

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Sciences Appliquées  
Département de Génie Electrique



Mémoire

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et technologies

Filière : Génie électrique

Spécialité : Matériaux électrotechnique

Présenté par :

BENAMOR EL MAHDI

**Thème:**

**Étude électromagnétique d'une  
pompe MHD à conduction dans le  
cas non linéaire**

Soutenu publiquement

Le :../5/2017.

Devant le jury :

M<sup>f</sup> BEN ALIA khaled

MC (B)

Président

UKM Ouargla

M<sup>me</sup> NACEUR sonia

MC (B)

Encadreur/rapporteur

UKM Ouargla

M<sup>f</sup> BOUCHALA Tarik

MC (A)

Examineur

UKM Ouargla

Année universitaire 2016/2017

# Remerciements

## REMERCIEMENTS

*Au début, Nous tenons à remercier notre DIEU le tout clément pour nous avoir permis la force, la patience et la volonté qui nous ont facilité la réalisation de ce travail.*

*Aussi, notre gratitude et notre reconnaissance vont à nos chers parents pour leurs sacrifices consentis pour notre éducation.*

*De même que nous exprimons nos sincères remerciements à notre encadreur Mdm. NACEUR SONIA pour sa disponibilité, ses conseils pertinents, ses orientations et son aide tout au long des étapes de l'élaboration de ce travail, et ce sans omettre la portée des conseils hautement bénéfiques de notre honorable Mdm. BELKBIR AMEL*

*Par la même, nous adressons nos vifs remerciements également au corps professoral du département génie électrique, pour leur abnégation et patience dans notre formation et notre préparation, auxquelles les cadres dirigeants et de maîtrise de l'ENTP particulièrement le Chef de post TP 222 BELOUZ Hamza et le Chef électricien BEDIDA MOHAMED Hamza, qui les ont conforté par leur disponibilité bienveillante à nous écouter et à satisfaire notre besoin en connaissances.*

*Enfin, nos vifs respects et considérations aux honorables Messieurs les membres du jury.*

*BENAMOR, El mahdi*

**Dédicace**

# *Dédicace*

*J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :*

*A ma très chère mère qui a donné le véritable sens à ma  
vie et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.*

*A mon très cher père, pour ses encouragements, son  
soutien, surtout pour son amour et son sacrifice afin que  
rien n'entrave le déroulement de mes études.*

*A mes grands parents*

*A mes sœurs et mes frères. A toute ma famille*

*A tous mes amis*

*A Tous ceux que j'aime et je respecte*

*BENAMOR, El mahdi*

# Nomenclature

# Liste des abréviations et des symboles

## I. Abréviations

<u>Symbole</u>	<u>Description</u>
MHD	Magnétohydrodynamique
DC	Courant continu
MEF	Méthode des éléments finis
MIF	Méthode des intégrales de frontière
MDF	Méthode des différences finies
MVF	Méthodes des volumes finis
2D	Bidimensionnel
3D	Trois dimension
AC	Courant alternatif
MATLAB	(matrixlaboratory): langage de programmation

## II. Symbole

<u>Symbole</u>	<u>Description</u>	<u>Unité</u>
$\vec{A}$	Potentiel vecteur magnétique	[T/m]
$\vec{H}$	Vecteur champ magnétique	[A/m]
$\vec{E}$	Vecteur champ électrique	[V/m]
$\vec{B}$	Vecteur induction magnétique	[T]
$\vec{D}$	Vecteur induction électrique	[C/m <sup>2</sup> ]
$\vec{J}_c$	Vecteur densité du courant électrique de conduction	[A/m <sup>2</sup> ]
$\mu$	Perméabilité magnétique	[H/m]
$\rho$	Densité volumique de charges électriques	[C/m <sup>3</sup> ]
$\epsilon$	Permittivité diélectrique	[F/m]
$\nu$	Réductivité magnétique	[m/H]
$\vec{g}$	Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptibles de ce déplacé	[m/s]
$\sigma$	Conductivité électrique	[S/m]
$\vec{J}_{ex}$	Densité du courant d'excitation	[A/m <sup>2</sup> ]
$\vec{J}_a$	Densité de courant injecté par l'électrode(source)	[A/m <sup>2</sup> ]
$\epsilon_0$	Permittivité absolue du vide	[F/m]
$\vec{J}$	Densité de courant total	[A/m <sup>2</sup> ]
$\epsilon_r$	Permittivité relative du milieu	[USI]
$\mu_r$	Perméabilité relative du milieu	[USI]
$\vec{B}_{re}$	Vecteur induction magnétique rémanente	[T]
$\mu_0$	Perméabilité magnétique absolue du vide	-
$\vec{V}$	Vitesse d'écoulement du fluide	[m/s]
$E_{ind}$	Champ électrique induit	[V/m]
$E'$	F.C.E.M d'inducteur	[V/m]
$U$	Potentiel électrique scalaire	[V]
$\omega$	Vitesse de rotation	rd/s



# Sommaire

# Sommaire

✚ Introduction Général.....	1
✚ Problématique.....	1
❖ Objectif.....	1
❖ Présentation du mémoire.....	2
<b>Chapitre I : <u>L'état de l'art de la magnétohydrodynamique MHD</u></b>	
I-1 Introduction.....	4
I-2 Pompes électromagnétiques.....	4
I-3 Conversion magnétohydrodynamique.....	4
I-4 La magnétohydrodynamique.....	4
I-5 Les pompes magnétohydrodynamiques.....	5
I-5-1 Principe physique.....	5
I-5-2 Pompes MHD à conduction.....	6
I-5-3 Pompes MHD à courant continu.....	6
I-5-4 Pompes MHD à courant alternatif.....	8
I-6 Pompe MHD à induction.....	9
I-6-1 Principe physique.....	9
I-6-2 Pompes à induction plates.....	10
I-6-3 Pompes à induction annulaires.....	11
I-6-4 Pompe hélicoïdales.....	12
I-7 Comparaison entre les pompes à conduction et à induction.....	12
I-8 Applications de la magnétohydrodynamique.....	13
I-8-1 Génération d'électricité.....	13
I-8-2 Propulseurs MHD.....	14
I-9 Application de la magnétohydrodynamique en métallurgie.....	14
I-9-1 Brassage.....	14
I-9-2 Lévitacion.....	14
I-9- Formage.....	14
I-9-4 Pulvérisation.....	14
I-10 Application biomédical.....	14
I-11 Conclusion.....	15

## **Chapitre II : Modèles mathématiques et méthodes numériques pour la résolution des phénomènes électromagnétiques**

II-1 Introduction.....	17
II -2 Équations générales de maxwell.....	17
II -3 Interprétation Physique Des équations électromagnétique.....	18
II -3-1 Équation De Couplage électromagnétique.....	18
II -3-2 Les équations De Conservation.....	19
II -3-3 Elles constituent les équations fondamentales de l'électromagnétisme.....	19
II -3-4 Loi de comportement des matériaux (Milieux Physiques).....	20
II -4 Formulation des équations électromagnétiques.....	21
II -4-1 Modèle électrostatique.....	22
II -4-2 Modèle électrocinétique.....	22
II -4-3 Modèle Magnétostatique.....	22
II -4-4 Modèle Magnétostatique Scalaire.....	23
II -4-5 Modèle Magnétostatique Vectoriel.....	23
II -4-6 Modèle magnétodynamique.....	23
II -5 Formulation électromagnétique du problème.....	26
II -5-1 Formulation en potentiel vecteur magnétique.....	27
II -6 Conditions aux limites.....	27
II -7 Conditions aux interfaces.....	28
II -8 Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles.....	28
II -8-1 Méthode Des Différences Finies (MDF).....	29
II -8-2 Méthode Des Éléments Finis (MEF).....	29
II -8-3 Méthode Des Intégrales De Frontières (MIF).....	29
II -8-4 Méthode Des Volumes Finis (MVF).....	29
II-9 Conclusion.....	31

## **Chapitra III : Application et discussion des résultats**

III1 Introduction.....	33
III-2 Problème électromagnétique.....	33
III-3 Formulation de l'équation électromagnétique (MHD) par la méthode des volumes finis....	33
III-3-1 Étude du modèle électromagnétique.....	33
III-4 Condition aux limites.....	36
III-4-1 Condition de Dirichlet.....	36

---

III-4-2 Condition de Neumann.....	36
III-5 Code de calcul.....	36
III-6 Application.....	38
III-6-1 Description générale de la pompe MHD à conduction.....	38
III-7 Mise en équations dans l'hypothèse bidimensionnelle.....	39
III-8 Résultats et discussions.....	39
III-9 Cas non linéaire.....	40
III-9-1 Représentation de l'induction magnétique dans la pompe MHD.....	43
III-9-2 Représentation de la densité du courant d'induit dans le canal.....	44
III-9-3 Représentation de la force électromagnétique dans le canal.....	45
III.10 Conclusion.....	46
Conclusion générale.....	48
Références Bibliographiques	
Résumé	

# Introduction générale

# Introduction générale

## ✚ Problématique

La magnétohydrodynamique (MHD) décrit le comportement d'un fluide conducteur du courant électrique (ce fluide peut être un liquide, un gaz ionisé, un plasma). C'est une généralisation de la mécanique des fluides, qui est la magnétohydrodynamique dans le cas particulier où il n'y a pas de champ électromagnétique. Entre la mécanique des fluides et la magnétohydrodynamique, électrohydrodynamique en présence d'un champ électrique (électrostatique) se présente comme un domaine intermédiaire.

La magnétohydrodynamique (MHD) est un domaine très vaste de la physique qui concerne l'interaction entre un champ électromagnétique et un fluide conducteur de l'électricité. Ainsi, on conçoit aisément que, suivant le type d'interaction, on peut trouver la MHD liée aux problèmes apparemment disjoints de la couronne solaire, de la magnétosphère, de la conversion d'énergie fossile en énergie électrique, de la fusion thermonucléaire de la propulsion ou encore aux techniques industrielles de la métallurgie, [4].

Les applications de la magnétohydrodynamique sont très larges et dans des domaines très variées, tels que l'industrie métallurgique, le transport ou le pompage des métaux liquides en fusion,

## ❖ Objectif

magnétohydrodynamique est l'étude de l'interaction entre les champs magnétique et les écoulements de toute les fluide conducteur, et comme les matériaux ferromagnétiques, que sont très perméables permettent la circulation d'un flux magnétique important. La loi de comportement des matériaux ferromagnétiques est la courbe  $B(H)$  qui exprime la relation non linéaire que existe entre l'induction matériaux et les champs.

L'objectif de ce travail est donc d'étude électromagnétique d'une pompe MHD à conduction dans le cas non linéaire. Par la méthode des volumes finis, la simulation de la pompe de notre étude sera réalisée au moyen du logiciel professionnel MATLAB Différentes caractéristiques telles que, la distribution de l'induction magnétique densité du courant induit et de la force électromagnétique dans la pompe MHD à conduction.

## ❖ Présentation du mémoire

Le travail exposé dans ce mémoire s'articule autour de trois principaux chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous intéressons à l'état de l'art de la magnétohydrodynamique MHD et leurs différentes applications.
- Le deuxième chapitre est l'objet de la formulation mathématique des phénomènes électromagnétiques par les équations de Maxwell, présentation des méthodes numériques et des modèles électromagnétiques.
- le dernier chapitre est consacré à la présentation du code du calcul développé sous environnement MATLAB basé sur la méthode des volumes finis en 2D. et la présentation des résultats de cette modélisation des phénomènes électromagnétiques dans le cas non linéaire de la pompe MHD à conduction en régime statique.

Le mémoire est clôturé par une conclusion générale

# Chapitre I

## L'état de l'art de la magnétohydrodynamique MHD

- I-1 Introduction
- I-2 Pompes électromagnétiques
- I-3 Conversion magnétohydrodynamique
- I-4 La magnétohydrodynamique
- I-5 Les pompes magnétohydrodynamiques
  - I-5-1 Principe physique
  - I-5-2 Pompes MHD à conduction
  - I-5-3 Pompes MHD à courant continu
  - I-5-4 Pompes MHD à courant alternatif
- I-6 Pompe MHD à induction
  - I-6-1 Principe physique
  - I-6-2 Pompes à induction plates
  - I-6-3 Pompes à induction annulaires
  - I-6-4 Pompe hélicoïdales
- I-7 Comparaison entre les pompes à conduction et à induction
- I-8 Applications de la magnétohydrodynamique
  - I-8-1 Génération d'électricité
  - I-8-2 Propulseurs MHD
- I-9 Application de la magnétohydrodynamique en métallurgie
  - I-9-1 Brassage
  - I-9-2 Lévitacion
  - I-9-3 Formage
  - I-9-4 Pulvérisation
- I-10 Application biomédical
- I-11 Conclusion



## **I-1 Introduction.**

La magnétohydrodynamique (MHD) est une discipline scientifique qui décrit le comportement d'un fluide conducteur du courant électrique (liquide ou gaz ionisé appelé plasma) en présence de champs électromagnétiques.

La magnétohydrodynamique (MHD) est à la frontière de deux sciences, la mécanique des fluides et l'électromagnétisme. Elle consiste en l'étude de l'interaction entre un écoulement de fluide conducteur et des champs magnétiques. Sa naissance remonte au 19<sup>ème</sup> siècle, lorsque Faraday écrivit les lois de l'induction magnétique (1831). Elles montrent l'existence d'une force électromotrice induite dans un écoulement soumis à un champ magnétique. Cette force est susceptible de créer des courants qui peuvent agir avec le champ magnétique pour donner naissance à des forces de Laplace, [4] et [5].

Dans ce chapitre je présente une généralité sur les pompes magnétohydrodynamique(MHD) avec ses différents types.

## **I-2 Pompes électromagnétiques.**

L'application première des pompes électromagnétiques a été le pompage du sodium pour le refroidissement des réacteurs nucléaires. Dès les années 1970, ces pompes ont été utilisées pour le pompage des métaux liquides à haute température comme le zinc et l'aluminium.

Aujourd'hui, elles sont utilisées dans d'autres domaines comme le domaine médical ou la microélectronique (électrolytes, plasmas). Elles sont l'une des applications de la magnétohydrodynamique, [6].

## **I-3 Conversion magnétohydrodynamique.**

Le convertisseur MHD concerne la conversion de l'énergie mécanique du mouvement d'un fluide conducteur en énergie électrique. Ce mécanisme permet de transformer directement le mouvement de fluide en électricité sans passer par des turbines comme dans le cas des centrales classiques. Elle peut également s'effectuer en sens inverse, c'est à dire qu'il est possible d'utiliser l'énergie électrique pour mettre un fluide conducteur en mouvement. On réalise ainsi des pompes magnétohydrodynamiques, [7].

## I-4 La magnétohydrodynamique.

La MHD a étendu son domaine à la métallurgie et d'autres dispositifs industriels (pompes électromagnétiques, propulsion), ces pompes ont l'avantage par rapport aux pompes mécaniques de n'avoir aucune pièce mobile et aucun contact avec le fluide puisque ce dernier est simplement convecté par un champ magnétique, [5].

## I-5 Les pompes magnétohydrodynamiques.

### I-5-1 Principe physique.

Le principe général de fonctionnement des pompes électromagnétiques réside dans l'application d'une induction magnétique  $\vec{B}$  non colinéaire à un courant  $\vec{J}$  traversant le fluide. Ceci donne naissance à une force de Laplace  $\vec{F}_L$  qui entraîne la circulation du fluide conducteur dans le canal. La Figure (I.1) présente le schéma classique et simplifié du principe de fonctionnement d'une pompe magnétohydrodynamique, [8].

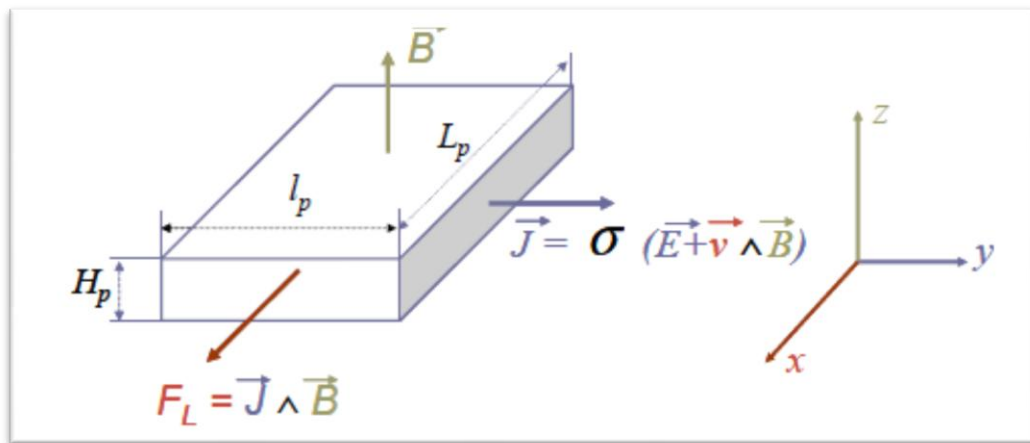


Figure (I.1) : Principe de fonctionnement d'une pompe MHD

La force de Laplace  $F_L$  est exprimée par la relation suivante :

$$\vec{F}_L = \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (1)$$

Avec  $\vec{J}$  la densité de courant dans le fluide conducteur et  $\vec{B}$  l'induction magnétique. Il s'agit bien évidemment de la loi sur laquelle est basé le fonctionnement de la plupart des machines électriques tournantes. Dans le cas d'une pompe électromagnétique, le rotor est remplacé par un fluide conducteur.

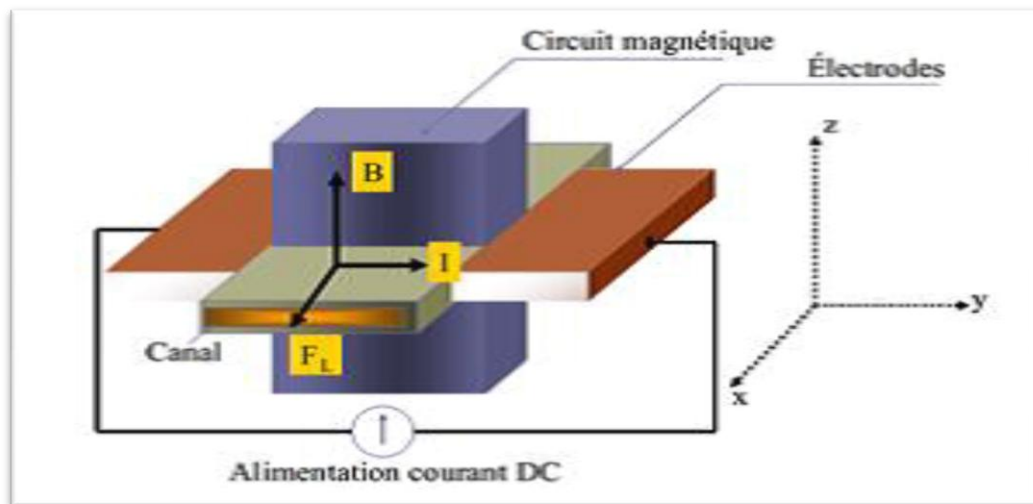
Les pompes électromagnétiques sont classées en fonction de la nature du courant qui les traverse (continu ou alternatif), de la manière dont est créé le champ magnétique (continu ou alternatif) et de l'origine du courant (induction ou conduction). Nous trouvons aujourd'hui deux catégories principales de pompes électromagnétiques, les pompes à conduction et les pompes à induction.

Nous parlons de pompe à conduction lorsque le courant est injecté dans le canal de pompage par l'intermédiaire d'électrodes. Dans le cas des pompes à induction, le courant est induit à l'intérieur

du canal de pompage par la présence d'un champ magnétique glissant, [8].

### I-5-2 Pompes MHD à conduction.

Les pompes magnétohydrodynamiques à conduction sont constituées d'un canal dans lequel s'écoule un fluide électriquement conducteur à la vitesse  $v$ . La Figure (I.2) représente le schéma d'une telle pompe. L'interaction entre le l'induction magnétique  $B$  suivant l'axe  $z$  et le courant injecté par les électrodes suivant l'axe  $y$  donne naissance à une force de Laplace  $F_L$  suivant l'axe  $x$ , [8].



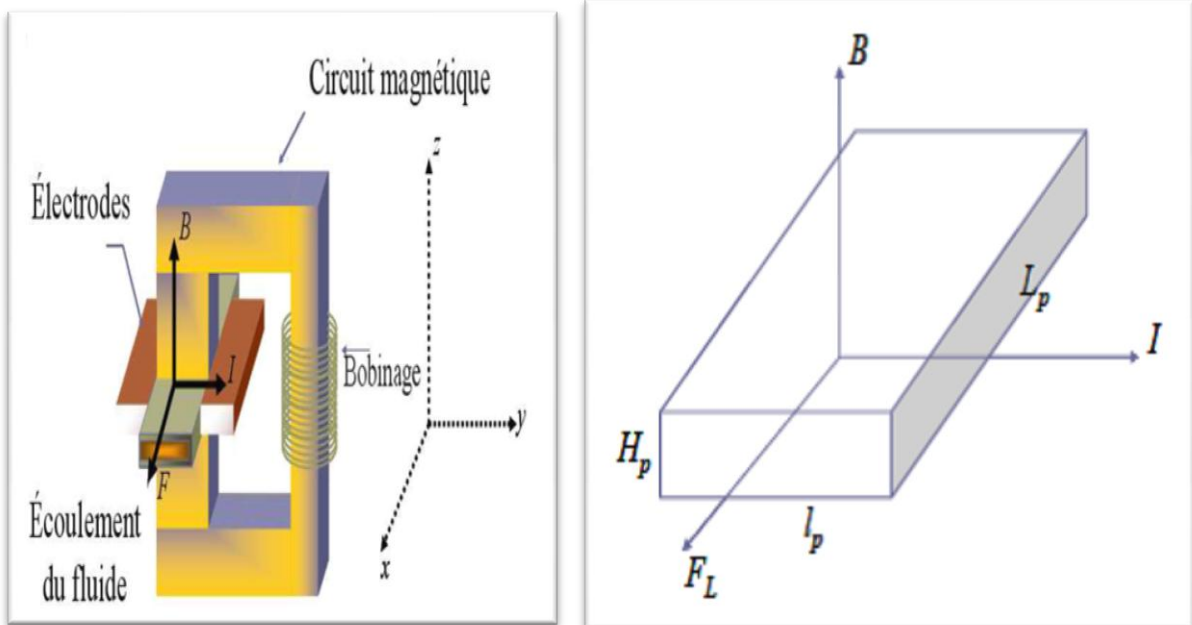
Figure(I.2) : Schéma d'une pompe MHD à conduction.

Les différentes parties qui constituent la pompe magnétohydrodynamique à conduction sont :

- le circuit magnétique : il est destiné à créer et canaliser les lignes de champ magnétique dans le canal ;
- le canal dans lequel s'écoule le fluide électriquement conducteur ;
- le fluide conducteur ;
- les deux électrodes en contact avec le fluide conducteur : elles servent à injecter le courant  $I$  à l'intérieur du canal. Elles sont réalisées avec un matériau bon conducteur électrique, [8].

### I-5-3 Pompes MHD à courant continu.

La pompe magnétohydrodynamique à conduction à courant continu (MHD DC) est le modèle le plus simple de pompe MHD. Le courant dans le canal et le courant dans le bobinage inducteur (cas d'un électroaimant) sont continus. Pour créer le champ magnétique, nous pouvons aussi utiliser un aimant permanent. Le circuit magnétique peut être refermé par un barreau de fer pour éviter les fuites magnétiques vers l'extérieur et obtenir une induction élevée. La Figure (I.3) représente le schéma d'une pompe MHD DC avec un canal rectangulaire et dont l'induction magnétique est créée par des aimants. Nous noterons  $H_p$  la hauteur du canal,  $L_p$  sa longueur et  $l_p$  sa largeur (espace compris entre les deux électrodes), [8].



Principe de la pompe MHD DC

Dimensions de la zone de fluide dans la pompe

Figure (I.3) : Pompe MHD à conduction à courant continu

### I-5-4 Pompes MHD à courant alternatif.

Dans le cas des pompes magnétohydrodynamiques à courant alternatif (MHD AC), le courant dans le fluide et le courant dans le bobinage sont sinusoïdaux. Le courant  $I$  traversant le canal de pompage peut donc être fourni en sortie d'un transformateur, et le champ magnétique par un électro-aimant Figure(I.4). L'utilisation d'un transformateur permet d'avoir une alimentation des électrodes très simple car il est assez complexe d'obtenir des alimentations DC à fort courant et faible tension ayant un bon rendement. Par contre, pour des courants élevés un refroidissement des transformateurs est nécessaire. Le champ magnétique et le courant dans le fluide doivent avoir la même fréquence. La force de pompage est maximale si le champ magnétique et le courant sont en phase d'où l'idée d'avoir la même alimentation pour le courant  $I$  et l'induction magnétique  $B$ , [8].

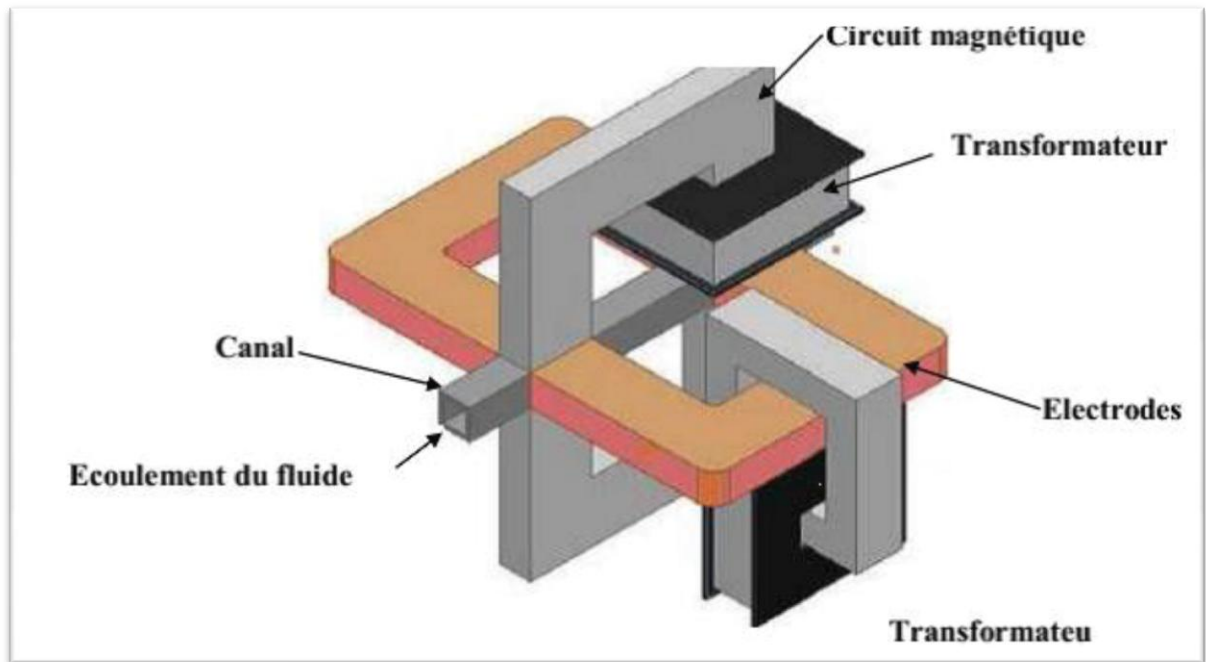


Figure (I.4) : Schéma d'une pompe MHD AC

La circulation du fluide est toujours basée sur la force de Laplace, mais ici, nous avons une variation temporelle du courant et du champ donc de la force. Le champ d'induction magnétique et le courant dans le fluide sont exprimés par : [8].

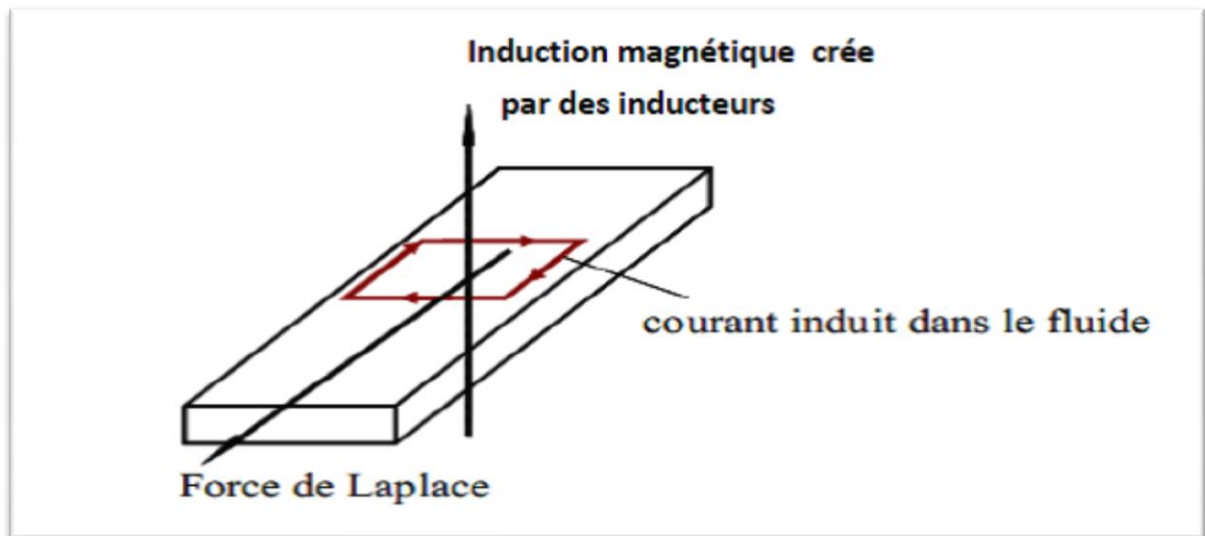
$$B(t) = B_{max} \sin(\omega t) \quad (2)$$

$$I(t) = I_{max} \sin(\omega t \pm \theta) \quad (3)$$

## I-6 Pompe MHD à induction.

### I-6-1 Principe physique.

Le principe général d'une pompe à induction consiste à créer un champ magnétique glissant avec des enroulements polyphasés (en général triphasés). Ce dernier induit des courants dans le fluide conducteur qui créent à leur tour une force de Laplace tendant à le mettre en mouvement. Ce fonctionnement est très proche de celui de la machine asynchrone mais ici le champ créé est glissant, et l'induit est constitué par le fluide conducteur. La Figure (I.5) montre les courants induits dans les pompes à induction, [8].



Figure(I.5): Lignes de courant dans une pompe MHD à induction

Les différentes parties d'une pompe à induction sont :

- l'inducteur : il est constitué d'un circuit magnétique créant un champ glissant grâce à un bobinage polyphasé
- l'induit : il est constitué par le fluide conducteur.
- l'entrefer.

Il existe plusieurs types de pompes à induction. Les plus utilisées dans l'industrie sont les pompes

plates et les pompes annulaires. La différence entre ces deux types de pompes est leur géométrie.

La Figure (I.5) montre le schéma d'une pompe MHD à induction plate. Le liquide métallique circule dans un canal rectangulaire, [8].

### I-6-2 Pompes à induction plates.

L'idée de base du fonctionnement des pompes plates est la même que précédemment. Elles ressemblent beaucoup au moteur linéaire, le rail est remplacé par le fluide. Le canal a une section rectangulaire. Des enroulements inducteurs alimentés par des courants alternatifs triphasés génèrent une induction magnétique sinusoïdale glissante.

La Figure(I.6) montre le schéma d'une pompe MHD à induction plate. Le liquide circule dans un canal rectangulaire. Le refroidissement se fait par circulation forcée d'air dans les inducteurs. Les problèmes technologiques portent surtout sur la réalisation de conduits en tôle d'acier inox mince (pour diminuer les pertes) résistant longtemps à la corrosion et d'une étanchéité absolue, [6].

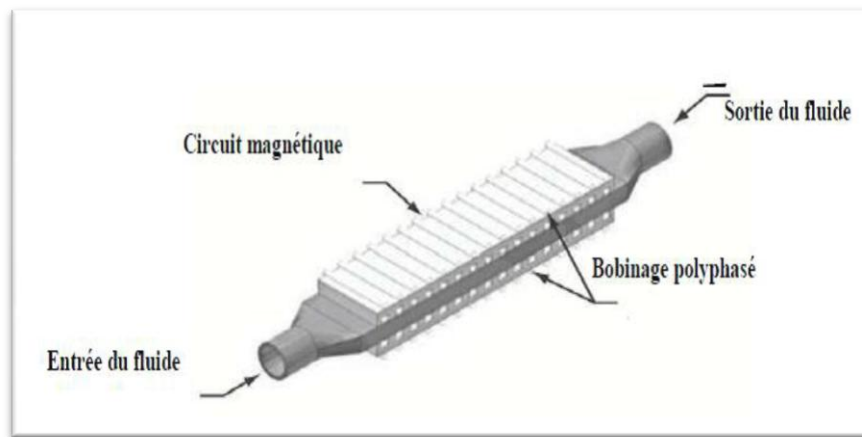


Figure (I.6) : Pompe MHD à induction plate

### I-6-3 Pompes à induction annulaires.

La conception de ces pompes remonte à 1929 (Einstein et Szilard). Le conduit est annulaire entre deux tubes coaxiaux dont l'intérieur contient un noyau de fer doux, et l'extérieur est couvert de bobines triphasées.

La Figure (I.7) montre le schéma d'une pompe MHD à induction annulaire. Le type annulaire est plus performant que le type rectangulaire car les courants induits sont toujours perpendiculaires à la direction de l'écoulement. Ainsi, la force de Laplace a partout la même direction que celle de l'écoulement. Par contre, dans le cas d'une machine de section rectangulaire, les courants induits se bouclent d'une façon moins favorable aux échanges d'énergie mécanique en énergie électrique et provoquent d'avantage des pertes par effet Joule, Les avantages de ces pompes sont les suivants:

- Les courants électriques se referment dans la masse du fluide, ce qui rend inutile l'adhérence de celui-ci sur la paroi ;
- La forme est simple et l'encombrement économique ;
- Le démontage est facile.

Le principe de fonctionnement de ces pompes ne diffère pas des moteurs classiques. Le courant des enroulements primaires produit un champ magnétique de déplacement qui produit à son tour un courant induit dans le métal liquide. L'interaction entre le champ principal et le courant induit donne naissance à des forces appliquées au niveau du liquide. Les pompes à induction présentées dans la littérature ont en général une taille assez conséquente. En effet, leur circuit magnétique et leurs bobinages assez complexes permettent plus difficilement une miniaturisation que dans le cas des pompes à conduction, [6].

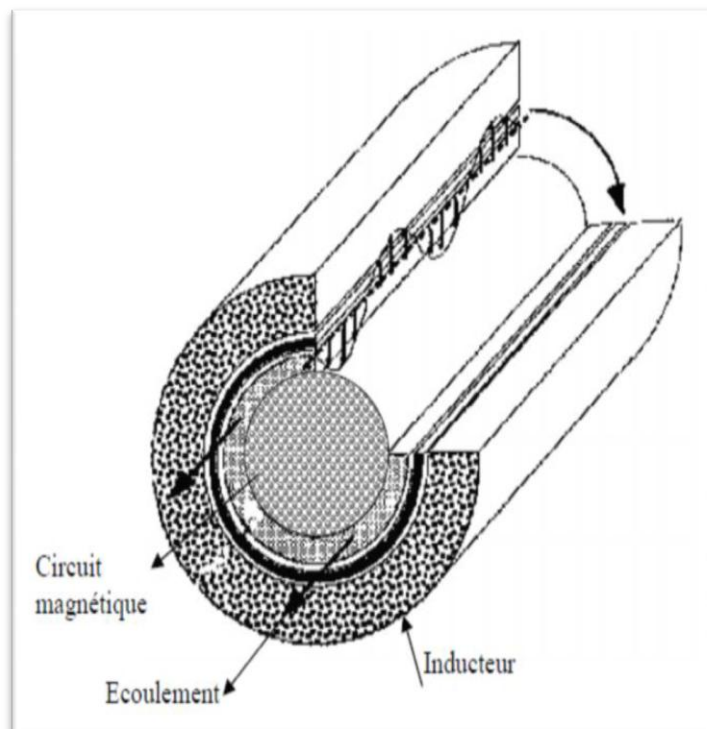


Figure (I.7): Pompe MHD à induction annulaire



### **I-6-4 Pompe hélicoïdales.**

Dans ce type de pompes, le conduit annulaire est hélicoïdal au lieu d'être rectiligne. Les pertes supplémentaires dues à la composante azimutale de la vitesse et les difficultés de fabrication sont prohibitives, [9],[10].

### **I-7 Comparaison entre les pompes à conduction et à induction.**

La description des pompes de façon générale, montre que chaque type de pompes présente ses propres avantages et des inconvénients:

- la fabrication des pompes MHD DC a un coût relativement faible par rapport aux autres. De plus, elles fonctionnent avec des aimants permanents ce qui simplifie leur réalisation. Les principaux inconvénients sont l'alimentation électrique qui est complexe et la présence d'électrodes ;
- la pompe MHD à conduction à courant alternatif peut être plus facilement alimentée mais demande la présence d'un électro-aimant. De plus, le courant alternatif entraîne la présence de courants de Foucault ;
- l'avantage principal des pompes à induction réside dans l'absence d'électrodes contrairement aux pompes MHD à conduction. Par contre, le circuit magnétique est complexe et devient une contrainte importante pour la miniaturisation du système, [11] [12].

### **I-8 Applications de la magnétohydrodynamique.**

La MHD offre un potentiel d'applications industrielles et de recherches considérables.

#### **I-8-1 Génération d'électricité.**

Dans ce processus, l'énergie mécanique est transformée en énergie électrique, on peut considérer que le système le plus simple est celui du convertisseur à conduction.

Il est constitué d'un organe essentiel qui est le canal placé dans l'entrefer d'un aimant dans lequel s'écoule un métal liquide qui traverse une induction magnétique  $B$  qui induit un courant  $J$  collecté par des électrodes en contact avec le fluide.

L'électricité peut être générée avec un système à cycle ouvert ou fermé c'est à dire le fluide est recyclé.

Ce dernier est plus utilisé dans le cas des métaux liquides pour les vaisseaux spatiaux.

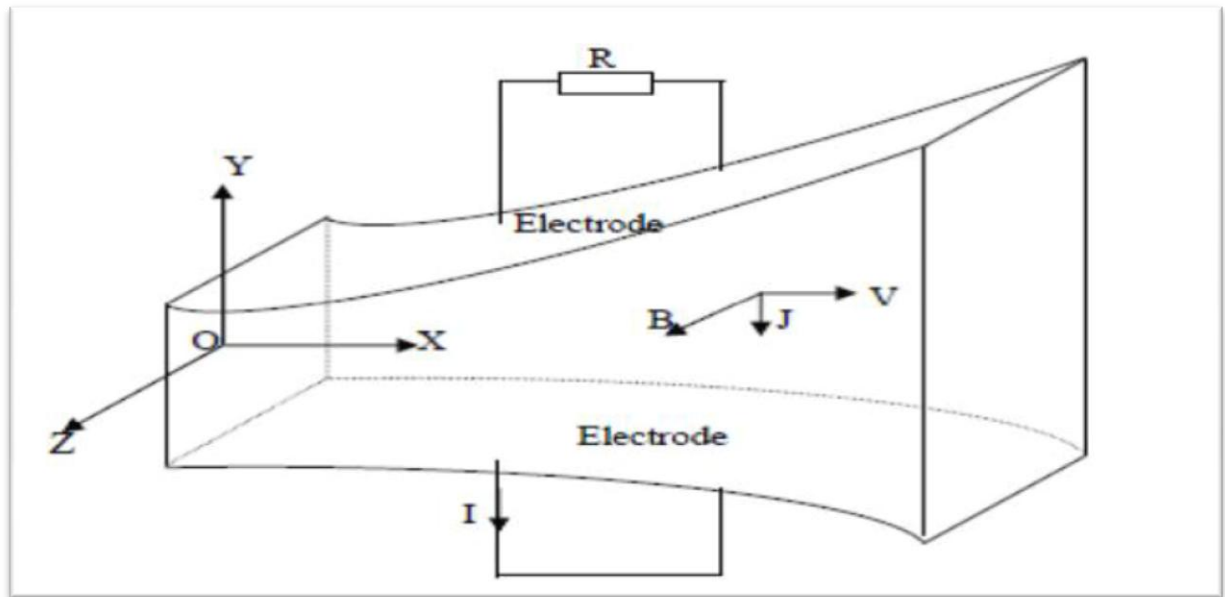


Figure (I.8): Schéma d'une tuyère MHD.

- ✚ Il existe plusieurs types de générateurs MHD suivant la forme et le fluide utilisés.
  - Machines circulaires à plasma.
  - Générateur à métaux liquides.
  - Générateur à induction.

### I-8-2 Propulseurs MHD.

- Propulseurs à plasma.
- Propulsion MHD navale.

## I-9 Application de la magnétohydrodynamique en métallurgie.

Dans ce cas, les forces magnétiques doivent être suffisantes (proportionnelles à la conductivité) pour mettre le métal liquide en mouvement (brassage), le maintenir en sustentation (lévitation), le façonner (formage), le pulvériser (pulvérisation).

Le champ magnétique fluctuant agit sur le fluide par l'intermédiaire de la force de Laplace  $\vec{j} \wedge \vec{B}$  en fonction de l'application désirée, [13].

### I-9-1 Brassage.

Les brasseurs électromagnétiques, tout comme les pompes électromagnétiques, ont la particularité de ne pas posséder de partie mobile.

Par brassage, ils entraînent l'élimination de bulles, de saletés et aussi l'accélération du mélange (par turbulence) lors de réactions métallurgiques (fabrication d'alliages).

### I-9-2 Lévitiation.

Les procédés de lévitation utilisés en physique, le procédé MHD permet de résoudre trois problèmes à la fois :

- a) L'absence de contact entre la charge et le creuset évite la contamination du métal par la paroi ;
- b) L'échauffement de la charge par effet Joule peut en causer la fusion ;
- c) Le brassage interne du fluide formé produit un mélange efficace des constituants (alliages).

### **I-9-3 Formage.**

Le formage électromagnétique consiste à façonner des masses métalliques en lévitation magnétique par l'action de champs magnétiques qui modèlent la surface libre désirée. Cette technique a l'avantage d'éviter le chauffage et le reformage après solidification.

### **I-9-4 Pulvérisation.**

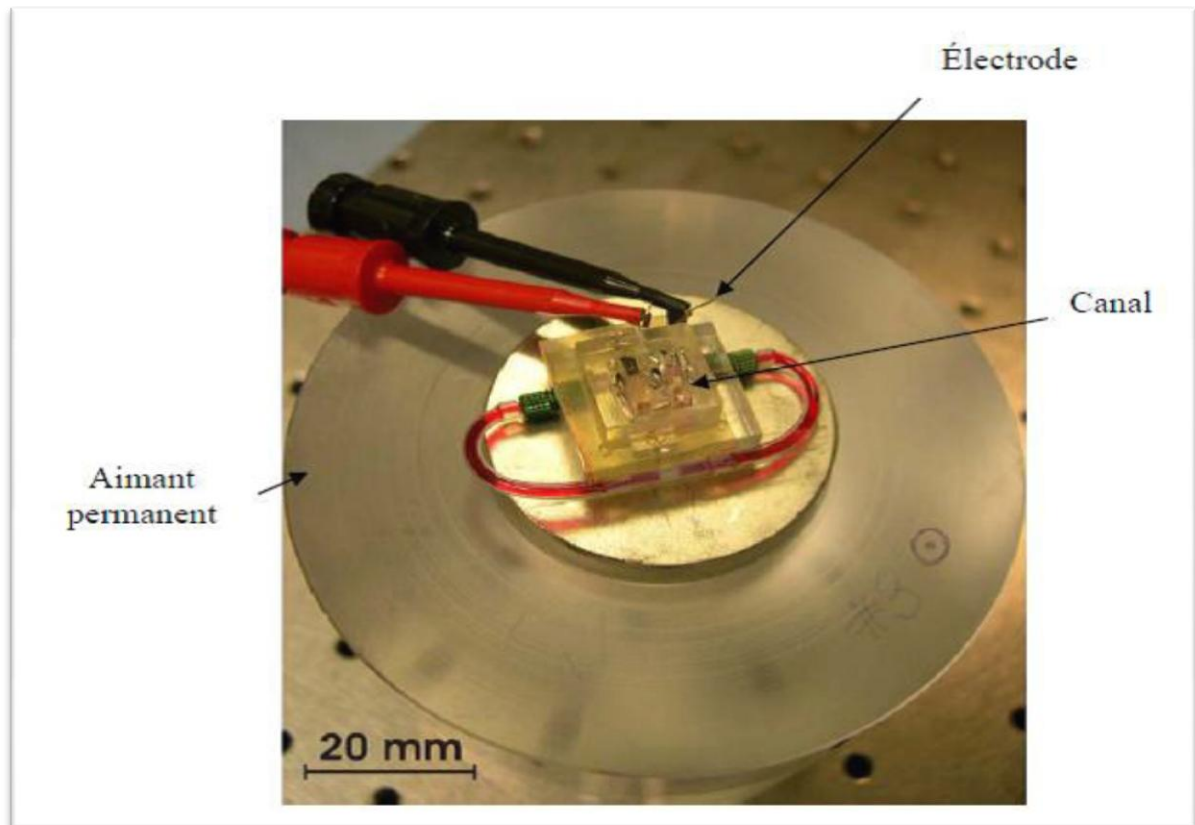
La technique électromagnétique permet la fabrication de poudres et grenailles de tailles moyennes ( $\approx 100\mu\text{m}$ ) avec un débit massique élevé. De plus, l'ajustement de la granulométrie est facile et automatique.

Le freinage des métaux peut être aussi assuré par des convertisseurs linéaires à induction appelés vannes électromagnétiques ou robinets électromagnétiques. Il en est de même pour la mesure des vitesses d'écoulement qui peut être effectuée à l'aide des débitmètres électromagnétiques, [14].

### **I-10 Application biomédical.**

La MHD a permis de développer une technique nouvelle permettant de bouger des espèces ioniques en présence à la fois de champs magnétique et électrique.

Les micros pompes MHD contrôlent le flux à l'intérieur du système micro fluidique en générant une différence de pression le long du micro canal, proportionnelle à l'intensité du courant électrique et au champ magnétique. Pomper des solutions électrolytiques avec la MHD implique la génération de courants continus (DC) dans tels environnements, [15].



Figure(I.9): Micro pompe à conduction (à aimant permanent de NdFeB ), [16].

### I-11 Conclusion.

L'objectif de ce chapitre est la présentation des différents types de pompes électromagnétiques. Nous avons décrit la famille des pompes MHD à conduction et la famille des pompes MHD à induction.

Les phénomènes magnétohydrodynamique sont régis par des équations qui résultent de la fusion réalisée par les équations de Maxwell. Les phénomènes électromagnétiques et leur formulation sera l'objet du deuxième chapitre.

# Chapitre II

## Modèles mathématiques et méthodes numériques pour la résolution des phénomènes électromagnétiques

II-1 Introduction

II -2 Environnement électromagnétique

II -2-1 Les modèles mathématiques en électromagnétisme

II -2-2 Équations générales de Maxwell

II -3 Interprétation Physique Des équations électromagnétique

II -3-1 Équation De Couplage électromagnétique

II -3-2 Les équations De Conservation

II -3-3 Elles constituent les équations fondamentales de l'électromagnétisme

II -3-4 Loi de comportement des matériaux (Milieux Physiques)

II -4 Formulation des équations électromagnétiques

II -4-1 Modèle électrostatique

II -4-2 Modèle électrocinétique

II -4-3 Modèle Magnétostatique

II -4-4 Modèle Magnétostatique Scalaire

II -4-5 Modèle Magnétostatique Vectoriel

II -4-6 Modèle magnétodynamique

II -5 Formulation électromagnétique du problème

II -5-1 Formulation en potentiel vecteur magnétique

II -6 Conditions aux limites

II -7 Conditions aux interfaces

II -8 Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles

II -8-1 Méthode Des Différences Finies (MDF)

II -8-2 Méthode Des Éléments Finis (MEF)

II -8-3 Méthode Des Intégrales De Frontières (MIF)

II -8-4 Méthode Des Volumes Finis (MVF)

II -9 Conclusion

## II-1 Introduction.

La magnétohydrodynamique est l'étude de l'interaction entre les champs magnétiques et les écoulements de tous les fluides conducteurs, donc les phénomènes relevant de la magnétohydrodynamique sont décrit par un système d'équations constitué de la réunion des équations de l'hydrodynamique et des équations de Maxwell.

La résolution de ces équations par les méthodes analytiques est impossible dans le cas général où la géométrie des dispositifs étudiés est complexe, et où les matériaux ont des propriétés magnétiques linéaires. Seules des méthodes numériques sont possible. Parmi ces méthodes on peut citer :

La méthode des différences finies MDF, la méthode des éléments finis MEF et la méthode des volumes finis MVF. Dans ce cas, au lieu de résoudre l'équation de façon continue, on discrétise le potentiel vecteur en un nombre fini de points dans le domaine d'étude, [17].

Dans ce chapitre on intéresse aux équations de Maxwell et les modèles mathématiques qui de découlent.

## II-2 Équations générales de maxwell.

Les phénomènes électromagnétiques qui apparaissent dans les dispositifs électrotechniques sont régis par les équations de MAXWELL, des lois constitutives des matériaux. Nous les résumons comme suit, [18] :

- **Équations de MAXWELL.**

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Div}\vec{B} = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

$$\text{Div}\vec{D} = \rho \quad (\text{II.4})$$

- **Lois constitutives des milieux.**

$$\vec{B} = \mu(H) \cdot \vec{H} \text{Où} \quad \vec{H} = v(B)\vec{B} \quad (\text{II.5})$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (\text{II.6})$$

Avec:

$$\vec{J}_C = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}: \text{Densité des courants de déplacement négligeable à basse fréquence [A/m2],}$$

$\vec{H}$ : Vecteur champ magnétique [A/m],

$\vec{E}$ : Vecteur champ électrique [V/m],

$\vec{B}$ : Vecteur induction magnétique [T],

$\vec{D}$ : Vecteur induction électrique (vecteur déplacement électrique) [C/m<sup>2</sup>],

$\vec{J}_C$ : Vecteur densité du courant électrique de conduction [A/m<sup>2</sup>],

$\mu$ : Perméabilité magnétique [H /m],

$\rho$ : Densité volumique de charges électriques [C/m<sup>3</sup>],

$\varepsilon$ : Permittivité diélectrique [F/m],

$\nu$ : Réductivité magnétique [m/H].

A ces équations, doit être associée la loi d'OHM généralisée

$$\vec{J}_C = \vec{J}_{ex} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma(\vec{\vartheta} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.7})$$

Où :

$\vec{\vartheta}$ : Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptibles de ce déplacé [m/s],

$\sigma$ : Conductivité électrique [S/m],

$\vec{J}_{ex}$ : Densité du courant d'excitation (source) [A/m<sup>2</sup>],

$\sigma \cdot \vec{E}$ : Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m<sup>2</sup>],

$\sigma(\vec{\vartheta} \wedge \vec{B})$ : Densité des courants induits par mouvement [A/m<sup>2</sup>].

## II-3 Interprétation Physique Des équations électromagnétique.

### II-3-1 Équation De Couplage électromagnétique.

- **Loi d'induction de FARADAY.**

$$\overrightarrow{Rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation exprime le couplage électrique- magnétique en régime dynamique et où la variation temporelle de  $\vec{B}$  détermine le  $\overrightarrow{Rot} \vec{E}$ , mais ceci ne suffit pas pour déterminer complètement  $\vec{E}$ .

- **Théorème d'AMPERE.**

$$\overrightarrow{Rot} \vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Cette équation exprime la dépendance du champ magnétique de la densité du courant total (conduction + déplacement).

Cette relation peut être interprétée comme étant le taux de variation spatiale du champ en fonction

du taux de mouvement des charges.

### II-3-2 Les équations De Conservation.

- **Divergence de l'induction magnétique.**

$$\text{Div} \vec{B} = 0$$

Cette relation traduit mathématiquement le fait que les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques, et il n'existe pas de charge magnétique; c'est pourquoi les lignes du champ sont toujours fermées sur elles-mêmes.

Elles forment des boucles. Ces boucles n'ont ni point de départ, ni point d'arrivée, ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative (champ conservatif).

- **Théorème de GAUSS.**

$$\text{Div} \vec{D} = \rho$$

Une charge électrique est source d'un champ électrique; autrement dit, les lignes de champs électriques commencent et se terminent autour des charges électriques, [19].



## En résumé

Dans le vide, les équations de Maxwell s'écrivent :

	Forme locale	Forme intégrale
<b>Théorème de Gauss pour <math>\vec{E}</math> ou équation de Maxwell-Gauss</b>	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} = \iiint \rho d\tau$
<b>Équation du flux magnétique ou équation de Maxwell-Thomson</b>	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$	$\oiint \vec{B} d\vec{s} = 0$
<b>Équation de Maxwell-Faraday</b>	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} d\vec{s}$
<b>Équation de Maxwell-Ampère</b>	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 [\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}]$	$\oint \vec{B} d\vec{l} = \iint \mu_0 [\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}] \cdot d\vec{s}$

### II -3-4 Loi de comportement des matériaux (Milieux Physiques).

- Induction et champ électriques.

Pour tout champ électrique, dans un milieu isotrope, de permittivité  $\epsilon$ , nous avons :

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

Où

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_r;$$

$\epsilon_0$  ; Permittivité absolue du vide [F/m],

$\epsilon_r$ ; Permittivité relative du milieu [USI].

Cette équation d'écrit la relation entre la vectrice induction électrique  $\vec{D}$  et le vecteur champ électrique  $\vec{E}$ . Elle est linéaire si  $\epsilon$  est constante.

Dans le cas des conducteurs non-polarisés, nous avons :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E};$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9} \text{ [F/m]}$$

La détermination de  $\vec{D}$  de l'équation de l'équation  $\text{rot} \vec{E}$  de l'équation (II.3) détermine complètement  $\vec{E}$ .

- **Induction et champ magnétiques.**

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r ;$$

$\mu_0$ : Perméabilité magnétique absolue du vide,

$$\mu_0 : 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]},$$

$\mu_r$ : Perméabilité relative du milieu [USI].

Dans le cas d'un aimant permanent, nous avons :

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_{re}$$

$\vec{B}_{re}$ : Vecteur induction magnétique rémanente [T]. L'équation (II.5) détermine la relation entre le champ magnétique et l'induction magnétique. Cette relation donne la courbe d'aimantation  $B = f(H)$ .

Une variation de  $\vec{H}$  conduit à une variation de l'induction  $\vec{B}$ , on trouve par la suite le cycle d'hystérésis dont la forme se diffère d'un matériau à un autre; donc d'un dispositif électrotechnique à un autre.

## II-4 Formulation des équations électromagnétiques.

Les Modèles de J.C.MAXWELL décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques, mais, suivant les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables, [18].

Les équations se découpent donnant alors des modèles plus simples. Par ailleurs, dans le cadre de notre travail, seul le modèle magnétodynamique sera considéré et détaillé, de fait de son adaptation à la modélisation des systèmes de chauffage par induction.

### II-4-1 Modèle électrostatique.

Dans ce modèle, le champ  $\vec{E}$  est produit par des charges stationnaires qui ne varient pas en termes de répartition, et de valeur avec le temps. Ce modèle est régi par les équations suivantes, [18] :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{Div}\vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$$\text{cas } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

La relation  $\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{E}$  permet de définir une fonction auxiliaire U appelée potentiel scalaire électrique, tel que  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$

Ce modèle se ramène alors à l'équation suivante :

$$\text{div}(\varepsilon \overrightarrow{\text{grad}} U) + \rho = 0$$

#### II-4-2 Modèle électrocinétique.

Ce modèle est utilisé dans l'étude de la répartition du courant électrique de conduction dans des conducteurs isolés soumis à des différences de potentiel continues, [19].

Il est régi par les équations :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{Div}\vec{J} = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

la relation  $\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{E} = \vec{0}$  implique qu'il existe encore un potentiel électrique scalaire U (tension électrique), tel que  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$

Le modèle se ramène alors à :

$$\text{Div}(\sigma \overrightarrow{\text{grad}} U) = 0$$

#### II-4-3 Modèle Magnétostatique.

Dans ce modèle, le terme  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  de l'équation (II.3) est nul. Ceci s'explique par le fait que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps, [19].

Dans le cas de ce modèle, deux sortes de formes, peuvent l'exprimer. Il s'agit de :

#### II-4-4 Modèle Magnétostatique Scalaire.

Dans ce cas, les courants électriques sont nuls, il vient alors que les champs ne dépendent pas du temps. D'après les équations (II.1) et (II.2), on obtient :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{H} = \vec{0} \text{ Courants nuls}$$

$$\text{Div}\vec{B} = 0 \text{ Induction conservative}$$

Loi du milieu,

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_{re}$$

$\vec{H}$  Dérive d'un potentiel scalaire magnétique  $\Phi$ , d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire, tel que :

Le modèle se ramène alors à l'équation :

$$\text{Div}(\overrightarrow{\text{grad}}\Phi) = \text{Div} \vec{B}_{re}$$

#### II-4-5 Modèle Magnétostatique Vectoriel.

Dans le modèle magnétostatique vectoriel, les courants électriques ne sont pas nuls. Il vient alors que :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{H} = \vec{J}$$

$$\text{Div}\vec{B} = 0$$

Avec la loi du milieu :  $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_{re}$

La relation  $\text{div} \vec{B} = 0$  permet de définir une fonction vectoriel  $\vec{A}$  appelée potentiel vecteur magnétique [19], tel que :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (\text{II.8})$$

D'où le système d'équations :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}\right) = \vec{J} + \overrightarrow{\text{Rot}}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}_{re}\right)$$

#### II-4-6 Modèle magnétodynamique.

Dans ce cas, les sources du courant sont dépendantes du temps, ainsi, les champs électrique et magnétique seront alors couplés par la présence des courants induits (ou courants de FOUCAULT).

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  joue un rôle primordial, où la connaissance de  $\vec{A}$  implique la connaissance de tous les autres grandeurs physiques où :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}$$

En termes d'équations, nous avons :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.9})$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}$$

A ces équations, nous ajoutons les lois caractéristiques au milieu

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

C'est à partir de ces équations de base de ce modèle que nous pouvons déterminer l'équation décrivant l'évolution des phénomènes électromagnétiques dans un dispositif où l'ensemble des champs présents sont en fonction explicite ou implicite de l'espace et du temps.

L'utilisation de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques, des transformateurs, pompes électromagnétiques ... etc.

A partir de l'équation du flux magnétique, on définit le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  par l'équation suivante :

$$\vec{B} = \text{Rot}\vec{A}$$

Dans le cas général, il existe une infinité de vecteur  $\vec{A}$  pouvant satisfaire la relation  $\vec{B} = \text{Rot}\vec{A}$ . En effet, puisque le rotationnel du gradient de toute fonction scalaire  $U$  est nul, donc tout vecteur  $(\vec{A} + \text{grad}U)$  satisfait la relation  $\vec{B} = \text{Rot}\vec{A}$ , d'où la nécessité d'imposer une condition de Jauge afin d'assurer l'unicité de la solution. On propose d'utiliser la Jauge de Coulomb

$$\text{Div}\vec{A} = 0.$$

L'équation qu'on va établir s'applique aux dispositifs électromagnétiques dans lesquels il y a présence de courants induits provenant de la variation des champs dans le temps, En remplaçant  $\vec{B}$  par  $\text{Rot}\vec{A}$ , l'équation  $\text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  devient :

$$\text{Rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \quad (\text{II.10})$$

A partir de cette relation, on peut définir un potentiel scalaire électrique  $U$  tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}U$$

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{ex}} + \sigma\vec{E} \quad (\text{II.11})$$

La combinaison des équations  $\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}\right)$  et  $(\vec{E} = -\text{grad}U)$  donne :

$$\sigma\vec{E} = \vec{j} - \vec{j}_{\text{ex}} = -\sigma\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \text{grad}U\right) \quad (\text{II.12})$$

D'où

$$\vec{j} = -\sigma\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \text{grad}U\right) + \vec{j} \quad (\text{II.13})$$

$$\text{Rot}\left(\frac{1}{\mu} \cdot \vec{B}\right) = \vec{j}$$

De ces équations on aboutit :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}\right) = \vec{j}_{\text{ex}} - \sigma \vec{E} + \sigma(\vec{V} \wedge \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A})$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}\right) = \vec{j}_{\text{ex}} - \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}U \right) + \sigma(\vec{V} \wedge \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A})$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}\right) + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}U \right) + \sigma(\vec{V} \wedge \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}) = \vec{j}_{\text{ex}}$$

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  ne peut pas être défini par la seule condition  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}$ , on doit fixer sa divergence pour assurer l'unicité de la solution de l'équation aux dérivées partielles (E. D. P)

On ajoute alors la Jauge de Coulomb. On obtient ainsi :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A} + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}U - \sigma(\vec{V} \wedge \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A})\right) = \vec{j}_{\text{ex}} \quad (\text{II.14})$$

$$\text{Div}\vec{A} = 0$$

Les termes  $\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  et  $\sigma(\vec{V} \wedge \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A})$  représentent les densités des courants induits. Ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace des phénomènes électromagnétiques, tandis que le terme  $(-\sigma \overrightarrow{\text{grad}}U)$  décrit la densité du courant dépendante des conditions électriques imposées aux extrémités des conducteurs, [16] [20].

Dans le cas où le régime est statique, et  $U$  est considéré uniformément nulle, l'équation (II.9) devient :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\eta \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{ex}}$$

$$\text{Div}\vec{A} = 0 \quad (\text{II.15})$$

Où  $V = \frac{1}{\mu}$  désigne la réluctivité magnétique.

L'équation  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$  prend différentes formes selon la région d'étude et les caractéristiques des différents milieux.

## II -5 Formulation électromagnétique du problème.

les nombreuses formulations ont été développées en deux ou en trois dimensions. En trois dimensions, il n'existe pas de formulation idéale. Les formulations associent le potentiel vecteur  $\vec{A}$  et le potentiel scalaire  $U$ . En deux dimensions, la formulation adéquate est donnée en potentiel vecteur  $\vec{A}$  à cause de réduction de nombre d'inconnues.

Pour déterminer le modèle mathématique qui régit les phénomènes électromagnétiques, on fait appel au système d'équations de Maxwell tout en introduisant certaines hypothèses simplificatrices, [17]:

- dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire, les courants de déplacements  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  sont négligés devant  $\vec{J}$  et  $\text{Rot } \vec{H}$ . Cette hypothèse est pleinement justifiée pour les faibles fréquences.

- la densité volumique de charge est considérée nulle ( $\rho = 0$ ), ce qui est le cas dans presque tous les dispositifs classiques à induction. Le terme  $\vec{J}$  regroupe les densités de courants d'excitation  $\vec{J}_{ex}$  et induites dans le canal  $\vec{J}_i$  ce qui nous permet d'écrire l'expression de  $\vec{J}$  de la façon suivante :

$$\vec{J} = \vec{J}_{ex} + \vec{J}_i$$

- les matériaux à utiliser sont à propriétés isotropes. En tenant compte de ces simplifications, les équations de Maxwell se réduisent alors au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{Rot } \vec{H} &= \vec{J} \\ \text{Div } \vec{B} &= 0 \\ \text{Div } \vec{D} &= 0 \end{aligned} \tag{II.16}$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } U$$

$$\vec{J}_i = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

On peut formuler complètement le problème électromagnétique par l'utilisation des système d'équations ci-dessus,

Il existe plusieurs formulation telles que : la formulation en  $\vec{B}$  et la formulation en  $\vec{A}$ , [17].

### II-5-1 Formulation en potentiel vecteur magnétique.

A partir de l'équation du flux magnétique, on définit le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  par l'équation suivante:  $\vec{B} = \text{Rot } \vec{A}$

Les équations précédentes peuvent être combinées de façon à obtenir l'équation vectorielle suivante :

$$\text{Rot} \left( \frac{1}{\mu} \cdot \text{Rot } \vec{A} \right) + \sigma \left( \frac{d\vec{A}}{dt} - \vec{V} \wedge \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J}_{ex} + \vec{J}_a \tag{II.17}$$

Après développement en coordonnées cartésiennes, dans le cas bidimensionnel (2D) où la densité de courant et le potentiel vecteur magnétique sont perpendiculaire à la section longitudinale de la pompe MHD à conduction, l'équation devient

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{d^2 A}{dy^2} \right) + \sigma \left( \frac{dA}{dt} + V \frac{dA}{dx} \right) = J_{ex} + J_a \quad (\text{II.18})$$

Avec  $A$  et  $\vec{J}_{ex}$  sont les composantes suivant (OZ) des vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{J}_{ex}$ . La pompe est alimentée en courant continu, les champs varient également de façon continue ; dans ces conditions, on travaille en régime stationnaire où  $\frac{dA}{dt} = 0$

Cette hypothèse est naturellement vérifiée dans la configuration bidimensionnelle (2D), [21].

## II-6 Conditions aux limites.

On distingue essentiellement deux types de conditions aux limites, dans les problèmes de champs électromagnétiques formulés en termes de vecteur potentiel magnétique, [20] [22] et, [23] :

Les conditions aux limites de Dirichlet  $A = A_0$ . Dans ce cas, le vecteur potentiel magnétique  $A$  est constant sur la frontière, ce qui veut dire que l'induction magnétique est parallèle à ce contour qui présente alors une équipotentielle. Cette condition aux limites peut se présenter aussi sur les plans ou les axes polaires (dans cette situation on se limite à mailler une partie du domaine de résolution), [11] [24].

La condition aux limites de Neumann homogène  $\partial A / \partial N = 0$  On la trouve sur les Plans ou sur les axes d'antisymétrie magnétique. Sur cette frontière, les lignes de l'induction magnétique sont normales. De même, lorsque ce type de conditions aux limites apparaît sur des axes d'antisymétrie, le maillage est limité à une portion du domaine, [25].

## II-7 Conditions aux interfaces.

Dans le cas général, un dispositif électrotechnique comporte des milieux différents (fer, air, aluminium, cuivre, ... etc.). Alors, avant d'aborder la résolution du problème, il est nécessaire de connaître le comportement des champs électromagnétiques à travers l'interface entre les différents milieux.  $\partial 1, 2 \Omega$  entre deux milieux de propriétés physiques différentes d'indices 1 et 2 portent sur les continuités et discontinuités des différentes composantes normales et tangentielles des grandeurs électromagnétiques, [23][24].

- Conservation de la composante tangentielle du champ électrique

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.19})$$

- Conservation de la composante normale de l'induction magnétique

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.20})$$



➤ Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique due aux courants surfaciques s'ils existent

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{n} = J_{ex} \quad (\text{II.21})$$

➤ Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique due aux charges surfaciques si elles existent

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho \quad (\text{II.22})$$

## II -8 Différentes méthode de la résolution des équations aux dérivées partielles.

Il existe deux grandes catégories de méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles mathématiques caractérisant les problèmes physiques, lorsqu'il s'agit de calculer des effets dont les causes (densité du courant (tension), densité de la puissance dissipée) sont connues à l'avance. Ces méthodes sont :

- Les méthodes analytiques,
- Les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques, s'avèrent d'application très difficile dès que la complexité de la géométrie s'accroît et que certains matériaux, dans des conditions de fonctionnement optimales, présentent des non-linéarités physiques, donc mathématiques, [7] [6].

L'apparition des ordinateurs, de grandes puissances, a mis en valeur l'intérêt des méthodes dites numériques. Celles ci font appel à des techniques de discrétisation.

Ces méthodes numériques transforment les équations aux dérivées partielles (EDP) à des systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation de l'inconnue en différenciant points situés aux nœuds du réseau géométrique correspondant à la discrétisation. Parmi ces méthodes, nous citons la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis, la méthode des intégrales de frontières et la méthode des circuits couplés,...etc.

### II -8-1 P Méthode Des Différences Finies (MDF).

La MDF consiste à transformer par un développement en série de TAYLOR l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences, [7], [14], [26].

La méthode aux différences finies permet d'obtenir des résultats satisfaisants dans de nombreux problèmes comme elle possède la simplicité de la formulation numérique, mais elle reste limitée aux configurations à géométrie régulière, donc, relativement trop simple.

### **II -8-2 Méthode Des Éléments Finis (MEF).**

La méthode des éléments finis est très puissante pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) surtout dans les géométries complexes et quelques soient les conditions physiques de fonctionnements, [27].

### **II -8-3 Méthode Des Intégrales De Frontières (MIF).**

Lorsqu'on utilise la MDF ou la MEF, on calcule les variables inconnues dans tout le domaine. La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine, [7].

Pour ramener le problème sur les frontières, la MIF utilise le théorème de d'OSTROGRADSKI-GREEN. Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure 3D ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude. Cependant, cette méthode a l'inconvénient de conduire à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls). Ceci augmente le temps utilisateur, donc le coût de calcul.

### **II -8-4 Méthode Des Volumes Finis (MVF).**

La MVF est une méthode de discrétisation. Elle est utilisée, en particulier en mécanique des fluides où elle est apparue il y a une vingtaine d'années. Depuis, cette méthode a connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation dans d'autres branches de l'ingénierie scientifique : l'électromagnétisme, thermique,..., etc.

L'analyse mathématique de la méthode des volumes finis a permis de développer récemment les principes fondamentaux qui en font une méthode de discrétisation performante. L'idée de base de la formulation des volumes finis est facile à comprendre et permet de donner l'interprétation physique des phénomènes, [26,27].

Le domaine du calcul est subdivisé en  $v$  un nombre d'éléments finis.

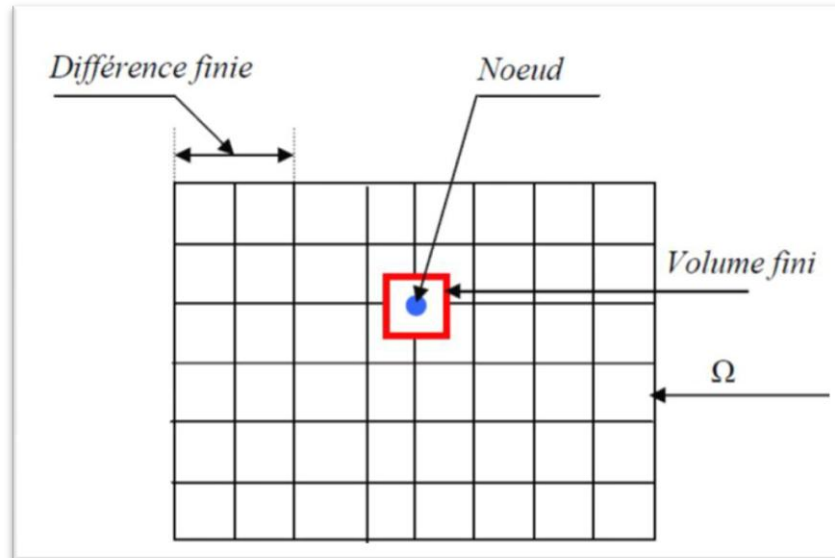


Figure (II.1): Maillage du domaine d'étude.

Chaque élément contient quatre nœuds pour le cas bidimensionnel. Un volume fini entoure chaque nœud.

L'équation différentielle est projetée sur une fonction de projection bien déterminée et ensuite elle est intégrée dans chacun des volumes élémentaires.

Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, puissance, exponentielle, etc....) entre deux nœuds consécutifs. La forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'études.

L'équation discrétisée de cette façon exprime le principe de conservation pour l'inconnue dans l'élément de volume et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales.

la méthode des volumes finis (MVF) à la des **avantages** qui sont la facilité de conception contrairement à la méthode des volumes finis (MVF) et la possibilité de son application à des géométries complexes en outre il y'a des **inconvénient** par exemple peut.peu de résultats théoriques de convergence.

**II -9 Conclusion.**

Ce chapitre a été consacré aux formulations mathématiques des phénomènes électromagnétiques présents dans les dispositifs électrotechniques. Des modèles mathématiques ont été établis dans leurs formes générales. et aussi consacré à la présentation Ce chapitre a été consacré aux formulations mathématiques des phénomènes électromagnétiques présents dans les dispositifs électrotechniques. Des modèles mathématiques ont été établis dans leurs formes générales. et aussi consacré à la présentation.

# Chapitre III

## Application et discussion des résultats

III-Introduction

III-2 Problème électromagnétique

III-3 Formulation de l'équation électromagnétique (MHD) par la méthode des volumes finis

III-3-1 Étude du modèle électromagnétique

III-4 Condition aux limites

III-4-1 Condition de Dirichlet

III-4-2 Condition de Neumann

III-5 Code de calcul

III-6 Application

III-6-1 Description générale de la pompe MHD à conduction

III-7 Mise en équations dans l'hypothèse bidimensionnelle

III-8 Résultats et discussions

III-9 Cas non linéaire

III-9-1 Représentation de l'induction magnétique dans la pompe MHD

III-9-2 Représentation de la densité du courant d'induit dans le canal

III-9-3 Représentation de la force électromagnétique dans le canal

III.10 Conclusion

### III-1 Introduction.

Après avoir exposé les formulations mathématiques des phénomènes électromagnétiques dans les pompes MHD et les différentes méthodes de résolution du problème électromagnétique, on va essayer dans ce chapitre de présenter les résultats de simulation du modèle élaboré à partir d'un code de calcul bidimensionnel (2D). Le code en question permet d'étudier les phénomènes électromagnétiques dans la pompe magnétohydrodynamique (MHD) par l'application de la méthode des volumes finis.

### III-2 Problème électromagnétique.

permet le calcul par la méthode des volumes finis des grandeurs magnétiques telles que : Le potentiel vecteur magnétique, l'induction magnétique, la densité du courant induite dans le canal de la pompe MHD à conduction ainsi que la force électromagnétique après avoir discrétisé le domaine de résolution et imposé des condition au limites, [28].

### III-3 Formulation de l'équation électromagnétique (MHD) par la méthode des volumes finis.

#### III-3-1 Étude du modèle électromagnétique.

Toutes les méthodes numériques partent d'une formulation de champ électromagnétique issue des équations de Maxwell. Celles-ci régissent tous les phénomènes électromagnétiques au sein des dispositifs électromagnétiques de façon générale. Rappelons que l'équation magnétodynamique dans le cas de la pompe magnétohydrodynamique à conduction est donnée sous la forme :

$$\overrightarrow{Rot} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{Rot} \vec{A} \right) + \sigma \left( \frac{d\vec{A}}{dt} + \overrightarrow{Grad} U - V \wedge \overrightarrow{Rot} \vec{A} \right) = \vec{J}_{ex} + \vec{J}_a \quad (\text{III.1})$$

Lorsque la densité volumique de charge  $\rho$  est nulle, et que le potentiel  $U$  peut être considéré comme nul, dans ce cas l'équation (III.1) devient :

$$\overrightarrow{Rot} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{Rot} \vec{A} \right) + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - V \wedge \overrightarrow{Rot} \vec{A} \right) = \vec{J}_{ex} + \vec{J}_a \quad (\text{III.2})$$

Après développement en coordonnées cartésiennes, dans le cas bidimensionnel (2D) où la densité de courant et le potentiel vecteur magnétique sont perpendiculaire à la section longitudinale de la pompe MHD à conduction, l'équation devient:

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial x} + V_x \frac{\partial A}{\partial x} \right) = J_{ex} + J_a \quad (\text{III.3})$$

Avec  $A$  et  $\vec{J}_{ex}$  sont les composantes suivant (OZ) des vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{J}_{ex}$ . La pompe est alimentée en courant continu, les champs varient également de façon continue.

dans ces conditions, on travaille en régime stationnaire où:  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ , alors l'équation devient :

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + \sigma \left( V_x \frac{\partial A}{\partial x} \right) = J_{ex} + J_a \quad (\text{III.4})$$

Si on considère que la vitesse est presque nulle, l'équation devient :

$$-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = J_{ex} + J_a \quad (\text{III.5})$$

L'intégrale de la partie gauche de l'équation (III.5) sur le volume fini qui délimité par les frontières (E,W,S,N) est :

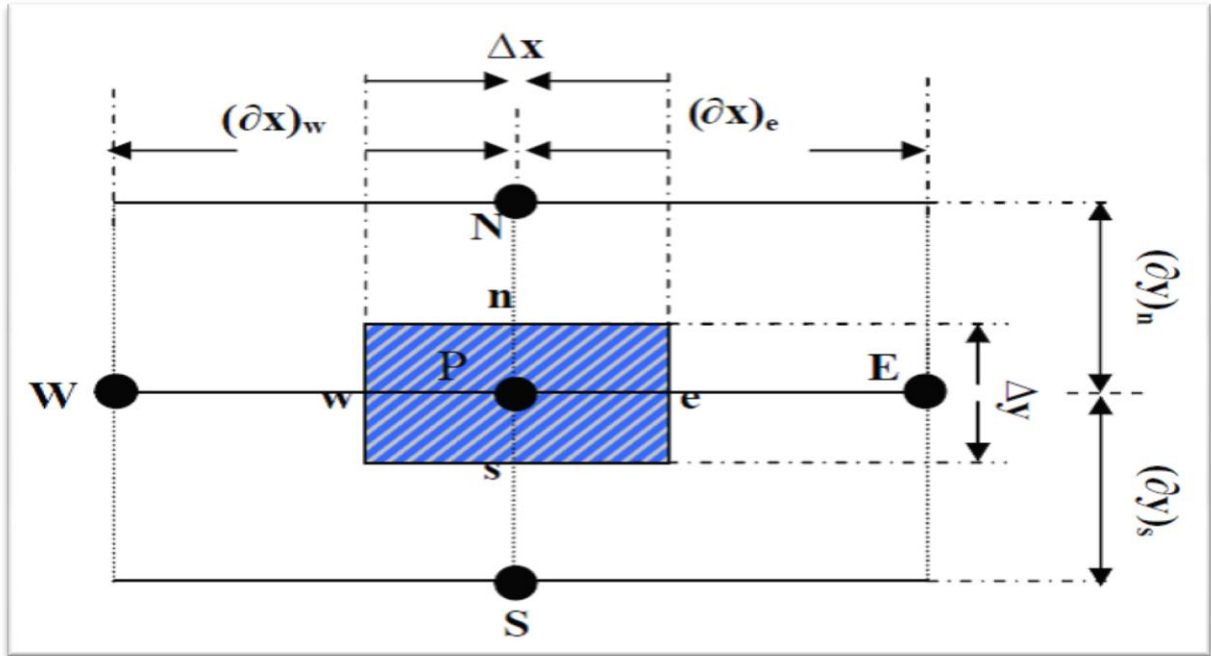


Figure (III.1): Discrétisation en volume fini en 2D

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial A}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) dx dy \quad (\text{III.6})$$

Après intégration on trouve :

$$\left[ \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right)_n - \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x + \left[ \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right)_e - \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \quad (\text{III.7})$$

Avec :

Pour exprimer la variation de A entre les nœuds voisins, on choisit un profil linéaire.

$$\left[ \frac{1}{\mu_n} \frac{A_N - A_P}{(\delta y)_n} - \frac{1}{\mu_s} \frac{A_P - A_S}{(\delta y)_s} \right] \Delta x + \left[ \frac{1}{\mu_e} \frac{A_E - A_P}{(\delta x)_e} - \frac{1}{\mu_w} \frac{A_P - A_W}{(\delta x)_w} \right] \Delta y - A_P \left( \frac{\Delta x}{\mu_n (\delta y)_n} + \frac{\Delta x}{\mu_s (\delta y)_s} + \frac{\Delta y}{\mu_e (\delta x)_e} + \frac{\Delta y}{\mu_w (\delta x)_w} \right) + \dots \left( \frac{A_N \Delta x}{\mu_n (\delta y)_n} + \frac{A_S \Delta x}{\mu_s (\delta y)_s} + \frac{A_E \Delta y}{\mu_e (\delta x)_e} + \frac{A_W \Delta y}{\mu_w (\delta x)_w} \right) \quad (\text{III.8})$$

L'intégration de la partie droite de l'égalité donne :

$$- \int_x \int_y [J_{ex} + J_a] dx dy = -[J_{ex} + J_a] \Delta x \Delta y \quad (\text{III.9})$$

Ainsi :

$$\int_s^n \int_w^e [-J_{ex} + J_a] dx dy = -[J_{ex} + J_a] \Delta x \Delta y$$

L'équation algébrique finale s'écrit sous la forme :

$$a_P A_P = a_N A_N + a_E A_E + a_S A_S + a_W A_W + d_p \quad (\text{III.10})$$

Tels que :

$$a_E = \frac{\Delta y}{\mu_e (\delta x)_e}$$

$$a_N = \frac{\Delta x}{\mu_n (\delta y)_n}$$

$$a_S = \frac{\Delta x}{\mu_s (\delta y)_s}$$

$$a_W = \frac{\Delta y}{\mu_w (\delta x)_w}$$



$$a_p = a_N + a_E + a_S + a_W$$

$$d_p = (J_{ex} + J_a)\Delta x\Delta y.$$

La résolution obtenue représente une équation algébrique reliant l'inconnue au nœud principal « P » aux inconnues aux nœuds voisins « W », « E », « S » et « N »

### III-4 Condition aux limites.

Dans notre étude, nous avons établi les équations des nœuds internes. Pour les limites du domaine d'étude, il faut tenir compte des conditions aux limites. Il existe deux types de conditions :

#### ➤ III-4-1 Condition de Dirichlet.

Cette condition impose les valeurs de  $\vec{A}$  aux bords du domaine d'étude

-Condition de DIRICHLET homogène :  $\vec{A} = 0$

- Condition de DIRICHLET non homogène :  $\vec{A} \neq 0$

Dans notre étude la condition de DIRICHLET est homogène, c'est-à-dire les valeurs de  $\vec{A}$  sont prises nulles par la considération de l'infini.

#### ➤ III-4-2 Condition de Neumann.

Elle est utilisée dans le cas où le système à étudier présente des plans de symétrie. Le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}_n$  n'est pas connu sur la limite, donc nous avons besoin de construire une équation additionnelle qui décrit le phénomène physique dans cette limite.

-Condition de NEUMANN homogène :  $\frac{d\vec{A}}{dn} = \vec{0}$

-Condition de NEUMANN non homogène :  $\frac{d\vec{A}}{dn} \neq \vec{0}$

Avec  $n$  : représente la normale au plan de coupe, [16].

### III-5 Code de calcul.

Un code de calcul à base des volumes finis 2D est établi pour simuler le comportement d'une pompe magnétohydrodynamique à conduction.

La figure (III.2) donne l'organigramme de la méthode des volumes finis.

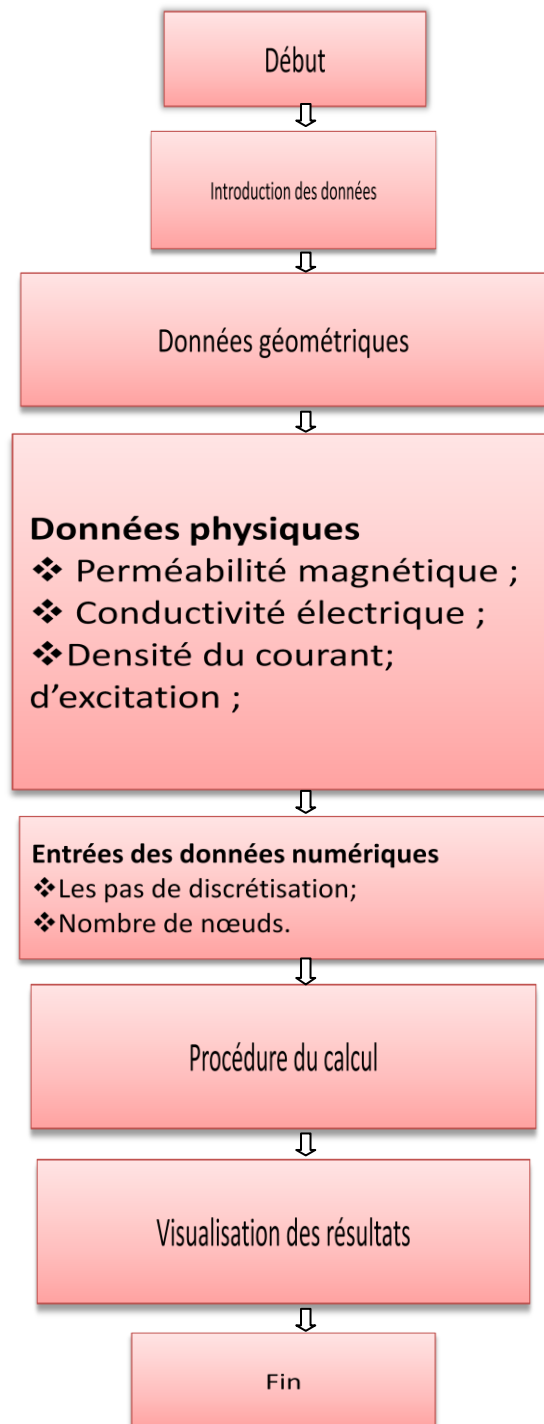


Figure (III.2): donne l'organigramme de la méthode des volumes finis.

### III-6 Application.

Pour exploiter le code élaboré, on a choisit la machine MHD à conduction pour le pompage des métaux liquides (Mercure, NaK, Eau de mer) afin d'étudier les phénomènes

Électromagnétique dans le cas non linéaire en régime statique de la pompe MHD à conduction .

#### III-6-1 Description générale de la pompe MHD à conduction.

Les machines magnétohydrodynamiques linéaires à conduction sont constituées d'un canal dans lequel s'écoule un fluide électriquement conducteur à la vitesse  $\mathbf{V}$ . Le fluide traverse un champ magnétique  $\mathbf{B}$  qui induit un courant  $\mathbf{J}$  collecté par des électrodes en contact direct avec le fluide. Le fluide est freiné par la force  $\mathbf{F}$ . Le schéma du système est représenté ci-dessous, [29], [30] :

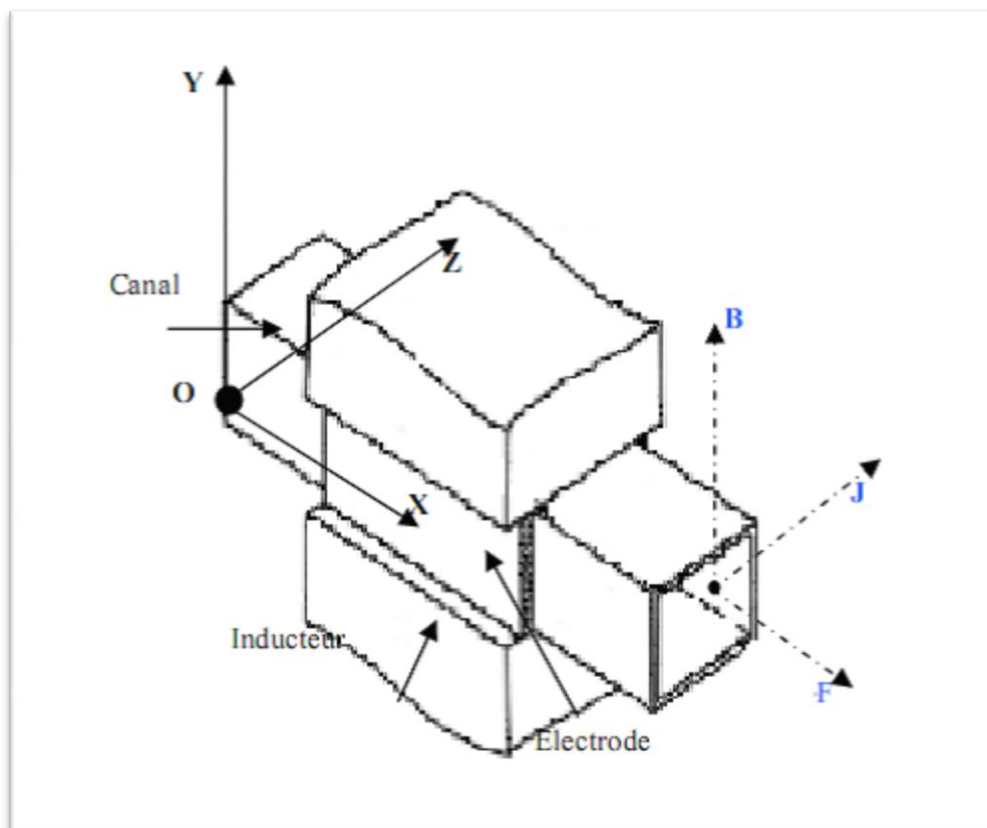


Figure (III.3):Schéma d'une machine MHD à Conduction

### III-7 Mise en équations dans l'hypothèse bidimensionnelle.

Généralement, un dispositif électromagnétique comporte plusieurs matériaux, dont certains ont des caractéristiques non linéaires. Par ailleurs, les phénomènes électromagnétiques varient fortement au sein de la structure. C'est pourquoi, une analyse de la structure complète en trois dimensions (3D) s'avère fastidieuse et coûteuse en termes de temps de calcul. D'autre part, l'analyse à une dimension (1D) est peu représentative, [3].

L'emploi des modèles 2D est particulièrement simple et efficace et son choix est réaliste ; Dans le cas où la densité du courant et le vecteur potentiel magnétique sont perpendiculaires à la section transversale de la pompe magnétohydrodynamique, qui représente le plan de l'étude et dans lequel circule le flux magnétique.

De plus, le vecteur potentiel  $\vec{A}$  n'a qu'une seule composante suivant (OZ) qui ne dépend pas de la troisième dimension (z) et la condition de la jauge de Coulomb est naturellement vérifiée dans ce cas.

Dans ces conditions, l'équation vectorielle projetée sur les axes de coordonnées donne naissance à la formulation analytique mentionnée au chapitre trois

### III-8 Résultats et discussions.

Les figures ci - dessous résultent de l'exploitation numérique des relations précédentes avec les caractéristiques électriques et magnétique des différentes régions de la machine MHD à conduction choisie. On considère le dispositif de la figure suivante qui représente la coupe transversale de la pompe MHD avec les caractéristiques suivantes :

- La densité de courant injectée par les électrodes est de  $J_a = 1.5 * 10^6 [A/m^2]$ ;
- La densité de courant d'excitation est de  $J_{EX} = 1.5 * 10^6 [A/m^2]$ ;
- Liquide utilisé dans le canal est du Eau de mer de conductivité

$$\sigma_{Eau\ de\ mer} = 1.06 * 10 [S/M];$$

- La perméabilité relative de Eau de mer est de  $\mu_r = 1$ ;

La résolution de l'équation électromagnétique permet de déterminer :

- Les lignes équipotentielle;
- l'induction magnétique B;
- le courant induit dans le canal  $J_i$ ;
- la force électromagnétique F.

La figure (III.4) représente la coupe transversale de la pompe MHD à conduction avec les conditions aux limites.

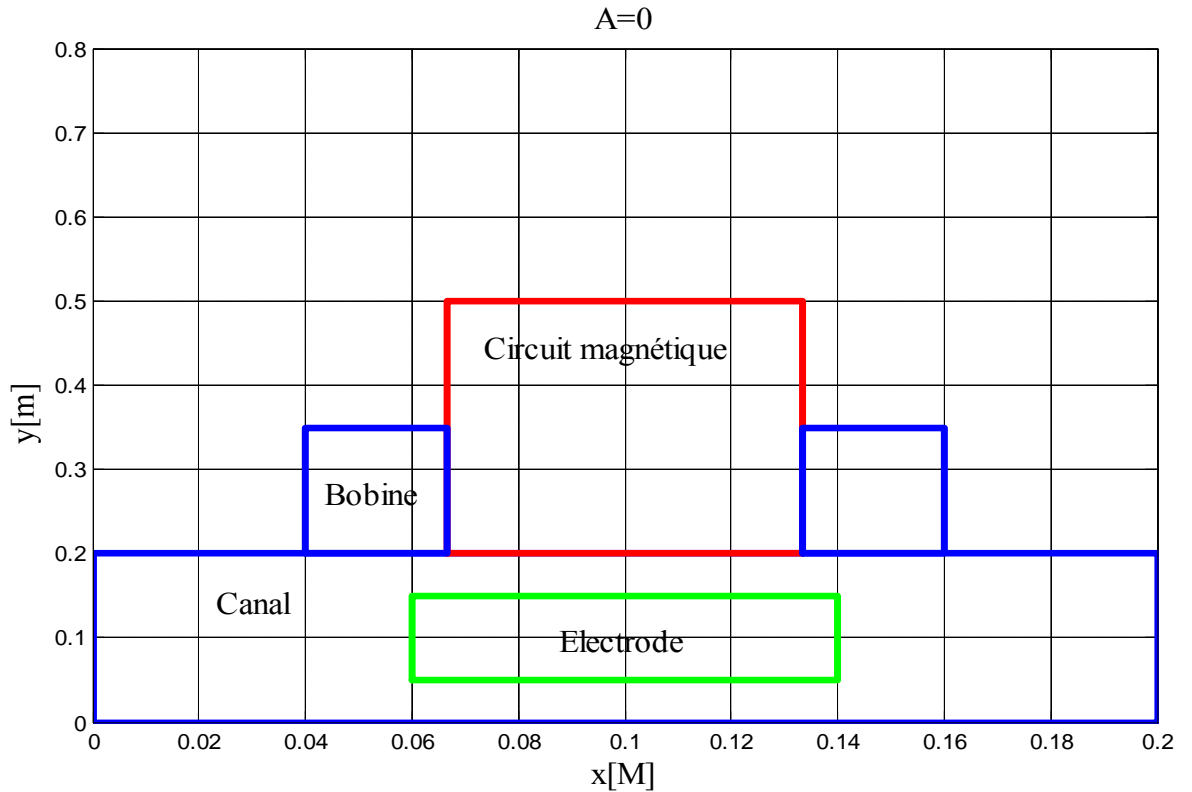


Figure (III.4):Schéma de la géométrie de la pompe MHD.

### III-9 Cas non linéaire.

Les matériaux ferromagnétiques, qui sont très perméables permettent la circulation d'un flux magnétique important. La loi de comportement des matériaux ferromagnétiques est la courbe B (H) qui exprime la relation non linéaire qui existe entre l'induction magnétique et le champ magnétique. Dans ce cas la réductivité  $V_m = 1/\mu$  devient variable.

La courbe B(H) utilisée dans cette partie est la suivante :

**Tableau III.1:** Valeurs de B et H

H[A/m]	120	270	320	380	480	940	3000	6100	8600
B[T]	0.5	1	1.1	1.2	1.3	1.5	1.67	1.76	1.81

L'implantation de ces valeurs sous environnement MATLAB donne la courbe ci dessous :

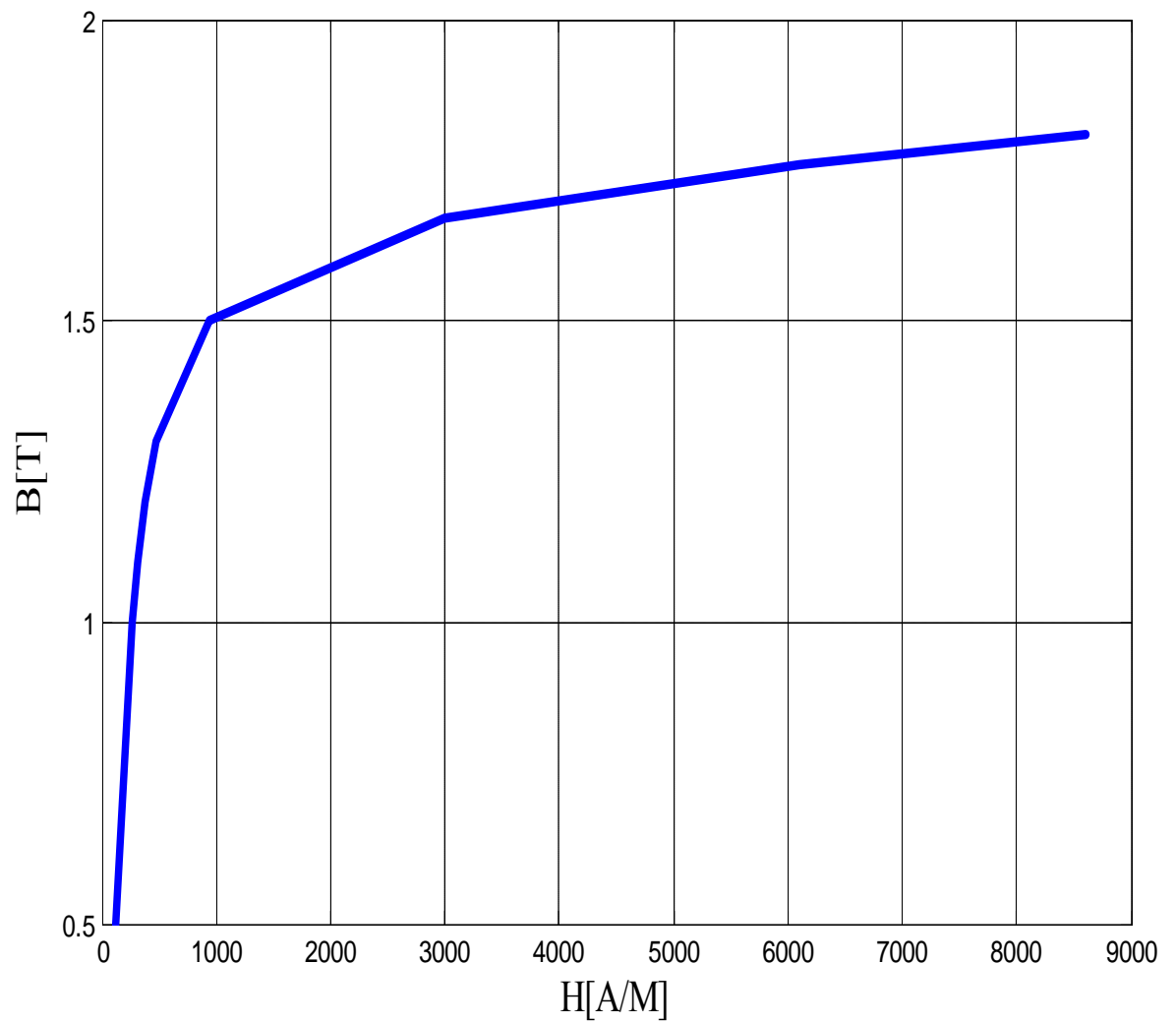


Figure (III.5): Courbe B (H).

La distribution des lignes équipotentiels dans la pompe est représentée dans la figure ci dessous.

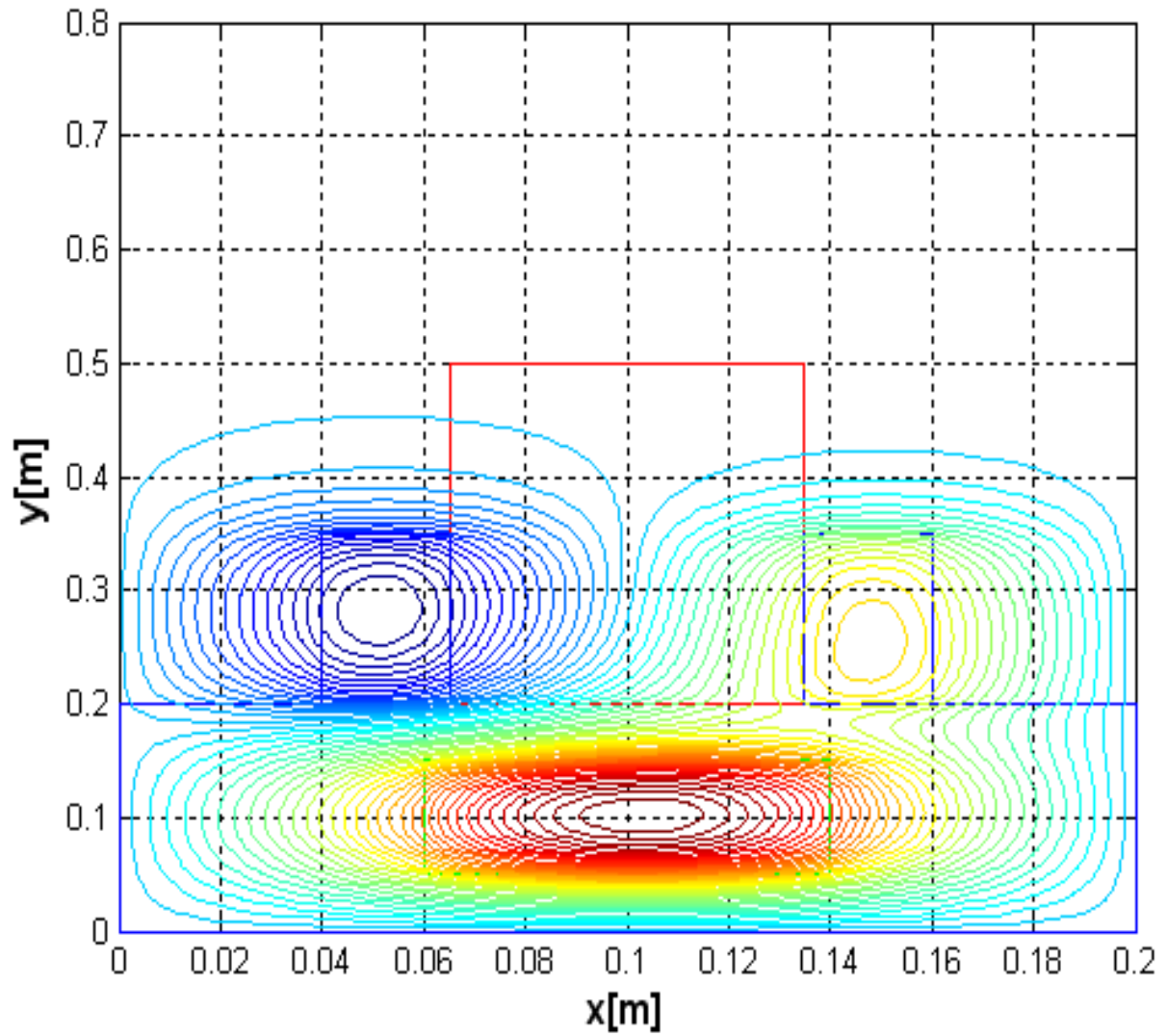


Figure (III.6): Les lignes équipotentiels dans la pompe MHD.

### III-9-1 Représentation de l'induction magnétique dans la pompe MHD.

La figure (III.7) illustrent l'induction magnétique dans la pompe. On remarque que l'induction magnétique atteint son maximum dans la pompe MHD à conduction au point de 0.1 .

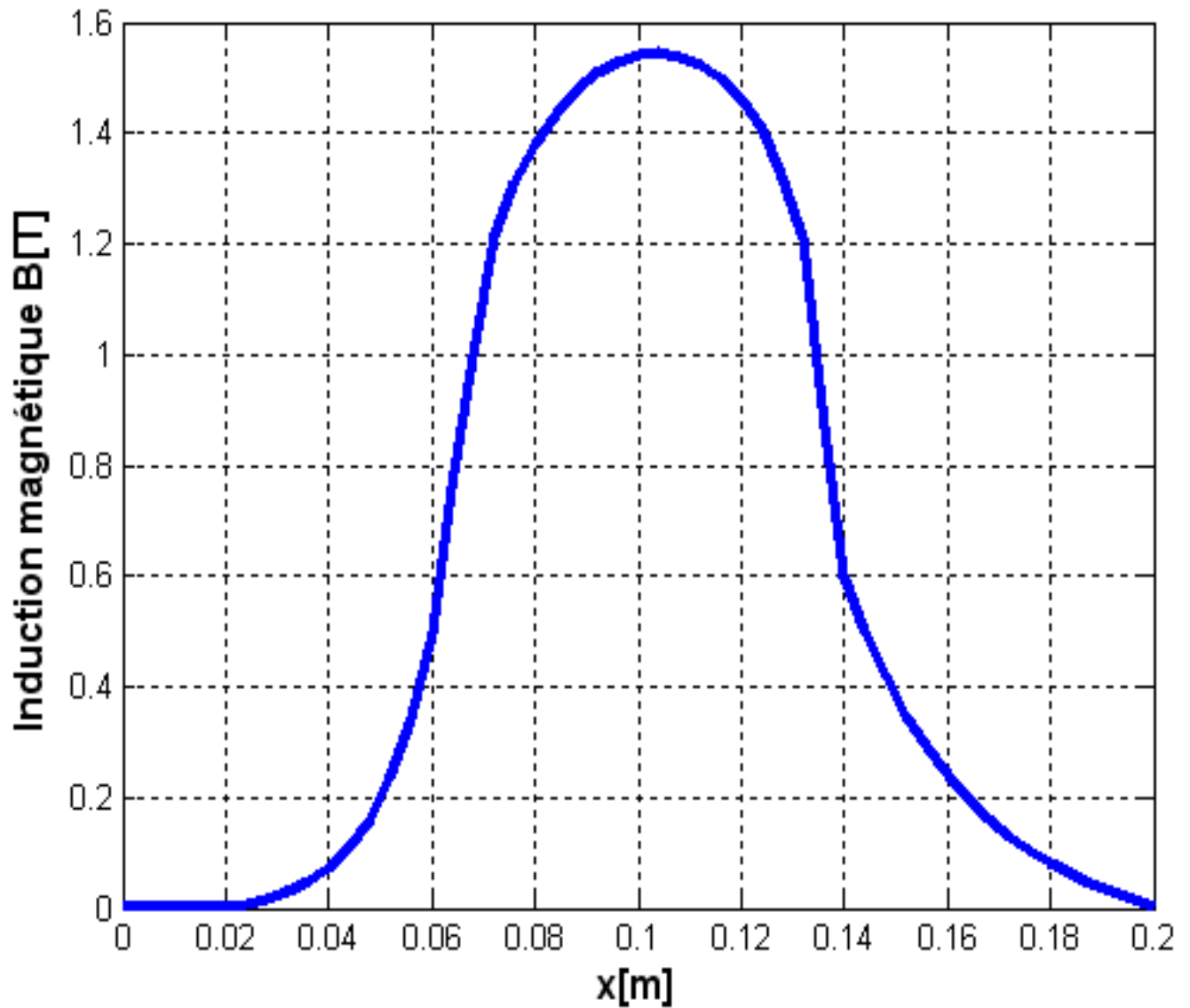


Figure (III.7): Induction magnétique dans la pompe MHD.



### III-9-2 Représentation de la densité du courant d'induit dans le canal

La figure (III.8) représente la densité du courant induit dans le canal de la pompe MHD. On remarque que la densité du courant atteint son maximum au milieu du canal.

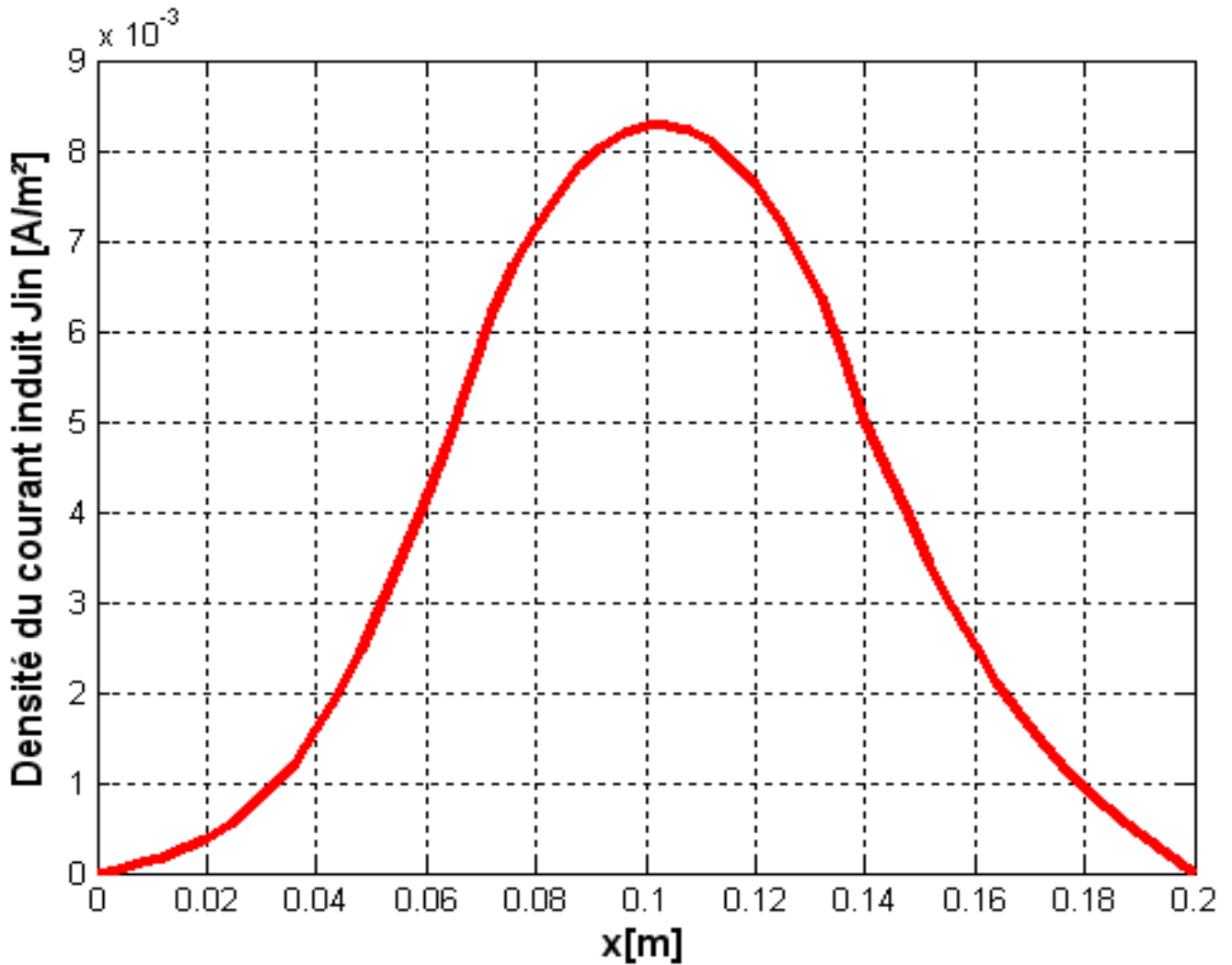


Figure (III.8): Densité du courant induit dans le canal.

### III-9-3 Représentation de la force électromagnétique dans le canal.

La figure (III.9): illustrent la force électromagnétique dans le canal de la pompe. Celle-ci apparaît dans l'intervalle (0.08 : 0.12) et atteint son maximum au milieu du canal.

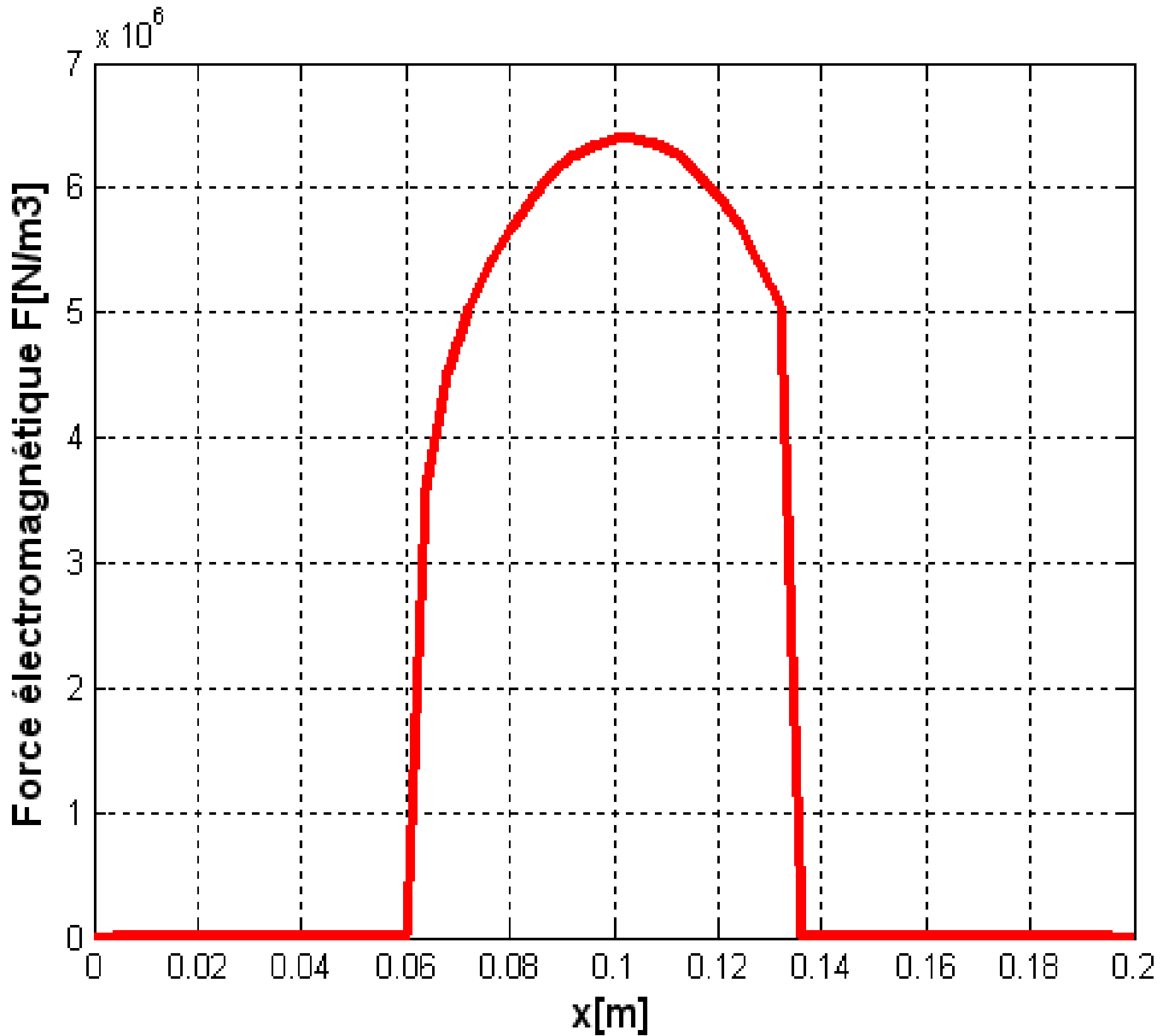


Figure (III.9): Force électromagnétique dans la pompe MHD.

### **III.10 Conclusion.**

Le présent chapitre est consacré à la présentation des différents résultats obtenus par l'application de la méthode des volumes finis au problème électromagnétique dans les cas non linéaire de la pompe MHD à conduction.

# Conclusion générale

# Conclusion générale

A travers cette mémoire, on s'est intéressé à l'étude électromagnétique d'une pompe MHD à conduction dans le cas non linéaire.

magnétohydrodynamique MHD à conduction et à l'optimisation de la même pompe MHD.

La détermination des différentes caractéristiques d'une pompe MHD à conduction destinée au pompage des métaux liquides par l'interaction entre les courants et les champ inducteurs.

Pour ce faire, une modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques, est indispensable. Le logiciel MATLAB a été utilisé pour simuler et valider les différentes caractéristiques de la pompe.

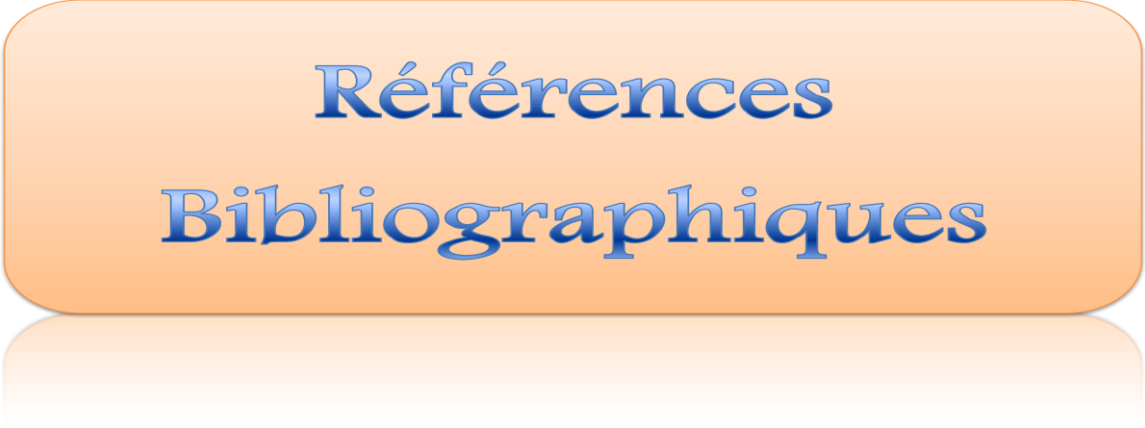
Les équations de Maxwell, les caractéristiques électriques et magnétiques mènent à l'obtention de modèles mathématiques représentant les phénomènes physiques qui régissent le comportement des dispositifs électromagnétiques. Dans notre cas, la formulation en potentiel vecteur magnétique pour la résolution du problème a été choisie.

Le code de calcul bidimensionnel (2D) établi sous environnement MATLAB, a permis d'étudier les phénomènes électromagnétiques de la pompe MHD à conduction et de déterminer les lignes équipotentielles, l'induction magnétique, la densité du courant induit dans le canal ainsi que la force électromagnétique dans le canal.

A travers les résultats obtenus dans ce mémoire, on remarque la nécessité d'étude expérimentale conséquente par la conception d'un prototype.

Par ailleurs, le travail peut être poursuivi et amélioré en se penchant sur les axes suivants :

- ✓ Le couplage des effets électromagnétiques -hydrodynamiques- électrochimiques ;
- ✓ Le couplage des effets électromagnétiques -hydrodynamiques - thermiques ;
- ✓ Une approche numérique en trois dimensions ;
- ✓ L'optimisation de la géométrie de la pompe MHD à conduction.



**Références  
Bibliographiques**

- [1] L. Leboucher, «Optimisation de convertisseurs MHD à induction : problème inverse en électromagnétisme »Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, 1992.
- [2] L.Leboucher, P.Marty, A.Aleman, «An Inverse Method In Electromagnetism Applied To The Optimisation Of Inductors», IEEE Transaction On Magnetics, Vol. 28, No.5,Septembre 1992.
- [3] F. Z .Kadid, « Contribution à l'étude des convertisseurs MHD à induction »Thèse de Doctorat, Université de Batna, 2004.
- [4] N.Bergoug,« Étude de l'influence des Matériaux ferromagnétiques sur les performances d'une machine MHD par la Modélisation Numérique 2d », Thèse de Magister, Université de BATNA .2006.
- [5] Sonia. Naceur , Fatima. Zohra .Kadid , Rachid. Abdessemed Laboratoire L.E.B, Département d'Électrotechnique, Université de Batna Rue Chahid Md EL – Hadi Boukhrouf, 05000, Batna, Alegria.
- [6] BERGOUG NASSIMA Magister en Électrotechnique - Université de Batna, 2006 Ingénieur d'État en Électrotechnique – Université de Batna, 2002.
- [7] Modélisation numérique par la méthode des volumes finis d'une pompe Magnétohydrodynamiques (MHD) UNIVERSITE KASDI MERBAH FACULTE DE SCIENCES APPLIQUES DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE BEN MOUSSA OUMSALAMA ; ZIGHEM ASMA ; NACEUR SONIA.
- [8] Mansour Tawk. Étude et réalisation d'un système de refroidissement pour l'électronique de puissance basse sur la mise en mouvement d'un fluide conducteur électrique. Autre. Université Grenoble Alpes, 2011. Français.
- [9] R. Berton, «Magnétodynamique», Editions Masson, Paris, 1991.
- [10] N.Bennecib, «Contribution à L'étude Des Phénomènes D'écoulement Dans Les Générateurs MHD» , Thèse de Magister, Institut de l'électrotechnique, Université de Batna,2001.
- [11] B. KHEDIDJA, « Contribution a l'étude et l'optimisation des convertisseurs magnétohydrodynamique (MHD) » Thèse de Magister, Université de Batna2013, Algérie.
- [12] C.A. Borghi, A. Cristofolini and P.L. Ribani, « Analysis of Magneto-Plasma Dynamic Transients in a Combustion Gas Magneto hydrodynamic Generator », Journal of Physics and Plasma, Vol.4, N°8.
- [13] A.Faussurier, R.Servan, « Les matériaux électrotechniques », Edition Dunod, Paris1971
- [14] NACEUR SONIA Maitre assistante classe A à l'Université de Ouargla  
Magister en électrotechnique de l'université de Batna Ingénieur d'état en électrotechnique de l'université de Batna.

- [15] N. PISKOUNOV, “ Calcul Différentiel et Intégral ”, Tome 1, Edition MIR, Moscou, 1980.
- [16] C.ILHAM,B.MERIEM,« étude électromagnétique d'une pompe magnétohydrodynamique». Thèse Magister, Université de Ouargla, 2015, Algérie.
- [17] N. NACEUR, « Contribution à La Modélisation Numérique D'une Pompe MHD En Tenant Compte De La Nature Des Matériaux Des Électrodes Et Du Fluide (MHD) » Thèse de Magister, Université de Batna 2007. Algérie [
- [18] J. C. SABONNADIÈRE, J. L. COULOMB , “ Calcul des Champs Électromagnétiques ”, Technique de l'ingénieur D.3020.pp.I-20.
- [19] ANDRE VANDER VORST,“ Électromagnétisme (Champ, Forces et Circuits) ”, Université Catholique de Louvain, Laboratoire de Télécommunications et d'Hyperfréquences CABAY, Librairie- Éditeur, Louvain- La-Neuve, 1985.
- [20] J. P. Pérez, R. Carles et R. Fleckinger, « Électromagnétisme vide et milieux matériels ». Edition Masson, 1991.
- [21] N. NACEUR, « Contribution à la Modélisation 2D d'un Convertisseur Magnétohydrodynamique (MHD) à Conduction». Thèse Doctorat, Université de Batna 2015, Algérie.
- [22] N. Piskounov, « Calcul différentiel et intégral » Tome 1, Edition MIR, Moscou, 1980.
- [23] [ N.Benyahia, « Modélisation des phénomènes électromagnétiques par couplage : Méthode des volumes finis- méthode des circuits couplés » ; Thèse de magistère, Université de Batna 2004.
- [24] A.Maioufi « Modélisation des phénomènes électromagnétiques non linéaire par la méthode des Volumes finis ». These de magistère 2003.
- [25] M.Boumahrat, A. Gourdin, « Méthode numériques appliquées », (O.P.U), 1993.
- [26] Pompage des métaux liquides par Jean-Paul LE FRÈRE Ingénieur de l'École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique de Nancy Chef du Service Matériel Sodium à la Société Novatome.
- [27] S. V. Patankar, « Numerical Heat Transfer Fluid Flow », Hemisphere Publishing, corporation, 1980.



# Résumé

### Résumé :

Le travail présenté dans ce mémoire, consiste en l'étude électromagnétique d'une pompe magnétohydrodynamique à conduction dans le cas non linéaire.

L'objectif essentiel de ce travail l'étude des phénomènes électromagnétique en 2D par la méthode des volumes finis sous logiciel de simulation MATLAB .

**Mots clés :** Magnétohydrodynamique(MHD), Canal, Électrode, méthode des volumes (finis), MATLAB .

### Abstract :

The work presented in this thesis, consists of the electromagnetic study of a conduction magnetohydrodynamic pump in the nonlinear case.

The main objective of this work is the study of electromagnetic phenomena in 2D by the finite volume method under MATLAB simulation software.

**Key words:** Magnetohydrodynamics (MHD), Channel, Electrode, finite volume method, MATLAB.

### ملخص:

العمل المقدم في هذه الأطروحة يتكون من الدراسة الكهرومغناطيسية لمضخة التوصيل . (MHD) magnétohydrodynamique في الحالة الغير خطية.  
الهدف الرئيسي من هذا العمل هو النمذجة الرقمية لنموذج كهرومغناطيسي للمضخة في تناهي الأبعاد (2 D) بطريقة الحجم المحدود (MVF) باستعمال برنامج الماتلاب (MATLAB)

**الكلمات المفتاحية :** الكهروديناميكية(MHD), القناة, قطب كهربائي , طريقة الحجم المحدود (MVF), الماتلاب(MATLAB).