



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**

Facult des mathématiques et sciences de la
matire

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Master

Spécialité: Mathématiques

Option: Analyse

Par: Asma Hamidi

Thème

**Traitement analytique de problème d'écoulement par la
méthode de Kirchhoff**

Version de: 18 juin 2017

Devant le jury composé de:

Mr. Badidja Slalim	M.A.A UKMO universit - Ouargla	Prsident
Mr. Tellb Ibrahim	M.A.A UKMO universit - Ouargla	Examineur
Mr. Amara Abdelkader	M.A.A UKMO universit - Ouargla	Rapporteur

Dedicace

Je veux dédier ce modeste travail à :

ma chère maman **Bouhafs Halima.**

et mon cher père **Abderrezak.**

A mes frères **Masab, Youssef, Oussama, Raafa, Mouhamed lamin, Zakaria, Hou-daifa.**

et chère soeur **Khawla.**

et ma fiancé **Abd EL Aziz**

A mes oncles et mes tantes.

Les deux familles :**Hamidi et Bouhafs.**

Tous mes amis en particulier :**Salima et Zahra.**

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour réaliser ce travail.

Remerciements

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur **Amara Abdelkader**, pour l'aide précieuse qu'il m'a fait durant la réalisation de ce travail.

Je suis très heureux de remercier aussi Monsieur **Tellb Ibrahim** qui n'a pas hésité d'être membre du jury.

Je remercie vivement Monsieur **Badidja Slalim** qui a accepté d'être membre du jury.

Ces remarques pertinentes m'ont souvent éclairé dans ce travail.

Je tiens aussi à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Notations et Définition

- $\nabla V = \text{grad}(V) = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: le gradient d'un vecteur V
- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- $\rho = \rho(\vec{x}, t)$: la masse volumique du fluide au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant t .
- $\vec{u} \cdot \vec{v}$: Le produit scalaire de deux vecteurs
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$: Le produit vectoriel de deux vecteurs
- $\vec{\text{rot}}(V) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$
- $\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$
- $\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$.

Table des matières

Dedicace	i
Remerciements	i
Notations et Définitions	ii
Introduction	vi
1 Quelques notions préliminaires	1
1.1 Introduction	1
1.2 Initiation à l'Analyse Complexe	1
1.2.1 Dérivation des fonctions complexes	2
1.2.2 Définition de fonction holomorphe	2
1.2.3 Équations de Cauchy-Riemann	2
1.2.4 Théorème de Schwartz	3
1.2.5 Différentielle totale	3
1.3 Introduction à la mécanique des fluides	3
1.3.1 Fluide incompressible	4
1.3.2 Fluide irrotationnel	4
1.3.3 Ligne de courant	4
1.3.4 Fonction de courant	5
1.3.5 Fonction de Potentiel	6

1.4	Potentiel complexe des vitesses	7
1.5	Exemple	7
1.6	Équation de Bernoulli	8
2	Transformation de Schwarz-Christoffel et transformation hodographe	10
2.1	Introduction	10
2.2	Transformation hodographe	11
2.3	Transformation de Schwarz-Christoffel	12
2.3.1	Exemples	14
3	Problème d'un écoulement entre deux plaques horizontales sans tension de surface et sans effet de gravité	18
3.1	Introduction	18
3.2	Formulation de problème	18
3.2.1	Résolution de problème	20
	Conclusion	32
	Bibliographie	33

Introduction

Dans la mécanique des fluides, un écoulement de surface libre autour des objets de différentes formes, ont été étudiés de son importance pour l'application.

Les écoulements dans un canal, au dessus des obstacles, sont étudiés d'une façon très intensive . Les obstacle dans le fond du canal est les formes normales quelque peu : un demi-cercle, un semi-elliptique, un triangle etc....

Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement à surface libre entre deux plaques horizontales semi-infinies.

L'écoulement et supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables (x, y) de l'écoulement est identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$.

Les effet da la gravité et de tension superficielle ne sont pas pris en compte, on calcule la solution exactement en utilisant un transformation conforme d'hodographe, du à Kirchhoff(1869), et la transformation de Schwarz-Christoffel.

Notre travail est composé de trois chapitres.

Le chapitre 1 présente les précis d'analyses complexes et les définitions générales et les notions de mécanique des fluides telles que les mouvement sur les deux méthodes : la description lagrangienne et la description eulérienne et quelques définitions et propriété de l'écoulement et potentiel complexe des vitesse.

Dans le chapitre 2, on a étudié les transformations conformes telles que la transformation d'hodographe et la transformation de Schwarz-Christoffel et quelques exemples.

Dans le chapitre 3, on traite le problème dans le cas où la tension de surface et l'effet de gravité sont négligeables. On utilise la méthode hodographe de Kirchhoff et la transfor-

mation de conforme pour obtenir une solution exacte.

Chapitre 1

Quelques notions préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre est consacré pour acquérir quelque notions fondamentales sur les mécaniques des fluides, et on fait un présentation sur l'analyse complexe et quelque propriétés de l'écoulement, et on défini les équations de potentielle et de potentielle complexe et l'équation de Bernoulli. Pour plus détail voir [1], [3], [5] et [7]

1.2 Initiation à l'Analyse Complexe

Un nombre complexe z est un doublet de nombres réels $z = (x, y) = x + iy$, où $i^2 = -1$
La fonction f d'une variable complexe z est une application $f(z)$ qui fait correspondre un nombre complexe f à un autre nombre complexe z .

Soit f une fonction d'un ouvert Ω de \mathbb{C} $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \in \Omega$

On peut écrire f qui est aussi un nombre complexe, comme

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

où

u et v sont deux fonctions réelles de nombres réels

1.2.1 Dérivation des fonctions complexes

Une fonction f d'un ouvert Ω dans \mathbb{C} est dite \mathbb{C} -dérivable au point $z_0 \in \Omega$ si 'l existe un voisinage V de z_0 , tel que $V \subset \Omega$ et,

$$f : V \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

admet une limite au point z_0 est notée $f'(z_0)$ la dérivée de f en z_0 .

1.2.2 Définition de fonction holomorphe

f est dite holomorphe sur Ω si elle est \mathbb{C} -dérivable en tout point de Ω .

1.2.3 Équations de Cauchy-Riemann

Si $f = u+iv$ est \mathbb{C} -dérivable au point $z_0 = x_0+iy_0$ alors les équations suivantes sont vérifiées

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Alors $f'(z_0)$ donnée par

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Remarque

Soient $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2

Si $f = u + iv$ alors f holomorphe.

1.2.4 Théorème de Schwartz

Si les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues au voisinage de (x_0, y_0) alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

1.2.5 Différentielle totale

On appelle différentielle totale du 1^{er} ordre d'une fonction $f(x, y)$ l'expression

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

1.3 Introduction à la mécanique des fluides

- Un écoulement en surface libre désigne un écoulement avec une interface libre entre l'air et l'eau

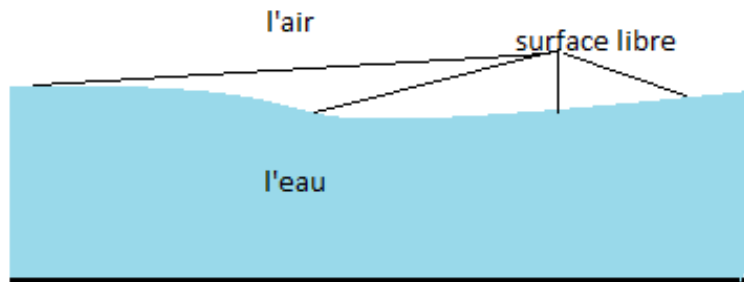


FIGURE 1.1 : Un écoulement en surface libre

- Considérons que V désigne un champ de vecteur vitesse de coordonnées $(u(x, y), v(x, y))$ à un point $M(x, y)$ d'un domaine ouvert du plan.

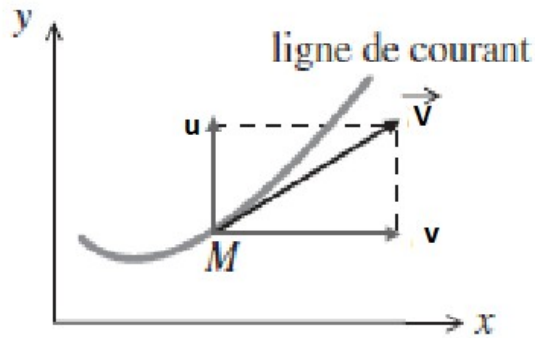


FIGURE 1.2 : Ligne de courant

1.3.1 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si le volume de chaque particule fluide ne varie pas au cours de mouvement se traduit par l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

1.3.2 Fluide irrotationnel

Un fluide est dit irrotationnel Si

$$\text{rot}(\vec{V}) = 0. \quad (1.1)$$

1.3.3 Ligne de courant

Sont les lignes qui en chaque point sont tangentes au vecteur vitesse en ce point (pour un instant fixe). Où par conséquent :

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} \quad (1.2)$$

où t a une valeur fixée.

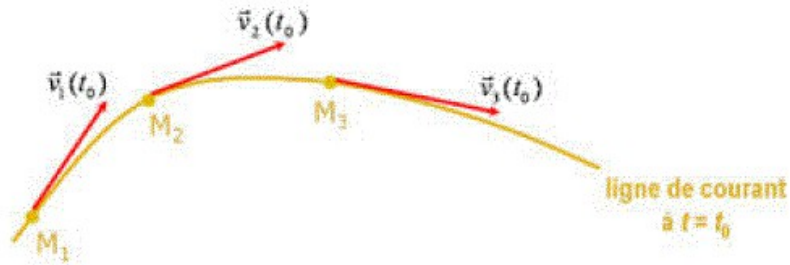


FIGURE 1.3 : Ligne de courant

1.3.4 Fonction de courant

si la domaine de l'écoulement est plan le vecteur de vitesse est vérifié à l'instant t

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$$

pour toutes les points de ce domaine

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

cela implique que la forme différentielle $u dx + v dy$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ :

$$\exists \psi, d(\psi) = u dx + v dy$$

implique

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.3)$$

ψ s'appelle la fonction de courant

De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u = \partial\psi/\partial y \\ v = -\partial\psi/\partial x \end{pmatrix} = -\partial^2\psi/\partial x^2 - \partial^2\psi/\partial y^2 = 0$$

$\Rightarrow \Delta\psi = 0$, ψ vérifie aussi l'équation de Laplace.

1.3.5 Fonction de Potentiel

On rappelle que pour un écoulement irrotationnel : $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$.

Peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$.

La fonction ϕ s'appelle fonction potentiel. On peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (1.4)$$

Si de plus le fluide est incompressible la fonction ϕ vérifie l'équation de Laplace.

1.4 Potentiel complexe des vitesses

On introduisons la fonction f telle que

$$f = \phi + i\psi,$$

appelée potentiel complexe des vitesses, qui est reliée à la vitesse complexe par la relation

$$\frac{\partial f}{\partial z} = u - iv. \quad (1.5)$$

1.5 Exemple

On considère l'écoulement plan défini en variable d'Euler par :

$$u = 2y; \quad v = -2x$$

1) l'écoulement est incompressible car :

$$\operatorname{div}(\vec{U}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

2) l'écoulement n'est pas irrotationnel car :

$$\operatorname{rot}(\vec{U}) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{e}_z = -4\vec{e}_z \neq \vec{0}.$$

donc n'est pas irrotationnel.

3) Fonction de courant ψ est :

$$d\psi = udy - vdx$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v = 2x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = 2y$$

On intègre la première équation en x d'où :

$$\psi = x^2 + F(y)$$

avec $F(y)$ fonction arbitraire de y .

On dérive ce résultat par rapport à y et on l'identifie avec la seconde équation : $F'(y) = 2y$

d'où $F(y) = 2y^2 + k_1$, avec k_1 constante arbitraire.

La fonction de courant est donc

$$\psi = x^2 + y^2 + k_1.$$

4) Fonction de potentiel des vitesses ϕ est :

$$d\phi = udx + vdy$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = u = 2y, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = v = -2x$$

on intègre la première équation en x d'où

$$\phi = 2xy + G(y)$$

avec $G(y)$ fonction arbitraire de y .

On dérive ce résultat par rapport à y et on l'identifie avec la seconde équation : $G'(y) = 2y$

d'où $G'(y) = 0$ et $G(y) = k_2$, avec k_2 constante arbitraire.

La fonction de potentiel est donc

$$\phi = 2xy + k_2.$$

1.6 Équation de Bernoulli

[3] Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. Un certain travail est fourni au fluide lorsqu'il passe d'un point à un autre et ce travail est égal à la variation d'énergie mécanique.

Dans le cas d'un fluide laminaire visqueux et incompressible, on obtient la relation suivante :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g Z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g Z_2$$

où P_i est la pression au points A_i où $i = 1, 2$.

Si le fluide non visqueux dans ce cas $\Delta p_i = 0$. l'équation de Bernoulli se réduit à :

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g Z = \text{const}$$

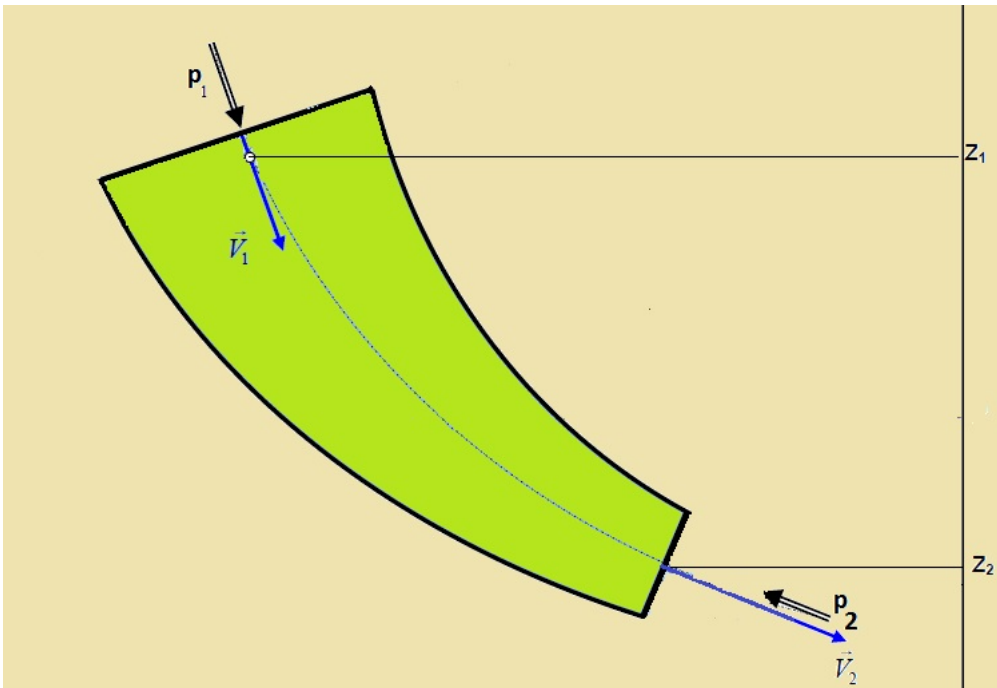


FIGURE 1.4 : théorème de Bernoulli au cas d'un écoulement

Chapitre 2

Transformation de Schwarz-Christoffel et transformation hodographe

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter une définition sur les transformations conformes et quelques propriétés fondamentales sur elles, qui présente dans des transformations conformes, mention transformation d'hodographe et la transformation de Schwarz-Christoffel et quelques exemples. Pour plus de détails voir [2], [5], [6], [8].

Définition 1 Soit f une fonction de deux variables réelles ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$). On dit que f préserve les angles au point (x_0, y_0) si quels que soient les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 passant par (x_0, y_0) , les vecteurs tangents à ces courbes au point (x_0, y_0) font le même angle orienté que les vecteurs tangents aux courbes $f(\Gamma_1)$ et $f(\Gamma_2)$ au point $f(x_0, y_0)$.

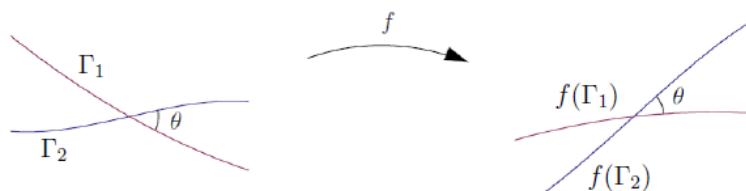


FIGURE 2.1 : transformation conforme

Théorème 2.1.1 Soit $\omega = f(z)$ une fonction analytique dans domaine D telle que $f'(z) \neq 0$ en tout point de D . Alors la transformation réalisée par cette fonction est une transformation conforme de D .

2.2 Transformation hodographe

La théorie des lignes de courant est étudié le problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel, bornés par des parois rectilignes et des lignes de courant libre de forme inconnue, sur lesquelles la pression est supposée constante. Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte. L'idée est d'introduire la fonction complexe ω définie par :

$$\omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u - iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta.$$

où $f = \phi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = u - iv$ et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$, (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des x et l'axe des y , respectivement, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U est la vitesse de référence qui peut être considérée comme unité de vitesse.

On note que La fonction ω possède les propriétés suivantes :

- .La partie réelle de ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e., $\log\left(\frac{U}{q}\right) = \text{const.}$
- .La partie imaginaire de ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e., $\theta = \text{const.}$

Par conséquent, dans le plan Ω , le domaine d'écoulement est présenté par une figure plane de côtés rectilignes (polygone).

C'est aussi le cas de la transformation f , qui transforme le plan physique z en polygone. Il est vient que, si nous pouvons transformer le plan ω vers la moitié supérieure (reps. inférieure) d'une certaine variable complexe λ , alors la relation entre z et f ou entre df/dz et f est paramétriquement déterminées.

2.3 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel réalise une transformation du demi-plan supérieur(ou inférieur) vers un polygone simple quelconque. Elle constitue un analogue de la transformation de Helmholtz-Kirchhoff utilisée dans le cadre des quasi-contours. On définit la transformation de Schwarz-Christoffel par la formule :

$$\Omega = k \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + M \quad (2.1)$$

où k et M sont des constantes complexes, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les angles intérieurs au polygone.

La transformation $\Omega(\lambda)$ est conforme sauf aux points λ_i .

Le point anguleux est transformé en point non anguleux. Notons que si dans la transformation $\alpha_i \rightarrow \infty$, alors on omet le facteur $(\lambda - \lambda_n)$ dans la transformation puisqu'il serait associé à l'exposant 0, on dit que le polygone est dégénéré en ce point.

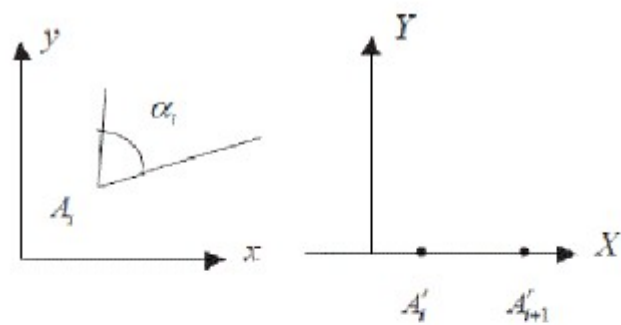


FIGURE 2.2 : Transformation d'une ligne brisée en axe horizontal

2.3.1 Exemples

Exemple 1 :

Dans le plan image, A est situé $-\infty$, B en b , C en c , et D en ∞ (voir figure 2.1).

Les angles dans plan $x - y$ sont : $\alpha_B = \pi/2$, $\alpha_C = \pi/2$.

L'équation de Schwarz-Christoffel donne par :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - a)^{\frac{\alpha_B}{\pi} - 1}(\lambda - b)^{\frac{\alpha_C}{\pi} - 1}$$

Alors

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - b)^{-1/2}(\lambda - c)^{-1/2} = \frac{k}{(\sqrt{\lambda - b})(\sqrt{\lambda - c})}$$

par intégrale

$$\Omega(\lambda) = 2k \ln(\sqrt{\lambda - b} + \sqrt{\lambda - c}) + M$$

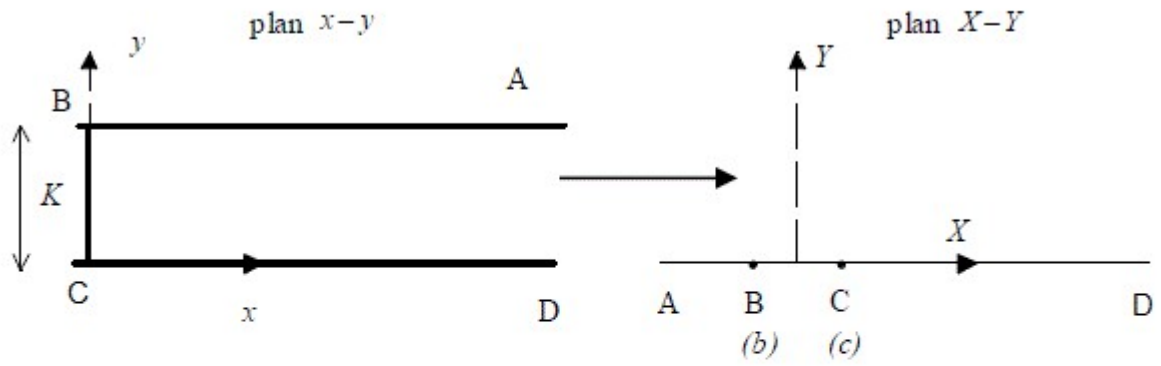


FIGURE 2.3 : passage du plan $x - y$ au $X - Y$

Exemple 2 :

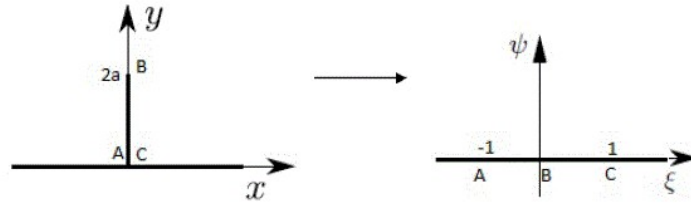


FIGURE 2.4 : Écoulement passé d'une plaque verticale

$$\frac{dz}{d\xi} = k(\xi - a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(\xi - b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\xi - c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}$$

on pose $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ et $\alpha = \pi/2$, $\beta = 2\pi$, $\gamma = \pi/2$.

Alors

$$\frac{dz}{d\xi} = k(\xi + 1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}\xi^{\frac{2\pi}{\pi}-1}(\xi - 1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}$$

$$\frac{dz}{d\xi} = k \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

par intégrale

$$dz = k \int \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi$$

$$\implies z = k\sqrt{\xi^2 - 1} + D$$

on pose $k = 2a$, $D = 0$

$$z = 2a\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Exemple 3 :

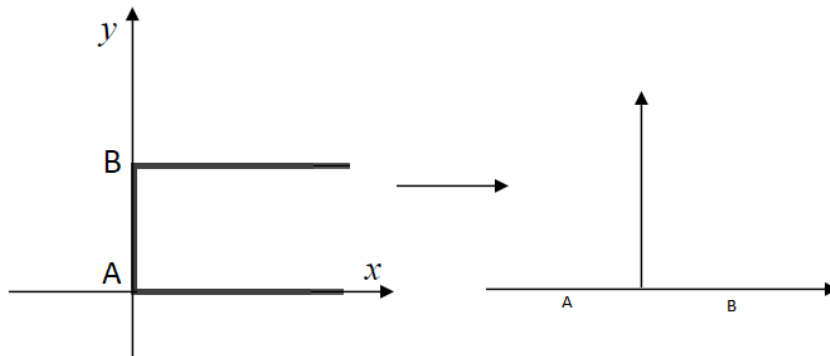


FIGURE 2.5 : Source dans un canal

$$\frac{dz}{d\xi} = k(\xi - a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(\xi - b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}$$

on utilise les points $a = -1$, $b = 1$ et les angles $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/2$

On a

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\xi} &= k(\xi + 1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}(\xi - 1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1} \\ \implies \frac{dz}{d\xi} &= \frac{k}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \end{aligned}$$

par intégrale

$$\begin{aligned} dz &= k \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \\ \implies z &= k \cosh^{-1} \xi + D \end{aligned}$$

on pose $D = 0$, $k = l/\pi$

$$z = \frac{l}{\pi} \cosh^{-1} \xi$$

Chapitre 3

Problème d'un écoulement entre deux plaques horizontales sans tension de surface et sans effet de gravité

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, est d'étudier le problème d'écoulement au surface libre bidimensionnel et irrotationnel, d'un fluide incompressible et non visqueux qui est uniforme entre deux plaques horizontales semi-infinies dans domaine borné au-dessus d'un surface libre, on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan inférieur. Nous utilisons d'abord la méthode des lignes de courant libres basé sur la méthode hodographe et la transformation de Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte. Cette méthode de résolution a été introduite par Kirchhoff (1869).

3.2 Formulation de problème

Dans cette section nous allons étudier un écoulement bidimensionnel et irrotationnel de profondeur H finie d'un fluide incompressible et non visqueux entre deux plaques horizontales semi-infinies qui s'étend de $x = -\infty$ à x_0 borne par la surface libre ABC . Par de la symétrie d'écoulement par rapport à $x = 0$, on peut étudier le problème dans la demi-plan inférieur (figure 3.1).

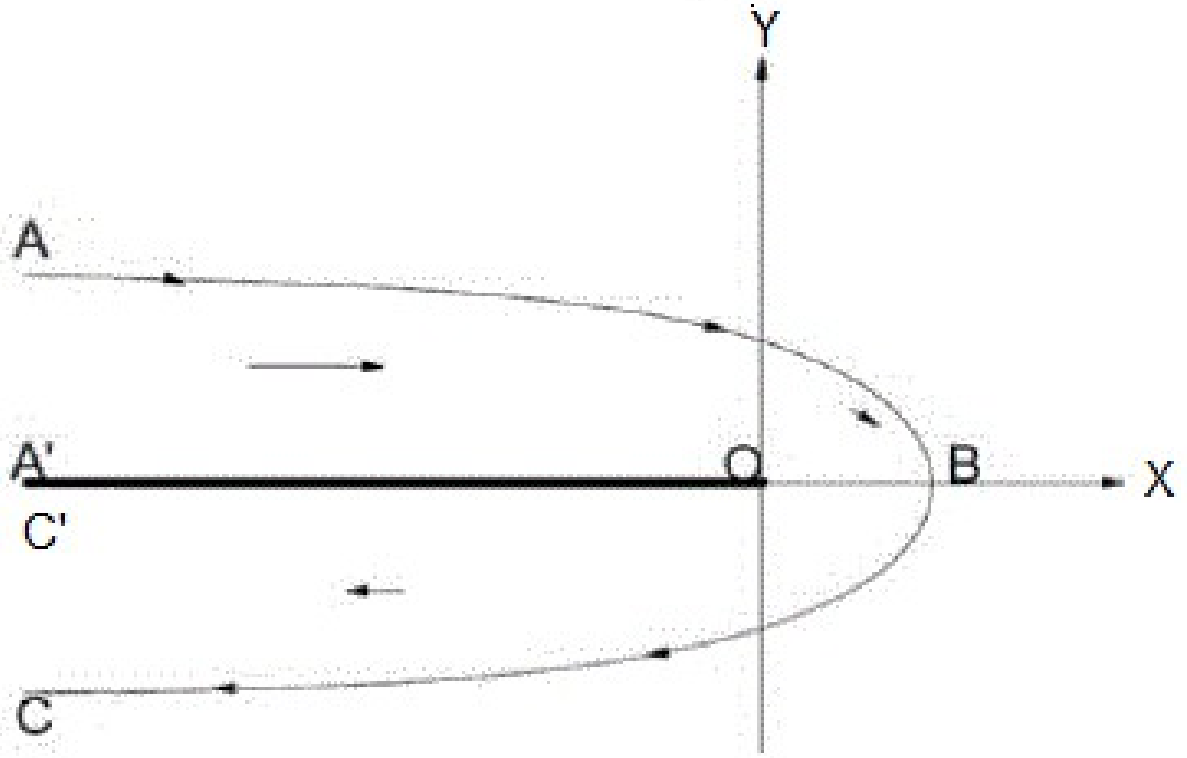


FIGURE 3.1 : Schéma de l'écoulement et des coordonnées($z - plan$).

On choisit comme repère de référence, l'axe de x sur le plan horizontale. L'axe des y est perpendiculaire à l'axe des x au point O et dirigé vers le haut.

La demi droite $x \leq 0$ on notée le paroi rigide par OA' ou OC' (Fig 3.1). Le plan (x, y) de l'écoulement est identifie au plan de variable complexe $z = x + iy$

Pour $x \rightarrow -\infty$ l'écoulement est uniforme de vitesse constante U et un profondeur constante H .

Pour la surface libre ABC , on a effet de gravite et les tensions de surface libre sont négligées, l'équation de Bernoulli donne

$$q = cte$$

Puisque la pression et la densité sont constantes.

On indique par $df/dz = u - iv$ de la vitesse complexe telle que u et v sont les composantes de la vitesse et $f = \phi + i\psi$ de la fonction complexe dans laquelle ϕ et ψ sont la fonction potentielle et la fonction de courant respectivement.

3.2.1 Résolution de problème

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution analytique du problème considéré. En négligeant l'effet de gravité et les tensions de surface, le problème admet une solution exacte qu'on peut la calculer en utilisant la théorie des lignes de courant libres et la transformation de Schwarz-Christoffel, en utilisant la technique utilisée par Kirchhoff.

1^{er} étapes

On transforme le domaine d'écoulement réel (x,y) figure(3, 1) en un domaine d'écoulement de frontière polygonale du plan $(\log(\frac{U}{q}), \theta)$ figure(3, 2) par la transformation de hodographe Ω .

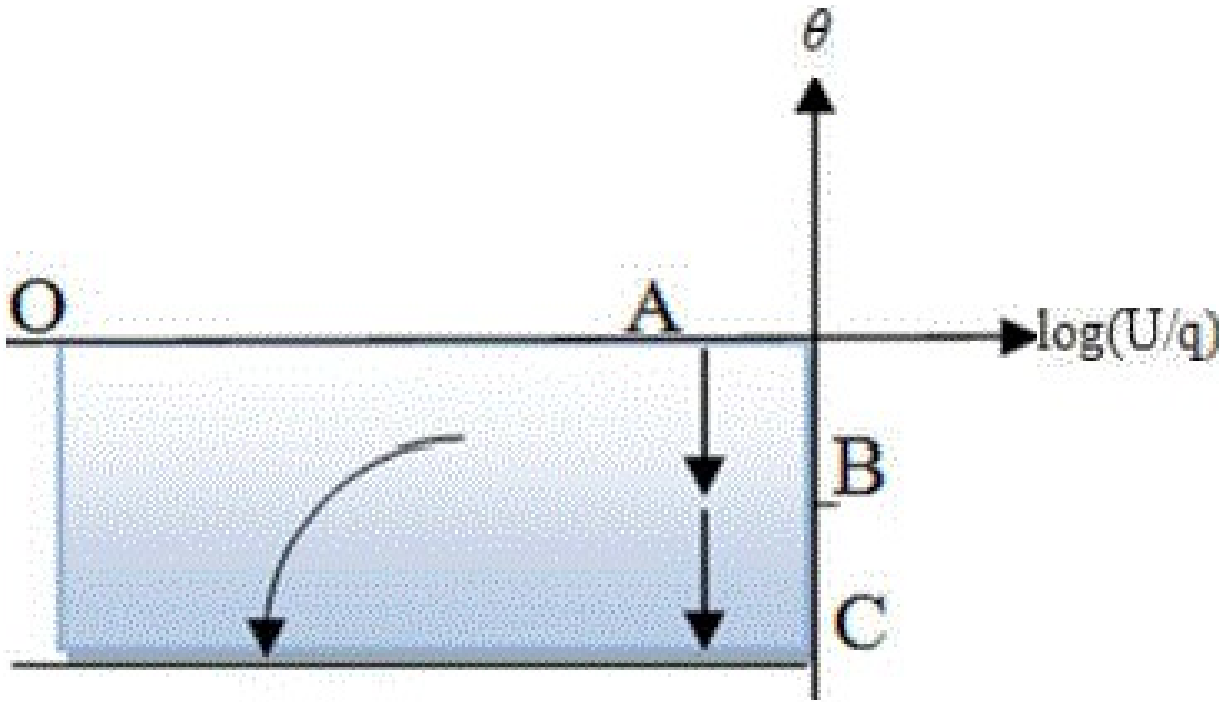


FIGURE 3.2 : Ω -plan

2^{eme} étaps

On transforme le domaine d'écoulement réel (x,y) figure(3, 1) à une bande de largeur DU dans le plan de variable $f = \phi + i\psi$ figure(3, 3).

3^{eme} étaps

Nous utilisons la transformation Schwarz-Christoffel pour transformés le domaine d'écoulement Ω (figure 3, 2) en un demi-plan supérieur de variable λ (figure 3, 4).

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2} + \dots(\lambda - \lambda_n)^{p_n} \quad \text{avec } p_n = \frac{\alpha_n}{\pi} - 1 \quad (3.1)$$

les points A, B, C dans λ -plan se transforment aux points $A(0,0), B(0, -\pi/2), C(0, -\pi)$ dans le plan Ω .

Les angle dans le plan Ω entre les noeuds du polygone sont : $\alpha_A = \pi/2, \alpha_B = \pi/2, \alpha_C = \pi$.

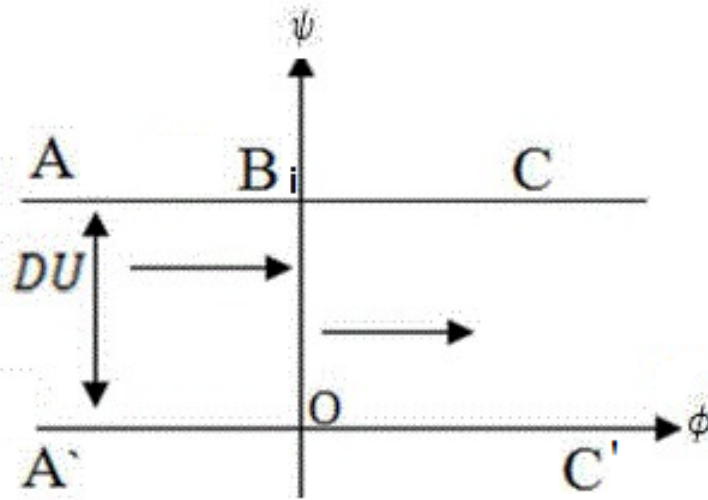


FIGURE 3.3 : f -plan

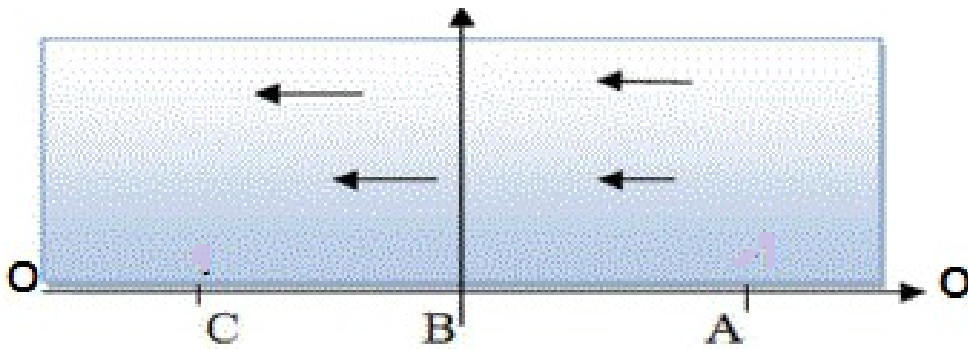


FIGURE 3.4 : λ -plan

D'où l'on tire : $p_A = -1/2$, $p_B = -1/2$, $p_C = 0$

on trouve :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda + 1) \frac{-1}{2} (\lambda - 0)^0 (\lambda - 1) \frac{-1}{2}$$

On a :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda + 1) \frac{-1}{2} (\lambda - 1) \frac{-1}{2} \tag{3.2}$$

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{k}{(\sqrt{\lambda + 1})(\sqrt{\lambda - 1})} \tag{3.3}$$

$$\implies \int d\Omega = k \int \frac{d\lambda}{(\sqrt{\lambda+1})(\sqrt{\lambda-1})} = k \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}$$

Après l'intégration, nous obtenons :

$$\Omega - \Omega_0 = k \ln(\sqrt{\lambda^2-1} + \lambda)$$

alors :

$$\Omega = \Omega_0 + k \ln(\sqrt{\lambda^2-1} + \lambda) \tag{3.4}$$

Pour déterminer les constantes Ω_0 et k on a :

Lorsque $A(\lambda = 1, \Omega = 0)$, $\Omega = 0$, alors $\Omega_0 = 0$

Lorsque $C(\lambda = -1, \Omega = i\pi)$ on a :

$$i\pi = 0 + k \ln(\sqrt{(-1)^2-1} - 1)$$

$$\implies i\pi = k \ln(-1)$$

$$\implies i\pi = k \ln(i^2)$$

$$\implies k = \frac{i\pi}{\ln(i^2)}$$

On a :

$$e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$$

$$\implies e^{\pi i} = -1$$

$$\implies \ln(e^{\pi i}) = \ln(-1)$$

$$\implies \pi i = \ln(i^2)$$

$$\implies k = \frac{\pi i}{\pi i}$$

donc $k = 1$

Alors :

$$\Omega = \ln(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda) \tag{3.5}$$

L'équation (3.5) devient :

$$\begin{aligned} e^\Omega &= e^{\ln(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda)} \\ \implies e^\Omega &= (\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda) \\ \implies e^\Omega - \lambda &= \sqrt{\lambda^2 - 1} \\ \implies (e^\Omega - \lambda)^2 &= (\sqrt{\lambda^2 - 1})^2 \\ \implies e^{2\Omega} - 2\lambda e^\Omega + \lambda^2 &= \lambda^2 - 1 \\ \implies e^{2\Omega} + 1 &= 2\lambda e^\Omega \\ \implies \lambda &= \frac{e^{2\Omega} + 1}{2e^\Omega} \end{aligned}$$

donc :

$$\lambda = \cosh \Omega$$

4^{eme} étaps

On utilise la transformation Schwarz-Christoffel pour transformer le domaine d'écoulement f (figure 3, 3) en un demi-plan supérieur de variable λ (figure 3, 4)

$$\frac{df}{d\lambda} = M(\lambda - \lambda_3)^{p_3}(\lambda - \lambda_4)^{p_4} \dots (\lambda - \lambda_n)^{p_n} \quad \text{avec} \quad p_n = \frac{\alpha_n}{\pi} - 1$$

la correspondance des points A, B et C est donnée par $\lambda = 1, \lambda = 0, \lambda = -1$, d'où

$$\frac{df}{d\lambda} = M(\lambda - 1)^{-1}(\lambda + 1)^{-1} = \frac{M}{\lambda^2 - 1} \quad (3.6)$$

donc

$$\begin{aligned} \int df &= M \int \frac{d\lambda}{\lambda^2 - 1} \\ \implies f - f_0 &= -M \frac{\ln(\lambda + 1) - \ln(\lambda - 1)}{2} \\ \implies f &= f_0 - M \left(\frac{\ln(\lambda + 1) - \ln(\lambda - 1)}{2} \right) \end{aligned}$$

Alors

$$f = f_0 - \frac{M}{2} \ln\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right) \quad (3.7)$$

f_0 et M sont des constantes à déterminer.

Lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ (ou point O), $f = 0$, alors $f_0 = 0$

Lorsque $B(\lambda = 0, f = iDU)$:

$$\begin{aligned} iDU &= -\frac{M}{2} \ln\left(\frac{0 + 1}{0 - 1}\right) \\ \implies iDU &= -\frac{M}{2} \ln(-1) \\ \implies iDU &= -\frac{M}{2} \ln(i^2) \\ \implies iDU &= -\frac{M\pi i}{2} \\ \implies \boxed{M = -\frac{2DU}{\pi}} \end{aligned}$$

Alors l'équation (3.7) est :

$$\begin{aligned} f &= -\frac{2DU}{2\pi} \ln\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right) \\ \implies f &= \frac{DU}{\pi} \ln\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{df}{d\lambda} = -\frac{2DU}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 - 1} \quad (3.8)$$

5^{eme} étaps

Dans cette étape on recherchons sur la transformation qui transforme la demain d'écoulement z à le demain d'écoulement f

Nous utilisons la fonction de Kirchhoff :

$$\Omega = \log\left(U \cdot \frac{dz}{df}\right) \quad (3.9)$$

$$\implies e^\Omega = U \cdot \frac{dz}{df}$$

Alors :

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} \cdot e^\Omega \quad (3.10)$$

de l'équation (3.5) on trouve

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} \cdot e^{\ln(\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda)} \quad (3.11)$$

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} \cdot (\sqrt{\lambda^2-1} + \lambda) \quad (3.12)$$

6^{eme} étaps

Pour la solution de notre problème en utilisant la relation suivante

$$U \frac{dz}{d\lambda} = U \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda} \quad (3.13)$$

On remplace (3.8) et (3.12) dans (3.13)

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{2D}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot (\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda) \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{2D}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda^2 - 1} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \right] \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{2D}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{(\sqrt{\lambda^2 - 1})(\sqrt{\lambda^2 - 1})} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \right] \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{2D}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \right] \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{2D}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{-(1 - \lambda^2)}} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \right] \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{2D}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{i^2(1 - \lambda^2)}} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \right] \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{2D}{\pi} \left[\frac{1}{i\sqrt{(1 - \lambda^2)}} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \right] \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{2D}{\pi} \left[\frac{i}{i^2\sqrt{(1 - \lambda^2)}} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \right] \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= -\frac{2D}{\pi} \left[-\frac{i}{\sqrt{(1 - \lambda^2)}} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \right] \\
\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{2D}{\pi} \left[-\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} + i\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right]
\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{dz = \frac{2D}{\pi} \left[-\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} d\lambda + i \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right]} \quad (3.14)$$

En intégrant l'équation (3.14) \Rightarrow

$$\int dz = \frac{2D}{\pi} \left[\int \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} d\lambda + i \int \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right] \quad (3.15)$$

On pose :

$$I_1 = \int \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} d\lambda$$

et

$$I_2 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

on calcule I_1

utilise le changement de variable :

$$u = \lambda^2 - 1$$

$$\implies du = 2\lambda d\lambda \implies \frac{du}{d\lambda} = 2\lambda$$

donc :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \implies I_1 = \frac{1}{2} \ln(u)$$

$$\implies I_1 = \frac{1}{2} \ln(\lambda^2 - 1)$$

On va calcule I_2 :

$$I_2 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

$$\implies I_2 = \arcsin(\lambda)$$

donc l'équation (3.15) est :

$$z - z_0 = \frac{D}{\pi} [\ln(\lambda^2 - 1) + 2i \arcsin(\lambda)]$$

$$z_0 = (x_0, y_0) = (x_0, 0)$$

$$\implies x + iy - x_0 - iy_0 = \frac{D}{\pi} [\ln(\lambda^2 - 1) + 2i \arcsin(\lambda)]$$

$$\implies x - x_0 + i(y - y_0) = \frac{D}{\pi} \ln(\lambda^2 - 1) + i \frac{2D}{\pi} \arcsin(\lambda)$$

$$\implies x - x_0 + iy = \frac{D}{\pi} (\log(\lambda^2 - 1) + 2i \arcsin(\lambda))$$

$$= \frac{D}{\pi} (\log(-(1 - \lambda^2)) + 2i \arcsin(\lambda))$$

$$= \frac{D}{\pi} (\log(i^2(1 - \lambda^2)) + 2i \arcsin(\lambda))$$

$$= \frac{D}{\pi} (\log(i^2) + \log(1 - \lambda^2) + 2i \arcsin(\lambda))$$

$$= \frac{D}{\pi} (2 \log(i) + \log(1 - \lambda^2) + 2i \arcsin(\lambda))$$

$$= \frac{D}{\pi} (2 \log(e^{i\pi/2}) + \log(1 - \lambda^2) + 2i \arcsin(\lambda))$$

$$= \frac{D}{\pi} (2 \cdot i \frac{\pi}{2} + \log(1 - \lambda^2) + 2i \arcsin(\lambda))$$

$$= \frac{D}{\pi} (i\pi + \log(1 - \lambda^2) + 2i \arcsin(\lambda))$$

$$= \frac{D}{\pi} (\log(1 - \lambda^2) + i(2 \arcsin(\lambda) + \pi))$$

$$\implies \begin{cases} x = x_0 + \frac{D}{\pi} \log(1 - \lambda^2) \\ y = \frac{2D}{\pi} (\arcsin(\lambda) + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

on changement de variable $\arcsin(\lambda) + \frac{\pi}{2} = \theta + \frac{\pi}{2}$

$$\implies \arcsin(\lambda) = \theta$$

$$\implies \lambda = \sin(\theta)$$

$$\implies \lambda^2 = (\sin(\theta))^2$$

$$\implies -\lambda^2 = -(\sin(\theta))^2$$

$$\begin{aligned}\implies 1 - \lambda^2 &= 1 - (\sin(\theta))^2 \\ \implies 1 - \lambda^2 &= (\cos(\theta))^2\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \frac{D}{\pi} \log(\cos(\theta))^2 & , -\pi \leq \theta \leq 0 \\ y = \frac{2D}{\pi}(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{cases}} \quad (3.16)$$

qui est l'équation paramétrique de la surface libre

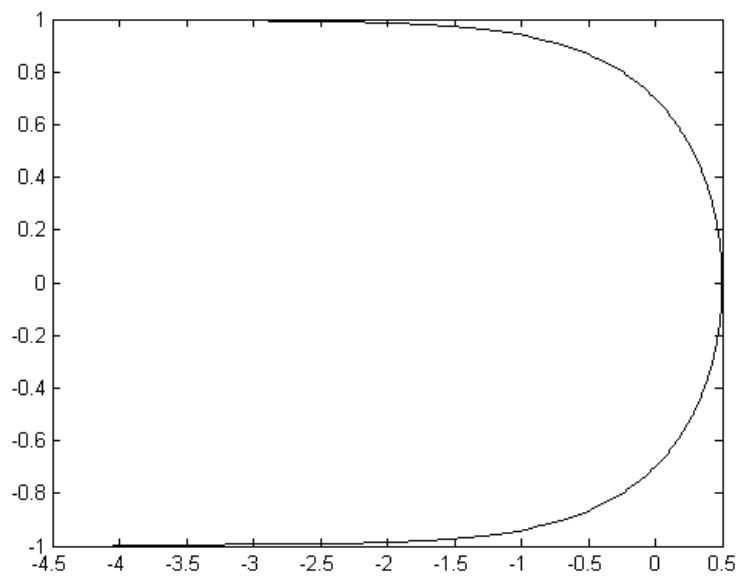


FIGURE 3.5 : Forme de surface libre pour $x_0 = 0,5$ et $H = 1$

Conclusion

Dans cet actuel mémoire, on à étudié un problème d'écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre entre deux plaques horizontales semi-infinies.

L'effet des forces de gravité est négligé, on utilisant la transformation conforme d'hodographe et la transformation Schwarz-Christoffel pour trouve la forme de la surface libre de forme entre deux plaques horizontales semi-infinies.

Bibliographie

- [1] Ancey Christophe , *Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [2] Arbenz Kurt Et Alfred Wohlhauser, *Variables complexes*, Presses Polytechniques Et Universitaires Romandes.
- [3] D. Daboussi, F. Dias, J.M. Vanden Broeck, *Gravity flows with a free surface of finite extent*, Eur. J. Mech B-Fluids. 17 (1998).
- [4] G. Birkhoff, E. H. Zarantonello, *Jets Wakes and Cavities*, New York, Academic Press, Inc. (1957).
- [5] H.R.Vallentine, *Applied Hydrodynamics*, Butterworths, London, 1970.
- [6] Kenji Maillard , *Analyse complexe et harmonique*.
- [7] Melodelima Christelle , *Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables*, Université Joseph Fourier de Grenoble, 2011/2012.
- [8] Runge Vincent , *Eléments d'analyse et de contrôle dans le problème de Hele-Shaw*, Autre, Ecole Centrale de Lyon, 2014.
- [9] Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia, *Mécanique des fluides*, Dunod, Paris, 2011 ISBN 978-2-10-056922-9.

ملخص

في هذا العمل, قمنا بدراسة مشكلة تدفق سائل غير لزج و غير قابل للإنزغاط بين أثنين من لوحات افقية شبه لا نهائية . نستخدم بعض طرق التحويلات المطابقة لدراسة السطح الحر للسائل.

تقنية الحل هي نفسها المعتمدة من طرف الباحث (Kirchhoff)

الكلمات المفتاحية : سطح حر , سائل , تدفق , دالة الكمون .

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié le problème d'écoulement au surface libre bidimensionnel d'un fluide non visqueux et incompressible , entre deux plaques horizontales semi-infinies .Nous utilisons quelques transformations conformes pour réduire le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre .

La technique de résolution utilisée par de Kirchhoff .

Mot clé : Surface libre, Fluide, écoulement , Fonction potentielle.

Abstract

In this work, we study the problem of two dimensional free surface flow of a inviscid and incompressible fluid between two semi-infinite horizontal plates. We use some conformal transformation to reduce the problem of discriptization only on the free surface.

The solution technique by Kirchhoff.

Key words : Free surface, Fluid, Flow , Potential function.