء اللاتبادلي ؟
- و ما هي الظواهر الجديدة بعد التصحيح؟

## 3-2) دراسة كرة مشحونة في الفضاء الغير تبديلي:

من المعلوم أنّ الحقل المغناطيسي لكرة مشحونة بشحنة ساكنة في الفضاء التبديلي معدوم , ولإظهار تأثير التصحيحات على هذا ,نقوم بالخطوات التالية:

1. فرض وجود كرة مشحونة حجميا لشحنة ساكنة .
2. إيجاد شعاع الكمون الكهربائي في الفضاء التبادلي انطلاقا من معادلة ماكسويل النسبية .
3. إيجاد شعاع الكمون الكهربائي الغير تبديلي انطلاقا من معادلة ماكسويل اللاتبادلية .
4. المقارنة بين النتيجتين و إظهار التصحيح الناتج عن لا تبادل الفضاء.

### ***3-2-1) شعاع الكمون الرباعي لكرة مشحونة في الفضاء التبادلي:***

نفرض وجود كرة نصف قطرها $a \succ\succ \sqrt{\theta}$ مشحونة بشحنة و ساكنه لنجد عبارة الكمون الرباعي لها

#### **3-2-1-A) كثافة التيار النسبية لشحنة نقطية ساكنة في الفضاء التبادلي:**

تعطى كثافة التيار النسبية أي بشكلها الرباعي ب: $J^{\mu} = \rho u^{\mu} \begin{pmatrix} J^0 = \gamma\rho c \\ \vec{J} = \gamma\rho v \end{pmatrix}$......1.3 [11]بحيث يعطى

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c}}} \quad ......2.3$$

و $u^{\mu}$ تمثل السرعة الرباعية $u\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v \end{pmatrix}$.......3.3 , كما تمثل $\rho$ كثافة الشحنة الحجمية وتقاس ب $\frac{C}{m^3}$ , $c$ سرعة الضوء $\left(\frac{m}{s}\right)$

باعتبار فرضنا لوجود شحنة ساكنة $(\vec{V}=0) \Leftarrow (\gamma=0)$ فإن شعاع كثافة التيار يصبح: $J^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho c \\ 0 \end{pmatrix}$.......4.3

بحيث $\rho=\dfrac{Ze}{\frac{4}{3}\pi r^{3}}$.......5.3 ومنه فإنّ كثافة التيار داخل الكرة [11] $J^{\mu}=\begin{pmatrix} c\rho=\dfrac{3cZe}{4\pi r^{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$.........6.3

كما أنّ كثافة التيار خارج الكرة [11.12] $(\rho=0)$ $J^{\mu}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.........7.3

### B–1–2–3)حل معادلة ماكسويل الرباعية لكرة مشحونة بشحنة ساكنة:

تعطى معادلة ماكسويل التبادلية في النسبية ب: $\partial_{\nu}F^{\nu\mu}=J^{\mu}$......8.3 . ح ل هذه المعادلة يعني إيجاد عبارة شعاع

الكمون $A^{(0)}$ داخل وخارج الكرة

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu}=J^{\mu}........9.3$$

$$\Rightarrow \partial_{\nu}\left(\partial^{\nu}A^{\mu}-\partial^{\mu}A^{\nu}\right)=\begin{pmatrix}\rho c\\ \vec{0}\end{pmatrix}\Rightarrow \partial_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu}-\partial^{\mu}\underbrace{\cancel{\partial_{\nu}A^{\nu}}}_{\text{Gauge}}=\begin{pmatrix}\rho c\\ 0\end{pmatrix}.........10.3$$

$$\Rightarrow \partial_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu}=\begin{pmatrix}\rho c\\ 0\end{pmatrix}..........11.3$$

يعني أنّ:

$$\begin{cases}\partial_{\nu}\partial^{\nu}A^{0}=\rho c..........12.3\\ \partial_{\nu}\partial^{\nu}A^{i}=0............13.3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Box A^{0}=\rho c............14.3\\ \Box A^{i}=\vec{0}................15.3\end{cases}$$

$$\Box A=\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}A}{\partial t^{2}}-\Delta.........16.3$$

الحد $\dfrac{1}{c^{2}}\dfrac{\partial^{2}A}{\partial t^{2}}$ معدوم لأن الحقل مستقر (غير متغير مع الزمن)

$$\begin{cases}-\Delta A^{0}=\rho c.............17.3\\ -\Delta A^{i}=0................18.3\end{cases}$$

يوجد بعض المراجع التي تعتبر وجود حقل مغناطيسي خارجي تعطى عبارة شعاع كمونه

ب: $A^{(0)i}=-\dfrac{1}{2}f^{(0)}{}_{ik}x^{k}$, لكننا نعتبر عدم وجود خقل خارجي[16,17]، لدينا المعادلة 18.3أحد حلولها هو

$\vec{A}=\vec{0}$ أي عند عدم وجود حقل مغناطيسي , إذن نهتم بإيجاد المركبة الزمنية لشعاع الكمون $A^{0}$ داخل وخارج الكرة .

بتعويض 3.5 في 17.3 نجد:

$$[14]\begin{cases}\Delta A^0 = -\dfrac{3Zec}{4\pi r^3} & ;r \prec a............18.3\\ \Delta A^0 = 0 & ;r \succ a...............19.3\end{cases}$$

يعطى لابلاسيان في الإحداثيات الكروية بما يلي:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

بما أنه لدينا تناظر كروي فإن: $[15]\ \Delta = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)$

ومنه فإنّ حل المعادلة 18.3هو كالآتي:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A^0}{\partial r}\right) = -\frac{3Zec}{4\pi a^3}........20.3$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A^0}{\partial r}\right) = -\frac{3Zec}{4\pi a^3}r^2.........21.3$$

$$r^2\frac{\partial A^0}{\partial r} = -\frac{c}{3}r^3 + \alpha...........22.3$$

$$\frac{\partial A^0}{\partial r} = -\frac{c}{3}r + \frac{\alpha}{r^2}...............23.3$$

وبالتالي فإنّ: $A^0(r) = -\dfrac{c}{6}r^2 - \dfrac{\alpha}{r} + \beta........24.3$

كما أن حل المعادلة 3.18 هو كالآتي:

$$r^2\frac{\partial A^0}{\partial r} = \sigma.........25.3$$

$$\frac{\partial A^0}{\partial r} = \frac{\sigma}{r^2}...........26.3$$

ومنه فإنّ: $A^0(r) = -\dfrac{\sigma}{r} + \xi.........27.3$

**تحديد الثوابت:**

1) بإستخدم خواص شعاع الكمون فإنّه:

-عندما $r \to \infty$ فإنّ $A^0 \to 0$ ومنه فإنّ: $\xi = 0$

-عندما $r \to 0$ فإنّ $A^0 \to \infty$ ولا يمكن حدوث ذلك , لذلك يجب وضع $\alpha = 0$

2) باستخدام خاصية استمرارية شعاع الكمون عند الأطراف:

$$\begin{cases} A^0(r) = -\dfrac{Zec}{8\pi a^3} r^2 + \beta & ; r \prec a \text{............} 28.3 \\ A^0(r) = -\dfrac{\sigma}{r} & ; r \succ a \text{..............} 29.3 \end{cases}$$

عند $r = a$

$$-\frac{Zec}{8\pi a} + \beta = -\frac{\sigma}{a} \Rightarrow \beta = \frac{Zec}{8\pi a} - \frac{\sigma}{a} \text{........} 30.3$$

$$\begin{cases} \left(A^0(r)\right)' = -\dfrac{Zec}{4\pi a^3} r & ; r \prec a \text{..........} 31.3 \\ \left(A^0(r)\right)' = \dfrac{\gamma}{r^2} & ; r \succ a \text{.......} 32.3 \end{cases}$$

عند $r = a$

$$-\frac{Zec}{4\pi a^2} = \frac{\sigma}{a^2} \Rightarrow \sigma = -\frac{Zec}{4\pi} \text{..........} 33.3$$

ومنه فإنّ $\beta = \dfrac{3Zec}{8\pi a}$...........34.3

وبالتالي فإن عبارة شعاع الكمون التبادلية لكرة مشحونة بشحنة ساكنة تعطى ب:

$$\begin{cases} A^0(r) = -\dfrac{Zec}{8\pi a^3} r^2 + \dfrac{3Zec}{8\pi a} & ; r \prec a \text{...........} 35.3 \\ A^0(r) = \dfrac{Zec}{4\pi r} & ; r \succ a \text{............} 36.3 \end{cases}$$

## 3-2-2) تصحيح عبارة شعاع الكمون الرباعي لكرة مشحونة في الفضاء اللاتبادلي

- لقد تمّ فرض وجود كرة مشحونة بشحنة ساكنة نصف قطرها $r \succ\succ \sqrt{\theta}$ و لإيجاد عبارة شعاع الكمون لها يجب حل معادلة ماكسويل في الفضاء اللاتبادلي والتي تم الحصول عليها في الفصل الثاني:

$$\begin{aligned} &-\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu F^2 - \theta^\nu_\beta\partial_\mu\left(F^\mu_\alpha F^{\alpha\beta}\right) \\ &+ \theta^\mu_\beta\partial_\mu\left(F^\nu_\alpha F^{\alpha\beta}\right) + \theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(F^{\beta\mu}F^{\alpha\nu}\right) = J_\nu \qquad \text{............................} 37.3 \end{aligned}$$

**A-2-2-3) كتابة معادلة ماكسويل اللاتبادلية بدلالة تصحيح الحد الأول لتنسور الحقل الكهرومغناطيسي**

**$F^{(1)\mu\nu}$ :**

يعطي تطبيق s.w عبارة التصحيح الأوّل لعبارة التنسور و كثافة التيار ب:[11.8.]

$$J^{(1)\mu} = A_\alpha \partial_\beta J^\mu \text{...........38.3}$$

$$F^{(1)\mu\nu} = \theta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} - \theta_{\alpha\beta} A^\alpha \partial^\beta F^{\mu\nu} \text{........39.3}$$

$$-\partial_\mu F^{(1)\mu\nu} = -\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}\right) - \theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(A^\alpha\partial^\beta F^{\mu\nu}\right) \text{.........40.3}$$

لدينا $\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu$ وبإضافة وطرح الحد $\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(A^\alpha\partial^\beta F^{\mu\nu}\right)$ للمعادلة 37.3:

$$-\partial_\mu F^{(1)\mu\nu} - \theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(A^\alpha\partial^\beta F^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu F^2 + \frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}\right)$$
$$+\theta^\mu_\beta\partial_\mu\left(F^\nu_\alpha F^{\alpha\beta}\right) - \theta^\nu_\beta\partial_\mu\left(F^\mu_\alpha F^{\alpha\beta}\right) = J_\nu \text{........41.3}$$

كما أنّ: $\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(A^\alpha\partial^\beta F^{\mu\nu}\right) = \theta_{\alpha\beta}\left(\partial_\mu A^\alpha\right)\partial^\beta F^{\mu\nu} + \theta_{\alpha\beta}A^\alpha\partial^\beta J^\nu \text{......42.3}$

المعادلة 41.3 تصبح:

$$-\partial_\mu F^{(1)\mu\nu} - \theta_{\alpha\beta}\left(\partial_\mu A^\alpha\right)\partial^\beta F^{\mu\nu} - J^{(1)\nu} + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu F^2 + \frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}\right)$$
$$+\theta^\mu_\beta\partial_\mu\left(F^\nu_\alpha F^{\alpha\beta}\right) - \theta^\nu_\beta\partial_\mu\left(F^\mu_\alpha F^{\alpha\beta}\right) = 0 \text{...........43.3}$$

ومنه فإن معادلة ماكسويل في الفضاء اللاتبادلي بدلالة التصحيح الأول للتننسور الكهرومغناطيسي $F^{(1)\mu\nu}$ و التصحيح الأول لكثافة التيار تعطى ب:

$$-\partial_\mu F^{(1)\mu\nu} + \theta_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\left(F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}\right) - \partial^\alpha\left(F^\nu_\mu F^{\mu\beta}\right) - \left(\partial_\mu A^\alpha\right)\partial^\beta F^{\mu\nu}\right]$$
$$+\theta^\nu_\beta\left[\frac{1}{2}\left(\partial^\beta F_{\rho\sigma}\right)F^{\rho\sigma}\partial_\mu\left(F^\mu_\alpha F^{\alpha\beta}\right)\right] = J^{(1)\nu} \text{..........44.3}$$

### B-2-2-3) حل معادلة ماكسويل اللاتبادلية:

إنّ إيجاد شعاع الكمون لكرة مشحونة بشحنة ساكنة في الفضاء اللاتبادلي يتوقف على حل معادلة ماكسويل اللاتبادلية

- سنقوم بتبسيط معادلة ماكسويل النهائية على أساس :

- تعويض عبارة التنسور بدلالة شعاع الكمون $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu$ بحيث $F^{ij} = 0$
- تطبيق ( gauge ) معيار لورنتس عند القيام بعملية الجمع $\partial_\mu A^\mu = 0$
- الأخذ بعين الاعتبار استقرار شعاع الكمون , أي أن المشتق بالنسبة للزمن معدوم $\partial_0 A = 0$

***ملاحظة :***

في هذه الحالة (المستقرة) يكون معيار لورنتسLorentz نفسه معيار كولومcoulomb لأنّ $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\therefore \frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\left(F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\theta_{0i}\partial_\mu\left(F^{0i}F^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\theta_{i0}\partial_\mu\left(F^{i0}F^{\mu\nu}\right) \quad .......45.3$$

$$= \theta_{0i}\partial_\mu\left(F^{0i}F^{\mu\nu}\right) \quad .........46.3$$

$$= -\varepsilon_i\partial_j\left(\partial^i A^0 F^{j\nu}\right) \quad ........47.3$$

$$\therefore \theta_{\alpha\beta}\partial^\alpha\left(F_\mu^\nu F^{\mu\beta}\right) = \theta_{\alpha 0}\partial^\alpha\left(F_i^\nu F^{i0}\right) + \theta_{\alpha i}\partial^\alpha\left(F_0^\nu F^{0i}\right) \quad ........48.3$$

$$= \theta_{j0}\partial^j\left(F_j^\nu \partial^i A^0\right) - \theta_{ji}\partial^j\left(F_0^\nu \partial^i A^0\right) \quad .......49.3$$

$$\theta_{\alpha\beta}\left(\partial_\mu A^\alpha\right)\partial^\beta F^{\mu\nu} = \theta_{0i}\left(\partial^j A^0\right)\partial^i F_j^\nu \quad ...........50.3$$

$$\frac{1}{2}\theta_\beta^\nu \partial^\beta F^2 = \theta_j^\nu \partial^i\left(F^{0j}\right)F_{0j} \quad .............51.3$$

$$= \theta_j^\nu \partial^i\left[\left(\partial^j A^0\right)\right]\left(\partial_j A_0\right) \quad ........52.3$$

$$\theta_\beta^\nu \partial_\mu\left(F_\alpha^\mu F^{\alpha\beta}\right) = \theta_j^\nu \partial_i\left(F_0^i F^{0j}\right) \quad ........53.3$$

بجمع الحدود المبسطة نجد:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta A^{(1)\nu} - \varepsilon_i\partial_j\left(\partial^i A^0 F^{j\nu}\right) - \theta_{j0}\partial^j\left(F_i^\nu \partial^i A^0\right) + \theta_{ji}\partial^j\left(F_0^\nu \partial^i A^0\right) - \theta_{0i}\left(\partial^j A^0\right)\partial^i F_j^\nu \\ \theta_i^\nu \partial^i\left[\left(\partial^j A^0\right)\right]\left(\partial_j A_0\right) - \theta_j^\nu \partial_i\left(F_0^i F^{0j}\right) = J^{(1)\nu} \quad ..........54.3\end{array}}$$

### C-2-2-3) عبارة المركبة الزمنية لتصحيح شعاع الكمون $A^{(1)0}$ :

لإيجاد عبارة المركبة الزمنية لتصحيح شعاع الكمون نضع $\nu = 0$ في المعادلة المبسطة لماكسويل:

$$\Delta A^{(1)^0} - \varepsilon_i \partial^i \left(\partial_j A^0\right)\partial^j A^0 - \varepsilon_i \partial^i A^0 \left(\partial_j \partial^j A^0\right) + 2\varepsilon_j \left(\partial^j \left(\partial^i A^0\right)\right)\partial^i A^0 - 2\varepsilon_i \left(\partial^i \left(\partial^j A^0\right)\right)\partial^j A^0$$
$$\varepsilon_j \left(\partial^j A^0\right)\left(\partial_i \partial^i A^0\right) + \varepsilon_j \left(\partial^i A^0\right)\left(\partial_i \partial^j A^0\right) = J^{(1)^0} .........55.3$$

ومنه فإن التصحيح الأول للمركبة الزمنية لشعاع الكمون في الفضاء اللاتبادلي:

$$\boxed{\Delta A^{(1)^0} = 0........56.3}$$

### D-2-2-3) عبارة المركبة المكانية لتصحيح شعاع الكمون $A^{(1)k}$ :

لإيجاد عبارة المركبة المكانية لتصحيح شعاع الكمون نضع $\nu = k$ في المعادلة المبسطة لماكسويل:

$$\Delta A^{(1)^k} + \theta^{ij} \partial_j \left(\partial^k A^0 \partial_i A^0\right) + \theta^{ki} \left(\partial_i \partial^j A^0\right)\partial_j A^0 + \theta^{kj} \left(\partial_j \partial_i A^0\right)\partial^i A_0 + \theta^{kj} \partial_j A^0 \left(\partial_i \partial^i A_0\right) = 0....57.3$$

لدينا ثاني حد معدوم:

$$\theta^{ij} \partial_j \left(\partial^k A^0 \partial_i A^0\right) = \frac{1}{2}\left(\partial^j \left(\theta_{ji} \partial^i A^0\right) + \partial^i \left(\theta_{ij} \partial^j A^0\right)\right)........59.3$$
$$= \frac{1}{2}\theta_{ji}\left(\partial^j \partial^i A^0 - \partial^i \partial^j A^0\right) = 0.............60.3$$

$$\Delta A^{(1)^k} + 2\theta^{ki} \left(\partial_i \partial^j A^0\right)\partial_j A^0 + \theta^{kj} \left(\partial_j A^0\right)\left(\partial_i \partial^i A_0\right)........61.3$$

لدينا $\theta^{kj} \left(\partial_j A^0\right)\left(\partial_i \partial^i A_0\right) = \theta^{kj} \partial_i \left(\partial_j A^0 \partial^i A_0\right) - \left(\partial_i \partial_j A^0\right)\left(\partial^i A_0\right)........62.3$

بتعويض $62.3$ في $61.3$ نجد معادلة ماكسويل بدلالة المركبة المكانية لشعاع الكمون:

$$\boxed{\Delta A^{(1)k} + 2\theta^k_j \left(\partial^j \partial_i A_0\right)\partial^i A^0 + \theta^k_j \left(\partial^i \partial_i A_0\right) = 0.........63.3}$$

### 1-D-2-2-3) إيجاد لابلاسيان شعاع الكمون بالنسبة للمنطقة الأولى: لدينا $r \succ a \Rightarrow \Delta A^0 = 0$

يعني أنّ المعادلة $63.3$ تصبح: $\Delta A_{\text{I}}{}^{(1)k} = 2\theta^k_j \left(\partial^j \partial^i A_0\right)\partial^i A^0..........64.3$

**ملاحظة:**

- ✓ $r = \sqrt{x_i x^i}$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_i^j \quad \checkmark$$

$$\partial^i A_0 = -\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = -\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)\frac{\partial r/\partial x_i}{r^2} = -\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial/\partial x_i\left(x_j x^j\right)}{\sqrt{x_j x^j}}.........65.3$$

**لدينا:**

$$= -\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)\frac{1}{2}\left(\delta_j^i x^j + x_j \delta^{ji}\right).......66.3$$

$$\partial^i A_0 = -\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)\frac{x^i}{r^3}..........67.3$$

كما أنّ:

$$\partial^i \partial^i A^0 = \left(-\frac{Zec}{4\pi}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x^i}{r^3}\right) = \left(-\frac{Zec}{4\pi}\right)\frac{\delta^{ij} r^3 - 3r x^j x^i}{r^6}.........68.3$$

$$\Delta A_{\text{II}}^{(1)k} = 2\left(\frac{Zec}{4\pi r^3}\right)\theta_j^k\left[\delta^{ij} r^3 - 3r x^j x^i\right]\frac{x^i}{r^3}............69.3$$

ومنه فإنّ لابلاسيان شعاع الكمون خارج الكرةالمشحونة $r \succ a$ يعطى ب:

$$\boxed{\Delta A_{\text{II}}^{(1)k} = -4\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{\theta_j^k x^j}{r^6}.........70.3}$$

### 3-2-2-D-2) إيجاد لابلاسيان شعاع الكمون بالنسبة للمنطقة الثانية:

$$\Delta A^{(1)k} = 2\theta_j^k\left(\partial^j \partial^i A_0\right)\partial^i A^0 + \left(\partial^i \partial^i A_0\right)\partial^j A^0..........71.3$$

$$\partial^i A = \partial^i\left(-\frac{Zec}{8\pi a^3}\right)r^2............72.3$$

$$= -\frac{Zec}{8\pi a^3}\left(\partial^i r^2\right) = \frac{-Zec}{8\pi a^3}\left(2\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)r\right)...........73.3$$

$$= -\frac{Zec}{4\pi a^3}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)r = -\frac{Zec}{4\pi a^3}\left(\frac{\partial\sqrt{x_j x^j}}{\partial x_i}\right)r...........74.3$$

$$\partial^i A_I^0 = -\frac{Zec}{4\pi a^3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\left(x_j x^j\right)}{\partial x_i}\right)\frac{r}{\sqrt{x_j x^j}}.........75.3$$

$$= -\frac{Zec}{4\pi a^3}\left(\frac{1}{2}\left(\delta_j^i x^j + \delta^{ij} x_j\right)\right).............76.3$$

$$\partial^i A_I^0 = -\frac{Zec}{4\pi a^3}x^i...........77.3$$

$$\partial^j \partial_i A_I^0 = -\frac{Zec}{4\pi a^3}\frac{\partial x^i}{\partial x_j} \text{...........}78.3$$

$$\partial^j \partial^i A_I^0 = -\frac{Zec}{4\pi a^3}\delta^{ij} \text{..........}79.3$$

$$2\theta_j^k \left(\partial^j \partial^i A_0\right)\partial^i A^0 = 2\theta_j^k x^j \left(\frac{-Zec}{4\pi a^3}\delta^{ij}\right)\left(\frac{-Zec}{4\pi a^3}x^i\right) \text{...........}80.3$$

$$\left(\partial^i \partial^i A_0\right)\partial^j A^0 = \left(-\frac{3Zec}{4\pi a^3}\right)\partial^j A^0 = \left(-\frac{3Zec}{4\pi a^3}\right)\left(\frac{-Zec}{4\pi a^3}\right)x^j = 3\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 x^j \text{..........}81.3$$

$$\Delta A_I^{(1)k} = 2\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 \theta_j^k x^j - 3\theta_j^k \left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 \theta_j^k x^j = \left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 \theta_j^k x^j (2-3) \text{..........}82.3$$

ومنه فإن لابلاسيان شعاع الكمون داخل الكرة المشحونة $r \prec a$ يعطى ب:

$$\boxed{\Delta A_I^{(1)k} = -\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 \theta_j^k x^j \text{..........}83.3}$$

وبالتالي:

$$\begin{cases} \Delta A_{II}^{(1)k} = -4\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{\theta_j^k x^j}{r^6} \text{.........}r \succ a\text{........}84.3 \\ \Delta A_I^{(1)k} = -\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 \theta_j^k x^j \text{...........}r \prec a\text{..........}85.3 \end{cases}$$

**3-D-2-2-3) حل المعادلة التفاضلية للابلاسيان شعاع الكمون بالنسبة للمنطقةالأولى $r \prec a$ :**

من خلال شكل المعادلة نجد أن حلولها هي عبارة عن حلين:

- ✓ حل خاص: إيجاده يتوقف على فرضه أوّلا ثم التحقق منه وتعديله إن لزم.
- ✓ حل متجانس: $\Delta A^{(1)k} = 0$ ومن الواضح أن $A^{(1)k}$ هي حلول لمعادلة Helmotz

$$\Delta A_I^{(1)k} = -\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 \theta_j^k x^j \text{...........}r \prec a\text{.........}86.3$$

- ✓ الحل الخاص: لنفرض أن الحل هو: $r^2\theta^{ik}x^i$

لنتحقق من صحته:

$$\Delta\left(r^2\theta^{ik}x^i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(r^2\theta^{ik}x^i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[2r\frac{x^j}{r}\theta^{ik}x^i + r^2\theta^{ik}\delta^{ij}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\theta^{ik}x^i x^j + r^2\theta^{jk}\right] = 2\theta^{ik}x^i + 2\theta^{ik}x^i + 2r\frac{x^j}{r}\theta^{ik}$$

$$= 3\theta^{ik}x^i \text{.........}87.3$$

ومنه فإنّ الحل الخاص يعطى ب: $A_I^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 r^2\theta^{ik}x^i$...........89.3

✓ الحل المتجانس هو عبارة عن حل لمعادلة Helmotz والتي نبين كيفية حلها بالآتي:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A^{(1)k}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}A^{(1)k}=0.......91.3\Leftarrow \Delta A^{(1)k}=0...........90.3$$

بعد فصل المتغيرات:

$$A^{(1)k}(r,\theta,\varphi)=f(r)y(\theta,\varphi).......92.3$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)}{f}=\frac{-\Delta_{\theta\varphi}y}{y}.........93.3$$

ومنه: $\begin{cases}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)=f\left(l(l+1)\right)\\ \Delta_{\theta\varphi}y=-yl(l+1)\end{cases}$.........94.3

لدينا: $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)=f\left(l(l+1)\right)$........95.3 لنفرض أن حلها هو: $f=r^l$ ونتأكد من صحته

$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2lr^{l-1}\right)=l(l+1)r^l$........96.3 ومنه فإن حلول المعادلة هي: $\begin{cases}f=r^l\\ f=\frac{1}{r^{l+1}}\end{cases}$...97.3

أما بالنسبة لحل المعادلة الثانية هي عبارة عن دوال التوافقيات الكروية, ومنه فإن الحل المتجانس يعطى ب:

$$f=\sum_l\sum_m\left(\alpha r^l+\frac{\beta}{r^{l+1}}\right)y_m^l(\theta,\varphi).......98.3$$

ومنه فإن حل المعادلة 86.3 والتي تعطي عبارة شعاع الكمون. هو جمع للحلين الخاص و المتجانس:

$$A_I^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 r^2\theta^{ik}x^i+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l}^{l}\left(\alpha_{lm}r^l+\frac{\beta_{lm}}{r^{l+1}}\right)y_m^l(\theta,\varphi).....99.3$$

**4-D-2-2-3) حل المعادلة التفاضلية للابلاسيان شعاع الكمون بالنسبة للمنطقة الثانية $r\succ a$ :**

بنفس الطريقة نجد الحل الخاص والمتجانس لهذه المعادلة:

$$\Delta A_{II}^{(1)k}=-4\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2\frac{\theta_j^k x^j}{r^6}.........r\prec a......100.3$$

✓ الحل الخاص:لنفرض أن الحل هو: $\left(r^{-4}\theta^{ik}x^i\right)$

لنتحقق من صحته:

$$\Delta\left(r^{-4}\theta^{ik}x^{i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(r^{-4}\theta^{ik}x^{i}\right)......101.3$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-4r^{-5}\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)\theta^{ik}x^{i}+r^{-4}\theta^{ik}\delta^{ij}\right)........102.3$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-4r^{-5}\left(\frac{x_j}{r}\right)\theta^{ik}x^{i}+r^{-4}\theta^{ik}\delta^{ij}\right)...........103.3$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-4r^{-6}x^{j}x^{i}\theta^{ik}\delta^{ij}\right)..........104.5$$

$$=\left(24r^{-7}\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)x^{j}x^{i}-4r^{-6}\left(\frac{\partial\left(x^{j}x^{i}\right)}{\partial x_j}\right)-4r^{-5}\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)\delta^{ij}\right)\theta^{ik}.......106.3$$

$$=\left(24r^{-6}x^{i}-8r^{-6}x^{i}-4r^{-6}x^{i}\right)\theta^{ik}........107.3$$

$$\Delta\left(r^{-4}\theta^{ik}x^{i}\right)=12\frac{x^{i}\theta^{ik}}{r^{6}}........108.3$$

ومنه فالحل الخاص هو: $\Delta A_{\text{II}}^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\frac{\theta^{ik}x^{i}}{r^{4}}......109.1$

✓ الحل المتجانس هو عبارة عن حل لمعادلة Helmotz [18]والتي بينّا كيفية حلها في الحلة السابقة لذلك

نكتب مباشرة عبارة شعاع الكمون وهي جمع الحلين الخاص والمتجانس:

$$\Delta A_{\text{II}}^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\frac{\theta^{ik}x^{i}}{r^{4}}+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l}^{l}\left(\gamma_{lm}r^{l}+\frac{\sigma_{lm}}{r^{l+1}}\right)y_{m}^{l}(\theta,\varphi)........110.3$$

ومنه فشعاع الكمون الكهربائي داخل وخارج الكرة المشحونة يعطى بدلالة الثوابت ب:

$$\begin{cases}A_{I}^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^{3}}\right)^{2}r^{2}\theta^{ik}x^{i}+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l}^{l}\left(\alpha_{lm}r^{l}+\frac{\beta_{lm}}{r^{l+1}}\right)y_{m}^{l}(\theta,\varphi).....99.3\\ \Delta A_{\text{II}}^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\frac{\theta^{ik}x^{i}}{r^{4}}+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l}^{l}\left(\gamma_{lm}r^{l}+\frac{\sigma_{lm}}{r^{l+1}}\right)y_{m}^{l}(\theta,\varphi)........110.3\end{cases}$$

- ***تحديد الثوابت:***

1. باستخدام شعاع الكمون نجد:

- عندما $r\to\infty$ فإن $A\to 0$ وبذلك فإن $\gamma_{lm}=0$
- عندما $r\to 0$ فإنّ $A\to\infty$ ولا يمكن حدوث ذلك, لذلك يجب وضع $\beta_{l}=0$

2. باستخدام خواص الاستمرارية نجد بقية الثوابت:

- استمرارية شعاع الكمون عند a:

أي أن: $A_I^{(1)}(x)\Big|_{r=a} = A_{II}^{(1)}(x)\Big|_{r=a}$ ومنه فإن:

$$\sum_l \sum_m \alpha_{lm} a^l y_m^l(\theta,\varphi) = \sum_l \sum_m \sigma_{lm} \frac{1}{a^{l+1}} y_m^l(\theta,\varphi) \text{........111.3}$$

فإن $(\forall \theta,\varphi)$

$$\alpha_{lm} a^l = \sigma_{lm} \frac{1}{a^{l+1}} \text{........112.3}$$

- استمرارية مشتق شعاع الكمون عند a:

أي أن: $\left.\frac{\partial A_I^{(1)k}}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial A_{II}^{(1)k}}{\partial r}\right|_{r=a}$ ......113.3 ومنهّ فإنّ:

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{a^5}\theta^{ik}x^i - \frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{a^4}\theta^{ik}\frac{\partial x^i}{\partial r} + \sum_l \sum_m \alpha_{lm} l a^{l-1} y_m^l(\theta,\varphi)$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{\theta^{ik}x^i}{a^5} - \frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{a^4}\theta^{ik}\frac{\partial x^i}{\partial r} - \sum_l \sum_m \sigma_{lm}\frac{(l+1)}{a^{l+2}} y_m^l(\theta,\varphi) \text{........114.3}$$

$$\Rightarrow \sum_l \sum_m \left\{\alpha_{lm} l a^{l-1} + \alpha^{2l+1}\frac{(l+1)}{a^{l+1}}\right\} y_m^l = 2\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{\theta^{ik}x^i}{a^5} \text{........115.3}$$

***لدينا:*** *من جهة* $\theta^{ik}x^i = \theta^{1k}x^1 + \theta^{2k}x^2 + \theta^{3k}x^3$........116.3

*ومن جهة أخرى:*

$$y_0^1 = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}x^3 \text{.......119.3} \ , \quad y_1^1 = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(x^1 + ix^2\right) \text{......118.3} \ , \quad y_{-1}^1 = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(x^1 - ix^2\right) \text{.......117.3} \ [18]$$

ومنه فإن على سطح الكرة لدينا:

$$x^3 = y_0^1 a\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \text{ ....122.3}, \quad x^1 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(y_{-1}^1 - y_1^1\right) \text{.....121.3}, \quad x^2 = i\frac{a}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(y_{-1}^1 + y_1^1\right) \text{...120.3}$$

بتعويض عبارات $x$ في المعادلة 115.3 نجد:

$$\sum_l \sum_m \alpha_{lm} a^{l-1}(2l+1) = 2\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{\theta^{1k}}{a^5}\frac{a}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(y_{-1}^1 - y_1^1\right)$$

$$+2\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{\theta^{2k}}{a^5} i \frac{a}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(y_{-1}^1 + y_1^1\right) + 2\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{\theta^{3k}}{a^5} a\sqrt{\frac{4\pi}{3}} y_0^1$$

$$= \left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{a^4}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(\theta^{1k} + i\theta^{2k}\right) y_{-1}^1.$$

$$+\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{a^4}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(-\theta^{1k} + i\theta^{2k}\right) y_1^1 + 2\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{a^4}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\theta^{3k} y_0^1 \text{......117.3}$$

لدينا بالمطابقة و لأن الدوال الكروية مستقلة خطيا $l \neq 1 \Rightarrow \alpha_{lm} = 0$

$$\alpha_{1,-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(\theta^{1k} + i\theta^{2k}\right) \text{...118.3}$$

$$\alpha_{1,1} = \frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(-\theta^{1k} + i\theta^{2k}\right) \text{....119.3}$$

$$\alpha_{1,0} = \frac{2}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2 \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\theta^{3k} \text{.......120.3}$$

$$A_I^{(1)k} = -\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 r^2\theta^{ik}x^i + \alpha_{1,-1} r y_{-1}^1 + \alpha_{1,1} r y_1^1 + \alpha_{1,0} r y_0^1 \text{......121.3}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 r^2\theta^{ik}x^i + \frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(\theta^{1k} + i\theta^{2k}\right)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(x^1 - ix^2\right) \text{......122.3}$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(-\theta^{1k} + i\theta^{2k}\right)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(x^1 + ix^2\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2 \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\theta^{3k}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}x^3 \text{.....123.3}$$

بتعويض الثوابت $\alpha_{lm}$ في عبارة شعاع الكمون نجد:

$$A_I^{(1)k} = -\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 r^2\theta^{ik}x^i + \frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2 \left(\left(\theta^{1k} + i\theta^{2k}\right)\left(x^1 - ix^2\right) + \left(-\theta^{1k} + i\theta^{2k}\right)\left(x^1 + ix^2\right)\right)$$

$$+\frac{2}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)\theta^{3k}x^3 \text{......124.3}$$

$$A_I^{(1)k} = -\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 r^2\theta^{ik}x^i + \frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2 \left(2\theta^{1k}x^1 + 2\theta^{2k}x^2\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2 \theta^{3k}x^3 \text{.....125.3}$$

وبالتالي فإن شعاع الكمون داخل الكرة المشحونة يعطى بالعبارة:

$$\boxed{A_I^{(1)k} = -\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 r^2\theta^{ik}x^i + \frac{2}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2 \theta^{ik}x^i \text{......126.3}}$$

تحصلنا سابقا على العلاقة بين الثابتين من خلال إستمرارية شعاع الكمون و هي $\alpha_{lm}a^{l}=\sigma_{lm}\dfrac{1}{a^{l+1}}$

وبتعويض عبارة $\alpha_{lm}$ نجد:

$$\sigma_{lm}=\alpha_{lm}a^{2l+1}.......127.3$$

$$\sigma_{1,-1}=\frac{1}{3a}\left(Zec\big/4\pi\right)^{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(\theta^{1k}+i\theta^{2k}\right)........128.3$$

$$\sigma_{1,1}=\frac{1}{3a}\left(Zec\big/4\pi\right)^{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(-\theta^{1k}+i\theta^{2k}\right).........129.3$$

$$\sigma_{1,0}=\frac{2}{3a}\left(Zec\big/4\pi\right)^{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\theta^{3k}........130.3$$

بالتعويض في عبارة $A_{II}^{(1)k}$ عند $l=1$

$$A_{II}^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\frac{\theta^{ik}x^{i}}{r^{4}}+\frac{1}{r^{2}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(-\theta^{1k}+i\theta^{2k}\right)\left(-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(x^{1}+ix^{2}\right)\right)\\+\frac{1}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(\theta^{1k}+i\theta^{2k}\right)\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(x^{1}-ix^{2}\right)\right)\\+\frac{2}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\theta^{3k}\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}x^{3}\right)\end{array}\right]..131.3$$

$$A_{II}^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\frac{\theta^{ik}x^{i}}{r^{4}}+\frac{1}{r^{2}}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\left(\left(-\theta^{1k}+i\theta^{2k}\right)\left(-x^{1}-ix^{2}\right)+\left(\theta^{1k}+i\theta^{2k}\right)\left(x^{1}-ix^{2}\right)\right)\\+2\theta^{3k}x^{3}\end{array}\right).132.3$$

$$A_{II}^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\frac{\theta^{ik}x^{i}}{r^{4}}+\frac{1}{3ar^{2}}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\left(\begin{array}{l}\theta^{1k}x^{1}+i\theta^{1k}x^{2}-i\theta^{2k}x^{1}\\+\theta^{2K}x^{2}+\theta^{1k}x^{1}-i\theta^{1k}x^{2}+\theta^{2k}x^{2}+i\theta^{2k}x^{1}+2\theta^{3k}x^{3}\end{array}\right).134.3$$

وبالتالي فإن شعاع الكمون خارج الكرة المشحونة يعطى بالعبارة:

$$A_{II}^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\frac{\theta^{ik}x^{i}}{r^{4}}+\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\frac{2}{3ar^{2}}\left(\theta^{1k}x^{1}+\theta^{2k}x^{2}+\theta^{3k}x^{3}\right)......135.3$$

$$\boxed{A_{II}^{(1)k}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\frac{\theta^{ik}x^{i}}{r^{4}}+\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^{2}\frac{2}{3ar^{2}}\theta^{ik}x^{i}.................136.3}$$

## 3-2-3) الحقل المغناطيسي الناتج عن الكرة المشحونة:

نستطيع الآن حساب الحقل المغناطيسي الناتج عن لا تبادل الفضاء علما أن $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و بالافتراض العملي أن كل المركبات معدومة إلا المركبات $\theta^{12}=-\theta^{21}=\beta$ فيصبح لدينا

$$\begin{cases} A_I^{(1)1}=\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 r^2\beta x^2-\frac{2}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2\beta x^2 ........137.3 \\ A_I^{(1)2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi a^3}\right)^2 r^2\beta x^1+\frac{2}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2\beta x^1 ........138.3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{II}^{(1)1}=\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2\left(\frac{1}{r^4}-\frac{2}{ar^2}\right)\beta x^2 .................138.3 \\ A_{II}^{(1)2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2\left(\frac{1}{r^4}-\frac{2}{ar^2}\right)\beta x^1 ...............139.3 \end{cases}$$

$$A_I^{(1)1}=\frac{1}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2\left(\frac{r^2}{a}-2\right)\beta y..........140.3$$

$$A_I^{(1)2}=-\frac{1}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2\left(\frac{r^2}{a}-2\right)\beta x..........141.3$$

***A*-الحقل المغناطيسي داخل الكرة:**

إن للحقل المغناطيسي لكرة مشحونة حجميا بشحنة ساكنة مركبة واحدة بحيث:

$$B_I^{(1)1}=-\frac{\partial}{\partial z}A^2=0.....142.3$$

$$B_I^{(1)2}=\frac{\partial}{\partial z}A^1=0.........143.3$$

$$B_I^{(1)3}=\frac{\partial}{\partial x}A^2-\frac{\partial}{\partial y}A^1......144.3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}A^2=-\frac{1}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2\left[\frac{2r}{a}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\beta x+\beta\left(\frac{r^2}{a}-2\right)\right]......135.3$$

$$=-\frac{1}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2\left[\frac{2r}{a}\frac{x}{r}\beta x+\beta\left(\frac{r^2}{a}-2\right)\right].........136.3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}A^2=-\frac{1}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2\left[\frac{2x^2}{a}+\left(\frac{r^2}{a}-2\right)\right]\beta..........137.3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}A^1=\frac{1}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2\left(\frac{2y^2}{a}+\left(\frac{r^2}{a}-2\right)\right)\beta.........138.3$$

$$B_I^{1(3)} = -\frac{1}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2\left(\frac{2}{a}\left(x^2+y^2\right)+2\left(\frac{r^2}{a}-2\right)\right)\beta .......139.3$$

$$\boxed{B_I^{1(3)} = -\frac{4}{3a}\left(\frac{Zec}{4\pi a^2}\right)^2\beta\left(\frac{r^2}{a}-1\right) ......140.3}$$

***B*–الحقل المغناطيسي خارج الكرة:**

$$A_{II}^{(1)1} = \frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2\left(\frac{1}{r^4}-\frac{2}{ar^2}\right)\beta y..........141.3$$

$$A_{II}^{(1)2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2\left(\frac{1}{r^4}-\frac{2}{ar^2}\right)\beta x.........142.3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}A_{II}^{(1)1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2\left[\left(\frac{-4y}{r^6}+\frac{4y}{ar^4}\right)\beta y+\left(\frac{1}{r^4}-\frac{2}{ar^2}\right)\beta\right]$$

$$= -\frac{\beta}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2\left[-\frac{4y^2}{r^6}+\frac{4y^2}{ar^4}+\frac{1}{r^4}-\frac{2}{ar^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}A_{II}^{(1)2} = \frac{\beta}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2\left(-\frac{4x^2}{r^6}+\frac{4x^2}{ar^4}+\frac{1}{r^4}-\frac{2}{ar^2}\right)$$

لدينا:

$$B_{II}^{(1)3} = \frac{\partial}{\partial x}A^2-\frac{\partial}{\partial y}A^1.....139.3$$

إذا:

$$B_{II}^{(1)3} = -\frac{\beta}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2\left(-\frac{4}{r^6}\left(x^2+y^2\right)+\frac{4}{ar^4}\left(x^2+y^2\right)+\frac{2}{r^4}-\frac{4}{ar^2}\right)$$

$$B_{II}^{(1)3} = -\frac{\beta}{3}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2\left(\frac{-4}{r^4}+\frac{4}{ar^2}+\frac{2}{r^4}-\frac{4}{ar^2}\right)$$

ومنه فالحقل المغناطيسي خارج الكرة يعطى ب:

$$\boxed{B_{II}^{(1)3} = \frac{-2\beta}{3r^4}\left(\frac{Zec}{4\pi}\right)^2}$$

- **خلاصة:**

في نهاية هذا الفصل نشير بذكر أنه يوجد عدة دراسات كان موضوعها دراسة تصحيحات اللاتبادل على العزم المغناطيسي لجسيمات ذات عزوم مقاسه تجريبيا، أما في دراستنا هذه اعتبرنا كرة مشحونة بدون حقل مغناطيسي وتم تطبيق التصحيحات اللاتبادلية على كرة مشحونة حجميا بشحنة ساكنة فتحصلنا على نتيجة تجعل من الشحنة الساكنة في الأبعاد الصغيرة جدا شحنة متحركة (تهتز) لوجود حقل مغناطيسي عبارته تم الحصول عليها داخل وخارج الكرة.

- وهذا يختلف طبعا مع التجربة، لذلك نفرض فرضية لهذا الاختلاف:

✓ هو أنه لا يوجد شحن ساكنة في الطبيعة أي أن جميعها تصدر حقل مغناطيسي تعجز الأجهزة لتحسس بعض قيمه مثلا...

# خاتمة عامة

## خاتمة

وفي الأخير نشير بالذكر إلى أن دراستنا للنظرية الكهرومغناطيسية في الفضاء اللاتبادلي كانت بإستخدامنا لتطبيق S.W كآلية لكتابة المقادير على شكل سلسلة إضطراب نتج عنه عدة تصحيحات أهمها:

- ✓ عبارة لاغرونج في الفضاء الغير تبديلي
- ✓ معادلة ماكسويل اللاتبادلية

- وبمقارنة هذه النتائج بسابقها في الفضاء التبادلي نجد أن هناك إختلاف قام بتوجيهنا لدراسة تأثيره على كرة مشحونة حجميا.

ثم إن تطبيقنا لفكرة "لا تبادل الفضاء" على النظرية الكهرومغناطيسية أعطى نتائج جديدة أهمها تمثل في وجود حقل مغناطيسي للشحنة الساكنة، كما أنّ هذا وضع معظم التوقعات لوجود تشوه في خطوط الحقل الكهربائي، لكن لا يمكننا الجزم بذلك ضمن هذه المذكرة، فلهذا نقول إنّ للموضوع تكملة لإثبات ذلك.

كما نأمل مستقبليا أن لاتبادل الفضاء يمكننا استعماله لتفسير الإشكالية:

- ✓ لماذا كافة الشحنات الملحوظة في الطبيعة تشكل مضاعفات كاملة لشحنة الإلكترون؟

# قائمة المراجع

## قائمة المراجع

[1] الموسوعة الحرة

[2] الكهرباء و المغناطيسية في النظامين الساكن و الديناميكي.عبد الله معيرش .ديوان المطبوعات الجامعية 12-2014/رقم النشر 02.5513

[3] Griffiths, David J. "Introduction to electrodynamics." (2005): 574-574

[4] Jackson, J. David. *Electrodynamics*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 1975.

[5] Møller, Christian. "The theory of relativity." (1972).

[6] الميكانيك الكلاسيكي " الجزء الثاني""عبد الله موسى" ديوان المطبوعات الجامعية" رقم النشر 1.02.2682

[7] Synge, John Lighton, et al. *Relativity: the special theory*. North-Holland Publishing Company, 1958.

[8] Berrino, G., et al. "Noncommutative electrodynamics." *Physical Review D* 67.6 (2003): 065021.

[9] Kruglov, S. I. "Maxwell's theory on non-commutative spaces and quaternions." *arXiv preprint hep-th/0110059* (2001).

[10] Abe, Yasumi, Rabin Banerjee, and Izumi Tsutsui. "Duality symmetry and plane waves in non-commutative electrodynamics." *Physics Letters B* 573 (2003): 248-254.

[11] Fidanza, Stéphane. "Towards an explicit expression of the Seiberg-Witten map at all orders." *Journal of High Energy Physics* 2002.06 (2002): 016.

[12] Fruhwirth, I., et al. "The role of the field redefinition in noncommutative Maxwell theory." *arXiv preprint hep-th/0202092* (2002).

[13] Adorno, T. C., D. M. Gitman, and A. E. Shabad. "Noncommutative magnetic moment, fundamental length, and lepton size." *Physical Review D* 86.2 (2012): 027702.

[14] Gaete, Patricio, and Iván Schmidt. "Coulomb's law modification in nonlinear and in noncommutative electrodynamics." *International Journal of Modern Physics A* 19.20 (2004): 3427-3437.

[15] Burić, Maja, and John Madore. "On noncommutative spherically symmetric spaces." *The European Physical Journal C* 74.3 (2014): 2820.

[16] Gomes, Marcelo. "Noncommutative field theory." *Brazilian Journal of Physics* 32.4 (2002): 838-842.

[17] T.C.Adorno,D.M.Gitiman"classical Noncommutative Electrodynamiccs With External Source" hep-th1106.0639v4

[18] Arfken, George B., and Hans J. Weber. "Mathematical methods for physicists." (1999)

## الملخص

في هذه المذكرة أظهرنا تأثير لا تبادل الفضاء على النظرية الكهرومغناطيسية ،فإنطلاقا من استخدامنا لتطبيق S.W كآلية لإيجاد العبارات و المعادلات تم تطبيقها لحساب شعاع الكمون الكهربائي لكرة مشحونة حجميا بشحنة ساكنة . فنتج زيادة على الكمون الكهربائي وجود حقل مغناطيسي داخل و خارج الكرة مما يعني بالنسبة لنا أن لاتبادل الفضاء ينتج عنه حركة ظاهرية وتشوه لكثافة الشحنة.



***الكلمات المفتاحية:***الكهرومغناطيسية – اللاتبادل الفضاء –طريقة الاضطرابات– تطبيق SW



## Résumé

Dans ce mémoire nous avons explicitement calculé l'influence de la non commutativité de l'espace-temps sur l'électromagnétisme et cela par le biais de l'application SW (Sieber-Witten) comme outil de travail. Nous avons appliqué cette méthode dans le cas d'une sphère chargée en volume et statique. Nous avons trouvé un champ magnétique à l'intérieure et à l'extérieure de la sphère, ce qui nous montre que la non commutativité induit un mouvement apparent et une distorsion des charges.



Mots clés

Electrodynamic relativiste, non commutativité, méthodes perturbatives, application SW



## Abstract

In this thesis we have explicitly calculated the influence of the space non commutative on the electromagnetic field. This was done by the use of the SW map. Using this method for the case of a charged sphere we have found a magnetic field inside and outside the charged sphere, which implies that the non commutativity of the space induces a virtual movement and a charge distortion



Keywords

Relativistic Electrodynamics, space non commutativity, perturbative methods, SW map