

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE ET DES
SCIENCE DE LA MATIERE

DEPARTEMENT DES SCIENCE DE LA MATIERE



Mémoire MASTER ACADEMIQUE

Domaine : SCIENCE DE LA MATIERE

Filière : PHYSIQUE

Spécialité : Physique du Rayonnement,
Spectroscopie et Optoélectronique

Présenté par : Zineb KORICHI

Thème

*Statistique Quantique Basée Sur La
Mécanique Quantique Fractionnaire*

Soutenu Publiquement Le : 22/06/2013

Devant le jury :

M. Mohamed Abdelouahab BENBITOUR	MA(A)	Président	UKM Ouargla
M. Mohammed Tayeb MEFTAH	Pr.	Encadreur	UKM Ouargla
Mlle. Hadjira BENZAIR	MC(B)	Examineur	UKM Ouargla

Année Universitaire : 2012 /2013

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Quelques aspects fondamentaux de l'analyse fractionnaire	3
2.1	Introduction	3
2.2	Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	4
2.2.1	La fonction Gamma	4
2.2.2	La fonction Bêta	6
2.3	Opérateurs fractionnaires, définitions et propriétés	7
2.3.1	Intégration fractionnaire	7
2.3.2	Dérivation fractionnaire	8
2.4	Propriétés des dérivées fractionnaires	11
2.5	Conclusion	11
3	Application du calcul fractionnaire en mécanique quantique	12
3.1	Introduction	12
3.2	Notions de base	12
3.3	Équation de Schrödinger fractionnaire	14
3.4	Equation de Schrödinger fractionnaire indépendante du temps	16
3.5	Hermiticité de l'opérateur Hamiltonien fractionnaire	16
3.6	Densité et courant de probabilité	17
3.7	Applications de la mécanique quantique fractionnaire	19
3.7.1	puits infini	19
3.7.2	Particule libre	21
3.7.3	Barrière de potentiel	22
3.7.4	Oscillateur quantique fractionnaire	28
3.8	Conclusion	29

4	Statistique quantique fractionnaire	31
4.1	Introduction	31
4.2	Gaz parfait	31
4.2.1	Propriétés du gaz parfait	33
4.3	Gaz d'oscillateurs harmoniques	34
4.4	Gaz quantique	37
4.4.1	Gaz de bosons	37
4.4.2	Condensation de Bose Einstein	42
4.4.3	Gaz de fermions	44
4.5	Oscillateurs harmonique quantiques	47
4.5.1	Propriétés du gaz d'oscillateurs harmoniques quantiques	48
5	Conclusion générale	50
A	La dérivation de Riesz	51
A.1	En une dimension	51
A.2	En trois dimensions	53
B	La densité de probabilité fractionnaire	54

Liste des Figures

2.2.1 La fonction Gamma d'Euler	5
3.7.1 Barrière de potentiel.	23
4.5.1 La fonction Z_1	47

Remerciements

Tout d'abord; je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre ce travail.

- Je tiens à remercier le professeur Mohammed Tayeb MEFTAH de m'avoir fait l'honneur d'examiner ce mémoire et d'en être rapporteur. Je tiens à le remercier aussi pour la pertinence de ses remarques et sa patience pendant ce travail. J'admire beaucoup ses travaux et sa manière de diriger qui furent pour moi une grande source d'inspiration et de motivation. Il a su m'encourager lorsque je doutais et il m'a permis de travailler dans une ambiance scientifique exceptionnelle et je tiens à lui témoigner ma gratitude et ma reconnaissance.

- J'adresse également de vifs remerciements à mon professeur : Mohamed Abdelouhab BENBITOUR pour l'aide, les conseils, les remarques, les discussions scientifiques très riches. Je remercie d'avoir présidé le jury de soutenance, et lui adresse toute ma gratitude.

- J'adresse mes remerciements à Dr. Hadjira BENZAIK qui m'a fait l'honneur de juger ce travail, Je tiens à la remercier aussi pour son aide et son soutien scientifique.

- Je tiens à remercier Mr Nick LASKIN chercheur à l'université de Toronto KANDA, pour son intérêt et aussi pour la documentation qu'il m'a envoyée.

- Je voudrais aussi remercier Mr Mohamed Salim MEFLAH, Mme Keltoum CHENINI pour les échanges scientifiques et ainsi par leur présence et soutien moral durant toute la phase de déroulement du mémoire.

- Je ne pourrais terminer sans remercier mes parents et ma famille qui m'ont soutenue et encouragée pour terminer ce travail. Que ma mère et ma soeur Meriem tout particulièrement trouvent ici ma reconnaissance.

- Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Zineb KORICHI

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier quelques problèmes de physique statistique quantique basée sur la mécanique quantique fractionnaire. Dans notre travail, on a commencé à donner un aperçu sur la mécanique quantique fractionnaire par présenter quelques illustrations puis on a calculé la fonction de partition Z pour un gaz parfait libre et un gaz confiné dans une boîte avec des conditions aux limites. On a déduit les fonctions thermodynamiques dans le cas fractionnaire. Nous avons également calculé ces fonctions thermodynamiques pour le cas d'un gaz formé de N oscillateurs "harmoniques" portés à une température T toujours dans le cadre de la mécanique quantique fractionnaire.

Dans ce mémoire, nous avons concentrés aussi sur l'étude d'un gaz quantique de fermions et de bosons sans interactions (gaz parfait) dans le cas fractionnaire et abordé le problème de la transition de phase pour les bosons en discutant toutes les grandeurs thermodynamiques y compris la température de Bose en fonction du paramètre de la fractionalité de la dérivée dans l'Hamiltonien décrivant le système

Mot clés : calcul fractionnaire, Reisz, Liouville, Caputo, mécanique quantique fractionnaire, fonction de partition grand-canonique, grandeurs thermodynamiques, bosons.

1

Introduction générale

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux 19 siècles par Riemann et Liouville. Leur but devait prolonger la dérivation ou intégration en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. Plusieurs de systèmes physiques ont exhibé un comportement dynamique d'ordre fractionnaire, tels que les systèmes viscoélastiques, la polarisation électrode électrolyte, la polarisation d'interfaces, le comportement cardiaque...etc [27],[28],[24].

Durant les dernières décennies un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie, où on a pu trouver un progrès signifiant des travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans ces domaines. Donc, un grand effort a été fait pour essayer de mettre en pratique les résultats déjà établis, et un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire.

Au cours des dernières années, le calcul fractionnaire a été utilisé dans la mécanique quantique, dans l'objectif d'une généralisation. N. LASKIN [14] a montré la possibilité de cette généralisation au moyen de l'approche des intégrales de chemin de Feynman. L'approche de Feynman dans la mécanique quantique est basée sur l'intégrale de chemin en utilisant la mesure générée par le mouvement brownien. La généralisation naturelle du mouvement brownien est le mouvement de Lévy[14].

Du moment que l'intégrale de chemin sur des trajectoires browniennes conduit à l'équation Schrödinger, donc l'intégrale de chemin sur des trajectoires de Lévy mène à l'équation de Schrödinger fractionnaire. L'équation fractionnaire de Schrödinger comprend la dérivée d'ordre α au lieu de la dérivée seconde pour ($\alpha = 2$) dans l'équation standard de Schrödinger, c'est l'une des raisons pour l'appellation «mécanique quantique fractionnaire» (FQM).

L'objectif de ce mémoire est d'étudier quelques problèmes de physique statistique basée sur la mécanique quantique fractionnaire.

Ce mémoire se compose essentiellement de trois chapitres :

Le premier chapitre présente les notions théoriques du calcul fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent. Les concepts de base et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire y sont répertoriés.

Nous poursuivons dans le deuxième chapitre la présentation de l'application du calcul fractionnaire en mécanique quantique. Nous allons présenter les principes de la mécanique quantique fractionnaire et quelques applications de l'équation de Schrödinger fractionnaire.

Dans le troisième chapitre, nous étudierons le calcul de la fonction de partition Z pour un gaz parfait libre et un gaz formé de N oscillateurs "harmoniques" portés à une température T . On va ensuite déduire les fonctions thermodynamiques dans le cas fractionnaire. Nous allons également calculer ces fonctions thermodynamiques pour le cas d'un gaz quantique de fermions et de bosons, sans interactions toujours dans le cadre de la mécanique quantique fractionnaire.

2

Quelques aspects fondamentaux de l'analyse fractionnaire

2.1 Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. Ses origines remontent à la fin du 17^{ième} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégrale [25]. Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hopital, l'Hopital a répondu : que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Cette lettre de l'Hopital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire [20].

Plusieurs mathématiciens ont contribué à l'élaboration de la théorie de la dérivation fractionnaire tels que [7] : P. S. Laplace(1812), J. Fourier(1822), J. Liouville(1832), B. Riemann (1847), A. Grunwald(1867 – 1872), J. Hadamard(1892), S. Pincherle(1902), H. weyl(1917), P. Lévy(1923), A. Marchaud(1927) et M. Riesz(1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente ans, elle a fait l'objet de plusieurs conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencée en 1968 [1].

Différentes définitions de la dérivation fractionnaire ont été établies. Ces définitions, même ne menant pas toujours à des résultats identiques sont équivalentes pour un large

panel de fonctions. Toutefois, la définition de la dérivation fractionnaire peut s'établir selon trois approches. La première est l'approche par limites qui est l'approche classique de Grünwald-Letnikov et qui consiste à généraliser la notion de la dérivation entière. La deuxième est l'approche de Riemann-Liouville et Caputo qui, à partir des primitives, associe la dérivation fractionnaire à l'intégration fractionnaire. La troisième approche est spectrale et utilise la transformée de Fourier.

Dans ce chapitre, il s'agit pour nous de présenter les fondements de la dérivation fractionnaire. Nous noterons α l'ordre de dérivation D^α l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α et I^α l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre α .

Ainsi, seront présentées quelques fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire avant de rappeler les différentes définitions des opérateurs d'ordre non entier. Des exemples de fonctions usuelles pour clarifier les diverses approches de la dérivation fractionnaire ainsi que leurs propriétés seront donnés.

2.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Nous avons besoin de présenter deux fonctions qui sont très utilisées et qui permettent en général de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma d'Euler et de la fonction Beta.

2.2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler. Son interprétation est simplement la généralisation du factoriel n ($n!$) et elle permet à n de prendre des valeurs non entières.

Définition 2.2.1 *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante [3] :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.2.1)$$

Elle est plus souvent utilisée même si elle est restreinte aux valeurs positives de z .

propriétés de la fonction Gamma

Une propriété importante de la fonction $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante [3] :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \tag{2.2.2}$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = [-e^{-t}t^z]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

L'allure de la fonction Gamma est donnée par la figure (2.2.1) :

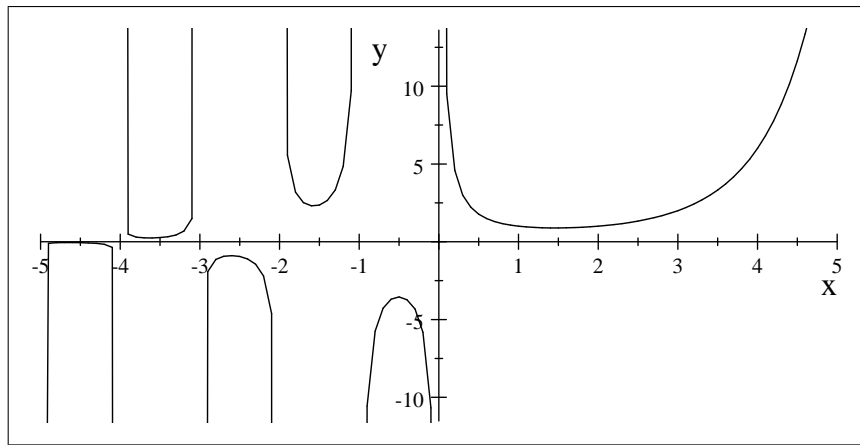


Figure 2.2.1 : La fonction Gamma d'Euler

Puisque $\Gamma(1) = 1$, en utilisant la relation (2.2.2), nous obtenons pour $z = 1, 2, 3 \dots$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$$

Donc :

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = (n)! \tag{2.2.3}$$

L'autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle possède des pôles simples pour $z = 0, -1, -2, \dots$

Son expression est :

$$\Gamma(z) = \varphi(z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+z} + \frac{(-1)^2}{2!} \frac{1}{2+z} + \dots$$

avec :

$$\varphi(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Ceci signifie que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend asymptotiquement vers l'infini.

Nous donnons quelques valeurs particulières de $\Gamma(z)$:

- pour $z = \frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
- pour $z = n + \frac{1}{2}$, n entier positif $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}$.

La fonction Gamma peut être écrite en termes de deux composantes, comme suit :

$$\Gamma(z) = \gamma(z, a) + \Gamma(z, a) \quad (2.2.4)$$

où $\gamma(z, a)$ est la fonction Gamma incomplète inférieure. Elle est donnée par:

$$\gamma(z, a) = \int_0^a e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (\Re(z) > 0) \quad (2.2.5)$$

et $\Gamma(z, a)$ est la fonction Gamma incomplète supérieure. Elle est définie par :

$$\Gamma(z, a) = \int_a^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (\Re(z) > 0) \quad (2.2.6)$$

Les fonctions Gamma incomplètes sont utilisées pour obtenir la différentiation fractionnaire et l'intégration fractionnaire des fonctions périodiques.

2.2.2 La fonction Bêta

Définition 2.2.2 La fonction Beta est une fonction à deux variables et est définie par l'intégrale suivante [23] :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (\Re(x) > 0, \Re(y) > 0) \quad (2.2.7)$$

propriétés de la fonction Bêta [8]

1. La fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :

$$B(x, y) = B(y, x)$$

2. Elle peut prendre aussi les formes intégrales :

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta$$

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

3. Elle satisfait des équations fonctionnelles telles que :

$$B(x, y) B(x+y, 1-y) = \frac{\pi}{x \sin(y\pi)}$$

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y)$$

$$B(x, x) = 2^{1-2x} B\left(\frac{1}{2}, x\right)$$

On peut exprimer la fonction Bêta en termes de la fonction Gamma :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.2.8}$$

2.3 Opérateurs fractionnaires, définitions et propriétés

Nous présenterons les opérateurs d'ordre fractionnaire. Une définition unique de l'intégration non entière et plusieurs définitions de la dérivée non entière sont considérées.

2.3.1 Intégration fractionnaire

L'idée principale d'intégration fractionnaire est la généralisation d'intégrations itérées.

Définition 2.3.1 Soit $\alpha \in R^+$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[a, \infty)$. L'intégrale d'ordre α de f de borne inférieure a définie par [12] :

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \tag{2.3.1}$$

est appelée intégrale d'ordre fractionnaire (α) de Riemann-Liouville, et $\Gamma(\alpha)$ la fonction Gamma d'Euler.

Exemple 2.3.1 : Considérons la fonction $f(x) = (x - a)^\beta$. Alors

$${}_a I_x^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x - a)\tau$, d'où

$$\begin{aligned} {}_a I_x^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha-1} \tau^\beta dt \\ &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta + 1, \alpha) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

D'après la formule (2.2.8), l'équation (2.3.2) devient :

$${}_a I_x^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (x - a)^{\alpha+\beta}$$

2.3.2 Dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais elles sont équivalentes pour un large panel de fonctions. Nous allons souligner les définitions qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L)

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus connue et répandue.

Définition 2.3.2 Soient $\alpha \in R^+$, n un entier positif, $a \in R$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[a, \infty)$. La dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de f de borne inférieure a est définie par [22] :

$${}^R L D_x^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} ({}_a I_x^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (2.3.3)$$

avec $(n - 1) < \alpha < n$

Exemple 2.3.2 Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x - a)^\beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$. On aura

$$\begin{aligned} {}_a^{RL}D_x^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{d^n}{dx^n} \left({}_aI_x^{n-\alpha} (x - a)^\beta \right) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \beta + 1)} (x - a)^{n-\alpha+\beta} \right) \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} {}_a^{RL}D_x^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \beta + 1)} \frac{\Gamma(n - \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Caputo a reformulé la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit [12] :

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a I_x^{n-\alpha} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x - t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (2.3.4)$$

où $(n - 1) < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$.

la relation qui relie les deux définitions (2.3.3) et (2.3.4) est donnée par :

$${}_a^{RL}D^\alpha f(x) = {}_a^C D^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(a)$$

Exemple 2.3.3 La dérivée de $f(x) = (x - a)^\beta$ au sens de Caputo.

Soit α non entier et $0 < n - 1 < \alpha \leq n$. avec $\beta > n - 1$, alors on a :

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n)} (t - a)^{\beta-n}$$

d'où :

$${}_a^C D_x^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n) \Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} (t - a)^{\beta-n} dt$$

En faisant le changement de variable $t = a + (x - a)\tau$. on aura :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n) \Gamma(n - \alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1 - \tau)^{n-\alpha-1} \tau^{\beta-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov (G-L)

Elle est basée sur la généralisation de la dérivée classique d'une fonction $f(x)$ d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la forme :

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{j} f(x - jh) \quad (2.3.5)$$

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (2.3.6)$$

En remplaçant l'entier n par $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$) l'expression (2.3.6) s'écrit :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{j! \Gamma(\alpha - j + 1)} \quad (2.3.7)$$

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de G-L est donc [22] :

$${}^{GL}D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{j} f(x - jh) \quad (2.3.8)$$

où $\lfloor x \rfloor$ dénotes la partie entière de x , h le pas d'échantillonnage, $\binom{\alpha}{j}$ sont appelés les coefficients binomiaux. Cette définition sera utilisée pour la simulation et l'évaluation numérique de la dérivée fractionnaire.

Définition de Riesz

La dérivée fractionnaire de Riesz est définie par [16] :

$$R_x^\alpha g(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt \quad (2.3.9)$$

Avec $0 < \alpha \leq 2, \alpha \neq 1$.

Il existe une autre représentation de dérivée fractionnaire de Riesz :

$$R_x^\alpha g(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x + \xi) - 2f(x) + f(x - \xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi \quad 0 < \alpha \leq 2 \quad (2.3.10)$$

Laplacien fractionnaire Utilisant les expressions de transformées des Fourier en une dimension :

$$\begin{aligned} \varphi(p, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi(x, t) e^{-ipx} \\ \Psi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \varphi(p, t) e^{ipx} \end{aligned}$$

et introduisant le Laplacien fractionnaire [17]

$$\Delta^{\frac{\alpha}{2}} \Psi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \varphi(p, t) |p|^\alpha e^{ipx}$$

2.4 Propriétés des dérivées fractionnaires

Les principales propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires sont les suivantes [3],[26]:

1. Si $f(x)$ est une fonction analytique en x , alors sa dérivée fractionnaire ${}_a D_x^\alpha$ est une fonction analytique en x et α .
2. Pour $\alpha = n$ où n est un nombre entier, l'opérateur ${}_a D_x^\alpha$ produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.
3. Pour $\alpha = 0$, l'opérateur ${}_a D_x^\alpha$ est l'opérateur identité :

$${}_a D_x^0 f(x) = f(x)$$

4. La différenciation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires

$${}_a D_x^\alpha (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda {}_a D_x^\alpha f(x) + \mu {}_a D_x^\alpha g(x)$$

5. La dérivation d'un produit est :

$$D^\alpha (f(x) g(x)) = \sum_{j=0}^n \binom{\alpha}{j} f^{(j)}(x) D^{\alpha-j} g^{(\alpha-j)}(x) - R_n^\alpha(x)$$

où: n entier, $n \geq \alpha + 1$ et $R_n^\alpha(x) = \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} g(t) dt \int_t^x f^{(n+1)}(\xi) (t-x)^n d\xi$.

2.5 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base de la dérivation fractionnaire. Nous avons cité quelques notions relatives à cet outil mathématique, quelques approches des dérivées fractionnaires sont introduites à savoir, l'approche de Grunwald Letnikov, de Riesz, de Riemann Liouville et celle de Caputo ainsi que leurs propriétés, et quelques exemples de calcul.

Le chapitre suivant aura pour objectif, d'approfondir les applications de la dérivée fractionnaire dans le domaine de la mécanique quantique.

3

Application du calcul fractionnaire en mécanique quantique

3.1 Introduction

Aujourd'hui, le calcul fractionnaire devient un outil populaire pour les scientifiques. Il a été utilisé avec succès dans divers domaines de la science et de l'ingénierie, notamment les équations différentielles fractionnaires sont devenues très populaires pour décrire le transport anormal, les processus de diffusion-réaction, la relaxation super-lente, la mécanique classique...etc [11], [2], [29].

Au cours des dernières années, le calcul fractionnaire entre dans le monde de la mécanique quantique. La fusion du calcul fractionnaire avec la mécanique quantique a des raisons mathématiques et physiques.

Dans ce chapitre nous allons présenter les principes de la mécanique quantique dans le cas de la présence de la dérivée fractionnaire dans l'Hamiltonien.

3.2 Notions de base

La mécanique quantique ordinaire a été réalisée au moyen d'opérateurs différentiels standard (laplacien, ...), Nick Laskin [15] a trouvé le moyen de généraliser cette construction pour inclure les opérateurs différentiels fractionnaires. Cela a été possible en généralisant la

mesure fonctionnelle de Feynman défini par :

$$\int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} D_{Feynman} x(\tau) \dots = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_{N-1} \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{-N/2} \times \prod_{j=1}^N \exp \left(\frac{im}{2\varepsilon \hbar} (x_j - x_{j-1})^2 \right) \quad (3.2.1)$$

où : m est la masse de la particule, \hbar est la constante de Planck, $x_0 = x_a, x_N = x_b$,
 $\varepsilon = (t_b - t_a) / N$.

en une nouvelle mesure fonctionnelle [15] :

$$\int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} D_{Laskin} x(\tau) \dots = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_{N-1} \hbar^{-N} \left(\frac{D_\alpha i \varepsilon}{\hbar} \right)^{-N/\alpha} \times \prod_{j=1}^N L_\alpha \left\{ \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{D_\alpha i \varepsilon} \right)^{1/\alpha} |x_j - x_{j-1}| \right\} \quad (3.2.2)$$

où :

$$\hbar^{-1} \left(\frac{D_\alpha t}{\hbar} \right)^{-1/\alpha} L_\alpha \left\{ \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{D_\alpha t} \right)^{1/\alpha} |x| \right\} = \frac{1}{\alpha |x|} H_{2,2}^{1,1} \left[\frac{1}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{D_\alpha t} \right)^{1/\alpha} |x| \left| \begin{array}{l} (1, 1/\alpha), (1, 1/2) \\ (1, 1), (1, 1/2) \end{array} \right. \right]$$

et : $0 < \alpha \leq 2$. D_α est le coefficient de diffusion quantique fractionnaire. L_α la fonction de Lévy et H la fonction de Fox.

Comme on le sait, la définition donnée par l'équation (3.2.1) conduit à la mécanique quantique standard. L'expression du propagateur prend la forme suivante :

$$K_F(x_b t_b / x_a t_a) = \int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} D_{Feynman} x(\tau) \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} V(x(\tau)) d\tau \right]$$

Alors la définition donnée par l'équation (3.2.2) conduit à la mécanique quantique fractionnaire.

Laskin [15] a proposé la mécanique quantique fractionnaire basée sur l'intégrale de chemin fractionnaire :

$$K_L(x_b t_b / x_a t_a) = \int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} D_{Laskin} x(\tau) \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} V(x(\tau)) d\tau \right] \quad (3.2.3)$$

où $V(x(\tau))$ est l'énergie potentielle.

Pour une particule libre $V(x) = 0$, l'équation (3.2.3) devient :

$$\begin{aligned} K_L(x_b t_b / x_a t_a) &= \int D_{Laskin} x(\tau) .1 \\ &= \hbar^{-1} \left(\frac{i D_\alpha (t_b - t_a)}{\hbar} \right)^{-1/\alpha} L_\alpha \left\{ \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{D_\alpha i (t_b - t_a)} \right)^{1/\alpha} |x_b - x_a| \right\} \end{aligned}$$

En terme de l'intégrale de Fourier le propagateur K_L s'écrit sous la forme :

$$K_L(x_b t_b / x_a t_a) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp \left(i \frac{p(x_b - x_a)}{\hbar} - i \frac{D_\alpha |p|^\alpha (t_b - t_a)}{\hbar} \right)$$

Nous notons que l'énergie de la particule libre dans le cas de la mécanique quantique fractionnaire est donnée par :

$$E = D_\alpha |p|^\alpha$$

3.3 Équation de Schrödinger fractionnaire

L'équation de Schrodinger est l'équation de base de la mécanique quantique qui décrit l'évolution dans le temps du vecteur d'état $|\Psi\rangle$ d'un système quantique arbitraire. Elle a été établie en 1925 par Erwin Schrödinger et généralisée par Paul Dirac quelques années plus tard [6].

Pour une particule qui se déplace dans un espace tridimensionnel, sous l'influence du potentiel $V(r, t)$ l'équation de Schrödinger dépendante du temps est écrite sous la forme de :

$$H\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t)$$

où H est l'opérateur hamiltonien de la particule et \hbar la constante de Planck. En mécanique quantique standard, si la particule est en interaction avec un potentiel scalaire $V(r, t)$, et en l'absence de champ magnétique, H prendra la forme suivante :

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r, t)$$

où \hat{p} et r sont des opérateurs de l'impulsion et de la coordonnée d'espace de la particule. Ils sont donnés par :

$$r = \hat{r} \quad , \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla \tag{3.3.1}$$

Avec $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$.

Tandis que en mécanique quantique fractionnaire l'Hamiltonien H prend la forme suivante [18] :

$$H_\alpha = D_\alpha |\hat{p}|^\alpha + V(\hat{r}, t) \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (3.3.2)$$

Ici il faut noter que D_α est un coefficient qui ajuste les unités physiques avec le dimension

$$[D_\alpha] = \text{erg}^{1-\alpha} \text{cm}^\alpha \text{sec}^{-\alpha}.$$

En portant les équations (3.3.1) dans l'équation (3.3.2) il vient :

$$H_\alpha = D_\alpha (-i\hbar\nabla)^\alpha + V(\hat{r}, t) \quad (3.3.3)$$

$$= D_\alpha (-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} + V(\hat{r}, t) \quad (3.3.4)$$

Donc l'équation fractionnaire de Schrödinger dépendante du temps pour une particule se déplace sous l'influence du potentiel $V(r, t)$ est [18] :

$$D_\alpha (-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} \Psi(r, t) + V(r, t) \Psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) \quad 1 < \alpha \leq 2$$

La dérivée fractionnaire de Riesz $(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}$ est définie comme suit (voir la démonstration en annexe A) :

$$(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} \Psi(r, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \exp\left(\frac{ip}{\hbar}r\right) |p|^\alpha \varphi(p, t) \quad (3.3.5)$$

où $\varphi(p, t)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'onde $\Psi(r, t)$:

$$\varphi(p, t) = \int d^3r \exp\left(-\frac{ip}{\hbar}r\right) \Psi(r, t)$$

Si le mouvement de la particule est confiné sur une droite, le potentiel est alors une fonction à une seule variable de l'espace. Dans ce cas l'équation de Schrödinger de la particule ne dépend que d'une seule variable de l'espace. L'hamiltonien du type (3.3.4) s'écrit alors [19] :

$$H_\alpha = -D_\alpha (\hbar\nabla)^\alpha + V(x, t) \quad (3.3.6)$$

où $(\hbar\nabla)^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Riesz dans une dimension (voir la démonstration en annexe A)

$$(\hbar\nabla)^\alpha \Psi(x, t) = -\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(\frac{ip}{\hbar}x\right) |p|^\alpha \varphi(p, t) \quad (3.3.7)$$

Et l'équation de Schrödinger fractionnaire dépendante du temps devient :

$$-D_\alpha (\hbar\nabla)^\alpha \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (3.3.8)$$

3.4 Equation de Schrödinger fractionnaire indépendante du temps

Pour un nombre de problèmes importants en mécanique quantique, le potentiel V n'est pas une fonction explicite du temps. L'équation de Schrödinger fractionnaire, qui est une équation aux dérivées partielles, peut alors être considérablement simplifiée en utilisant la technique de séparation des variables. Considérons :

$$-D_\alpha \hbar^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \quad (3.4.1)$$

où $V = V(x)$ uniquement. Cette équation (3.4.1) admet une solution sous la forme d'un produit d'une fonction spatiale $\Psi(x)$ et d'une fonction temporelle $f(t)$:

$$\Psi(x, t) = f(t) \Psi(x) \quad (3.4.2)$$

En substituant l'équation (3.4.2) dans l'équation (3.4.1), nous obtenons :

$$\frac{1}{\Psi(x)} (-D_\alpha \hbar^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \Psi(x) + V(x) \Psi(x)) = \frac{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(t)}{f(t)} \quad (3.4.3)$$

Du moment que le membre de droite de l'équation (3.4.3) ne dépend que de t , et le membre de gauche ne dépend que de x , les deux sont en fait égales à une constante que l'on pose égale à E . On en déduit immédiatement la solution $f(t) = \exp(-\frac{iE}{\hbar}t)$ ($f(0) = 1$) et par conséquent la forme la plus générale de la solution dans laquelle les variables d'espace et de temps sont séparées :

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) \exp(-\frac{iE}{\hbar}t)$$

Cette solution est dite stationnaire car la probabilité de trouver la particule en x est indépendante du temps $|\Psi(x, t)|^2 = |\Psi(x)|^2$.

On obtient finalement l'équation de Schrödinger indépendante du temps (ou stationnaire) [17] :

$$-D_\alpha \hbar^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \Psi(x) + V(x) \Psi(x) = E \Psi(x)$$

3.5 Hermiticité de l'opérateur Hamiltonien fractionnaire

L'Hamiltonien fractionnaire défini par l'équation (3.3.6) est un opérateur auto-adjoint dans l'espace muni du produit scalaire :

$$\langle \phi, \chi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi^*(x, t) \chi(x, t) \quad (3.5.1)$$

Pour prouver l'hermiticité de H_α notons que, selon la définition de la dérivée de Riesz quantique fractionnaire donnée par l'équation (3.3.5), l'intégration par partie donne la formule :

$$\langle \phi, (\hbar \nabla)^\alpha \chi \rangle = \langle (\hbar \nabla)^\alpha \phi, \chi \rangle \quad (3.5.2)$$

L'énergie moyenne d'un système quantique fractionnaire avec hamiltonien H_α est :

$$E_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi^*(x, t) H_\alpha \Psi(x, t) = \langle \Psi, H_\alpha \Psi \rangle \quad (3.5.3)$$

Tenant compte de l'équation (3.5.2), nous avons :

$$E_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi^*(x, t) H_\alpha \Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (H_\alpha^+ \Psi(x, t))^* \Psi(x, t) = E_\alpha^*$$

Comme conséquence physique, l'énergie du système est réel. Ainsi, l'Hamiltonien fractionné H_α défini par l'équation (3.3.6) est hermitien ou opérateur auto-adjoint dans l'espace muni par le produit scalaire défini par l'équation (3.5.3).

$$(\phi, H_\alpha \chi) = (H_\alpha^+ \phi, \chi)$$

Notons que l'équation (3.3.8) conduit à l'équation importante:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) = 0 \quad (3.5.4)$$

ce qui montre que la fonction d'onde reste normalisée.

En multipliant l'équation (3.3.8) par $\Psi^*(x, t)$ et conjuguant de l'équation (3.3.8) et multipliant la par $-\Psi(x, t)$, et en sommant les deux équations résultantes, on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^*(x, t) \Psi(x, t)) = \Psi^*(x, t) H_\alpha \Psi(x, t) - \Psi(x, t) H_\alpha^* \Psi^*(x, t) \quad (3.5.5)$$

Intégrons cette relation sur tout l'espace et en utilisant le fait que l'opérateur H_α est auto-adjoint, nous trouvons l'équation (3.5.4)

3.6 Densité et courant de probabilité

La densité de probabilité $\rho(r, t)$ pour trouver l'existence d'une particule dont la fonction d'onde $\Psi(r, t)$ ($\Psi(r, t)$ est normée) est donnée par :

$$\rho(r, t) = |\Psi(r, t)|^2$$

Sachant que la probabilité dP de trouver la particule à l'instant t dans le volume d^3r en r est :

$$dP = \rho(r, t)d^3r$$

Par conséquent l'intégrale de la densité de probabilité $\rho(r, t)$ sur tout l'espace est donc constante (normalisation), mais sa valeur locale peut varier. Les variations de $\rho(r, t)$ donnent lieu à un courant de probabilité $J(r, t)$ qui obéit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{J}(r, t) = 0$$

ce qui impose qu'il y ait conservation locale de probabilité. Si notre particule est soumise à la seule action du potentiel $V(r, t)$, son équation de Schrödinger fractionnaire correspondante s'écrit :

$$D_\alpha(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r, t) + V(r, t)\Psi(r, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r, t) \quad (3.6.1)$$

qui a pour complexe conjugué :

$$D_\alpha(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi^*(r, t) + V(r, t)\Psi^*(r, t) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(r, t) \quad (3.6.2)$$

Pour trouver le vecteur de la densité de courant de probabilité dans le cas fractionnaire, on multiplie l'équation (3.6.1) par $\Psi^*(r, t)$ et l'équation (3.6.2) par $-\Psi(r, t)$, et on somme les deux équations résultantes, on obtient :

$$D_\alpha \left\{ \Psi^*(r, t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r, t) - \Psi(r, t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi^*(r, t) \right\} = i\hbar \left\{ \begin{array}{l} \Psi^*(r, t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r, t) + \\ \Psi(r, t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(r, t) \end{array} \right\}$$

or:

$$\Psi^*(r, t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r, t) + \Psi(r, t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(r, t) = \frac{\partial}{\partial t}(\Psi(r, t)\Psi^*(r, t))$$

Donc:

$$i\hbar\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_\alpha \left[\Psi^*(r, t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r, t) - \Psi(r, t)(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi^*(r, t) \right] \quad (3.6.3)$$

L'équation (3.6.3) prend aussi la forme suivante [18] (voir la démonstration dans l'annexe B):

$$\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} + \frac{D_\alpha \hbar}{i} \overrightarrow{\nabla} \left[\Psi^*(r, t) (-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2-1} \overrightarrow{\nabla} \Psi(r, t) - \Psi(r, t) (-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2-1} \overrightarrow{\nabla} \Psi^*(r, t) \right] = 0$$

Et en mettant :

$$\vec{J}(r, t) = \frac{D_\alpha \hbar}{i} (\Psi^*(r, t) (-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2-1} \overrightarrow{\nabla} \Psi(r, t) - \Psi(r, t) (-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2-1} \overrightarrow{\nabla} \Psi^*(r, t)) \quad (3.6.4)$$

$J(r, t)$ est la densité de courant de probabilité dans le cas fractionnaire.

Si nous remplaçons $\frac{\hbar}{i} \overrightarrow{\nabla}$ par \hat{p} , l'équation (3.6.4) devient :

$$J(r, t) = D_\alpha (\Psi(r, t) (\hat{p}^2)^{\alpha/2-1} \hat{p} \Psi^*(r, t) + \Psi^*(r, t) (\hat{p}^2)^{\alpha/2-1} \hat{p} \Psi(r, t)) \quad (3.6.5)$$

Lorsque $\alpha = 2$, $D_\alpha = 1/2m$, on retrouve les résultats bien connus en mécanique quantique usuelle.

3.7 Applications de la mécanique quantique fractionnaire

Nous allons aborder un certain nombre de problèmes à une dimension pour lesquels il est possible de trouver une solution exacte de l'équation fractionnaire de Schrödinger.

3.7.1 puits infini

Comme première application de l'équation de Schrödinger fractionnaire, on considère une particule confinée dans un puits de potentiel unidimensionnel infini :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour } |x| \geq a \\ 0 & \text{pour } |x| \leq a \end{cases}$$

L'équation de Schrödinger fractionnaire indépendante du temps de cette particule peut-être écrite comme :

$$-D_\alpha (\hbar \nabla)^\alpha \Psi(x) + V(x) \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (3.7.1)$$

où $E = D_\alpha |p|^\alpha$ est l'énergie totale de la particule.

Ce puits de potentiel comporte un mur impénétrable en $x = -a$ et $x = a$. A cause de ce mur de potentiel infiniment haut, la particule ne peut pas être à l'extérieur de l'intervalle $[-a, a]$. Sa fonction d'onde doit nécessairement s'annuler dès que x atteint les bornes de l'intervalle.

$$\Psi(x) = 0 \quad |x| \geq a$$

Par conséquent, on ne doit résoudre l'équation de Schrödinger fractionnaire que pour $x \in [-a, a]$, c.à.d. l'équation :

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x, t) = E\Psi(x, t) \quad (3.7.2)$$

avec $(\hbar\nabla)^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Riesz qui est définie par l'équation (3.3.7).

L'équation (3.7.2) peut-être écrite sous la forme :

$$\nabla^\alpha\Psi(x, t) + k^\alpha\Psi(x, t) = 0 \quad (3.7.3)$$

avec : $k^\alpha = \frac{E}{D_\alpha\hbar^\alpha}$.

L'équation différentielle (3.7.3) admet comme solution générale :

$$\Psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad |x| \leq a \quad (3.7.4)$$

où A et B sont des nombres complexes.

Maintenant, pour trouver les solutions spécifiques pour le problème d'une particule dans un puits de potentiel, nous devons spécifier les conditions aux limites : $\Psi(a) = \Psi(-a) = 0$

$$A \sin(ka) + B \cos(ka) = 0 \quad (3.7.5)$$

$$-A \sin(ka) + B \cos(ka) = 0 \quad (3.7.6)$$

La combinaison de l'équation (3.7.5) et l'équation (3.7.6) donne :

$$A \sin(ka) = 0$$

$$B \cos(ka) = 0$$

donc, les solutions se répartissent en deux catégories : celles avec $A = 0$ et celles avec $B = 0$.

Les solutions impaires ont $B = 0$, alors $ka = n\frac{\pi}{2}$ pour $n = 2, 4, 6, \dots$. Les niveaux d'énergie deviennent :

$$E_n^{(imp)} = D_\alpha\left(\frac{\hbar n\pi}{2a}\right)^\alpha$$

et les fonctions d'onde :

$$\Psi_n^{(imp)}(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \quad |x| \leq a$$

Les solutions paires ont $A = 0$, alors $ka = n\frac{\pi}{2}$ pour $n = 1, 3, 5, \dots$. Les niveaux d'énergie deviennent :

$$E_n^{(p)} = D_\alpha \left(\frac{\hbar n\pi}{2a}\right)^\alpha$$

et les fonctions d'onde :

$$\Psi_n^{(p)}(x) = B \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \quad |x| \leq a$$

La combinaison des solutions paires et impaires donne :

- les niveaux d'énergie :

$$E_n = D_\alpha \left(\frac{\hbar n\pi}{2a}\right)^\alpha \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7.7)$$

- les fonctions d'onde :

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} C_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right) & n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{pour } |x| \leq a \\ 0 & \text{pour } |x| \geq a \end{cases}$$

La constante C_0 dans cette expression est déterminée par normalisation, c.à.d. par la condition :

$$\int_{-a}^{+a} |\Psi(x)|^2 = C_0^2 \int_{-a}^{+a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right) = 1 \quad (3.7.8)$$

On trouve $C_0 = 1/\sqrt{a}$, et l'expression finale de la fonction d'onde dépendante du temps est [9] :

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right) \exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad |x| \leq a \quad (3.7.9)$$

3.7.2 Particule libre

Le cas de la particule libre est le plus simple que l'on puisse imaginer. Le potentiel $V(x) = V_0$ est constant partout. Sans perte de généralité, nous pouvons choisir $V(x) = 0$ et l'équation de Schrödinger fractionnaire dépendante du temps devient :

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (3.7.10)$$

avec $(\hbar\nabla)^\alpha$ est la dérivée de Riesz quantique fractionnaire :

$$(\hbar\nabla)^\alpha \Psi(x, t) = -\frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp\left(\frac{ip}{\hbar}x\right) |p|^\alpha \varphi(p, t) \quad (3.7.11)$$

où $\varphi(p, t)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp\left(\frac{ip}{\hbar}x\right) \varphi(p, t) \quad , \quad \varphi(p, t) = \int dx \exp\left(-\frac{ip}{\hbar}x\right) \Psi(x, t) \quad (3.7.12)$$

Pour trouver les solution de l'équation (3.7.10) on reporte les expressions (3.7.11) et (3.7.12) dans l'équation de Schrödinger fractionnaire. on trouve :

$$D_\alpha |p|^\alpha \varphi(p, t) = i\hbar \frac{\partial \varphi(p, t)}{\partial t}$$

et

$$\varphi(p, t) = C \exp\left(-\frac{i}{\hbar} D_\alpha |p|^\alpha t\right) \quad (3.7.13)$$

où C est une constante. La transformation de Fourier inverse donne la solution finale de l'équation(3.7.10) :

$$\Psi(x, t) = \frac{C}{2\pi\hbar} \int dp e^{i\frac{p}{\hbar}x} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} D_\alpha |p|^\alpha t\right) dp \quad (3.7.14)$$

Si nous choisissons la condition initiale $\Psi(x, 0) = \delta(x)$, nous pouvons exprimer l'intégrale sur dp dans l'équation (3.7.14) en termes des fonctions de Fox $H_{2,2}^{1,1}$ [9] :

$$\Psi(x, t) = \frac{C}{\alpha |x|} H_{2,2}^{1,1} \left[\frac{1}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{iD_\alpha t} \right)^{1/\alpha} |x| \left| \begin{matrix} (1, 1/\alpha), (1, 1/2) \\ (1, 1), (1, 1/2) \end{matrix} \right. \right]$$

3.7.3 Barrière de potentiel

Comme autre application de l'équation de Schrödinger fractionnaire, nous considérons la diffusion d'un faisceau de particules d'énergie E venant de la gauche par une barrière de potentiel rectangulaire $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec $V_0 > 0$.

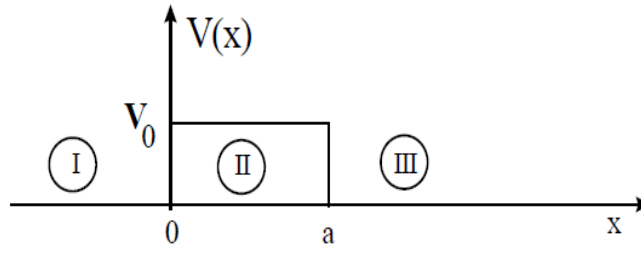


Figure 3.7.1 : Barrière de potentiel.

Selon la mécanique classique, une particule d'énergie E inférieure à V_0 ($E < V_0$) serait réfléchiée par la barrière. Alors qu'avec l'énergie $E > V_0$ elle continuerait sa course avec une vitesse moindre. Mais la fonction d'onde associée avec une particule libre doit être continue à la barrière et montrera une décroissance exponentielle à l'intérieur de la barrière (lorsque $E < V_0$). La fonction d'onde doit également être continue de l'autre côté de la barrière. Donc la particule a une certaine probabilité d'être transmise dans la région $x > a$ lorsque $E < V_0$.

Nous disposons de trois régions distinctes dans lesquelles nous devons résoudre l'équation de Schrödinger fractionnaire :

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (3.7.15)$$

Dans la région I ($x < 0$), l'équation à résoudre est :

$$\nabla^\alpha\Psi(x) + k^\alpha\Psi(x) = 0 \quad (3.7.16)$$

avec :

$$k^\alpha = \frac{E}{D_\alpha\hbar^\alpha}$$

La solution générale de l'équation (3.7.16) est donnée par :

$$\Psi_I(x) = A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx} \quad (3.7.17)$$

Dans l'équation (3.7.17) le terme e^{ikx} représente l'onde incidente et qui correspond à une onde allant de gauche vers la droite. Lorsque la particule arrive en $x = 0$, elle peut soit être réfléchiée, soit être transmise. Et l'onde réfléchiée est représentée par le terme e^{-ikx} .

Le courant de densité de probabilité fractionnaire de l'onde incidente est donné par:

$$\begin{aligned} J_i(x) &= \frac{D_\alpha \hbar}{i} (\Psi^*(x) (\hbar^2 \Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1} \overrightarrow{\nabla} \Psi(x) - \Psi(x) (\hbar^2 \Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1} \overrightarrow{\nabla} \Psi^*(x)) \\ &= |A_1|^2 \frac{D_\alpha \hbar}{i} (e^{-ikx} (\hbar^2 \Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1} \overrightarrow{\nabla} e^{ikx} - e^{ikx} (\hbar^2 \Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1} \overrightarrow{\nabla} e^{-ikx}) \end{aligned}$$

Donc :

$$J_i(x) = 2D_\alpha (k\hbar)^\alpha |A_1|^2$$

Et Le courant de densité de probabilité fractionnaire correspond à l'onde réfléchi est :

$$J_r(x) = 2D_\alpha (k\hbar)^\alpha |B_1|^2$$

Tandis que dans la région III ($x > a$) nous avons:

$$\nabla^\alpha \Psi(x) + k^\alpha \Psi(x) = 0 \quad (3.7.18)$$

la solution générale de l'équation (3.7.18) est évidemment :

$$\Psi_{III}(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$$

Le premier terme en e^{ikx} correspond à une onde allant de gauche vers la droite. Il représente donc l'onde transmise. Par contre le second terme représente une onde venant de $+\infty$ allant vers la gauche. Comme nous n'avons pas de particule qui provient dans ce sens, nous poserons $B_3 = 0$.

Donc :

$$\Psi_{III}(x) = A_3 e^{ikx} \quad (3.7.19)$$

Le courant de densité de probabilité fractionnaire de l'onde transmise est donné par :

$$J_t(x) = 2D_\alpha (k\hbar)^\alpha |A_3|^2$$

Alors que dans la région II ($0 < x < a$) l'équation de Schrodinger fractionnaire est :

$$\nabla^\alpha \Psi(x) + \frac{1}{D_\alpha \hbar^\alpha} (E - V_0) \Psi(x) = 0 \quad (3.7.20)$$

Nous distinguons les deux cas $E > V_0$ et $E < V_0$.

Dans le cas $E > V_0$ l'équation (3.7.20) admet comme solution générale :

$$\Psi_{II}(x) = A_2 e^{iKx} + B_2 e^{-iKx}$$

où $K = \left[\frac{1}{D_\alpha \hbar^\alpha} (E - V_0) \right]^{\frac{1}{\alpha}}$

Dans le cas $E < V_0$ la solution générale de l'équation (3.7.20) est :

$$\Psi_{II}(x) = A_2 e^{\rho x} + B_2 e^{-\rho x}$$

$$\text{Avec } \rho = \left[\frac{1}{D_\alpha \hbar^\alpha} (V_0 - E) \right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Nous pouvons donc obtenir la solution $E < V_0$ à partir de la solution pour $E > V_0$ en remplaçant simplement iK par ρ dans notre solution.

En général, nous ne cherchons pas à écrire la fonction d'onde dans toutes les régions mais plutôt à calculer le coefficient de réflexion ou de transmission de la barrière dans les deux cas $E < V_0$ et $E > V_0$ en cas fractionnaire.

Le coefficient de réflexion est défini comme le module du rapport du courant de probabilité réfléchi J_r , sur le courant de probabilité incident J_i . Alors que le coefficient de transmission, défini comme le rapport du courant transmis J_t sur le courant incident J_i .

Le cas $E > V_0$

Les expressions de la fonction d'onde dans les différentes régions sont :

$$\begin{cases} \Psi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & x \leq 0 \\ \Psi_{II}(x) = A_2 e^{iKx} + B_2 e^{-iKx} & 0 \leq x \leq a \\ \Psi_{III}(x) = A_3 e^{ikx} & x \geq a \end{cases}$$

Comme nous l'avons vu précédemment que le coefficient de transmission est défini par:

$$T = \frac{J_t(x)}{J_i(x)} = \frac{2D_\alpha (k\hbar)^\alpha |A_3|^2}{2D_\alpha (k\hbar)^\alpha |A_1|^2} = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2$$

alors que le coefficient de réflexion est :

$$R = \frac{J_r(x)}{J_i(x)} = \frac{2D_\alpha (k\hbar)^\alpha |B_1|^2}{2D_\alpha (k\hbar)^\alpha |A_1|^2} = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2$$

Les constantes A_1 , B_1 et A_3 sont déterminées à partir des conditions que $\Psi(x)$ et $(\hbar\nabla)^\alpha \Psi(x)$ sont continues en :

- $x = 0$

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \tag{3.7.21}$$

$$(ik)^{\alpha-1} A_1 + (-ik)^{\alpha-1} B_1 = (iK)^{\alpha-1} A_2 + (-iK)^{\alpha-1} B_2 \tag{3.7.22}$$

• $x = a$

$$A_3 e^{ika} = A_2 e^{iKa} + B_2 e^{-iKa} \quad (3.7.23)$$

$$(ik)^{\alpha-1} e^{ika} A_3 = (iK)^{\alpha-1} e^{iKa} A_2 + (-iK)^{\alpha-1} e^{-iKa} B_2 \quad (3.7.24)$$

La combinaison de l'équation (3.7.21) et l'équation (3.7.22) donne :

$$B_2 = \frac{1}{1 + (-1)^\alpha} \left[\left(1 - \left(\frac{k}{K}\right)^{\alpha-1}\right) A_1 + \left(1 - \left(\frac{k}{-K}\right)^{\alpha-1}\right) B_1 \right] \quad (3.7.25)$$

$$A_2 = \frac{1}{1 + (-1)^\alpha} \left[\left(1 - \left(\frac{k}{-K}\right)^{\alpha-1}\right) A_1 + \left(1 - \left(\frac{k}{K}\right)^{\alpha-1}\right) B_1 \right] \quad (3.7.26)$$

La combinaison de l'équation (3.7.23) et l'équation (3.7.24) donne :

$$B_2 = \frac{A_3}{1 + (-1)^\alpha} \left[\left(1 - \left(\frac{k}{K}\right)^{\alpha-1}\right) \right] e^{i(ka+Ka)}$$

$$A_2 = \frac{A_3}{1 + (-1)^\alpha} \left[\left(1 - \left(\frac{k}{-K}\right)^{\alpha-1}\right) \right] e^{i(ka-Ka)}$$

alors nous avons :

$$\frac{A_3}{1 + (-1)^\alpha} \left[\left(1 - \left(\frac{k}{-K}\right)^{\alpha-1}\right) \right] e^{i(ka-Ka)} = \frac{1}{1 + (-1)^\alpha} \left[\left(1 - \left(\frac{k}{-K}\right)^{\alpha-1}\right) A_1 + \left(1 - \left(\frac{k}{K}\right)^{\alpha-1}\right) B_1 \right] \quad (3.7.27)$$

$$\frac{A_3}{1 + (-1)^\alpha} \left[\left(1 - \left(\frac{k}{K}\right)^{\alpha-1}\right) \right] e^{i(ka+Ka)} = \frac{1}{1 + (-1)^\alpha} \left[\left(1 - \left(\frac{k}{K}\right)^{\alpha-1}\right) A_1 + \left(1 - \left(\frac{k}{-K}\right)^{\alpha-1}\right) B_1 \right] \quad (3.7.28)$$

A partir des équations (3.7.27) et (3.7.28), nous trouvons :

$$\frac{A_3}{A_1} e^{ika} = \frac{\left[1 - \left(\frac{k}{K}\right)^{\alpha-1}\right]^2 - \left[1 - \left(\frac{k}{-K}\right)^{\alpha-1}\right]^2}{\left[1 - \left(\frac{k}{K}\right)^{\alpha-1}\right]^2 e^{iKa} - \left[1 - \left(\frac{k}{-K}\right)^{\alpha-1}\right]^2 e^{-iKa}}$$

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\left[1 - \left(\frac{k}{K}\right)^{\alpha-1}\right] \left[1 - \left(\frac{k}{-K}\right)^{\alpha-1}\right] (e^{-iKa} - e^{iKa})}{\left[1 - \left(\frac{k}{K}\right)^{\alpha-1}\right]^2 e^{iKa} - \left[1 - \left(\frac{k}{-K}\right)^{\alpha-1}\right]^2 e^{-iKa}}$$

Donc nous pouvons déduire que le coefficient de transmission est tel que :

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{\left\{ \left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \right\}^2}{\left| \left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 e^{iKa} - \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 e^{-iKa} \right|^2} \quad (3.7.29)$$

et le coefficient de réflexion s'écrit comme :

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{\left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right] \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right] (e^{-iKa} - e^{iKa})}{\left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 e^{iKa} - \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 e^{-iKa}} \right|^2 \quad (3.7.30)$$

La simplification de l'expression (3.7.29) donne [9] :

$$\begin{aligned} T &= \frac{\left\{ \left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \right\}^2}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \right\}^2 + 4 \left\{ \left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \right\}^2 \sin^2(Ka)} \\ &= \left\{ 1 + \frac{4 \left\{ \left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \right\}^2 \sin^2(Ka)}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \right\}^2} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

Et la simplification de l'expression (3.7.29) permet d'écrire le coefficient de réflexion comme suit [9] :

$$R = \frac{4 \left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \sin^2(Ka)}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \right\}^2 + 4 \left\{ \left[1 - \left(\frac{k}{K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \left[1 - \left(\frac{k}{-K} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \right\}^2 \sin^2(Ka)}$$

On vérifie facilement que $R + T = 1$

Le cas $E < V_0$

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous n'avons pas à reprendre tous nos calculs pour résoudre ce nouveau cas. Nos solutions (3.7.17) et (3.7.19) restent valables pour les régions I et III alors que pour la région II nous n'avons qu'à remplacer iK par ρ . Donc le coefficient de transmission devient :

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{\left[1 - \left(\frac{ik}{\rho} \right)^{\alpha-1} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{ik}{-\rho} \right)^{\alpha-1} \right]^2}{\left[1 - \left(\frac{ik}{\rho} \right)^{\alpha-1} \right]^2 e^{\rho a} - \left[1 - \left(\frac{ik}{-\rho} \right)^{\alpha-1} \right]^2 e^{-\rho a}} \right|^2$$

et le coefficient de réflexion :

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{\left[1 - \left(\frac{ik}{\rho} \right)^{\alpha-1} \right] \left[1 - \left(\frac{ik}{-\rho} \right)^{\alpha-1} \right] [e^{-\rho a} - e^{\rho a}]}{\left[1 - \left(\frac{ik}{\rho} \right)^{\alpha-1} \right]^2 e^{\rho a} - \left[1 - \left(\frac{ik}{-\rho} \right)^{\alpha-1} \right]^2 e^{-\rho a}} \right|^2$$

En fin on peut écrire le coefficient de transmission :

$$T = \frac{1}{\left\{ \begin{array}{l} \left[1 + \left\{ \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \cos(\beta\pi) - 2 \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right\} \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \right]^2 + \\ \left[\left\{ \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \sin(\beta\pi) - 2 \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right\} \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \right]^2 \end{array} \right\} + \frac{\sinh^2(\rho a)}{4 \left(\frac{k}{\rho} \right)^{2\beta} \sin^2\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \left[1 - \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right]^2} + 1}$$

avec : $\beta = \alpha - 1$.

Et encore :

$$T^{-1} = 1 + \frac{\sinh^2(\rho a) \left\{ \left[1 + \left\{ \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \cos \beta\pi - 2 \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right\} \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \right]^2 + \left[\left\{ \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \sin \beta\pi - 2 \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right\} \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \right]^2 \right\}}{4 \left(\frac{k}{\rho} \right)^{2\beta} \sin^2 \frac{\beta\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right]^2}$$

$$T^{-1} = 1 + \sinh^2(\rho a) + \frac{\sinh^2(\rho a) \left\{ \left[\left(\frac{\rho}{k} \right)^\beta - \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta - 2 \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \left(1 - \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \cos \beta\pi/2 \right) \right]^2 \right\}}{4 \sin^2 \frac{\beta\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right]^2}$$

Et le coefficient de réflexion :

$$R = \frac{\left| 1 - 2 \cos(\beta\pi) \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta + \left(\frac{k}{\rho} \right)^{2\beta} \right|^2 \sinh^2(\rho a)}{\left\{ \begin{array}{l} \left[1 + \left\{ \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \cos \beta\pi - 2 \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right\} \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \right]^2 + \\ \left[\left\{ \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \sin \beta\pi - 2 \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right\} \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \right]^2 \end{array} \right\} \sinh^2(\rho a) + \left[\left\{ \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \sin \beta\pi - 2 \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right\} \left(\frac{k}{\rho} \right)^\beta \right]^2}$$

3.7.4 Oscillateur quantique fractionnaire

À partir de [19] l'hamiltonien fractionnaire d'un oscillateur quantique est donné par :

$$H_{\alpha,\beta} = D_\alpha (-h^2 \Delta)^{\alpha/2} + q^2 |r|^\beta \quad 1 < \alpha \leq 2, 1 < \beta \leq 2 \quad (3.7.31)$$

où Δ est le Laplacien, l'opérateur $(-h^2 \Delta)^{\alpha/2}$ est défini par l'équation (3.3.5) et q est une constante avec la dimension physique $[q] = \text{erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{-\beta/2}$.

et l'équation de Schrödinger fractionnaire indépendant de temps pour l'oscillateur est :

$$D_\alpha (-h^2 \Delta)^{\alpha/2} \Psi(r) + q^2 |r|^\beta \Psi(r) = E \Psi(r)$$

E : l'énergie totale de l'oscillateur.

Contrairement aux exemples traités précédemment, l'équation fractionnaire de Schrödinger que l'on doit résoudre est passablement plus difficile. Pour cela nous nous intéressons seulement à trouver les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique en une dimension, qui peuvent être calculés si nous utilisons l'approximation semi-classique. Nous avons mis l'énergie totale égale à E , de sorte que :

$$E_\alpha = D_\alpha |p|^\alpha + q^2 |x|^\beta \quad (3.7.32)$$

où $|p| = \left(\frac{1}{D_\alpha} (E - q^2 |x|^\beta) \right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Dans les points de retournement $p = 0$, le mouvement classique est possible dans l'intervalle $|x| \leq (E/q^2)^{1/\beta}$.

Une utilisation systématique de la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld [13] donne

:

$$2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) = \oint p dx = 4 \int_0^{x_m} p dx = D_\alpha^{-1/\alpha} 4 \int_0^{x_m} (E - q^2 |x|^\beta)^{\frac{1}{\alpha}} dx \quad (3.7.33)$$

où la notation \oint désigne l'intégrale sur une période du mouvement classique, $x_m = (E/q^2)^{1/\beta}$ est le point tournant du mouvement classique.

Pour évaluer l'intégrale dans la partie droite de l'équation (3.7.33), nous introduisons une nouvelle variable $y = x \left(\frac{E}{q^2}\right)^{-1/\beta}$, nous avons donc :

$$D_\alpha^{-1/\alpha} \int_0^{x_m} (E - q^2 |x|^\beta)^{\frac{1}{\alpha}} dx = \frac{1}{D_\alpha^{1/\alpha} q^{2/\beta}} E^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} \int_0^1 dy (1 - y^\beta)^{1/\alpha} \quad (3.7.34)$$

L'intégrale sur dy peut être exprimée en termes de la fonction B . Posons $z = y^\beta$:

$$\int_0^1 dy (1 - y^\beta)^{1/\alpha} = \frac{1}{\beta} \int_0^1 z^{\frac{1}{\beta}-1} (1 - z)^{\frac{1}{\alpha}} dz = \frac{1}{\beta} B\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + 1\right) \quad (3.7.35)$$

A l'aide des équations (3.7.34) et (3.7.35) nous réécrivons l'équation (3.7.33) comme :

$$2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{D_\alpha^{1/\alpha} q^{2/\beta}} E^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} \frac{1}{\beta} B\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + 1\right) \quad (3.7.36)$$

L'équation ci-dessus donne la valeur de l'énergie des états stationnaires pour l'oscillateur fractionnaire dans une dimension.

$$E_n = \left(\frac{\pi\hbar\beta D_\alpha^{1/\alpha} q^{2/\beta}}{2B\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)} \right)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \quad (3.7.37)$$

Cette nouvelle équation (3.7.37) généralise le spectre d'énergie bien connu de l'oscillateur quantique standard.

3.8 Conclusion

La mécanique quantique fractionnaire est une généralisation de la mécanique quantique standard, dans ce chapitre nous avons présenté ses principes notamment l'équation de

Schrodinger. Nous avons défini aussi l'Hamiltonien et montré qu'il est un opérateur autoadjoint. Nous avons également développé quelques problèmes dans le cas de la présence de dérivée fractionnaire dans le Hamiltonien.

4

Statistique quantique fractionnaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons développer quelques problèmes de physique statistique basée sur la mécanique quantique fractionnaire.

4.2 Gaz parfait

La fonction de partition d'un gaz parfait constitué de N particules indiscernables, dans un volume V à la température T , est égale au produit des fonctions de partition individuelles car les particules sont indépendantes (système sans interactions) [21] :

$$Z_N = \frac{1}{N!} (Z_1)^N$$

où Z_1 est La fonction de partition d'une particule libre dans ce gaz.

Il est intéressant de calculer la fonction de partition d'une particule libre Z_1 car elle est à la base du calcul des propriétés d'un gaz parfait. La fonction Z_1 s'écrit alors [10] :

$$Z_1 = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

Sachant que nous traitons des systèmes dans un volume macroscopique, les niveaux d'énergie sont très serrés. Nous pouvons donc remplacer la sommation par une intégration sur l'espace des phases permis, en comptant un état par volume h^3 de l'espace des phases. On a ainsi [21] :

$$Z_1 = \iiint \frac{d^3p d^3x}{h^3} e^{-\beta H_\alpha(p,x)}$$

Les particules d'un gaz parfait sont des particules libres ; leur hamiltonien fractionnaire $H_\alpha(p, x)$ a la forme :

$$H_\alpha(p, x) = D_\alpha |p|^\alpha$$

Ceci conduit à :

$$Z_1 = \iiint \frac{d^3p d^3x}{h^3} e^{-\beta D_\alpha |p|^\alpha} \quad (4.2.1)$$

$$= \frac{V}{h^3} \iiint d^3p e^{-\beta D_\alpha |p|^\alpha} \quad (4.2.2)$$

Pour évaluer la fonction Z_1 , on passe aux coordonnées sphériques dans l'espace des \vec{p} :

$$Z_1 = \frac{V}{h^3} 4\pi \int_0^\infty p^2 dp e^{-\beta D_\alpha |p|^\alpha}$$

Il suffit ensuite de poser :

$$P = \beta D_\alpha |p|^\alpha$$

Pour transformer Z_1 en une intégrale figurant dans le formulaire :

$$Z_1 = \frac{V}{h^3} 4\pi \int_0^\infty dP \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta D_\alpha} \right)^{\frac{3}{\alpha}} P^{\frac{3}{\alpha}-1} e^{-P}$$

Ce qui donne finalement

$$Z_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{V}{h^3} 4\pi \left(\frac{1}{\beta D_\alpha} \right)^{\frac{3}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) \quad (4.2.3)$$

où $\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) = \int_0^\infty dP P^{\frac{3}{\alpha}-1} e^{-P}$ est la fonction Gamma d'Euler.

Nous pouvons mettre le résultat final sous la forme :

$$Z_1 = \frac{V}{\lambda^3}$$

où $\lambda = \left(\frac{\alpha h^3 (\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}}{4\pi \Gamma(\frac{3}{\alpha})} \right)^{1/3}$ est la longueur d'onde thermique généralisée [30].

Finalement, nous aboutissons à l'expression générale suivante pour la fonction de partition d'un gaz parfait :

$$Z_N = (Z_1)^N = \frac{1}{N!} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{V}{h^3} 4\pi \left(\frac{1}{\beta D_\alpha} \right)^{\frac{3}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) \right)^N = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N$$

On en déduit aussitôt (en utilisant la formule de stirling $\log N! \simeq N \log N - N$) l'énergie libre correspondante :

$$F = -KT \log Z_N = -NKT \left(\log \frac{V}{\lambda^3 N} + 1 \right) \quad (4.2.4)$$

4.2.1 Propriétés du gaz parfait

La connaissance de la fonction de partition Z_N et l'énergie libre F d'un gaz parfait permet de déterminer facilement les grandeurs physiques qui caractérisent ses propriétés macroscopiques.

Energie et chaleur spécifique

La valeur moyenne \bar{E}_c de l'énergie d'un gaz parfait maintenu la température T peut être calculée par la formule suivante [21]:

$$\begin{aligned}\bar{E}_c &= -\frac{\partial \log Z_N}{\partial \beta} \\ &= \frac{3}{\alpha} NKT\end{aligned}$$

On en déduit aussitôt la chaleur spécifique à volume constant [21]:

$$C_V = \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial T} = \frac{3}{\alpha} NK$$

Entropie

L'entropie canonique S_c d'un gaz parfait se déduit de son énergie libre par la formule :

$$S_c = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

Cependant nous avons déjà calculé l'énergie moyenne \bar{E}_c , il est aussi simple d'utiliser la relation suivante [21] :

$$S_c = \frac{1}{T} (\bar{E}_c - F)$$

Donc :

$$S_c = NK \left(\log \frac{V}{\lambda^3 N} + \frac{3}{\alpha} + 1 \right)$$

Pression

En dérivant par rapport au volume l'expression (4.2.4) de l'énergie libre, on obtient la pression canonique P_c du gaz parfait :

$$P_c = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{NKT}{V}$$

Ce résultat remarquable simple, valable pour tous les gaz parfait quelle que soit l'énergie de leur particules constitue la célèbre équation d'état des gaz parfait, que l'on écrit généralement sous la forme :

$$PV = nRT$$

R est la constante des gaz parfait , qui vaut :

$$R = N_A K$$

N_A le nombre d'Avogadro.

4.3 Gaz d'oscillateurs harmoniques

Considérons un système constitué de N oscillateurs harmoniques indépendants dans le cas fractionnaire. Si la température n'est pas trop proche du zéro absolu, ce gaz a un comportement classique et on peut utiliser la physique statistique classique pour décrire ses propriétés.

L'état d'oscillateur (i) est défini par la donnée de sa coordonnée de position x_i et de son moment conjugué p_i de telle sorte que la fonction d'Hamilton fractionnaire du système s'écrit :

$$H = \sum_{i=1}^N (D_\alpha |p_i|^\alpha + q^2 |x_i|^\beta)$$

où q est une constante de dimension physique $[q] = \text{erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{-\beta/2}$, α et β sont des paramètres tels que; $1 < \alpha \leq 2$, $1 < \beta \leq 2$.

Le nombre Ω de micro-états accessibles au système, dont l'énergie est inférieure à E_0 , est égale au volume V de l'espace de phase auquel il peut avoir accès, divisé par le volume de la cellule élémentaire qui vaut h^{3N} [10] :

$$\Omega = \frac{1}{h^{3N} N!} \int d\vec{p}_1 \int \dots \int d\vec{p}_N \int_{H \leq E_0} d\vec{x}_1 \int \dots \int d\vec{x}_N \quad (4.3.1)$$

Si nous exprimons $d\vec{p}$ et $d\vec{x}$ en coordonnées sphériques, c'est à dire $d\vec{p}_i = 4\pi p_i^2 dp_i$ et $d\vec{x}_i = 4\pi x_i^2 dx_i$, nous pouvons écrire :

$$\Omega = \frac{(4\pi)^{2N}}{h^{3N} N!} \int \dots \int_{H \leq E_0} p_1^2 dp_1 \dots p_N^2 dp_N \int \dots \int x_1^2 dx_1 \dots x_N^2 dx_N \quad (4.3.2)$$

le volume d'intégration correspond à la condition :

$$D_\alpha p_1^\alpha + q^2 x_1^\beta + \dots + D_\alpha p_N^\alpha + q^2 x_N^\beta \leq E_0$$

Or:

$$D_\alpha p_1^\alpha + q^2 x_1^\beta + \dots + D_\alpha p_N^\alpha + q^2 x_N^\beta = E_0 \quad (4.3.3)$$

posons: $P^2 = D_\alpha p^\alpha$ et $X^2 = q^2 x^\beta$, la condition (4.3.3) devient:

$$P_1^2 + X_1^2 + P_2^2 + X_2^2 \dots P_N^2 + X_N^2 = E_0$$

elle représente l'équation d'une sphère de rayon $\sqrt{E_0}$ dans l'espace considéré. et l'équation (4.3.2) devient :

$$\Omega = \frac{1}{h^{3N} N!} \left(\frac{4(4\pi)^2}{\alpha D_\alpha^{\frac{3}{\alpha}} \beta q^{\frac{6}{\beta}}} \right)^N \int \dots \int_{P_1^2 + X_1^2 + P_2^2 + X_2^2 \dots P_N^2 + X_N^2 \leq E_0} P_1^{\frac{6}{\alpha}-1} dP_1 \dots P_N^{\frac{6}{\alpha}-1} dP_N \int \dots \int X_1^{\frac{6}{\beta}-1} dX_1 \dots X_N^{\frac{6}{\beta}-1} dX_N$$

allégeons l'écriture de Ω :

$$\Omega = \frac{1}{N!} \left(\frac{4(4\pi)^2}{h^3 \alpha D_\alpha^{\frac{3}{\alpha}} \beta q^{\frac{6}{\beta}}} \right)^N \omega_{N,\alpha,\beta}$$

où :

$$\omega_{N,\alpha,\beta} = \int \dots \int_{P_1^2 + X_1^2 + P_2^2 + X_2^2 \dots P_N^2 + X_N^2 \leq E_0} P_1^{\frac{6}{\alpha}-1} dP_1 \dots P_N^{\frac{6}{\alpha}-1} dP_N \int \dots \int X_1^{\frac{6}{\beta}-1} dX_1 \dots X_N^{\frac{6}{\beta}-1} dX_N$$

Pour évaluer $\omega_{N,\alpha,\beta}$, nous pouvons utiliser les coordonnées polaires en $2N$ dimensions, et on trouve :

$$\omega_N = K_{N,\alpha,\beta} R^{N(\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\beta})}$$

Donc :

$$d\omega_{N,\alpha,\beta} = N \left(\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\beta} \right) K_{N,\alpha,\beta} R^{N(\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\beta})-1} dR$$

Où $K_{N,\alpha,\beta}$ est un coefficient qui dépend de la dimension n de l'espace et de paramètre α et β . Pour déterminer $K_{N,\alpha,\beta}$, utilisons cette intégrale multiple facile à calculer :

$$\begin{aligned} I &= \int \dots \int P_1^{\frac{6}{\alpha}-1} dP_1 \dots P_N^{\frac{6}{\alpha}-1} dP_N X_1^{\frac{6}{\beta}-1} dX_1 \dots X_N^{\frac{6}{\beta}-1} dX_N e^{-(P_1^2 + X_1^2 + \dots + P_N^2 + X_N^2)} \\ &= \left[\int P_1^{\frac{6}{\alpha}-1} e^{-P_1^2} dP_1 \right]^N \left[\int X_1^{\frac{6}{\beta}-1} e^{-X_1^2} dX_1 \right]^N \end{aligned}$$

Le changement de variables $u = P_1^2$ et $v = X_1^2$ donne :

$$I = \left[\frac{1}{2} \int u^{\frac{3}{\alpha}-1} e^{-u} du \right]^N \left[\frac{1}{2} \int v^{\frac{3}{\beta}-1} e^{-v} dv \right]^N$$

nous obtenons :

$$I = \left[\frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{3}{\alpha} \right) \right]^N \left[\frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{3}{\beta} \right) \right]^N \quad (4.3.4)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma d'Euler.

D'autre part, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} I &= \int \dots \int P_1^{\frac{6}{\alpha}-1} dP_1 \dots P_N^{\frac{6}{\alpha}-1} dP_N X_1^{\frac{6}{\beta}-1} dX_1 \dots X_N^{\frac{6}{\beta}-1} dX_N e^{-(P_1^2+X_1^2+\dots+P_N^2+X_N^2)} \\ &= \int d\omega_{N,\alpha,\beta} e^{-R^2} = N \left(\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\beta} \right) K_{N,\alpha,\beta} \int R^{N(\frac{6}{\alpha}+\frac{6}{\beta})-1} e^{-R^2} dR \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable :

$$t = R^2$$

Il vient :

$$I = \frac{N}{2} \left(\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\beta} \right) K_{N,\alpha,\beta} \int t^{N(\frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\beta})-1} e^{-t} dt \quad (4.3.5)$$

$$= \frac{N}{2} \left(\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\beta} \right) K_{N,\alpha,\beta} \Gamma \left(N \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta} \right) \right) \quad (4.3.6)$$

Il ne reste plus qu'à identifier (4.3.6) et (4.3.4) pour déterminer $K_{N,\alpha,\beta}$:

$$\frac{N}{2} \left(\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\beta} \right) K_{N,\alpha,\beta} \Gamma \left(N \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta} \right) \right) = \left[\frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{3}{\alpha} \right) \right]^N \left[\frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{3}{\beta} \right) \right]^N$$

Donc :

$$K_{N,\alpha,\beta} = \frac{\left[\frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{3}{\alpha} \right) \right]^N \left[\frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{3}{\beta} \right) \right]^N}{N \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta} \right) \Gamma \left(N \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta} \right) \right)}$$

En fin

$$\omega_{N,\alpha,\beta} = \frac{\left[\frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{3}{\alpha} \right) \right]^N \left[\frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{3}{\beta} \right) \right]^N}{N \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta} \right) \Gamma \left(N \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta} \right) \right)} E_0^{3N(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})}$$

et le nombre de micro-états :

$$\Omega = \frac{\left[\Gamma \left(\frac{3}{\alpha} \right) \right]^N \left[\Gamma \left(\frac{3}{\beta} \right) \right]^N}{N! N \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta} \right) \Gamma \left(N \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta} \right) \right)} \left(\frac{(4\pi)^2}{h^3 \alpha D \frac{3}{\alpha} \beta q \frac{6}{\beta}} \right)^N E_0^{3N(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})}$$

Maintenant nous pouvons déduire facilement les propriétés thermodynamiques :

Entropie

L'entropie S d'un gaz d'oscillateurs est donnée par :

$$\begin{aligned}
 S &= K_B \ln \Omega \\
 &= K_B \left\{ \ln \frac{[\Gamma(\frac{3}{\alpha})]^N [\Gamma(\frac{3}{\beta})]^N}{N! N(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta}) \Gamma(N(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta}))} \left(\frac{(4\pi)^2}{h^3 \alpha D_\alpha^{\frac{3}{\alpha}} \beta q^{\frac{6}{\beta}}} \right)^N E^{N(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta})} \right\}
 \end{aligned}$$

Energie et chaleur spécifique

Nous pouvons calculer l'énergie interne d'un gaz d'oscillateurs harmoniques avec la formule suivante :

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = K_B \frac{N(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta})}{E}$$

donc

$$E = 3\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)NK_B T$$

Et la chaleur spécifique de ce gaz est :

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = 3\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)NK_B$$

4.4 Gaz quantique

Nous allons maintenant nous concentrer sur l'étude d'un gaz de fermions ou de bosons sans interaction (gaz parfait).

4.4.1 Gaz de bosons

Nous allons à présent considérer N particules de spin zéro ou entier (bosons) sans interaction, enfermées dans un volume V . Nous supposons que ce système est en équilibre avec un thermostat à la température T . Nous allons étudier quelques propriétés de ce gaz parfait de bosons dans le cas fractionnaire.

Pour traiter le problème d'un gaz parfait de bosons, on utilise la fonction de partition grand canonique $D(z, V, T)$ plutôt que la fonction de partition canonique $Z_N(V, T)$ associée

à un nombre de particules constant. En effet cette dernière s'écrit [10] :

$$Z_N(V, T) = \sum_{(n_i)} e^{-\beta E(n_i)} = \sum_{(n_i)} e^{-\beta \sum n_i \varepsilon_i} \quad (4.4.1)$$

$\beta = \frac{1}{KT}$, K étant la constante de Boltzmann, E l'énergie total de gaz avec $E(n_i) = \sum n_i \varepsilon_i$, n_i le nombre de particules qui ont l'énergie ε_i et $n_i = 1, 2, 3, \dots$ et la somme notée $\sum_{(n_i)}$ tient compte de la contrainte :

$$\sum n_i = N \quad (4.4.2)$$

qui exprime la conservation du nombre de particules. Ceci est délicat à mettre en oeuvre et il est préférable d'utiliser la fonction de partition grand canonique où le nombre total de particules peut varier et prendre n'importe quelle valeur. La fonction grand canonique s'écrit sous la forme [4] :

$$D(z, V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N(V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{(n_i)} e^{-\beta \sum n_i \varepsilon_i} \quad (4.4.3)$$

où $z = e^{\beta\mu}$ est la fugacité du gaz. Nous constatons que la fugacité z est comprise entre zéro et 1 et μ le potentiel chimique.

Cela ne simplifie pas le problème car il faut calculer $Z_N(V, T)$ pour N fixé puis sommer sur N . Il est plus commode de sommer directement sur l'ensemble (n_i) sans la contrainte (4.4.2). Dans ce cas on obtient :

$$D(z, V, T) = \sum_{(n_i)} e^{\beta \sum_i n_i (\mu - \varepsilon_i)} \quad (4.4.4)$$

où nous avons remplacé N par son expression (4.4.2), en fonction de n_i . Dans l'équation (4.4.4), la somme entre parenthèses porte sur tous les micro-états à une particule. Ceux-ci sont numérotés de zéro à l'infini. La seconde somme porte sur tous les ensembles (n_i) des nombres d'occupation. L'exponentielle de l'équation (4.4.4) peut aussi s'écrire [4] :

$$D(z, V, T) = \prod_i \sum_{(n_i)} e^{\beta n_i (\mu - \varepsilon_i)} \quad (4.4.5)$$

Pour effectuer la somme portant sur (n_i) dans l'équation (4.4.4), il suffit de remarquer que pour les bosons, n_i peut prendre toutes les valeurs de 0 à l'infini, puisque plusieurs bosons peuvent occuper le même micro-état à une particule.

La somme qui intervient dans l'équation (4.4.5) est une progression géométrique de raison $e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} < 1$ dont le premier terme est égal à 1. Le résultat vaut :

$$\sum_{(n_i)} e^{\beta n_i (\mu - \varepsilon_i)} = \frac{1}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_i}}$$

Par conséquent :

$$D(z, V, T) = \prod_i \frac{1}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_i}}$$

Sachant que les particules sont non relativistes et dans la cas fractionnaire, leur énergie est :

$$\varepsilon = D_\alpha p^\alpha$$

La fonction de partition grand canonique devient :

$$D(z, V, T) = \prod_p \frac{1}{1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} \quad (4.4.6)$$

En utilisant l'expressions (4.4.6) on peut calculer quelques quantités thermodynamiques.

L'équation d'état

L'équation d'état est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{PV}{KT} &= \log(D(z, V, T)) = - \sum_{p=0}^{\infty} \log(1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}) \\ &= - \sum_{p=1}^{\infty} \log(1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}) - \log(1 - z) \end{aligned}$$

P est la pression de gaz.

Les niveaux sont très serrés, on peut remplacer la sommation par une intégration, en prenant un état par volume h^3 de l'espace des phases permis, donc :

$$\frac{P}{KT} = - \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \log(1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}) - \frac{1}{V} \log(1 - z)$$

et nous avons : $\log(1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k e^{-k\beta D_\alpha p^\alpha}$

$$\frac{P}{KT} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k e^{-k\beta D_\alpha p^\alpha} - \frac{1}{V} \log(1 - z) \quad (4.4.7)$$

$$= \frac{4\pi}{h^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k \int_0^\infty p^2 dp e^{-k\beta D_\alpha p^\alpha} - \frac{1}{V} \log(1 - z) \quad (4.4.8)$$

Pour évaluer l'intégrale dans l'équation (4.4.8), nous effectuons le changement de variable:

$$Y = k\beta D_\alpha p^\alpha \Rightarrow dY = \alpha k\beta D_\alpha p^{\alpha-1} dp$$

Il vient :

$$\frac{P}{KT} = \frac{4\pi}{\alpha h^3} \frac{1}{(\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{\alpha+3}{\alpha}}} z^k \int_0^{\infty} Y^{\frac{3}{\alpha}-1} dY e^{-Y} - \frac{1}{V} \log(1-z)$$

en fin :

$$\frac{P}{KT} = \frac{4\pi}{\alpha h^3} \frac{1}{(\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z) - \frac{1}{V} \log(1-z) \quad (4.4.9)$$

où $g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k)^{\frac{\alpha+3}{\alpha}}} z^k$ est la fonction de Bose.

Le nombre moyen de bosons occupant le micro-état i peut être calculé à partir de la relation suivante :

$$\langle n_i \rangle = z \frac{\partial}{\partial z} \log D(z, V, T)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle n_i \rangle &= -z \frac{\partial}{\partial z} \log(1 - ze^{-\beta \varepsilon_i}) \\ &= \frac{ze^{-\beta \varepsilon_i}}{1 - ze^{-\beta \varepsilon_i}} \end{aligned}$$

Et l'équation (4.4.2) devient :

$$N = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}{1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} + \frac{z}{1-z} \quad (4.4.10)$$

La sommation de l'équation (4.4.10) peut s'effectuer analytiquement en passant à la limite continue et en remplaçant la somme sur les niveaux d'énergie par une intégrale :

$$N = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}{1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} + \frac{z}{1-z}$$

Nous avons :

$$\frac{1}{1 - ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-k\beta D_\alpha p^\alpha}$$

Le nombre moyen de bosons devient :

$$N = \frac{4\pi V}{h^3} \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} \int_0^{\infty} p^2 dp e^{-(k+1)\beta D_\alpha p^\alpha} + \frac{z}{1-z}$$

Faisons le changement de variable :

$$Y = (k+1)\beta D_\alpha p^\alpha \Rightarrow dY = \alpha(k+1)\beta D_\alpha p^{\alpha-1} dp$$

nous aurons alors :

$$N = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{1}{\alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)^{\frac{3}{\alpha}}} \int_0^{\infty} Y^{\frac{3}{\alpha}-1} e^{-Y} dY + \frac{z}{1-z}$$

en fin

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi}{h^3} \frac{1}{\alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) g_{\frac{3}{\alpha}}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \quad (4.4.11)$$

où $g_{\frac{3}{\alpha}}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k)^{\frac{3}{\alpha}}}$ est la fonction de Bose.

Nous pouvons mettre les équations (4.4.9) et (4.4.11) sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{P}{KT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z) - \frac{1}{V} \log(1-z) \\ \frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{\frac{3}{\alpha}}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \end{cases} \quad (4.4.12)$$

où $\lambda = \left(\frac{\alpha h^3 (\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}}{4\pi \Gamma(\frac{3}{\alpha})} \right)^{1/3}$ est la longueur d'onde thermique généralisée.

Pour $z \ll 1$ ce qui correspond à la limite classique, chacun des deux derniers termes de ces équations est de l'ordre de $\frac{z}{V}$ et est donc négligeable. Quand z augmente et prend une valeur proche de l'unité, le terme :

$$\frac{1}{V} \frac{z}{1-z} = \frac{n_0}{V}$$

devient une fraction significative, par contre le terme :

$$\frac{1}{V} \log(1-z) = -\frac{1}{V} \log(n_0 + 1)$$

reste négligeable.

L'équation d'état devient :

$$\begin{cases} \frac{P}{KT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z) \\ \frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{\frac{3}{\alpha}}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \end{cases} \quad (4.4.13)$$

Les équations (4.4.13) sont nos résultats de base.

L'énergie interne du système est donnée par :

$$U = - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \log(D) \right)_{z,V} = \frac{3}{\alpha} KTV g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z) \frac{1}{\lambda^3}$$

Cette expression nous conduit à :

$$PV = \frac{\alpha}{3} U$$

La capacité calorifique du gaz peut être obtenue en différentiant U par rapport à T , gardant N et V constants.

$$C_V = \left(\frac{\partial}{\partial T} U \right)_{N,V}$$

En utilisant la propriété suivante des fonctions $g_n(z)$:

$$z \frac{\partial g_n(z)}{\partial z} = g_{n-1}(z)$$

et

$$\left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{N,V} = - \frac{3z}{\alpha T} \frac{g_{\frac{3}{\alpha}}(z)}{g_{\frac{3-\alpha}{\alpha}}(z)}$$

nous conduit à :

$$\frac{C_V}{NK} = \frac{3\alpha + 9V}{\alpha^2 N} \frac{g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z)}{\lambda^3} - \frac{9}{\alpha^2} \frac{g_{\frac{3}{\alpha}}(z)}{g_{\frac{3-\alpha}{\alpha}}(z)}$$

L'énergie libre de Helmholtz du gaz est :

$$\begin{aligned} F &= N\mu - PV \\ &= NKT \left(\log z - V \frac{g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z)}{N\lambda^3} \right) \end{aligned}$$

L'entropie S d'un gaz quantique de bosons est donnée par :

$$\begin{aligned} S &= \frac{E - F}{T} \\ &= \frac{3 + \alpha}{\alpha} VK \frac{g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z)}{\lambda^3} - NK \log z \end{aligned}$$

4.4.2 Condensation de Bose Einstein

Contrairement au cas des fermions, nous avons vu que l'on peut mettre un nombre quelconque de bosons dans un micro-état particulier. Lorsque la température du système est nulle, tous les bosons doivent se trouver dans l'état de plus basse énergie $\varepsilon = 0$. Le nombre total de bosons est donné par l'équation (4.4.11) :

$$N = N_{\varepsilon=0} + N_{\varepsilon>0}$$

où $N_{\varepsilon=0}$ est le nombre de bosons dans l'état $\varepsilon = 0$:

$$N_{\varepsilon=0} = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$$

$N_{\varepsilon>0}$ est le nombre de particules qui ne sont pas dans l'état $\varepsilon = 0$:

$$N_{\varepsilon>0} = \frac{4\pi}{h^3} \frac{V}{\alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) g_{\frac{3}{\alpha}}(z)$$

Nous savons qu'au zéro absolu toutes les N particules sont dans l'état fondamental ($\varepsilon = 0$) donc :

$$\langle n_0 \rangle = N = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$$

d'où :

$$-\frac{\mu}{KT} = \log\left(1 + \frac{1}{N}\right) \approx \frac{1}{N}$$

puisque N est grand. On en conclut qu'à $T = 0$, $\mu = 0$. Lorsque T augmente tout en restant très basses la majorité des bosons se trouve encore dans le micro-état d'énergie $\varepsilon = 0$ et le potentiel chimique est négatif mais très faible en valeur absolue. Par exemple, si $N \sim N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ et si $N_{\varepsilon=0} = 10^{20}$, on voit que $\mu \sim 10^{-20} KT$, ce qui est extrêmement petit. On peut donc considérer que le potentiel chimique est pratiquement nul dans ces conditions. Dans ce cas, le nombre de bosons qui se trouvent dans les états excités à une particule est donné par :

$$N_{\varepsilon>0} = \frac{4\pi}{h^3} \frac{V}{\alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) g_{\frac{3}{\alpha}}(1) \quad (4.4.14)$$

On appelle température de Bose T_B la valeur de T pour laquelle $N_{\varepsilon>0} = N$ [21], elle est donnée par :

$$N = \frac{4\pi}{h^3} \frac{V(KT_B)^{\frac{3}{\alpha}}}{\alpha D_\alpha^{\frac{3}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) g_{\frac{3}{\alpha}}(1) \quad (4.4.15)$$

soit :

$$T_B = \frac{D_\alpha}{K} \left(\frac{\alpha h^3 N}{4\pi \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) V g_{\frac{3}{\alpha}}(1)} \right)^{\frac{\alpha}{3}} \quad (4.4.16)$$

En divisant l'équation (4.4.14) par l'équation (4.4.15) on obtient :

$$N_{\varepsilon>0} = N \left(\frac{T}{T_B} \right)^{\frac{3}{\alpha}}$$

Si $T < T_B$, le nombre de bosons dans le micro-état $\varepsilon = 0$ est égal à :

$$N_{\varepsilon=0} \approx N \left(1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^{\frac{3}{\alpha}} \right)$$

Si l'on fait décroître la température T au dessous de la valeur T_B , la population des bosons dans le micro-état $\varepsilon = 0$ a tendance à augmenter. On appelle ce phénomène la condensation de Bose-Einstein. Il ne s'agit pas d'une condensation dans l'espace réel mais

d'une condensation dans l'espace des impulsions. Les bosons ont tendance à s'accumuler dans le micro-état de plus faible énergie. Lorsque $T < T_B$ il est intéressant de calculer l'expression de quelques quantités thermodynamiques associées au gaz de Bose. Comme $\mu = 0$. L'énergie interne vaut :

$$U = \frac{3}{\alpha} KTV g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(1) \frac{1}{\lambda^3}$$

La chaleur spécifique :

$$\frac{C_V}{K} = \frac{3\alpha + 9V}{\alpha^2} \frac{g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(1)}{\lambda^3}$$

L'énergie libre de Helmholtz du gaz est :

$$F = -VKT \frac{g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(1)}{\lambda^3}$$

L'entropie:

$$S = \frac{3 + \alpha}{\alpha} VK \frac{g_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(1)}{\lambda^3}$$

4.4.3 Gaz de fermions

Tout comme le gaz de Bose, le gaz de Fermi peut être traité en utilisant l'ensemble grand canonique. La démarche est analogue à celle de la section précédente (gaz de bosons) et nous ne signalerons ici que les différences. La première apparaît dans l'équation (4.4.5) où la somme sur le nombre d'occupation n'est plus effectuée de 0 à l'infini, comme pour les bosons, mais de 0 à 1. La fonction de partition grand canonique s'écrit par conséquent :

$$\begin{aligned} D(z, V, T) &= \prod_i \sum_{n_i=0}^1 e^{\beta n_i (\mu - \varepsilon_i)} \\ &= \prod_i (1 + e^{\beta (\mu - \varepsilon_i)}) \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\log D(z, V, T) = \sum_p \log (1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha})$$

Donc l'équation d'état est :

$$\frac{PV}{KT} = \sum_p \log (1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha})$$

Le nombre moyen de fermions occupant le micro-état i est :

$$\begin{aligned}\langle n_i \rangle &= z \frac{\partial}{\partial z} \log D(z, V, T) \\ &= \frac{ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}{1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}\end{aligned}$$

Et le nombre moyen de fermions devient :

$$N = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}{1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}$$

Sachant que les volumes que nous considérons sont macroscopiques, les niveaux d'énergie sont très serrés ; nous pouvons remplacer la sommation sur les niveaux d'énergie par une intégrale sur l'espace des phases, en comptant un état par volume h^3 :

$$\frac{P}{KT} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \log(1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}) \quad (4.4.17)$$

$$N = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \frac{ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}{1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} \quad (4.4.18)$$

Pour évaluer les intégrales dans les équations (4.4.17) et (4.4.18), nous utilisons le développement de Taylor de $\log(1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha})$ et de $\frac{1}{1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log(1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} z^k e^{-k\beta D_\alpha p^\alpha} \\ \frac{1}{1 + ze^{-\beta D_\alpha p^\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k e^{-k\beta D_\alpha p^\alpha} \end{array} \right. \quad (4.4.19)$$

Donc les équations (4.4.17) et (4.4.18) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{KT} = \frac{4\pi}{h^3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} z^k \int_0^\infty p^2 dp e^{-k\beta D_\alpha p^\alpha} \\ N = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp e^{-(k+1)\beta D_\alpha p^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{k+1} \end{array} \right. \quad (4.4.20)$$

Effectuons le changement de variable :

$$\begin{aligned}Y &= k\beta D_\alpha p^\alpha \\ Y' &= (k+1)\beta D_\alpha p^\alpha\end{aligned}$$

Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{KT} = \frac{4\pi}{h^3} \frac{1}{\alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(k)^{\frac{\alpha+3}{\alpha}}} z^k \int_0^\infty Y^{\frac{3}{\alpha}-1} dY e^{-Y} \\ N = \frac{4\pi}{h^3} \frac{V}{\alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{\alpha}}} z^{k+1} \int_0^\infty Y'^{\frac{3}{\alpha}-1} dY' e^{-Y'} \end{array} \right.$$

En fin l'équation d'état devient:

$$\begin{cases} \frac{P}{KT} = \frac{4\pi}{h^3} \frac{1}{\alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) f_{\frac{3}{\alpha}+1}(z) \\ N = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{1}{\alpha(\beta D_\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) f_{\frac{3}{\alpha}}(z) \end{cases}$$

où f est la fonction de Fermi définie par : $f_{\frac{3}{\alpha}+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(k)^{\frac{\alpha+3}{\alpha}}} z^k$, $f_{\frac{3}{\alpha}}(z) = \sum_{k'=1}^{\infty} (-1)^{k'+1} \frac{1}{(k)^{\frac{3}{\alpha}}} z^{k'}$

L'énergie interne du système est donnée par :

$$U = - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \log(D) \right)_{z,V} = \frac{3}{\alpha} KTV f_{\frac{3}{\alpha}+1}(z) \frac{1}{\lambda^3}$$

ou :

$$U = \frac{3}{\alpha} NKT \frac{f_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z)}{f_{\frac{3}{\alpha}}(z)}$$

La capacité calorifique du gaz peut être écrite sous la forme :

$$C_V = \left(\frac{\partial}{\partial T} U \right)_{N,V}$$

En utilisant la propriété suivante des fonctions $f_n(z)$:

$$z \frac{\partial f_n(z)}{\partial z} = f_{n-1}(z)$$

Et

$$\left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{N,V} = - \frac{nz}{T} \frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)}$$

Ceci nous conduit à :

$$\frac{C_V}{NK} = \frac{3\alpha + 9}{\alpha^2} \frac{f_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z)}{f_{\frac{3}{\alpha}}(z)} - \frac{9}{\alpha^2} \frac{f_{\frac{3}{\alpha}}(z)}{f_{\frac{3-\alpha}{\alpha}}(z)}$$

L'énergie libre de Helmholtz du gaz est :

$$\begin{aligned} F &= N\mu - PV \\ &= NKT \left(\log z - \frac{f_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z)}{f_{\frac{3}{\alpha}}(z)} \right) \end{aligned}$$

L'entropie S d'un gaz quantique de fermions est donnée par :

$$\begin{aligned} S &= \frac{E - F}{T} \\ &= \frac{3 + \alpha}{\alpha} NK \frac{f_{\frac{\alpha+3}{\alpha}}(z)}{f_{\frac{3}{\alpha}}(z)} - NK \log z \end{aligned}$$

4.5 Oscillateurs harmonique quantiques

On a vu que en mécanique quantique fractionnaire, le spectre d'un oscillateur harmonique en une dimension peut être indexé par le nombre quantique n représentant le nombre de niveaux d'excitation de l'oscillateur (n est un entier positif ou nul). Les énergies accessibles sont données par l'équation (3.7.37) :

$$E_n = A \left(n + \frac{1}{2} \right)^\gamma \quad n = 1, 2, \dots$$

où $A = \left(\frac{\pi \hbar \beta D_\alpha^{1/\alpha} q^{2/\beta}}{2B(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} + 1)} \right)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}$, $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, $1 < \alpha \leq 2$ et $1 < \beta \leq 2$.

La fonction de partition d'un gaz constitué de N oscillateurs harmonique discernables et indépendants est donnée par :

$$Z_N = Z_1^N$$

Où : Z_1 la fonction de partition pour une oscillateur. Elle est écrite sous la forme de :

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta A (n + \frac{1}{2})^\gamma} \quad (4.5.1)$$

Pour evaluer la somme dans l'équation (4.5.1), on utilise cette approximation :

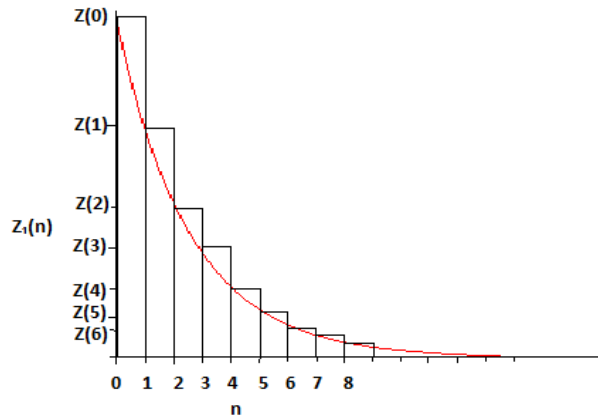


Figure 4.5.1 : La fonction Z_1

$$Z_1 = \int_0^{\infty} dx e^{-\beta A (x + \frac{1}{2})^\gamma} + \frac{(Z_1(0) - Z_1(1))}{2} + \frac{(Z_1(1) - Z_1(2))}{2} + \dots \quad (4.5.2)$$

$$= \int_0^{\infty} dx e^{-\beta A (x + \frac{1}{2})^\gamma} + \frac{Z_1(0)}{2} \quad (4.5.3)$$

Posons : $\beta A \left(x + \frac{1}{2}\right)^\gamma = t$, alors l'équation (4.5.3) devient :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{\gamma [\beta A]^{1/\gamma}} \int_{\beta A (\frac{1}{2})^\gamma}^{\infty} t^{\frac{1}{\gamma}-1} e^{-t} dt + \frac{Z_1(0)}{2} \\ &= \frac{1}{\gamma [\beta A]^{1/\gamma}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}, \beta A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right) + \frac{e^{-\beta A (\frac{1}{2})^\gamma}}{2} \end{aligned}$$

où $\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}, \beta A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right)$ la fonction Gamma incomplète supérieure.

Danc nous pouvons déduire facilement les proprieties thermodynamiques :

$$\begin{aligned} F &= -NKT \log Z_1 \\ &= -NKT \log \left(\frac{1}{\gamma [\beta A]^{1/\gamma}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}, \beta A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right) + \frac{e^{-\beta A (\frac{1}{2})^\gamma}}{2} \right) \end{aligned}$$

4.5.1 Propriétés du gaz d'oscillateurs harmoniques quantiques

Comme nous avons vu, la connaissance de la fonction de partition Z_N et l'énergie libre F d'un gaz permettent de déterminer facilement les grandeurs physiques qui caractérisent ses propriétés macroscopiques.

Energie

La valeur moyenne \bar{E}_c de l'énergie d'un gaz peut être calculée par :

$$\begin{aligned} \bar{E}_c &= -\frac{\partial \log Z_N}{\partial \beta} \\ &= -\frac{\partial \log \left(\frac{1}{\gamma [\beta A]^{1/\gamma}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}, \beta A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right) + \frac{e^{-\beta A (\frac{1}{2})^\gamma}}{2} \right)^N}{\partial \beta} \\ &= N \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}, \beta A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right) \frac{1}{\gamma^2 A^{1/\gamma} \beta^{1/\gamma+1}} + \frac{A (\frac{1}{2})^\gamma}{\gamma [\beta A]^{1/\gamma}} \left((\beta A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma)^{1/\gamma} e^{(-\beta A (\frac{1}{2})^\gamma)} \right) + A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma \frac{e^{-\beta A (\frac{1}{2})^\gamma}}{2} \right)}{\frac{1}{\gamma [\beta A]^{1/\gamma}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}, \beta A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right) + \frac{e^{-\beta A (\frac{1}{2})^\gamma}}{2}} \\ &= N \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}, \beta A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right) \frac{1}{\gamma^2 A^{1/\gamma} \beta^{1/\gamma+1}} + A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma \frac{e^{-\beta A (\frac{1}{2})^\gamma}}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \right)}{\frac{1}{\gamma [\beta A]^{1/\gamma}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}, \beta A \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right) + \frac{e^{-\beta A (\frac{1}{2})^\gamma}}{2}} \end{aligned}$$

Entropie

L'entropie canonique S_c est donnée par :

$$S_c = \frac{1}{T} (\bar{E}_c - F)$$

donc :

$$S_c = N \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\left(\Gamma \left(\frac{1}{\gamma}, \beta A \left(\frac{1}{2} \right)^\gamma \right) \frac{1}{\gamma^2 A^{1/\gamma} \beta^{1/\gamma+1}} + \right)}{A \left(\frac{1}{2} \right)^\gamma \frac{e^{-\beta A \left(\frac{1}{2} \right)^\gamma}}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right)} \right) + K \log \left(\frac{\frac{1}{\gamma A^{1/\gamma} \beta^{1/\gamma}} \Gamma \left(\frac{1}{\gamma}, \beta A \left(\frac{1}{2} \right)^\gamma \right)}{+ \frac{e^{-\beta A \left(\frac{1}{2} \right)^\gamma}}{2}} \right) \right]$$

5

Conclusion générale

La mécanique quantique fractionnaire est une généralisation de la mécanique quantique standard. Elle a été découverte par Nick Laskin, qui a inventé le terme « la mécanique quantique fractionnaire ». Notre objectif était d'étudier quelques problèmes de la physique statistique en se basant sur la mécanique quantique fractionnaire.

Nous avons entamé notre mémoire par une étude bibliographique qui a englobé les notions de base du calcul fractionnaire et de voir de près les principes de la mécanique quantique fractionnaire et ses applications, nous avons pu développer quelques problèmes de la physique statistique fractionnaire. Ce qui nous a permis de :

- Calculer la fonction de partition Z pour un gaz parfait libre et un gaz formé de N oscillateurs "harmoniques" portés à une température T .
- Dédire les fonctions thermodynamiques dans le cas fractionnaire.
- Traiter le cas du gaz quantique de fermions et de bosons sans interaction dans le cadre de la mécanique quantique fractionnaire.
- Etudier le phénomène de condensation bose einstein et calculer la température critique

A

La dérivation de Riesz

A.1 En une dimension

La fonction d'onde $\Psi(x, t)$ peut être écrite comme suit :

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p, t) e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp \quad (1.1.1)$$

$\varphi(p, t)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$.

On applique l'opérateur ∇^α sur l'équation (1.1.1), on trouve :

$$\nabla^\alpha \Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p, t) \nabla^\alpha \left(e^{\frac{ipx}{\hbar}} \right) dp$$

la dérivée fractionnaire de Riesz est définie par :

$$\nabla^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x + \xi) - 2f(x) + f(x - \xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi \quad 0 < \alpha \leq 2$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \nabla^\alpha \left(e^{\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)} \right) &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{ip}{\hbar}(x+\xi)} - 2e^{\frac{ip}{\hbar}} + e^{\frac{ip}{\hbar}(x-\xi)}}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \\
 &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) e^{\frac{ip}{\hbar}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{ip}{\hbar}\xi} + e^{-\frac{ip}{\hbar}\xi} - 2}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \\
 &= 2 \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) e^{\frac{ip}{\hbar}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{p}{\hbar}\xi\right) - 1}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \\
 &= 2 \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) e^{\frac{ip}{\hbar}} I
 \end{aligned}$$

Avec :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{p}{\hbar}\xi\right) - 1}{\xi^{\alpha+1}} d\xi = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{p}{2\hbar}\xi\right)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi$$

On pose le changement de variable : $\frac{p}{2\hbar}\xi = x \Rightarrow d\xi = \frac{2\hbar}{p} dx$

$$I = -2 \left(\frac{2\hbar}{p}\right) \left(\frac{p}{2\hbar}\right)^{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha+1}} dx \quad (1.1.2)$$

Nous avons : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha+1}} dx = -2^{\alpha-1} \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$.

l'équation (1.1.2) devient :

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \left(\frac{p}{2\hbar}\right)^\alpha 2^{\alpha-1} \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \\
 &= 2^\alpha \left(\frac{p}{2\hbar}\right)^\alpha \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{p}{\hbar}\right)^\alpha \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 \nabla^\alpha \left(e^{\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)} \right) &= 2 \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} e^{\frac{ip}{\hbar}} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \left(\frac{p}{\hbar}\right)^\alpha \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \Gamma(-\alpha) \left(\frac{p}{\hbar}\right)^\alpha \sin(\alpha\pi) e^{\frac{ip}{\hbar}}
 \end{aligned}$$

$$\Gamma(1+\alpha) \Gamma(-\alpha) = -\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Alors :

$$\nabla^\alpha \left(e^{\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)} \right) = - \left(\frac{p}{\hbar} \right)^\alpha e^{\frac{ip}{\hbar}}$$

en fin

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \Psi(x, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p) \nabla^\alpha \left(e^{\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)} \right) dp \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p) \left[- \left(\frac{p}{\hbar} \right)^\alpha e^{\frac{ip}{\hbar}} \right] dp \\ &= - \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p) \left(\frac{p}{\hbar} \right)^\alpha e^{\frac{ip}{\hbar}} dp \\ \hbar^\alpha \nabla^\alpha \Psi(x, t) &= - \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p) p^\alpha e^{\frac{ip}{\hbar}} dp \end{aligned}$$

A.2 En trois dimensions

Utilisant l'expression de transformée de Fourier en trois dimensions :

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3p \varphi(p, t) e^{i\frac{pr}{\hbar}} \quad (1.2.1)$$

et appliquant l'opérateur ∇^α sur l'équation (1.2.1) nous obtenons :

$$(i\hbar\nabla)^\alpha \Psi(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3p |p|^\alpha \varphi(p, t) e^{i\frac{pr}{\hbar}}$$

mais : $i^\alpha = (-1)^{\alpha/2}$.

Donc :

$$(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2} \Psi(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3p |p|^\alpha \varphi(p, t) e^{i\frac{pr}{\hbar}}$$

B

La densité de probabilité fractionnaire

Pour trouver le vecteur de la densité de courant de probabilité dans le cas fractionnaire en multipliant l'équation (3.6.1) par $\Psi^*(r, t)$ et l'équation (3.6.2) par $-\Psi(r, t)$, et en sommant les deux équations résultantes, on obtient :

$$D_\alpha \left\{ \Psi^*(r, t)(-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} \Psi(r, t) - \Psi(r, t)(-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} \Psi^*(r, t) \right\} = i\hbar \left\{ \begin{array}{l} \Psi^*(r, t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) + \\ \Psi(r, t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(r, t) \end{array} \right\}$$

or :

$$\Psi^*(r, t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) + \Psi(r, t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi(r, t) \Psi^*(r, t))$$

Donc :

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = D_\alpha \left[\Psi^*(r, t)(-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} \Psi(r, t) - \Psi(r, t)(-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} \Psi^*(r, t) \right] \quad (2.0.1)$$

Alors :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{D_\alpha}{i\hbar} \left[\Psi^*(r, t)(-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} \Psi(r, t) - \Psi(r, t)(-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} \Psi^*(r, t) \right] \quad (2.0.2)$$

$$= \frac{D_\alpha (-\hbar^2)^{\alpha/2}}{i\hbar} \left[\Psi^*(r, t)(\Delta)^{\alpha/2} \Psi(r, t) - \Psi(r, t)(\Delta)^{\alpha/2} \Psi^*(r, t) \right] \quad (2.0.3)$$

Et nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Psi^*(r, t)(\Delta)^{\alpha/2} \Psi(r, t)) - \\ (\Psi(r, t)(\Delta)^{\alpha/2} \Psi^*(r, t)) \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{\nabla} \left[\Psi(r, t) \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \overleftrightarrow{\nabla} \Psi^*(r, t) - \Psi^*(r, t) \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \overleftrightarrow{\nabla} \Psi(r, t) \right] + \\ \overleftrightarrow{\nabla} \Psi^*(r, t) \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \overleftrightarrow{\nabla} \Psi(r, t) - (\overleftrightarrow{\nabla} \Psi(r, t)) \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \overleftrightarrow{\nabla} \Psi^*(r, t) \end{array} \right\}$$

$$\int d^3r \left\{ \begin{array}{l} (\Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}}\Psi(r,t)- \\ \Psi(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}}\Psi^*(r,t) \end{array} \right\} = - \int d^3r \left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{\nabla} \left[\Psi(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t) - \Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) \right] + \\ \overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) - (\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t))\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t) \end{array} \right\}$$

posons :

$$\vec{A} = \left[\Psi(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t) - \Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) \right]$$

Alors :

$$\int d^3r \left\{ \begin{array}{l} (\Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}}\Psi(r,t)- \\ \Psi(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}}\Psi^*(r,t) \end{array} \right\} = - \left[\int d^3r \overleftrightarrow{\nabla}\vec{A} + \int d^3r \left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t)- \\ (\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t))\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t) \end{array} \right\} \right]$$

Nous avons :

$$\int d^3r \overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) = \left(\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t), \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int d^3r \left\{ \begin{array}{l} (\Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}}\Psi(r,t)- \\ \Psi(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}}\Psi^*(r,t) \end{array} \right\} &= - \left[\int d^3r \overleftrightarrow{\nabla}\vec{A} + \left\{ \begin{array}{l} \left(\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t), \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) \right) - \\ \int d^3r (\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t))\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t) \end{array} \right\} \right] \\ &= - \left[\int d^3r \overleftrightarrow{\nabla}\vec{A} + \left\{ \begin{array}{l} \left(\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t), \overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) \right) - \\ \int d^3r (\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t))\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t) \end{array} \right\} \right] \end{aligned}$$

Ensuite

$$\int d^3r \left\{ \begin{array}{l} (\Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}}\Psi(r,t)- \\ \Psi(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}}\Psi^*(r,t) \end{array} \right\} = - \left[\begin{array}{l} \int d^3r \overleftrightarrow{\nabla}\vec{A} + \int d^3r \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t)\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t)- \\ \int d^3r (\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t))\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t) \end{array} \right]$$

En fin:

$$\int d^3r \left\{ \begin{array}{l} (\Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}}\Psi(r,t)- \\ \Psi(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}}\Psi^*(r,t) \end{array} \right\} = - \int d^3r \overleftrightarrow{\nabla}\vec{A}$$

Donc l'équation (2.0.2) devient :

$$\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} = \frac{D_\alpha (-\hbar^2)^{\alpha/2}}{i\hbar} \overleftrightarrow{\nabla} \left[\Psi^*(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) - \Psi(r,t)\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t) \right]$$

$$\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} + \frac{D_\alpha \hbar}{i} \left[\Psi^*(r,t)(-\hbar^2\Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi(r,t) - \Psi(r,t)(-\hbar^2\Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1}\overleftrightarrow{\nabla}\Psi^*(r,t) \right] = 0$$

Et le courant de probabilité $J(r, t)$ est :

$$J(r, t) = \frac{D_\alpha \hbar}{i} (\Psi^*(r, t) (-\hbar^2 \Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1} \vec{\nabla} \Psi(r, t) - \Psi(r, t) (\hbar^2 \Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1} \vec{\nabla} \Psi^*(r, t))$$

Remarque :

$$(\vec{\nabla} \Psi(r, t), \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \vec{\nabla} \Psi(r, t)) = \int \vec{\nabla} \Psi^*(r, t) \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \vec{\nabla} \Psi(r, t)$$

$$(\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \vec{\nabla} \Psi(r, t), \vec{\nabla} \Psi(x, t)) = \int (\vec{\nabla} \Psi(r, t)) \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \vec{\nabla} \Psi^*(r, t)$$

et

$$(\vec{\nabla} \Psi(r, t), \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \vec{\nabla} \Psi(r, t)) = (\Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \vec{\nabla} \Psi(r, t), \vec{\nabla} \Psi(r, t))$$

donc :

$$\int \vec{\nabla} \Psi^*(r, t) \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \vec{\nabla} \Psi(r, t) = \int (\vec{\nabla} \Psi(r, t)) \Delta^{\frac{\alpha}{2}-1} \vec{\nabla} \Psi^*(r, t)$$

Bibliographie

- [1] M. S. Abd Elouahab, les systèmes caotiques à dérivées fractionnaires, mémoire de magistère en mathématiques, 2009, Université Mentouri-constantine.
- [2] D. Baleanu, S. Muslih, K. Tas, Fractional Hamiltonian analysis of higher order derivatives systems, *J. Math. Phys.* 47(10) (2006) 103503.
- [3] S. Das, (2008), *Functional Fractional Calculus for System Identification and Control*, Springer-Verlag Berlin.
- [4] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, *Physique statistique*, 1^{ère} édition 1989, Hermann, Paris
- [5] J. Dong and M. Xu, Some solutions to the space fractional Schrödinger equation using momentum representation method, *J. Math. Phys.* 48, 072105 (2007).
- [6] Équation de Schrödinger, futura-sciences,
<http://www.futura-sciences.com>
- [7] R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, pp 223-276. Wien and New York, 1997.
- [8] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th edition, 2007, Edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger. Academic Press, New York.
- [9] X. Guo and M. Xu, Some physical applications of fractional Schrödinger equation, *J. Math. Phys.* 47, 082104 2006.
- [10] K. Huang, *Statistical Mechanics*, JOHN WILEY & SONS.
- [11] G. Jumarie, Lagrangian mechanics of fractional order, Hamilton-Jacobi fractional PDE and Taylor's series of nondifferentiable functions, *Chaos, Solitons and Fractals* 32 (2007) 969–987.

-
- [12] A. A. Kilbas, Srisvastava, H.M., Trujillo, J.J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, North-Holland.
- [13] L. D. Landau and E.M. Lifshitz, Quantum mechanics (Non-relativistic Theory), Vol.3, 3rd Edition, Course of Theoretical Physics (Butterworth- Heinemann, Oxford, 2003).
- [14] N. Laskin, Fractals and quantum mechanics, Chaos 10, 780 (2000); doi: 10.1063/1.1050284.
- [15] N. Laskin, Fractional Quantum Mechanics and Lévy Path Integrals, IsoTrace Laboratory 60 St. George Street, Toronto, ON, M5S 1A7 Canada.
- [16] N. Laskin, Fractional Schrödinger equation University of Toronto, IsoTrace Laboratory 60 St, George Street, Toronto, ON, M5S 1A7 Canada.
- [17] N. Laskin, Fractional Quantum Mechanics, Carleton University, Ottawa, Ontario Canada 2008.
- [18] N. Laskin, Principles of Fractional Quantum Mechanics, TopQuark Inc. Toronto, ON, M6P 2P2 Canada.
- [19] B. MEFTAHA, Equation de Schrödinger Fractionnaire, mémoire de master académique en mathématiques, 2012 ,l'université de Ouargla.
- [20] K. S. MILLER and B. ROSS, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, JOHN WILEY & SONS, INC.
- [21] C. Ngô et H. Ngô, Physique statistique: Introduction, Cours et exercices corrigés. 2^{ème} édition, DUNOD.
- [22] K. B. Oldham, Spanier, J. (1974), The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Academic Press, Inc.
- [23] I. Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press, New York, London, UK, 1999.
- [24] T. Poinot, J.-C. Trigeassou, 'A method for modelling and simulation of Fractional systems,' Signal processing N° 83, 2003
- [25] B. Ross, (1977), The Development of Fractional Calculus 1695-1900, Historia Math 4 :75-89.

- [26] A. SI AMOUR, contribution a la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire, thèse de doctorat en automatique, juillet 2011, l'université de Tizi Ouzou.
- [27] H. H. Sun, A. Charef, Y. Tsao, B. Onaral, "Analysis of polarization dynamics by singularity decomposition method," *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 20, 1992.
- [28] P. J .Torvik, and R. L. Bagley, "On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials," *Trans. Of the ASME*, vol. 51, 1984.
- [29] M.Y. Xu and W.C. Tan, Intermediate processes and critical phenomena: Theory, method and progress of fractional operators and their applications to modern mechanics, *Science in China: Series G (Physics, Mechanics and Astronomy)*, 49(3) (2006) 257–272.
- [30] Z. Yan, General thermal wavelength and its applications. 2000 *Eur. J. Phys.* 21 625.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier quelques problèmes de physique statistique quantique basée sur la mécanique quantique fractionnaire. Dans notre travail, on a commencé à donner un aperçu sur la mécanique quantique fractionnaire par présenter quelques illustrations puis on a calculé la fonction de partition Z pour un gaz parfait libre et un gaz confiné dans une boîte avec des conditions aux limites. On a déduit les fonctions thermodynamiques dans le cas fractionnaire. Nous avons également calculé ces fonctions thermodynamiques pour le cas d'un gaz formé de N oscillateurs "harmoniques" portés à une température T toujours dans le cadre de la mécanique quantique fractionnaire.

Dans ce mémoire, nous avons concentrés aussi sur l'étude d'un gaz quantique de fermions et de bosons sans interactions (gaz parfait) dans le cas fractionnaire et abordé le problème de la transition de phase pour les bosons en discutant toutes les grandeurs thermodynamiques y compris la température de Bose en fonction du paramètre de la fractionalité de la dérivée dans l'Hamiltonien décrivant le système.

Mots clés : calcul fractionnaire, Reisz, Liouville, Caputo, mécanique quantique fractionnaire, fonction de partition grand-canonique, grandeurs thermodynamiques, bosons.

Abstract

The objective of this work is to study some problems in statistical quantum mechanics based on the fractional quantum mechanics. In our work, we started to give an overview of the fractional quantum mechanics by presenting a few examples and then calculated the partition function Z for a free ideal gas and a gas confined in a box with boundary conditions. We deduce the thermodynamic functions in the fractional case. We also calculated the thermodynamic functions for the case of a gas consisting of N oscillators "harmonic" heated to a temperature T always in the context of the fractional quantum mechanics.

In this paper, we have also focused on the study of a quantum gas of fermions and bosons without interaction (ideal gas) in the fractional case and addressed the problem of the phase transition for bosons discussing all thermodynamic quantities including temperature Bose according fractionalité parameter of the derivative in the Hamiltonian describing the system..

Keywords: fractional calculus, Reisz, Liouville, Caputo fractional quantum mechanics, grand canonical partition function, thermodynamic quantities, bosons.

المخلص

الهدف من هذا العمل هو دراسة بعض مشاكل الفيزياء الإحصائية الكمية على أساس الميكانيك الكمي الكسري. في عملنا هذا، بدأنا بتقديم نظرة عامة توضيحية للميكانيك الكمي الكسري ثم قمنا بحساب دالة التوزيع Z بالنسبة لغاز مثالي من الجسيمات الحرة ولغاز محصور في علبة مع وجود الشروط الحدية. و استنتجنا الدوال الحرارية في الحالة الكسرية. قمنا أيضا بحساب الدوال الحرارية لحالة غاز يتكون من N هزاز "توافقي" مسخن إلى درجة حرارة T دائما في سياق الميكانيك الكمي الكسري.

في هذه المذكرة، ركزنا أيضا على دراسة غاز كمي من الفرميونات و من البوزونات دون تصادم في الحالة الكسرية و معالجة ظاهرة التحول الطوري و ناقشنا جميع الكميات الحرارية بما في ذلك درجة حرارة بوس.

الكلمات المفتاح : الميكانيك الكمي الكسري، الإحصاء، الحساب الكسري، دالة التوزيع ، المجموعة القانونية الكبرى