

N° Série...../2017

Université Kasdi Merbah Ouargla



*Faculté des sciences appliquées*

**Département Génie Mécanique**

**MEMOIRE**

**Pour obtenir le Diplôme de Master**

**Option : Maintenance Industrielle**

Présenté Par :

**KERBOUCHE Hacene**

**LOUAFI Mahdi**

-THÈME-

---

***DETERMINATION DES PARAMETRES MODAUX DES PLAQUES  
COMPOSITES ORTHOTROPES EN VIBRATION PAR ANSYS***

---

Soutenue le : 28 / 05 / 2017 devant la commission d'examen

**Jury:**

<b>President:</b> GBAILIA Moussa	M.C	UKM, Ouargla
<b>Examineur:</b> ISSASFA Brahim	M.A	UKM, Ouargla
<b>Rapporteur:</b> MEBARKI Abdelyamine	M.A	UKM, Ouargla

***Année universitaire: 2016/2017***

## ***Remerciement***

*Nous tenons à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur Abdelyamine MEBARKI, notre encadreur pour son assistance, sa disponibilité et son encouragement pendant l'accomplissement de ce travail. Nous lui en sommes profondément reconnaissants.*

*Nous souhaitons également remercier chaleureusement Monsieur M.GBAILIA, maitre de conférences à l'université d'Ouargla, qui nous a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Nous tenons à lui exprimer nos plus profondes gratitudes.*

*Nous sommes également extrêmement reconnaissants envers Monsieur B.ISSASEFA qui nous a fait l'honneur de participer au jury et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'examiner.*

*Que tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à notre formation, trouvent ici nos gratitudes et nos remerciements.*

*Hacene KERBOUCHE*

*Mahdi LOUAFI*

## Résumé

Les plaques composites sont largement utilisées dans les structures civiles, mécaniques, aéronautiques, et surtout aérospatiales. Cela est principalement dû à leur très grande résistance et rigidité spécifique et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés pour répondre aux exigences de la pratique. Pour des raisons de performance et d'intégrité structurelle, il est essentiel de déterminer les caractéristiques dynamiques telles que les fréquences naturelles et leurs modes associés. Dans ce mémoire, les vibrations des plaques composites orthotropes monocouches et stratifiées ont été étudiées par la méthode des éléments finis. Dans la première partie, il a été procédé à la comparaison entre les résultats obtenus par le code de calcul ANSYS et ceux qui trouvent dans les littératures ; cette étude vise à examiner la consistance des résultats obtenus par ANSYS pour l'étude des vibrations. Dans le deuxième, une analyse en éléments finis utilisant le code ANSYS est employée pour prédire le comportement des plaques. L'analyse a porté sur la variation des fréquences propres en fonction des conditions de support de la plaque, de l'angle d'orientation des fibres, séquences d'empilement, du rapport longueur-sur-épaisseur et rapport longueur-sur-largeur.

Mots clés : plaques composites, stratifiées, vibrations, ANSYS

## Abstract

Composite plates are widely used in civil, mechanical, aeronautical, and especially aerospace structures. This is mainly due to their high specific strength and stiffness and the advantage of adapting their properties to meet the practical requirements. For reasons of performance and structural integrity, it is essential to determine dynamic characteristics such as natural frequencies and their associated modes. In this memory, a single layer and stratified orthotropic composite plate's vibration was studied using finite element method. In the first part, it was conducted the comparison between obtained by the ANSYS calculation code and those who are found in the literatures; this study aims to examine the consistency of the results obtained by ANSYS for the study of vibrations. In the second part, a finite element analysis using the ANSYS code is used to predict the behavior of the plates. The analysis focused on the variation of the natural frequencies as a function of the support conditions of the plate, of the angle of orientation of the fibers, stacking sequences, length-on-thickness ratio and length-to-width ratio.

Key words: composite plates, stratified plates, vibrations, ANSYS

## ملخص

اللوحات المركبة تستخدم على نطاق واسع في الهياكل المدنية، الميكانيكية، الطيران وخصوصا الفضائية. ويرجع ذلك أساسا لمقاومتها العالية وصلابتها وميزة تكيف خصائصها لتلبية المتطلبات العملية. لأسباب الأداء والسلامة الهيكلية، فإن من الضروري تحديد الخصائص الديناميكية مثل الترددات الطبيعية والأوضاع المرتبطة بها. في هذه الأطروحة، تم دراسة اهتزاز اللوحات وحيدة الطبقة ومتعددة الطبقات باستخدام نظرية العناصر المحدودة. في الجزء الأول، أجريت مقارنة بين النتائج المتحصل عليها باستخدام برنامج أنسيس والنتائج الموجودة في المراجع العلمية، هذه المقارنة تهدف الى اختبار مدى قدرة هذا البرنامج في دراسة الاهتزازات. في الجزء الثاني، تم استخدام تحليل العناصر المحدودة باستخدام برنامج أنسيس للتنبؤ بسلوك اللوحات. تركز التحليل على تغير الترددات الطبيعية بدلالة ظروف استناد اللوحة، زاوية توجه الألياف، التراص، نسبة الطول على السمك ونسبة الطول على العرض.

الكلمات المفتاحية: اللوحات المركبة، اللوحات متعددة الطبقات، الاهتزازات، أنسيس

<b>RESUME.....</b>	<b>II</b>
<b>TABLE DES MATIERES.....</b>	<b>IV</b>
<b>LISTE DES FIGURES.....</b>	<b>VII</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>IX</b>
<b>NOMENCLATURE.....</b>	<b>X</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>

## **Chapitre 1 : Recherche bibliographique sur les matériaux composites**

1.1	Définition.....	2
1.2	Matrices.....	2
1.2.1	Les résines.....	3
1.2.1.1	Les résines thermodurcissables.....	3
1.2.1.2	Les résines thermoplastiques.....	4
1.2.1.3	Les résines thermostables.....	4
1.2.2	Charges et additifs.....	5
1.2.2.1	Charges renforçantes.....	5
1.2.2.2	Charges non renforçantes.....	6
1.2.2.3	Charges conductrices et antistatiques.....	6
1.2.2.4	Additifs.....	7
1.3	Fibres et tissus.....	7
1.3.1	Généralités.....	7
1.3.2	Fibres sous forme linéique.....	7
1.3.2.1	Fibres de verre.....	8
1.3.2.2	Fibres de carbone.....	9
1.3.2.3	Fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées.....	10
1.3.2.4	Fibres céramiques.....	10
1.3.2.5	Fibres synthétiques thermostables.....	11
1.3.2.6	Autres fibres.....	11
1.3.3	Fibres sous forme surfacique.....	11
1.3.3.1	Les mats.....	12
1.3.3.2	Les tissus et rubans.....	12
1.3.3.3	Structure tissées multidirectionnelles.....	12
1.4	Structure composites stratifiées.....	14

## *Table des matières*

---

1.4.1	Désignation des structures stratifiées.....	15
1.4.2	Désignation des structures sandwiches.....	16
1.5	Structures composites tissées multidirectionnelles.....	16
1.5.1	Structure 2D SiC-SiC.....	17
1.5.2	Aerolor 32 C/C.....	17
1.5.3	3D-Evolutif C/C .....	18
1.5.4	Sepcarb(r) 4D C/C.....	19

### **Chapitre 2 : Etude vibratoire des plaques composites minces**

2.1	Introduction.....	20
2.2	Analyse vibratoire des plaques composites .....	20
2.3	Matériaux des plaques composites .....	22
2.3.1	Type des matériaux .....	22
2.3.2	Relation déformations – contraintes d’un matériau orthotrope.....	23
2.3.3	Expression des constantes $C_{ij}$ d’un matériau orthotrope .....	24
2.3.4	Relation déformations-contraintes d’un matériau orthotrope dans un état plan de contraintes .....	24
2.4	Théorie des plaques minces .....	25
2.4.1	Théorie classiques des plaques minces.....	25
2.4.1.1	Hypothèses de la théorie classiques des plaques .....	26
2.4.1.2	Domaine d’application.....	27
2.4.2	Conventions et définitions.....	27
2.4.3	Equation d’équilibre.....	28
2.4.4	Cinématique de déformation.....	30
2.4.5	Calcul des moments et des efforts.....	30
2.5	Vibration d’une plaque rectangulaire orthotrope .....	32
2.6	Formes des conditions aux limites.....	33
2.6.1	Appui simple.....	33
2.6.2	Bord fixe .....	34
2.6.3	Bord libre.....	34
2.7	Analyse et modélisation des plaques composites par éléments finis.....	34
2.7.1	Modélisation des plaques composites par ANSYS.....	35
2.7.1.2	Elément de maillage pour l’étude des plaques minces monocouches .....	36
2.7.1.3	Elément de maillage pour l’étude des plaques minces multicouches .....	37

**Chapitre 3 : Résultats et discussion**

3.1	Introduction.....	38
3.2	Vibration libre des plaques composites orthotropes .....	38
3.2.1	vibration des plaques orthotropes monocouches.....	38
3.2.1.1	Validation du programme .....	38
3.2.1.2	Comportement vibratoire des plaques orthotropes monocouches .....	44
3.2.2	Vibration des plaques orthotropes multicouches .....	58
3.2.2.1	Validation du programme .....	58
3.2.2.2	Etude de comportement vibratoire des plaques orthotropes multicouches.....	59
3.3	Conclusion .....	65
	<b>CONCLUSION.....</b>	<b>66</b>
	<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>67</b>
	<b>ANNEXE A : Effet de rapport de dimensions longueur-sur-largeur.....</b>	<b>68</b>
	<b>ANNEXE B : Effet de rapport longueur-sur-épaisseur.....</b>	<b>75</b>
	<b>ANNEXE C : Effet d'orientation des fibres.....</b>	<b>78</b>

## *Liste des figures*

---

Figure 1.1 :	Composition des matériaux composites.....	2
Figure 1.2 :	Types des matrices.....	3
Figure 1.3 :	Structure cristalline du graphite.....	9
Figure 1.4 :	Structure des fibres polyaramides ou polyamides aromatiques.....	10
Figure 1.5 :	Chaîne et trame d'un tissu.....	12
Figure 1.6 :	Tissage cylindrique et conique.....	13
Figure 1.7 :	Tissage 3D orthogonal.....	13
Figure 1.8 :	Tissage 4D.....	13
Figure 1.9 :	Stratifié constituée de couches parfaitement liées.....	14
Figure 1.10 :	Désignation des stratifiées.....	15
Figure 1.11 :	Désignation d'une âme nid d'abeilles.....	16
Figure 1.12 :	2D Sic-Sic, matériau avec deux directions de renfort.....	17
Figure 1.13 :	Géométrie tri-orthogonale de l'Aerolor 32.....	18
Figure 1.14 :	Sepracarb(r) 4D C/C renfort carbone/matrice carbone : tissage suivant quatre dimensions de l'espace.....	19
Figure 2.1 :	Cinématique de Love-Kirchhoff.....	25
Figure 2.2 :	Déplacement d'un élément de la plaque.....	27
Figure 2.3 :	Forces agissant sur l'élément de la plaque.....	28
Figure 2.4 :	Logiciel ANSYS.....	36
Figure 2.5 :	Géométrie de l'élément SHELL63.....	36
Figure 2.6 :	Géométrie de l'élément SHELL99.....	37
Figure 3.1 :	Paramètres utilisés pour une plaque en vibration libre.....	39
Figure 3.2 :	Conditions aux limites, plaque simplement appuyée (AAAA).....	39
Figure 3.3 :	Conditions aux limites, plaque simplement appuyée (EEEE).....	39
Figure 3.4 :	Comparaison <i>Ansys/Haermon</i> de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque <i>AAAA</i> .....	42
Figure 3.5 :	Comparaison <i>Ansys/Haermon</i> de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque <i>EEEE</i> .....	42



## *Liste des figures*

---

Figure 3.6 :	Comparaison <i>Ansys/Haermon</i> de la variation des fréquences propres en fonction de rapport a/b pour la plaque AAAA.....	43
Figure 3.7 :	Comparaison <i>Ansys/Haermon</i> de la variation des fréquences propres en fonction de rapport (a/b) pour la plaque EEEE.....	44
Figure 3.8 :	Modes propres pour la plaque carrée AEAE.....	49
Figure 3.9 :	Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R= 0.5...	49
Figure 3.10 :	Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R= 1.....	50
Figure 3.11 :	Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R= 1.5...	50
Figure 3.12 :	Fréquences propres en fonction rapport de dimension.....	52
Figure 3.13 :	Variation de fréquence propre en fonction d'angle d'orientation des fibres avec R = 1.5.....	53
Figure 3.14 :	Variation de fréquence propre en fonction d'angle d'orientation des fibres avec R = 0.5.....	54
Figure 3.15 :	Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h, plaque avec R = 0.5...	56
Figure 3.16 :	Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h, plaque avec R = 1.....	56
Figure 3.17 :	Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h, plaque avec R = 1.5...	57
Figure 3.18 :	Plaque appuyée, Appui 1.....	59
Figure 3.19 :	Plaque appuyée, Appui 2.....	60
Figure 3.20 :	Modes propres du stratifié avec Appui 2.....	61
Figure 3.21 :	Fréquences propres pour une plaque sous deux types d'appuis.....	61
Figure 3.22 :	Fréquences propres de différents stratifiés avec différentes angles d'orientation des fibres.....	62
Figure 3.23 :	Fréquences propres de différents stratifiés avec différentes empilements.....	64

## *Liste des tableaux*

---

Tableau 1.1 : Exemples des résines thermodurcissables avec leurs caractéristiques.....	4
Tableau 1.2 : Exemples des résines thermoplastiques avec ses caractéristiques.....	4
Tableau 1.3 : Différents types de fibre de verre.....	8
Tableau 3.1 : Propriétés du matériau <i>ORTHO-1</i> .....	40
Tableau 3.2 : Comparaison des résultats <i>ANSYS/Haermon</i> pour les plaques <i>AAAA</i> et <i>EEEE</i> pour $R=1.25$ .....	40
Tableau 3.3 : Comparaison des résultats <i>ANSYS/Haermon</i> pour les plaques <i>AAAA</i> et <i>EEEE</i> pour $R=1.33$ .....	41
Tableau 3.4 : Comparaison des résultats <i>ANSYS/Haermon</i> pour les plaques <i>AAAA</i> et <i>EEEE</i> pour $R=1.5$ .....	41
Tableau 3.5 : Comparaison <i>ANSYS/Haermon</i> des fréquences propres pour différents rapport dimension $a/b$ .....	43
Tableau 3.6 : Propriétés du matériau <i>Glass/Epoxy</i> .....	45
Tableau 3.7 : Fréquences propres pour dix premiers modes de la plaque avec $R = 1$ .....	47
Tableau 3.8 : Fréquences propres pour les trois rapports de dimension.....	51
Tableau 3.9 : Fréquences propres pour différents rapports $a/h$ et rapport $R$ .....	55
Tableau 3.10 : Propriétés du matériau <i>Graphite/Epoxy</i> .....	58
Tableau 3.11 : Comparaison des résultats d' <i>ANSYS</i> et résultats de <i>Réf [16]</i> .....	59
Tableau 3.12 : Fréquences propres d'une plaque appuyée.....	60
Tableau 3.13 : Fréquences propres de différents stratifiés avec différentes angles d'orientation des fibres.....	62
Tableau 3.14 : Fréquences propres de différents stratifiés avec différents empilements.....	63

## *Nomenclature*

---

$C_{ijkl}$	Tenseur de rigidité
$S_{ijkl}$	Tenseur de souplesse
$\sigma_{ij}$	Tenseur de contraintes
$\epsilon_{ij}$	Tenseur des déformations
$E_i$	Module d' Young dans la direction $i$ du matériau
$\nu_i$	Coefficient de poisson dans la direction $i$ du matériau
$\nu_{ij}$	Coefficient de poisson dans le plan correspondant, $(i, j)$ $i, j = 1, 2, 3$ avec $i \neq j$
$G_{ij}$	Module cisaillement dans le plan correspondant, $(i, j)$ $i, j = 1, 2, 3$ avec $i \neq j$
$\epsilon_i$	Déformation relative dans la direction $i$ ,
$\sigma_i$	Contrainte dans la direction $i$ ,
$\tau_{ij}$	Contrainte de cisaillement dans le plan correspondant.
$\rho$	Masse volumique
$\frac{\partial w^2}{\partial t^2}$	Accélération suivant l'axe $Oz$ .
$u, v$	Déplacements suivant les axes $Ox$ et $Oy$ respectivement
$Q_x$	Intensités des efforts tranchants suivant l'axe $Ox$
$Q_y$	Intensités des efforts tranchants suivant l'axe $Oy$
$N_x$	Intensités des efforts normaux suivant l'axe $Ox$
$N_y$	Intensités des efforts normaux suivant l'axe $Oy$
$M_x$	Moments de flexion suivant l'axe $Ox$
$M_y$	Moments de flexion suivant l'axe $Oy$
$\omega_{mn}$	Fréquence naturelle de vibration

# INTRODUCTION

Le lancement de grands programmes technologiques (spatial, nucléaire, électronique, ..) et l'évolution du marché des matières premières ont amenés au constat que les matériaux traditionnels avaient atteint leurs limites. La recherche de performances techniques alliées au besoin d'optimisation, telle que la modification des fréquences naturelles de structures afin d'assurer leur sécurité en cas de vibrations dangereuses, et d'allègement a également motivé la conception et l'utilisation de matériaux spécifiques adaptés à la solution technologique des problèmes à résoudre. Ainsi des matériaux renforcés à hétérogénéité de structure maîtrisée appelés matériaux composites se sont développés.

Dans un contexte d'ingénierie, nous avons généralement des connaissances considérables sur les équations de la physique qui gouvernent le comportement des systèmes de structures telles que les plaques composites. Nous sommes en mesure de tester un système à la fois analytiquement et dans les laboratoires, et on a donc une bien meilleure chance d'évaluer la robustesse de ce système, en particulier sa tendance à la ruine. Cependant, des circonstances imprévues surviennent coïncidant avec des négligences dans la prédiction du comportement des structures. Comprendre les vibrations des structures est d'une très grande importance pour les ingénieurs de structures et de l'aérospatiale.

L'objectif de ce travail est de déterminer les caractéristiques vibratoires des plaques composites minces orthotropes monocouches et stratifiées telles fréquences et modes propres en vibration libre à l'aide de logiciel *ANSYS* afin de comprendre leurs comportement sous différentes formes et cas.

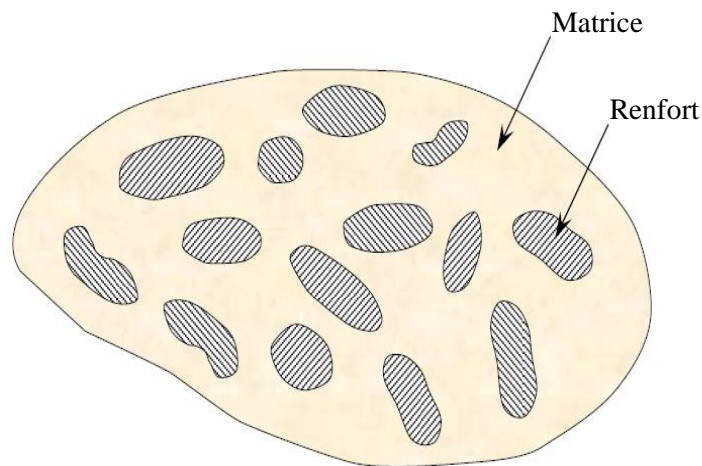
Notre travail est divisé en trois chapitres, dans le **premier**, une présentation générale des matériaux composites et les structure composites stratifiées est faite dont on trouve des définitions ainsi leurs compositions et leurs caractéristiques. Le **second** chapitre est purement théorique, il contient un rappel sur la théorie classique des plaques composites minces, l'importance de la méthode des éléments finis dans la détermination des fréquences et modes propres des structures composites ainsi une présentation du logiciel *ANSYS* et les principales étapes de simulation avec. Le **troisième** est consacré à l'étude de comportement vibratoire des plaques composites orthotropes en fonction de différentes conditions aux limites, la variation des dimensions des plaques, l'orientation des fibres et l'effet de séquence d'empilement. Le travail s'achève par des conclusions et recommandations

## **Recherche bibliographique sur les matériaux composites**

### **1.1 Définition**

Un matériau composite c'est l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complètent et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

Un matériau composite constitué d'une matrice et d'un renfort constitué de fibres. La matrice est-elle même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc.) et de charges dont le but est d'améliorer les caractéristiques de la résine tout en diminuant le coût de production. D'un point de vue mécanique, l'ensemble résine-charge se comporte comme un matériau homogène, et le composite est considéré comme constitué d'une matrice et d'un renfort. Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures.

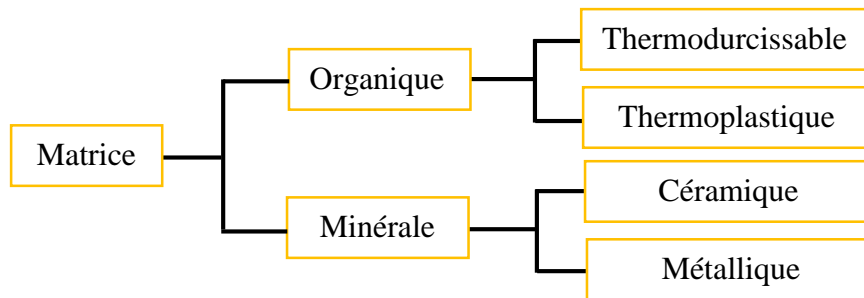


**Figure 1.1** Composition des matériaux composites

### **1.2 Matrices**

Dans la majorité des cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux

en carbone, des températures de 2 200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la Figure 1.2.



**Figure 1.2** Types des matrices

### 1.2.1 Les résines

Les résines utilisées dans les matériaux composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Les résines doivent donc être assez déformables et présenter une bonne compatibilité avec les fibres. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

#### 1.2.1.1 Les résines thermodurcissables

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. Les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, aminoplastes, furaniques) et les résines époxy sont des résines thermodurcissables.

Les résines les plus performantes ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Des exemples de ces résines avec ses caractéristiques sont présentés dans le suivant.

Résines	Tf (°C)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\epsilon_t^R$ (%)	$\sigma_t^R$ (MPa)	$\sigma_c^R$ (MPa)	E (GPa)
<b>Polyesters</b>	60 à 100	1 140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
<b>Phénoliques</b>	120	1 200	2,5	40	250	3 à 5
<b>Epoxydes</b>	290	1 100 à 1 500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

**Tableau 1.1** Exemples des résines thermodurcissables avec leurs caractéristiques

### 1.2.1.2 Les résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Les résines thermoplastiques classiquement rencontrées sont *PEEK*, *K3B*.

Le tableau 1.2 présente quelques exemples des résines thermoplastiques avec ses caractéristiques.

Résines	Tf (°C)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\epsilon_t^R$ (%)	$\sigma_t^R$ (MPa)	$\sigma_c^R$ (MPa)	E (GPa)
<b>Polyamide</b>	60 à 100	1 140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
<b>Polypropylène</b>	120	1 200	2,5	40	250	3 à 5

**Tableau 1.2** Exemples des résines thermoplastiques avec ses caractéristiques

### 1.2.1.3 Les résines thermostables

Les résines thermostables se distinguent des autres résines, précédemment considérées, essentiellement par leurs performances thermiques qui conservent leurs propriétés mécaniques pour des températures plus élevées au-delà de 200°C.

Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace, où les laboratoires cherchent à mettre au point de nouvelles résines. Parmi les résines thermostables, les résines bismaléimides et polyamides sont les plus utilisées.

Les résines bismaléimides sont des résines dont le réseau est élaboré à des températures de 180 à 200°C. Les procédés de moulage sont identiques à ceux des composites à matrice thermodurcissable de type polyester ou époxyde.

Les résines polyamides sont apparues sur le marché vers 1970. Ce sont des résines à haute résistance thermique, mais de prix très élevé. Ces résines permettent d'obtenir des composites de résistance supérieure, à 250 °C, à la résistance de l'aluminium.

### **1.2.2 Charges et additifs**

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût. La quantité des produits ajoutés peut varier de quelques dizaines de pourcentage dans le cas de charges, et moins dans le cas d'additifs.

L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini, soit d'en faciliter la mise en œuvre. En ce qui suit des exemples de charges et d'additifs.

#### **1.2.2.1 Charges renforçantes**

L'objet de l'incorporation de charges renforçantes est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charges peuvent être classées suivant leur forme géométrique en : charges sphériques et charges non sphériques.

##### **1.2.2.1.1 Charges sphériques**

L'intérêt essentiel de ces charges réside dans leur forme sphérique qui évite les concentrations de contraintes et par conséquent diminue la susceptibilité à la fissuration de la matrice par rapport à des charges non sphériques. Les charges sphériques se présentent sous forme de sphères, appelées généralement microbilles ou microsphères. Ces sphères pleines ou creuses ont un diamètre généralement compris entre 10 et 150 µm. Elles peuvent être en verre, en carbone ou en matière organique (époxyde, phénolique, polystyrène, etc.). Les microbilles de verre creuses représentent plus de 99 % des charges sphériques utilisées.



### **1.2.2.1.2 Charges non sphériques**

Parmi les charges renforçantes non sphériques, le mica qui est le matériau le plus utilisé. Il est alors incorporé sous forme d'écaillés de dimensions de 100 à 500  $\mu\text{m}$ , et d'épaisseur de 1 à 20  $\mu\text{m}$ . Le mica est ajouté à des résines thermoplastiques ou thermodurcissables, pour des applications électriques ou électroniques.

### **1.2.2.2 Charges non renforçantes**

Les charges non renforçantes ont pour rôle soit de diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines, soit d'améliorer certaines propriétés des résines.

#### **1.2.2.2.1 Charges de faible coût**

Ces charges sont extraites de roches ou de minerais, d'où leur faible coût. Généralement, l'incorporation de ces charges conduit à :

- Une augmentation de : la masse volumique de la matrice, module d'élasticité, la dureté, la viscosité, la stabilité dimensionnelle.
- Une diminution de : prix, la résistance à la traction et à la flexion.

Les principales charges sont :

- les carbonates : craies ou calcites ( $\text{CaCO}_3$ ). Ce sont les charges les plus 3 utilisées,
- les silicates : talc, kaolin, feldspath, wollastonite,
- les silices, obtenues par broyage et tamisage de sable de quartz.

#### **1.2.2.2.2 Charges ignifugeantes**

Ces charges ajoutées aux résines ont pour rôle de réduire ou d'empêcher les phénomènes de combustion. Parmi les charges solides utilisées dans les résines thermodurcissables, nous citons :

- l'hydrate d'alumine, produit le plus utilisé dans les résines thermodurcissables,
- l'oxyde d'antimoine.

### **1.2.2.3 Charges conductrices et antistatiques**

Les résines organiques sont des isolants thermiques et électriques. Pour certaines applications, il est donc nécessaire d'ajouter un élément conducteur. Les principales charges utilisées sont :

- des poudres ou paillettes métalliques : cuivre, fer, aluminium, etc.,
- des microbilles de verre métallisées (cuivre, argent),
- des particules de carbone (noir de carbone),
- des filaments métalliques

### **1.2.2.4 Additifs**

Des produits peuvent être incorporés aux résines, tels que des colorants ou des agents de démoulage qui sont utilisés lors de la conception des structures constituées de matériaux composites.

## **1.3 Fibres et tissus**

### **1.3.1 Généralités**

Les matériaux de renfort confèrent aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines des propriétés physiques : comportement thermique, tenue en température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : des caractéristiques mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec les résines, une bonne facilité de mise en œuvre, un faible coût, etc. En fonction des utilisations, les renforts peuvent être d'origines diverses : végétale, minérale, artificielle, synthétique, etc. Toutefois, les renforts les plus utilisés se présentent sous forme de fibres ou formes dérivées, et constituent une fraction volumique du matériau composite généralement comprise entre 0,3 et 0,7. Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- Sous forme linéique (fils, mèches, etc.),
- Sous forme de tissus surfaciques (tissus simples, mats, etc.),
- Sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.).

### **1.3.2 Fibres sous forme linéique**

Les fibres sont élaborées suivant un diamètre de quelques micromètres (une dizaine), et ne peuvent par conséquent pas être utilisées sous forme unitaire. Pour leur utilisation pratique, ces fibres sont réunies en fils ou en mèches de différentes formes. La nomenclature générale des diverses formes linéiques est encore mal déterminée, et généralement dérivée de celle utilisée pour les fibres de verre.

La fibre unitaire est généralement appelée filament élémentaire ou monofilament. Les monofilaments sont ensuite réunis en fils ou mèches. Les fils continus ou discontinus sont caractérisés par leur masse linéique ou titre. Cette masse linéique est une mesure de la finesse des fils, et elle dépend du diamètre et du nombre de monofilaments.

### **1.3.2.1 Fibres de verre**

Le verre sous forme massive est caractérisé par une très grande fragilité, attribuée à une sensibilité élevée à la fissuration. Par contre, élaboré sous forme de fibres de faibles diamètres (quelques dizaines de micromètres), le verre perd ce caractère et possède alors de bonnes caractéristiques mécaniques. Les fibres de verre sont élaborées à partir d'un verre filable, appelé verre textile, composé de silice, alumine, chaux, magnésie, etc. Ces produits peu coûteux, associés à des procédés assez simples d'élaboration, confèrent aux fibres de verre un excellent rapport performances/prix, qui les place de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans les matériaux composites.

Suivant leurs compositions, différents types de verres filables peuvent être obtenus (Tableau 1.3). Dans la pratique, les verres de type E constituent la presque totalité du tonnage de verre textile produit actuellement. Les autres verres, représentant globalement une faible quantité (environ 1 %), sont réservés à des applications spécifiques :

- Le verre D, à hautes propriétés diélectriques, pour la construction de matériel électronique de télécommunications, en particulier les radomes ;
- Le verre C, résistant aux agents chimiques pour les couches superficielles des structures particulièrement exposées sur le plan chimique ;
- Les verres R et S, à caractéristiques mécaniques élevées pour la réalisation de structures à hautes performances mécaniques.

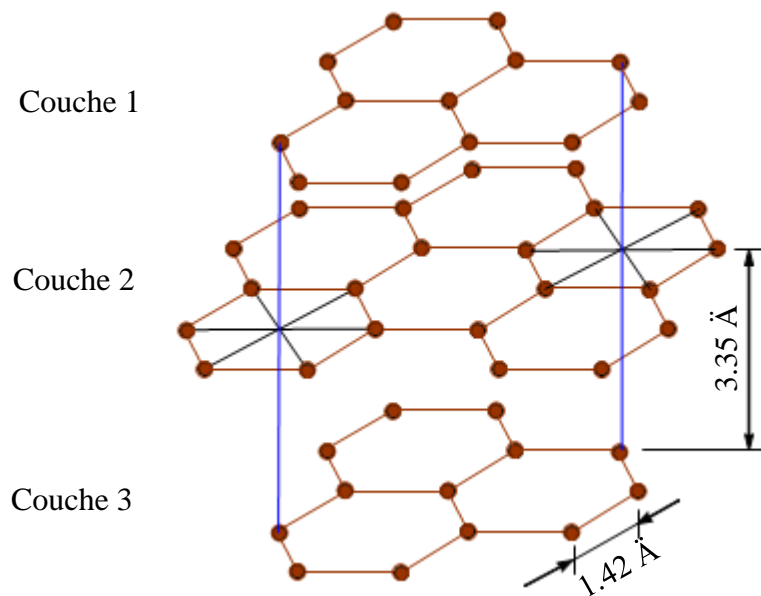
Types	Caractéristiques générales
E	A usage général, bonnes propriétés électriques
D	Hautes propriétés diélectriques
A	Haute teneur en alcali
C	Bonne résistance chimique
R, S	Haute résistance mécanique

---

**Tableau 1.3** Différents types de fibre de verre

### 1.3.2.2 Fibres de carbone

Le graphite a une structure hexagonale d'atomes de carbone, disposés en plans cristallographiques parallèles (Figure 1.3). Ces plans sont décalés de telle sorte qu'un atome de carbone se projette au milieu d'un hexagone des plans voisins. Les liaisons entre atomes de carbone de plans voisins sont faibles, et confèrent au graphite de bonnes propriétés de conduction thermique et électrique. Par contre, les liaisons entre atomes voisins d'un même plan sont fortes, et donnent au graphite des propriétés mécaniques élevées dans la direction parallèle aux plans cristallographiques. L'étude théorique des liaisons prévoit dans cette direction un module d'Young de 1200 GPa et une résistance à la rupture de 20000 MPa.

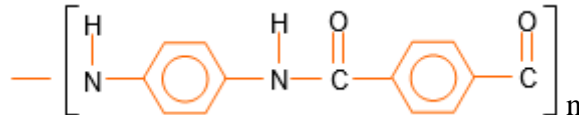


**Figure 1.3** Structure cristalline du graphite

D'autre part, la masse volumique faible (inférieure à 2000 kg/m) conduit à des propriétés mécaniques spécifiques théoriques remarquablement élevées. Ces faits expliquent les nombreux développements de différents procédés d'élaboration, permettant d'obtenir des fibres de carbone les plus parfaites possibles, et dont la direction des plans cristallographiques soit le plus parallèle possible à l'axe des fibres. Les fibres industrielles n'atteignent toutefois pas les valeurs mécaniques théoriques, du fait des imperfections des structures cristallines obtenues. Les caractéristiques des fibres élaborées restent cependant élevées et peuvent atteindre aujourd'hui pour les fibres les plus performantes de l'ordre de 650 GPa pour le module d'Young et de 4000 MPa pour la contrainte à la rupture.

### 1.3.2.3 Fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées

Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées sont généralement connues sous le nom de “Kevlar”, nom commercial de la fibre mise au point par Dupont de Nemours (USA), et commercialisée en 1972. Ce sont des fibres polyaramides ou polyamides aromatiques de synthèse dont la structure est constituée de noyaux benzéniques reliés par des groupes CO et HN :



**Figure 1.4** Structure des fibres polyaramides ou polyamides aromatiques

L'élaboration des fibres aramides est effectuée par synthèse à basse température ( $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), puis par filage en solution. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité.

### 1.3.2.4 Fibres céramiques

Diverses fibres de matériaux réfractaires ou céramiques (carbures, borures, nitrures, etc.) peuvent être élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Actuellement, les fibres obtenues par ce procédé, et faisant l'objet d'une production, sont :

- Les fibres de bore (B),
- Les fibres de carbure de bore ( $\text{B}_4\text{C}$ ),
- Les fibres de carbure de silicium ( $\text{SiC}$ ),
- Les fibres de bore-carbure de silicium, appelées BorSiC.

Les fibres sont en réalité de gros filaments (diamètre de l'ordre de  $100\text{ }\mu\text{m}$ ), formés d'une âme (le fil support) en tungstène ou en carbone d'un diamètre d'environ  $10\text{ }\mu\text{m}$ , recouverts de :

- Une couche de bore d'épaisseur environ  $40\text{ }\mu\text{m}$  (fibres de bore),
- Une couche de bore d'épaisseur  $40\text{ }\mu\text{m}$  et d'une couche de carbure de bore de  $4\text{ }\mu\text{m}$  d'épaisseur (fibres B- $\text{B}_4\text{C}$ ),
- Une couche de carbure de silicium (fibres  $\text{SiC}$ ),
- Une couche de bore et d'une couche de carbure de silicium (fibres BorSiC).

### **1.3.2.5 Fibres synthétiques thermostables**

Les fibres synthétiques thermostables sont des fibres organiques obtenues par synthèse, et qui conservent leurs caractéristiques mécaniques à températures élevées. Associées à des résines thermostables, elles permettent d'obtenir des matériaux dont les caractéristiques mécaniques en température sont conservées.

Les caractéristiques mécaniques de ces fibres sont toutefois nettement plus faibles que celles des fibres usuelles. Elles sont utilisées dans les isolants électriques et thermiques, les protections thermiques : boucliers de missiles, cônes de rentrée de véhicule spatial, etc.

### **1.3.2.6 Autres fibres**

Il existe diverses autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faible module d'élasticité et contrainte à la rupture, à l'exception des fibres métalliques. Généralement, leur utilisation est réservée à une recherche de :

- Produits à bas prix de revient,
- produits à haute isolation thermique,
- produits à bonne conductibilité thermique ou électrique,
- produits à haute absorption acoustique,

Parmi ces fibres nous avons :

1. Les fibres d'origine végétale, telles que le bois utilisé sous forme de fibres orientées, le sisal, le jute, le lin, etc.
2. Les fibres synthétiques, telles les fibres polyester (tergal, dacron, térylène, etc.), les fibres polyamides, les fibres polyéthylène, les fibres polypropylène, etc.
3. Les fibres métalliques, comme les fibres d'acier, de cuivre, d'aluminium. Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques pour leurs bonnes conductibilités thermique et électrique et leurs caractéristiques thermomécaniques élevées.

### **1.3.3 Fibres sous forme surfacique**

Les fils peuvent être utilisés pour réaliser des formes surfaciques de divers types : mats, tissus ou rubans, essentiellement développés dans le cas de fibres de verre.

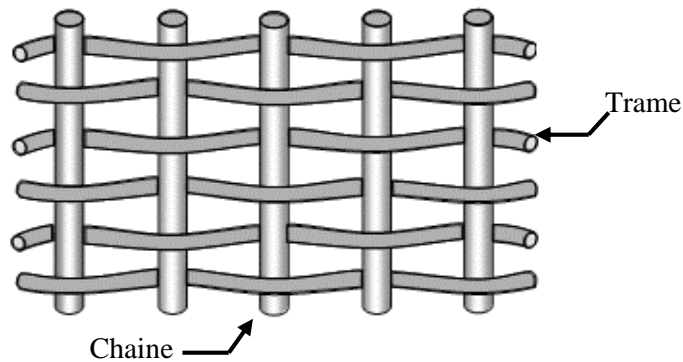
### 1.3.3.1 Les mats

Les mats sont des nappes de fils continus ou discontinus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle. Ils sont maintenus ensemble par un liant soluble ou non dans les résines, suivant la mise en œuvre. L'absence d'orientation préférentielle des fibres conduit à une isotropie des propriétés mécaniques du mat dans son plan.

### 1.3.3.2 Les tissus et rubans

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, de mèches, ... etc, réalisé sur un métier à tisser. Il est constitué de :

- chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu,
- d'une trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.

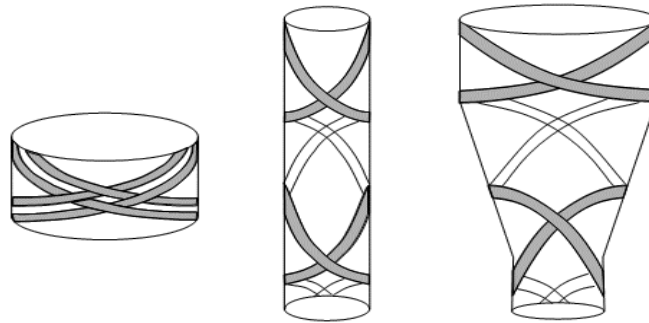


**Figure 1.5** Chaîne et trame d'un tissu

### 1.3.3.3 Structure tissées multidirectionnelles

#### 1.3.3.3.1 Tresses et préformes

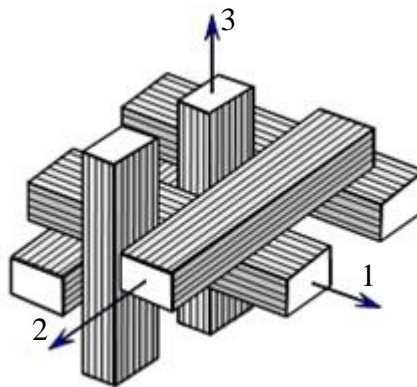
Il est possible de réaliser des tresses ou préformes par tissage cylindrique ou conique d'un tissu tubulaire. Les fils s'entrecroisent en hélice, dont la variation du pas permet d'ajuster la tresse à la forme qu'elle doit recouvrir. Il est ainsi possible de réaliser une pièce de révolution ayant un diamètre variable le long de son arc. Par ce procédé, divers tissus peuvent être obtenus en forme de "chaussettes" coniques, ogivales ou hémisphériques, utilisées pour satisfaire aux besoins de la construction aéronautique (cône de rentrée, tuyères, etc).



**Figure 1.6** Tissage cylindrique et conique

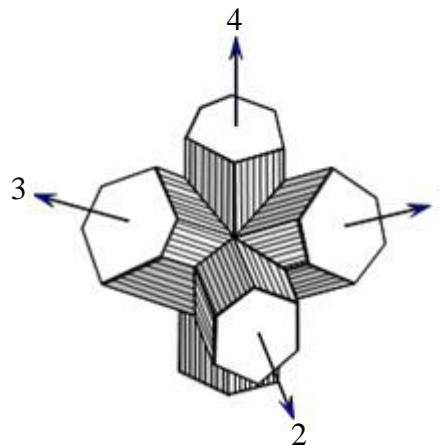
### 1.3.3.2 Tissus multidirectionnels

Des tissages volumiques sont également utilisés, et caractérisés par le nombre de directions de tissage : 3D, 4D, etc. La structure la plus simple est celle du tissage 3D, où les fils sont disposés suivant 3 directions orthogonales.



**Figure 1.7** Tissage 3D orthogonal

Dans un tissage 4D, les fils sont disposés suivant 4 directions (figure 1.8). L'objectif est d'obtenir des matériaux composites isotropes.



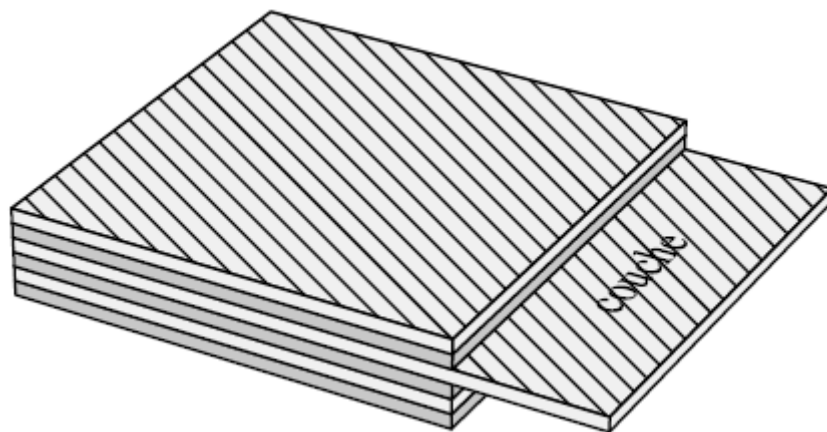
**Figure 1.8** Tissage 4D



## 1.4 Structure composites stratifiées

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir.

Les matériaux composites sont modélisés à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique associée aux constituants de base du composite (le renfort et la matrice) et l'échelle macroscopique liée à la structure. À cette échelle, appelée mésoéchelle, une structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces inter-laminaires. La couche et l'interface sont les deux entités appelées méso constituants, comme illustré sur la figure suivante, qui forment les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées. L'interface inter laminaire est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre. En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle particulier. L'étude des composites jusqu'à la phase ultime de la rupture montrera l'utilité d'employer un modèle d'interface pour simuler les phénomènes de délaminage (séparation progressive des couches).



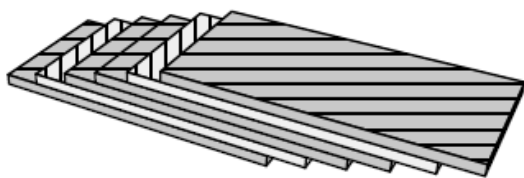
**Figure1.9** Stratifié constituée de couches parfaitement liées

### 1.4.1 Désignation des structures stratifiées

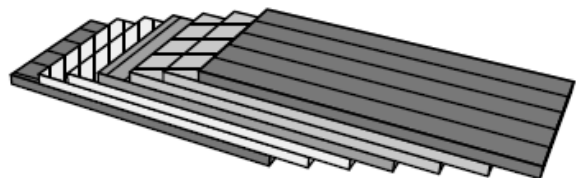
Les structures stratifiées à base de tissus unidirectionnels sont constituées d'un nombre de couches ou plis. L'épaisseur d'une couche dépend de son grammage. L'épaisseur de chacune des couches est généralement très faible, de l'ordre de 0,125 mm pour un matériau Carbone Epoxy de type Aéronautique et 0,3 mm pour ceux qui sont utilisés dans l'Industrie Nautique. Ces structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale.

La désignation des structures stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence. Un stratifié est codifié de la façon suivante :

- Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x. Sur les Figures 1.10 (a) et 1.10 (b), les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut ;
- Les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / » comme l'exemple de la Figure 1.10 (a) :  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$  ;
- Les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme l'exemple de la Figure 1.10 (b) :  $[0/452/90/-452/0]$  ;
- En cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche ;
- En cas de structures symétriques, la moitié est codifiée et le symbole s indique la symétrie :  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$  devient  $[-45/45/-45]s$  et  $[0/45/45/90/-45/-45/0]$  devient  $[0/452/90/-452/0]$ .



(a)  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$



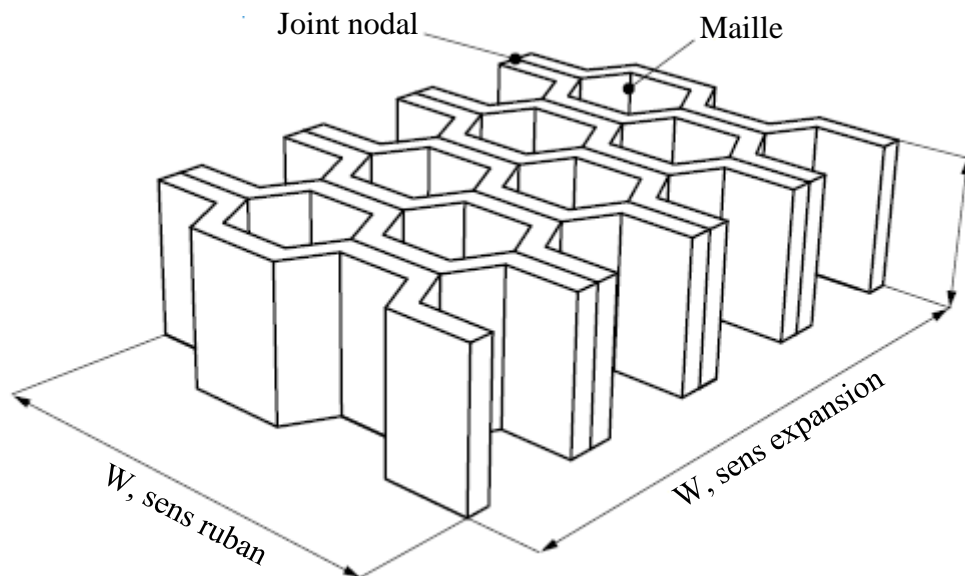
(b)  $[0/45/45/90/-45/-45/0]$

**Figure 1.10** Désignations des stratifiées

### 1.4.2 Désignation des structures sandwiches

Les structures composites subissant des sollicitations de type flexion ou torsion sont généralement construites en matériaux sandwichs. Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées. Une âme nid d'abeilles est présentée sur la figure 1.11.

Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan.



**Figure 1.11** Désignation d'une âme nid d'abeilles

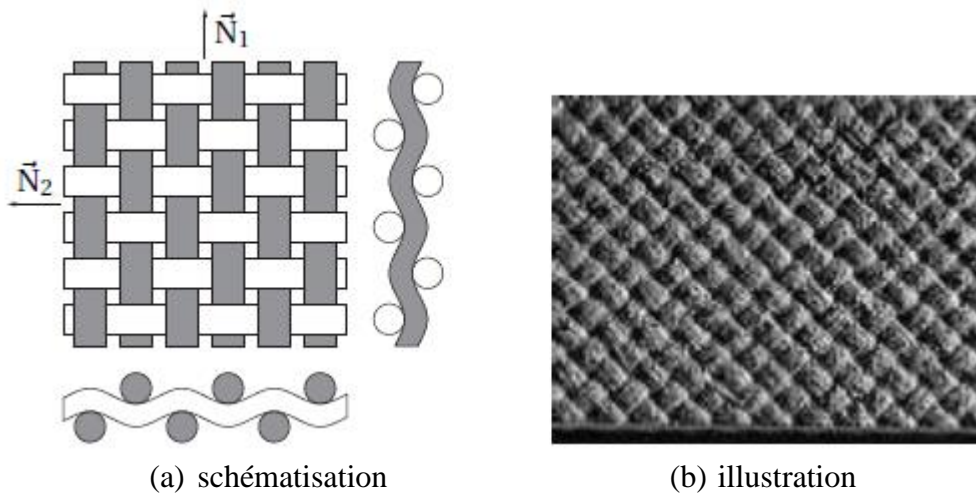
### 1.5 Structures composites tissées multidirectionnelles

Il est possible de créer des pièces en matériaux composites de type tridimensionnelles massives ou des formes de révolution. Des tissages volumiques de type 2D (deux directions de renfort), 3D Evolutif (deux directions de renfort et un piquage dans la troisième direction), 3D (trois directions de renfort), 4D (quatre directions de renfort), ou plus sont élaborés dans l'industrie aéronautique. Il est également possible de tisser des cylindres ou des cônes afin de réaliser des réservoirs ou des tuyères. Dans ces derniers cas, les fils de renforts s'entrecroisent en hélice. Quelques exemples de matériaux composites multidirectionnels sont maintenant

présentés. Les structures massives sont principalement utilisées dans le domaine aéronautique et restent très marginales en raison de leur coût de production très élevé.

### 1.5.1 Structure 2D SiC-SiC

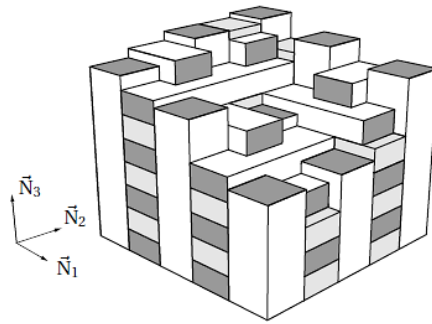
Le matériau composite 2D tissé SiC-SiC (fibre-céramique/matrice-céramique) a deux directions de renfort comme illustré sur les figures 1.12 (a) et 1.12 (b). Ce type de matériau est destiné à des utilisations thermostructurales (température d'utilisation de 1 000°C à 1 400°C). Ce type de matériau est réalisé par la Société Européenne de Propulsion / Groupe Snecma. Il est étudié pour être utilisé dans les parties chaudes des structures : moteurs d'avions, moteurs fusées et protections thermiques.



**Figure 1.12** 2D Sic-Sic, matériau avec deux directions de renfort

### 1.5.2 Aerolor 32 C/C

L'Aerolor 32 est un matériau thermostructural réalisé par l'Aérospatiale. C'est un composite à renfort et matrice de carbone renforcé par trois directions de fibres, comme indiqué sur la figure 1.13. La matrice est infiltrée dans les blocs préalablement tissés au moyen de mèches de 3000 filaments.



**Figure 1.13** Géométrie tri-orthogonale de l'Aerolor 32

### 1.5.3 3D-Evolutif C/C

Le 3D-Evolutif est un matériau thermostructural réalisé pour l'Aérospatiale. Le concept de cette architecture fibreuse permet de concevoir des pièces de formes complexes. Il permet également une évolution des taux et directions de renforts fibreux en fonction des besoins mécaniques et thermiques. Le matériau avec quatre directions de renfort dans le plan a un comportement mécanique global de type élastique fragile, les niveaux de non linéarité étant très faibles. C'est un composite à renfort et matrice de carbone renforcé par deux directions de fibres. Un tissage suivant la troisième direction de l'espace renforce le tissage bidirectionnel. Les renforts et la matrice du 3D-Evolutif C/C sont en carbone. Les constituants sont :

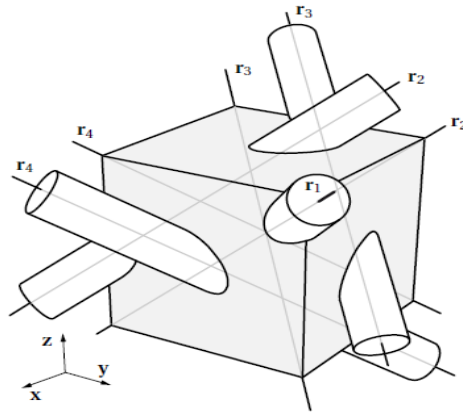
- la fibre en carbone ;
- la matrice RA 101 carbonisée. C'est un carbone vitreux déposé par des phases successives d'imprégnation et de pyrolyse.

La méthode de tissage consiste à déposer des fils relativement jointifs de façon à réaliser des couches. Le nombre de couches et les orientations des renforts sont déterminés en fonction des propriétés thermomécaniques recherchées. On obtient ainsi un empilement de type multicouche sans liant. Un piquage de mèches dans la troisième direction assure le maintien et le tassement du substrat fibreux. Ce piquage représente un faible taux volumique du total des fibres du composite. La matrice est ensuite imprégnée au substrat et pyrolysée suivant des séries de cycles thermiques.

Le composite est légèrement dissymétrique puisque sur la face supérieure sont visibles les retours de piquage alors que la face inférieure est usinée au ras des picots lui donnant ainsi un aspect plus régulier.

#### 1.5.4 Sepcarb(r) 4D C/C

Le Sepcarb(r) 4D est un matériau thermostructural réalisé par la Société Européenne de Propulsion. C'est un composite à renfort et matrice de carbone renforcé par des fibres suivant quatre directions de l'espace. Les renforts sont notés  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  et  $r_4$  sur la figure 1.14.



**Figure 1.14** Sepcarb(r) 4D C/C renfort carbone/matrice carbone : tissage suivant quatre directions de l'espace

## **Etude vibratoire des plaques composites minces**

### **2.1 Introduction**

Dans un contexte d'ingénierie, nous avons généralement des connaissances considérables sur les équations de la physique qui gouvernent le comportement des systèmes de structures. Nous sommes en mesure de tester un système à la fois analytiquement et dans les laboratoires, et on a donc une bien meilleure chance d'évaluer la robustesse d'un système, en particulier sa tendance à la ruine. Cependant, des circonstances imprévues surviennent coïncidant avec des négligences dans la prédiction du comportement des structures.

L'étude des vibrations d'une structure a pour objectif de déterminer son comportement aux chargements dynamiques, dans le but de comprendre et de contrôler les problèmes typiques liés aux mouvements vibratoires (fatigue, résonance, bruit..). La première étape consiste à évaluer la réponse de la structure en fonction de tous les paramètres influant sur cette réponse. Selon les hypothèses retenues, la formulation permet de tenir compte du comportement du matériau, des défauts et des endommagements, de la nature du chargement et éventuellement de l'amortissement externe et de l'effet du milieu, en exprimant la relation entre ces paramètres et les inconnues du problème, champ des contraintes (approche contraintes) ou des déplacements (approche déplacements), sous forme d'équations aux dérivées partielles.

### **2.2 Analyse vibratoire des plaques composites**

Beaucoup de méthodes analytiques et d'analyse ont été utilisées pour étudier les vibrations de plaques et coques. Dans ce type d'analyse, les difficultés analytiques dans la résolution des équations ont jusqu'à maintenant été surmontées que dans certains cas particuliers, tandis que le cas général n'a pas encore reçu un traitement satisfaisant. L'approche par éléments finis s'est avérée être une méthode puissante et largement applicable pour l'analyse des problèmes complexes de vibration pour lesquels des solutions analytiques sont presque impossibles à trouver. Une variété de nouveaux éléments finis ont été proposés sur la base de différentes théories de structure, fonctions d'interpolation et procédures de formulation afin d'obtenir une prédiction plus précise de la vibration libre de plaques et coques.

Un certain nombre de théories existent dans la littérature pour l'analyse des structures composites. Kirchhoff [3] (1850) a établi de façon correcte pour la première fois des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque. Lord Rayleigh [4] (1877) ou encore Ritz [5] (1909), furent parmi les premiers à formuler la théorie qu'on connaît aujourd'hui. Ritz, a amélioré la procédure de Rayleigh en se basant sur les fonctions de forme qui caractérisent le mouvement dynamique propre, chacune avec un coefficient d'amplitude indépendant. Cette procédure est appelée « Méthode de Rayleigh Ritz ou Méthode de Ritz ». C'est la méthode approximative la plus populaire et la plus utilisée dans l'analyse des structures en vibrations.

En 1921 Timoshenko [6,7] montre que la prise en compte des effets respectifs de l'inertie rotatoire et du cisaillement ont pour incidence de réduire sensiblement les fréquences propres de vibration des poutres. Dans le même contexte, l'étude vibratoire des plaques a évolué en injectant des hypothèses supplémentaires telles que la prise en compte de l'effet de cisaillement pour le cas des plaques épaisses. Ce qui a conduit à des modèles plus raffinés comme celui de Love [8] (1944) qui appliqua les travaux de Kirchhoff aux plaques épaisses.

Depuis lors, de très nombreuses études ont été menées, surtout avec le développement des industries navales et aéronautiques. C'est ainsi que dans les années de l'après-guerre, de nouvelles théories des plaques minces élastiques furent élaborées par Reissner [9] (1945) qui fut l'un des premiers à proposer une extension de la théorie des plaques avec cisaillement dans le cas statique. Ensuite, Uflyand [10] 1948 et Mindlin [11] (1951). C'est ainsi qu'ils proposèrent pour les plaques une nouvelle approche théorique rigoureuse. Hearmon [12] (1959) a appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz pour déterminer les caractéristiques dynamiques des plaques symétriques orthotropes à différentes conditions aux frontières. En plus, Reddy [13] (1984) a développé la théorie de layerwise pour l'analyse de la vibration libre des plaques stratifiées. Cette méthode de résolution, la plus courante et la plus sophistiquée, se base essentiellement de divers effets tridimensionnels. D'autre part, Numayr et al. [14] (2004) ont utilisé la méthode des différences finies pour montrer que la prise en compte des effets de l'inertie de rotation et de cisaillement transverse affecte les fréquences propres de vibration des plaques minces et épaisses.



## 2.3 Matériaux des plaques composites

### 2.3.1 Type des matériaux

#### 1. Matériau homogène

Un matériau est dit homogène s'il existe une configuration particulière qu'on prend pour référence dans laquelle la masse volumique est constante et si les lois de comportement sont indépendantes de la particule considérée.

#### 2. Matériau hétérogène

Un matériau est dit hétérogène s'il existe en 2 deux points différents, des propriétés différentes. La relation du comportement dépend du point étudié.

#### 3. Matériau isotrope

Un matériau est dit isotrope si les propriétés sont les même dans toutes les directions.

#### 4. Matériau isotrope transverse

C'est un matériau possédant une direction privilégiée, c'est-à-dire qu'il existe un axe de symétrie par rapport à une droite.

#### 5. Matériau orthotrope

Les propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux. Deux types d'orthotropie existent :

- Une orthotropie de géométrie
- Une orthotropie de matériau

#### 6. Matériau anisotrope

Les matériaux anisotropes sont des matériaux dont les propriétés varient selon une direction considérée mais ils ne présentent pas de plans de symétrie. La loi de Hooke peut être exprimée par : 
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Les tenseurs des rigidités  $C_{ijkl}$  comporte  $3^4 = 81$  composantes et de même pour  $S_{ijkl}$

La symétrie des tenseurs de contraintes  $\sigma_{ij}$  et de déformation  $\epsilon_{ij}$  réduit le nombre des constantes élastiques à 21 pour l'anisotropie complète. La loi de Hooke relie les contraintes aux déformations par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité dans le cadre des déformations élastiques.

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad i=1, 2, 3 \quad (2.2)$$

- Où  $C_{ijkl}$  : Le tenseur de rigidité  
 $S_{ijkl}$  : Le tenseur de souplesse  
 $\sigma_{ij}$  : Le tenseur de contraintes  
 $\epsilon_{ij}$  : Le tenseur des déformations

### 2.3.2 Relation déformations – contraintes d’un matériau orthotrope

En général pour un matériau orthotrope, les 5 coefficients élastiques ( $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ) et la géométrie de la plaque sont des données d’entrée pour l’analyse vibratoire. Un milieu orthotrope est caractérisé par 9 modules d’élasticité, La relation déformations – contraintes s’écrit :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Avec : 1, 2 et 3 directions de symétrie,

$E_i$  : Module d’ Young dans la direction  $i$  du matériau,

$\nu_{ij}$ : Coefficient de poisson ou coefficient de contraction  $i$  ,  $j = 1,2,3$  avec  $i \neq j$  dans le plan correspondant,

$G_{ij}$  : Module de Coulomb ou de rigidité au cisaillement dans le plan correspondant, ( $i, j$ )  $i, j = 1, 2,3$  avec  $i \neq j$

$\epsilon_i$  : Déformation relative dans la direction  $i$ ,

$\sigma_i$  : Contrainte dans la direction  $i$ ,

$\tau_{ij}$  : Contrainte de cisaillement dans le plan correspondant.

### 2.3.3 Expression des constantes $C_{ij}$ d'un matériau orthotrope

Le comportement est décrit par 9 modules indépendants ou paramètres de l'ingénieur :

- 3 modules d'Young:  $E_1, E_2, E_3$ .
- 3 coefficients de Poisson :  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$
- 3 modules de cisaillement :  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$ .

Il existe un lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson  $\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}$

### 2.3.4 Relation déformations-contraintes d'un matériau orthotrope dans un état plan de contraintes

Dans la plupart des cas, le matériau n'est utilisé que dans le plan, et sa relation de Hooke généralisée se simplifie grandement. Ainsi pour un matériau anisotrope ayant deux plans de symétrie perpendiculaires en état de plan de contraintes, il y a seulement quatre coefficients de rigidité indépendants,  $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ . Dans ce cas, on a besoin de quatre modules élastiques indépendants. Lorsque s'exercent simultanément les contraintes  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\tau_{12}$ , les déformations résultantes sont la somme des déformations provenant des chargements élémentaires. On obtient la matrice de souplesse :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

La relation (2.4) peut être inversée. On obtient la matrice de rigidité.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Les constantes qu'il est nécessaire de déterminer sont alors au nombre de quatre : Le module d'Young sens  $E_1$  ; Le module d'Young sens transverse  $E_2$ , le coefficient de cisaillement  $G_{12}$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ . Le module de cisaillement  $G_{12}$  est défini par la relation :

$$\tau_{12} = 2G_{12} \varepsilon_{12} .$$

Il est important de remarquer que pour un matériau orthotrope le module de glissement est une caractéristique indépendante des modules  $E_1$  et  $E_2$ . Il doit être déterminé expérimentalement.

## 2.4 Théorie des plaques minces

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. Elle s'inspire de la théorie des poutres.

### 2.4.1 Théorie classiques des plaques minces

Historiquement, le premier modèle des plaques minces a été développé par Lagrange, Poisson, et Kirchhoff. Aujourd'hui on l'appelle le modèle de Kirchhoff ou simplement plaque de Kirchhoff. Il est dépendant uniquement d'une seule variable : le déplacement vertical  $w(x, y, t)$ . On qualifie ce modèle de "flexion pure". Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur [17,18]. L'hypothèse adoptée est celle de Love Kirchhoff [19] de contraintes planes, les déformations dues au cisaillement sont négligées.

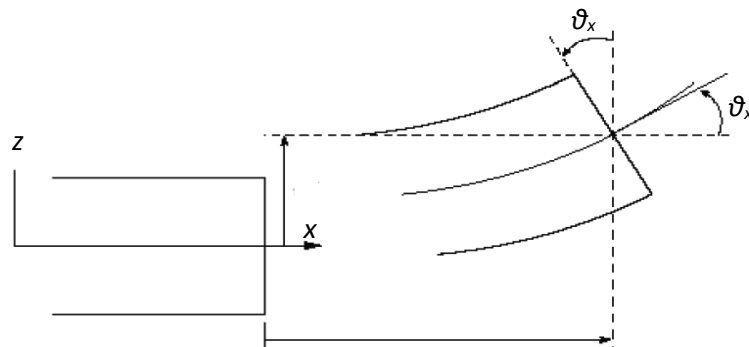


Figure 2.1 Cinématique de Love-Kirchhoff

Les déplacements  $u_i = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$  s'écrivent :

$$u(x, y, z, t) = u_{\alpha=x}^0(x, y, t) - z \frac{\partial \omega(x, y, z, t)}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$v(x, y, z, t) = v_{\beta=y}^0(x, y, t) - z \frac{\partial \omega(x, y, z, t)}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (2.8)$$

Ce champ de déplacement est tel qu'il vérifie déjà les conditions aux limites mécaniques sur les surfaces de la plaque  $z = \pm h/2$  puisque on a  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz}$  (2.9)

De plus, les fonctions  $u^0$  et  $v^0$  sont arbitraires puisqu'elles n'apparaissent pas dans tous les calculs qui suivent, donc nous les prendrons nulles comme il est fait classiquement. Dès lors, à l'aide de la loi de Hooke et de  $u$  et  $v$ , on peut exprimer les équations d'équilibre uniquement en fonction de la déflexion  $w$ , et donc en combinant ces trois équations : on en déduit l'équation différentielle classique :  $D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$  (2.10)

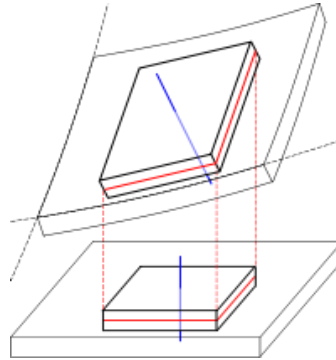
#### 2.4.1.1 Hypothèses de la théorie classiques des plaques

La théorie classique des plaques ou théorie de Love-Kirchhoff suppose que :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions latérales. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan feuillet moyen.
- le matériau constituant la plaque est élastique, homogène et isotrope.
- La plaque est initialement horizontale.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Cette hypothèse permet de supposer que le mouvement de tous les points se trouvant sur la normale au feuillet moyen est le même, c'est-à-dire que :  $w(x, y, z) = w(x, y)$ . Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse. On a dans ce cas :  $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
- Les contraintes  $\sigma_{zz}$  normales dans la direction transversale sont négligeables par rapport aux composantes de contraintes, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout point  $z$  donc  $\sigma_{zz} = 0$
- la plaque est symétrique durant par rapport à son feuillet moyen durant sa fabrication.

- L'épaisseur  $h$  de la plaque est petite comparée à ses autres dimensions en général, on doit avoir  $h \leq 0.1 \inf(a,b)$ .

La figure suivante montre la déformation d'une plaque mince (contour gris) avec mise en évidence du déplacement d'un élément de matière (contour noir), de son feuillet moyen (rouge) et de sa fibre normale (bleue).



**Figure 2.2** Déplacement d'un élément de la plaque

### 2.4.1.2 Domaine d'application

La théorie de Kirchhoff est généralement admise comme étant la théorie des plaques minces dont la caractéristique principale, est de permettre l'expression des déformations et des contraintes en fonction de la flèche  $w$  de la surface moyenne.

La validité de la théorie des plaques de Kirchhoff dépend du facteur de l'élançement de la plaque. Une plaque est dite mince si son facteur d'élançement est  $a/h > 20$  où  $a$  sont la dimension caractéristique dans le plan  $xy$  et  $h$  l'épaisseur de la plaque.

### 2.4.2 Conventions et définitions

On considère un élément de plaque rectangulaire d'épaisseur  $h$  uniforme, de longueur  $dx$  et de largeur  $dy$ . On prend le plan  $xy$  comme feuillet moyen de la plaque, supposé initialement horizontal avant l'application d'une charge. On fait coïncider les axes  $ox$  et  $oy$  avec les bords de la plaque et on oriente l'axe  $z$  vers le haut.

Soient  $Q_x$  et  $Q_y$  les intensités des efforts tranchants suivant  $ox$  et  $oy$  ;  $N_x$ ,  $N_y$  les intensités des efforts normaux suivant les axes  $ox$  et  $oy$ ,  $N_{xy}$  l'intensité de l'effort de cisaillement sur les faces  $x = 0$  et  $y = 0$  (avec  $N_{xy} = N_{yx}$  puisque  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ). Ces quantités ont la dimension d'une force par unité de surface.

Soit  $q = q(x, y)$  est l'effort extérieur transversal appliqué à la plaque par unité de surface. Soient  $M_x, M_y$ , les intensités des moments de flexion et  $M_{xy}$  l'intensité du moment de torsion sur les faces  $x = 0$  et  $y = 0$  (avec  $M_{xy} = M_{yx}$  puisque  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ).

### 2.4.3 Equation d'équilibre

Considérons des petites déflexions et écrivons l'équilibre des forces suivant l'axe  $x = 0$ , il vient d'après

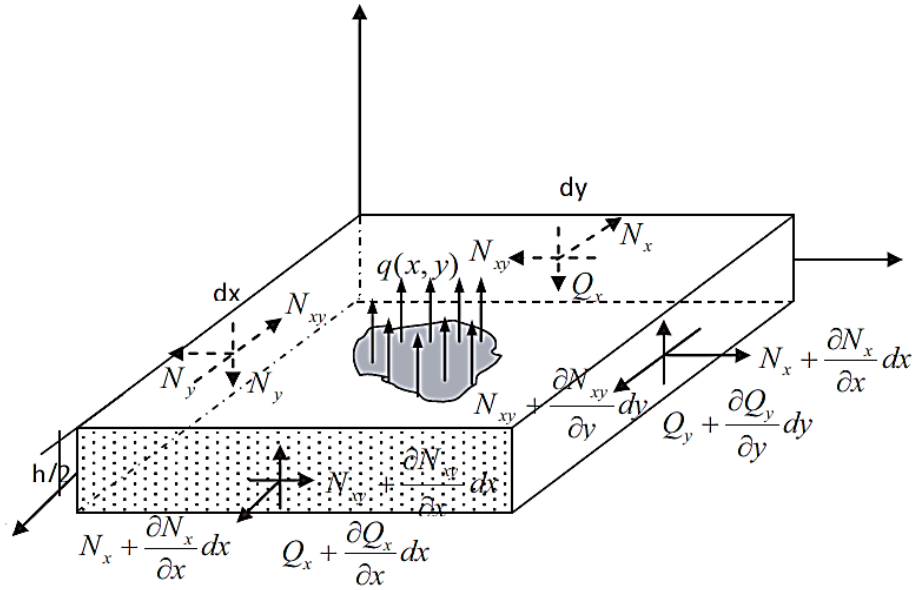


Figure 2.3 Forces agissant sur l'élément plaque

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx - N_y dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left( N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x^2} dx \right) \\
 & - N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + \left( N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial y^2} dy \right) - N_{xy} dx \frac{\partial w}{\partial x} - N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} \\
 & + \left( N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} dy \right) + \left( N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} dx \right) + q dx dy = \rho h dx dy \frac{\partial w^2}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Où  $\rho$  est la masse volumique et  $\frac{\partial w^2}{\partial t^2}$  l'accélération suivant l'axe  $Oz$ .

En développant (2.1) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à  $dx dy$ , on obtient

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.12}$$

## Chapitre 2 : Etude vibratoire des plaques composites minces

Cette équation peut encore se simplifier si l'on considère les équations d'équilibre de l'élasticité tridimensionnelle. 
$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Avec  $(u_i)_i$  ( $u, v, w$ ) et  $u, v$  les déplacements suivant les axes  $ox$  et  $oy$  respectivement.

Quand les forces d'inertie dans le plan de la plaque sont négligées et que les contraintes  $\sigma_{yz}, \sigma_{zx}$  sont petites par rapport aux autres contraintes, alors :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

Comme ces équations doivent être satisfaites pour toute épaisseur infinitésimale  $dz$  de l'élément de plaque, on peut intégrer ces deux équations suivant l'épaisseur  $h$  de la plaque, d'où

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

En utilisant (2.5), l'équation (2.2) devient

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial w^2}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial w^2}{\partial y \partial x} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

L'équilibre des forces suivant les deux axes  $ox$  et  $oy$  s'écrit

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( Q_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( Q_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( Q_x \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( Q_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

Où on a négligé les termes  $N_x, N_y$  et  $N_{xy}$  car ils conduisent à des différentielles d'ordre plus grand que les autres. Les termes de droite dans les équations (2.18) représentent l'inertie de rotation de l'élément de plaque.



#### 2.4.4 Cinématique de déformation

L'hypothèse de la théorie des poutres selon "les sections droites transversales planes restent planes" est généralisée pour les plaques de la façon suivante :

Les déformations sont telles que les droites, initialement normales à la surface moyenne, restent des lignes droites et normales à la surface moyenne.

On a ainsi sur la figure

Avec  $u$  le déplacement longitudinal dû aux efforts normaux suivant  $Ox$ .

Le mouvement d'un point  $O$  par exemple est alors décrit par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.19)$$

On peut dès lors en déduire les déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.20)$$

#### 2.4.5 Calcul des moments et des efforts

On suppose que les contraintes  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{zx}$  sont petites par rapport aux contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ . Par conséquent la loi de Hooke se résume aux équations :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \quad (2.21)$$

Les moments et les forces sont alors obtenus en intégrant les contraintes normales sur l'épaisseur de la plaque pour les efforts, et à intégrer ces contraintes multipliées par  $z$  pour les moments, soit :

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sans remonter trop loin dans la théorie de la mécanique des milieux continus, et sans rentrer dans les détails des champs de déplacements et de contraintes, la loi de Hooke et les équations de Lamé-Navier permettent d'écrire les moments dans le plan de la plaque.

Ainsi l'expression des moments

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad M_{xy} = -2(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \quad (2.23)$$

Où  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$  le coefficient de rigidité en flexion de la plaque.

Remplaçons les moments dans (2.22) par leurs expressions données par (2.23) et on reportant dans (3.5)

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (2.24)$$

On obtient ainsi l'équation classique de la théorie des plaques qui pour la majorité des applications techniques est suffisante pour l'étude des problèmes de flexion.

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (2.25)$$

On obtient ainsi l'équation classique de la théorie des plaques qui pour la majorité des applications techniques est suffisante pour l'étude des problèmes de flexion.

$$-D \nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.26)$$

Si on ne s'intéresse qu'aux problèmes de flexion pure, en supposant les effets de tension et de flexions découplées, l'approximation de l'élasticité linéaire aboutit à l'équation suivante :

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (2.27)$$

Où  $\rho$  la masse volumique du matériau constituant la plaque,  $D$  le module de rigidité en flexion,  $h$  l'épaisseur de la plaque,  $q$  la force imposée et enfin  $\nabla$  l'opérateur  $\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)$ .

## 2.5 Vibration d'une plaque rectangulaire orthotrope

Dans le cas d'un stratifié orthotrope (stratifié symétrique pour lequel  $D_{16} = D_{26}$ ), en l'absence de charges latérales ( $q = 0$ ) les relations fondamentales s'écrivent, sous la forme :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = I_{xy} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \quad (2.28)$$

Dans le cas où les termes d'inertie sont négligeables l'équation (3.57) se réduit à :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.29)$$

Pour un mouvement harmonique libre, on peut supposer que la fonction forme de la flèche est exprimée sous la forme suivante :

$$w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (2.30)$$

Où  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  est la fréquence de vibration, conduit en reportant (3.59) dans (3.57) à :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \rho_0 \omega^2 w = 0 \quad (2.31)$$

$$\left[ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right] + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.32)$$

Avec  $\rho_0 = \frac{\gamma h}{g}$

Introduction de l'opérateur L

$$L = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2.33)$$

$$Lw + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.34)$$

La solution  $w = [a \cos \omega t + B \sin \omega t] W(x, y) \quad (2.35)$

Avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

## 2.6 Formes des conditions aux limites

Ces conditions sont matérialisées par le blocage de certaines composantes (degrés de liberté) du déplacement. Les ouvrages reposent généralement sur des appuis (ou liaison externes) par l'intermédiaire d'appareils qui permettent de bloquer certains degrés de liberté du déplacement ou de la rotation. Ces appareils, conçus pour travailler dans les directions privilégiées, autorisent sélectivement le développement des effets structuraux dus aux charges statiques ou dynamiques.

On considère une plaque soumise à un environnement dynamique. Des forces volumiques, surfaciques ou ponctuelles s'appliquent sur elle et provoquent un mouvement que l'on peut décrire par des déplacements, des vitesses ou des accélérations en tous ses points. Quelque soit la nature de l'excitation et de la réponse, les équations qui régissent le mouvement sont des équations aux dérivées partielles. La notion d'appui, ou de conditions aux limites, est souvent réservée aux parties de la structure où le mouvement est bloqué. Toute structure est décomposée en deux parties :

1. Partie (interne) où les forces sont imposées : ce sont les forces d'excitation.
2. Partie (jonction) où le mouvement est imposé : ce sont les conditions aux limites.

Considérons une plaque homogène de dimensions  $a$ ,  $b$  et  $h$  et on suppose que ses cotés sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

Ces diverses conditions vont s'écrire sur les expressions des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$ , on aura ainsi pour la théorie classique de Love –Kirchhoff les cas suivants qui regroupe toutes les conditions classiques possibles pouvant s'appliquer sur un bord rectiligne défini par  $x = a$ .

### 2.6.1 Appui simple

Si le bord  $x = a$  de la plaque est simplement appuyé, la flèche  $w$  le long de celui-ci est nulle. Et en même temps, ce bord peut tourner librement autour de l'axe  $x$ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de moments de flexion  $M_x$  le long de ce bord.

$$(w)_{x=a} = 0 \quad , \quad (M_x)_{x=a} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$$

### 2.6.2 Bord fixe

Si le bord  $x = a$  de la plaque est encasté, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent au feuillet moyen fléchi, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. En conséquence le déplacement vertical et la rotation sont nuls.

$$(w)_{x=a} = 0 \quad ; \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0$$

### 2.6.3 Bord libre

Si le côté d'une plaque  $x = a$  est entièrement libre, il est naturel que le bord ne subit ni moments de torsion et de flexion, ni des forces de cisaillement vertical.

$$(M_x)_{x=a} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (Q_x)_{x=a} = \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0$$

## 2.7 Analyse et modélisation des plaques composites par éléments finis

La modélisation physique de systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approximée du problème physique. La Méthode des Eléments Finis *MEF* est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature.

La *MEF* est devenue un important outil d'analyse dans les projets modernes d'ingénierie, surtout après le développement des microordinateurs modernes. Aujourd'hui, cette méthode est utilisée avec succès sur nombreuses applications, telles que dans les problèmes de mécanique des structures et solides, d'endommagement, de fracture, de transfert de chaleur, d'électromagnétisme, d'acoustique et mécanique des fluides. Plusieurs logiciels d'éléments finis, tels que : Ansys, Nastran, Abaqus et Comsol Multiphysics sont largement employés pour la modélisation numérique des structures.

### **2.7.1 Modélisation des plaques composites par ANSYS**

Le programme ANSYS possède de nombreuses fonctionnalités d'analyse d'éléments finis, allant d'une analyse simple, linéaire, statique à une analyse dynamique complexe, non linéaire et transitoire. En ce qui suit les étapes typiques d'ANSYS :

1. Ansys Utility Menu :
  - Fichier - effacer et démarrer nouveau - ne pas lire le fichier – ok.
  - Fichier - modifier le nom du travail - entrer le nouveau nom du travail - xxxx ok.
  - Fichier - modifier le titre - entrer un nouveau titre - aaa – ok.
2. Ansys Main Menu – Preferences : sélectionnez - STRUCTURAL – ok.
3. Preprocessor :
  - Type d'élément de maillage : sélectionnez le type d'élément dans la table et les options requises.
  - Constantes réelles : donnez les détails tels que l'épaisseur, les zones, le moment d'inertie, ...etc requis en fonction de la nature du problème.
  - Propriétés du matériau : donner les détails tels que le module de Young, le coefficient de Poisson, etc, selon la nature du problème.
4. Modiling : créez la géométrie requise, comme les éléments des nœuds, la zone, le volume par utilisation des options appropriées.
5. Generate : éléments / nœuds utilisant l'outil Maillage si nécessaire (en 2D et en 3D)
6. Apply : conditions aux limites et les charges telles que les degrés de liberté, force et moments, pression etc.
7. Analysis type : choisir le type d'analyse « MODAL » puis le nombre de mode à calculer.
8. Solve : résoudre le problème.
9. General Post Processor : tracer / énumérer les résultats requis.
10. Plot ctrls : animation des déformées.

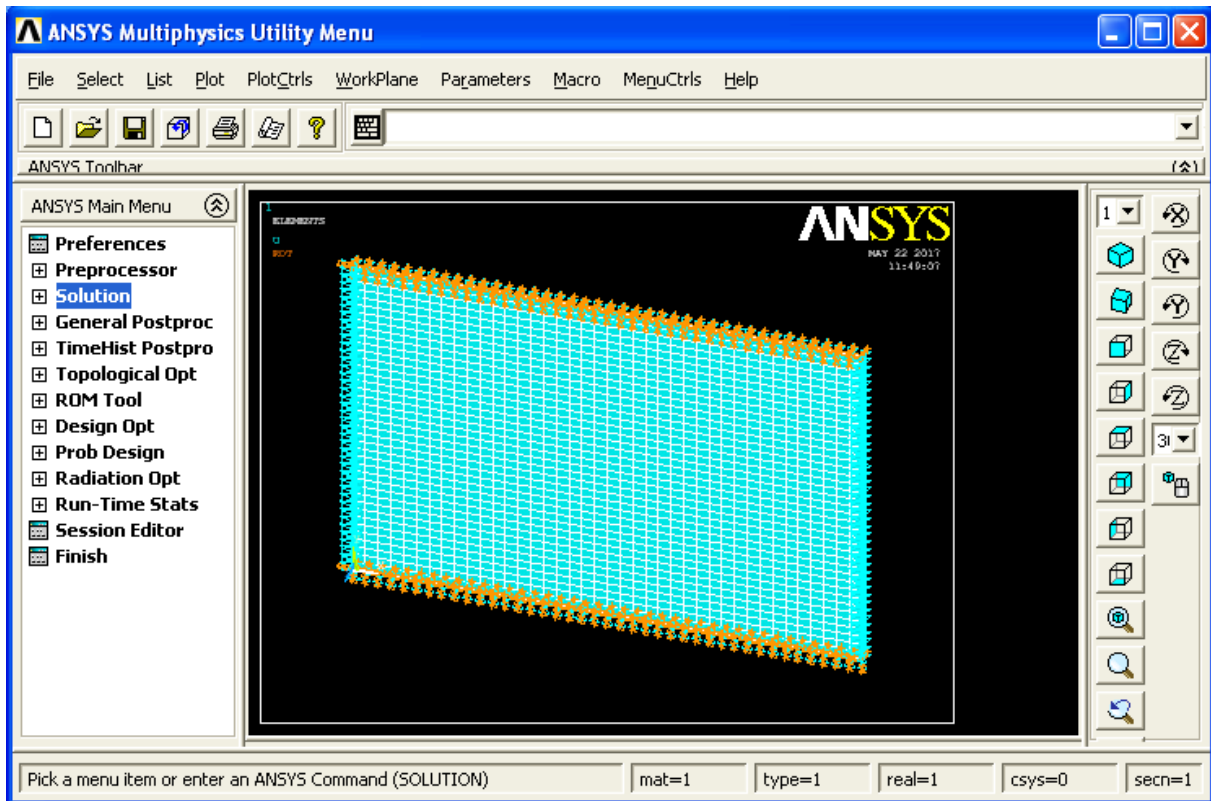


Figure 2.4 Logiciel ANSYS

### 2.7.1.2 Elément de maillage pour l'étude des plaques minces monocouches

SHELLE63 est capable de faire l'étude de flexion et l'étude membrane, tenant en compte les contraintes normales ou les contraintes réparties suivant un plan. L'élément a quatre nœuds et six degrés de liberté en chaque nœud, trois translations et trois rotations suivant les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

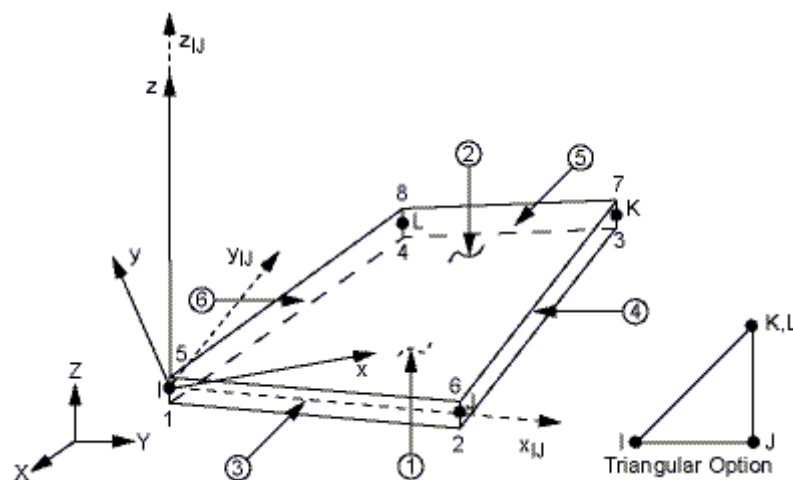


Figure 2.4 Géométrie de l'élément SHELL63

2.7.1.3 Elément de maillage pour l'étude des plaques minces multicouches

Shell99 peut être appliqué pour l'étude des plaques multicouches. Il permet d'analyser des plaques ayant jusqu'à 250 couches. L'élément a huit nœuds et six degrés de liberté pour chaque nœud, trois translations et trois rotations suivant les axes x, y et z.

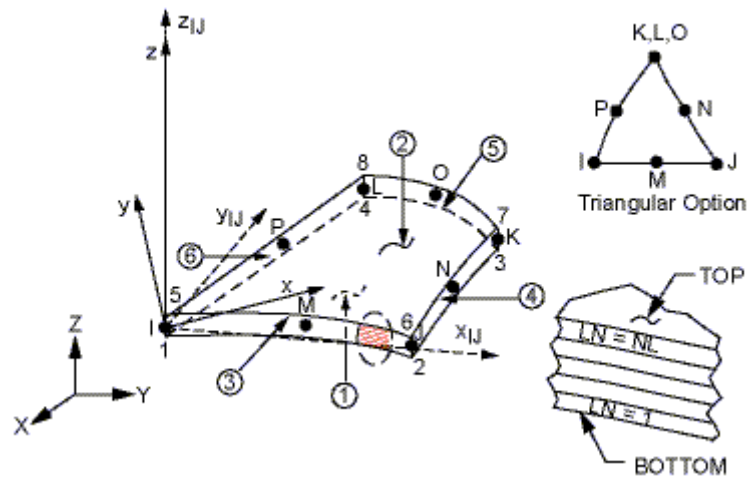


Figure 2.5 Géométrie de l'élément de maillage SHELL99



## **Résultats et discussion**

### **3.1 Introduction**

Afin de mieux comprendre le comportement vibratoire des plaques composites orthotropes, nous nous sommes intéressés, dans ce chapitre, à étudier par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel *ANSYS* l'influence des conditions d'appuis, des dimensions de la plaque composite, d'angle d'orientation des fibres, de la séquence d'empilement des plaques monocouches et stratifiés sur l'évolution des fréquences propres.

### **3.2 Vibration libre des plaques composites orthotropes**

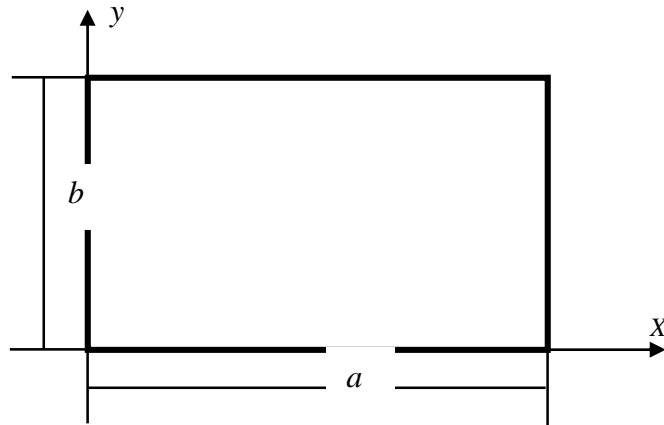
Le comportement vibratoire de plaques composites orthotropes est étudié dans cette section. L'étude concerne la variation des fréquences de pulsation propres pour différents rapports de dimension ( $R = a/b$ ) en fonction de :

- Différentes conditions aux limites.
- Différentes configurations avec angle d'orientation des fibres différent.
- Rapport largeur-sur-épaisseur de la plaque ( $a/h$ ).
- Empilement des plis pour les stratifiés.

#### **3.2.1 vibration des plaques orthotropes monocouches**

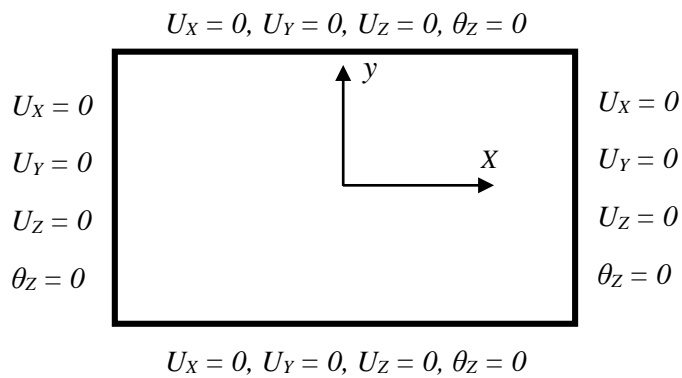
##### **3.2.1.1 Validation du programme**

Afin de vérifier la consistance des résultats obtenus par la méthode des éléments finis sous *ANSYS* pour le calcul des fréquences propres des plaques composites, on fait une comparaison avec les résultats obtenue par la méthode de Hearmon. L'étude concerne la variation des fréquences propres d'une plaque mince orthotrope en fonction du rapport de dimension  $R=a/b$  ( $R=1.25, 1.33, 1.5$ ) sous différentes conditions aux limites (*AAAA, EEEE, AAEA, EAEE, AEAE, AAEE*). La solution a été recherchée, pour la méthode numérique (logiciel *Ansys*®), en utilisant un maillage de  $80 \times 80$  et l'élément coque *SHELL63* pour les plaques composites minces.

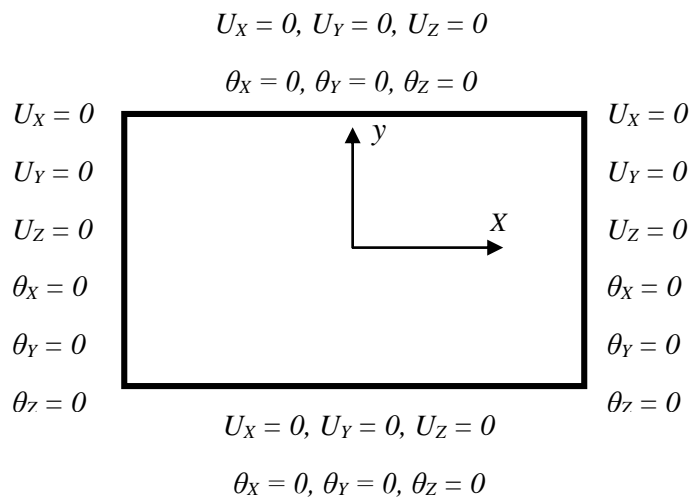


**Figure 3.1** Paramètres utilisés pour une plaque en vibration libre

Les conditions aux limites utilisées pour la plaque simplement appuyée (AAAA) sont montrées dans la figure (3.2), et la plaque encadrée (EEEE) sont montrées dans la figure (3.3).



**Figure 3.2** Conditions aux limites, plaque simplement appuyée (AAAA)



**Figure 3.3** Conditions aux limites, plaque encadrée (EEEE)

### Chapitre 3 : Résultats et discussion

La plaque à étudier est constituée du matériau à fibres unidirectionnelles (ORTHO-1) dont les propriétés sont rapportées dans le tableau (3.1).

Propriété et symbole	Valeur	Unité
$E_x$ ; Module d'Young dans la direction de la fibre	10	GPa
$E_y$ ; Module d'Young dans la direction transversale	5	GPa
$\nu_{xy}$ ; Coefficient de Poisson dans le plan	0.2	
$G_{xy}$ ; Module de cisaillement dans le plan	3.1	GPa
$\rho$ ; Densité	7800	Kg/m <sup>3</sup>

**Tableau 3.1** Propriétés du matériau ORTHO-1

Les résultats obtenus pour les six premiers modes en utilisant ANSYS pour les plaques simplement appuyées (AAAA) et encastées (EEEE) avec les trois rapports de dimension R ( $a/b = 1.25, 1.33, 1.5$ ) sont rapportés dans les tableaux comparatifs avec ceux qui trouvés par Hearmon (NM) [12] suivants :

$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)	
				ANSYS	NM
$R = 1.25$	AAAA	1	$\omega_{11}$	0.682	0.68
		2	$\omega_{21}$	1.655	1.66
		3	$\omega_{12}$	1.757	1.76
		4	$\omega_{22}$	2.729	2.73
		5	$\omega_{31}$	3.275	3.28
		6	$\omega_{32}$	4.349	4.35
	EEEE	1	$\omega_{11}$	1.245	1.25
		2	$\omega_{21}$	2.460	2.47
		3	$\omega_{12}$	2.614	2.63
		4	$\omega_{22}$	3.741	3.76
		5	$\omega_{31}$	4.375	4.4
		6	$\omega_{32}$	5.592	5.63

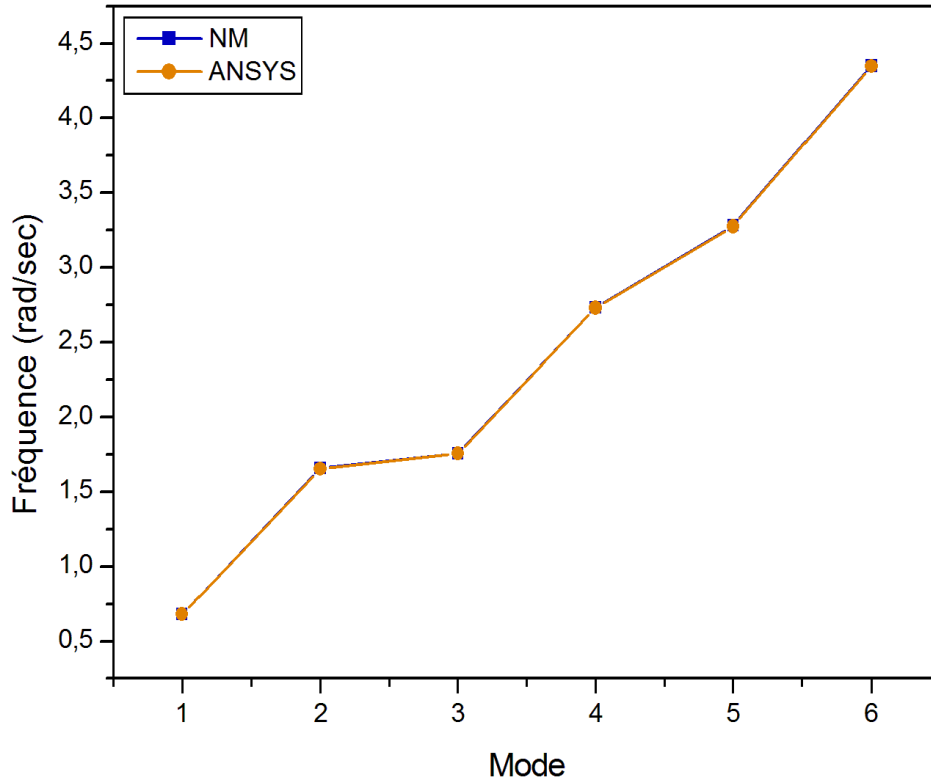
**Tableau 3.2** Comparaison des résultats ANSYS/Haermon pour les plaques AAAA et EEEE pour  $R=1.25$

$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)	
				ANSYS	NM
$R = 1.33$	AAAA	1	$\omega_{11}$	0.732	0.73
		2	$\omega_{21}$	1.704	1.7
		3	$\omega_{12}$	1.954	1.95
		4	$\omega_{22}$	2.927	2.93
		5	$\omega_{31}$	3.325	3.33
		6	$\omega_{32}$	4.547	4.55
	EEEE	1	$\omega_{11}$	1.338	1.34
		2	$\omega_{21}$	2.536	2.55
		3	$\omega_{12}$	2.912	2.93
		4	$\omega_{22}$	4.018	4.04
		5	$\omega_{31}$	4.441	4.47
		6	$\omega_{32}$	5.849	5.88

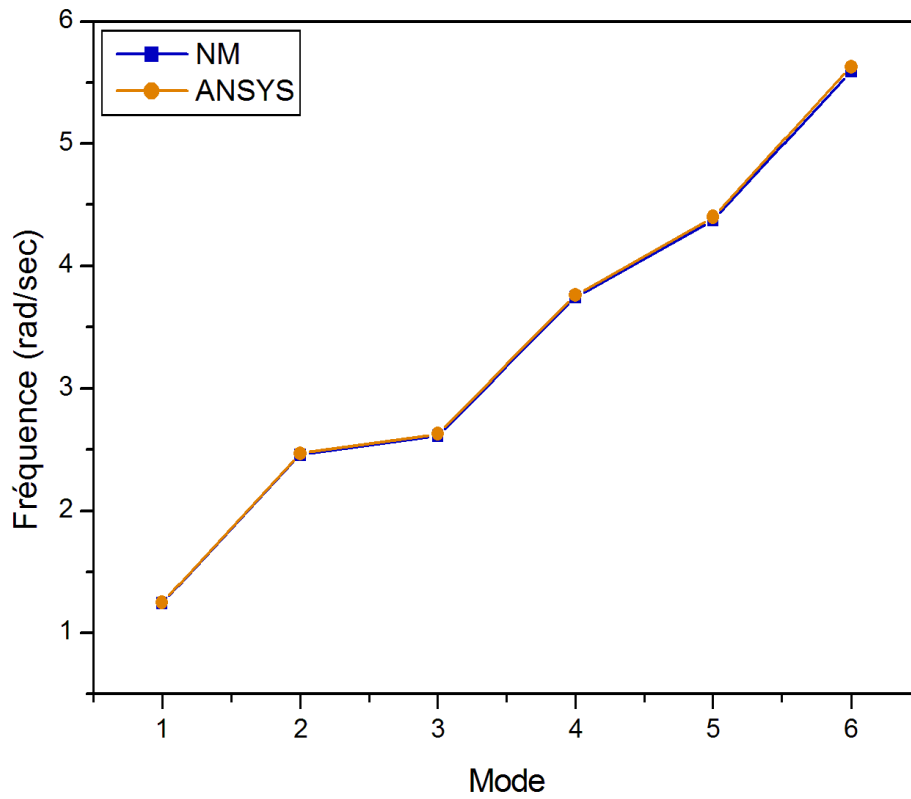
**Tableau 3.3** Comparaison des résultats ANSYS/Haermon pour les plaques AAAA et EEEE pour  $R=1.33$

$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)	
				ANSYS	NM
$R = 1.5$	AAAA	1	$\omega_{11}$	0.839	0.84
		2	$\omega_{21}$	1.812	1.81
		3	$\omega_{12}$	2.387	2.39
		4	$\omega_{22}$	3.359	3.36
		5	$\omega_{31}$	3.433	3.43
		6	$\omega_{32}$	4.979	4.98
	EEEE	1	$\omega_{11}$	1.552	1.56
		2	$\omega_{21}$	2.709	2.72
		3	$\omega_{12}$	3.571	3.59
		4	$\omega_{31}$	4.593	4.62
		5	$\omega_{22}$	4.637	4.67
		6	$\omega_{32}$	6.428	6.47

**Tableau 3.4** Comparaison des résultats ANSYS/Haermon pour les plaques AAAA et EEEE pour  $R=1.5$



**Figure 3.4** Comparaison ANSYS/Haermon de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque AAAA

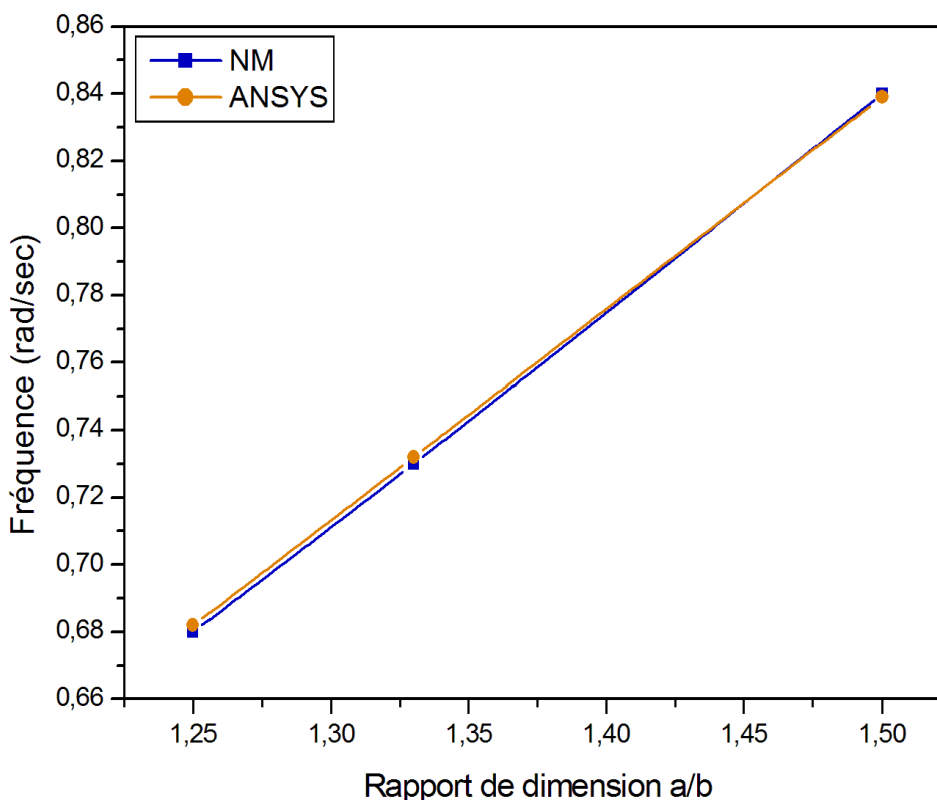


**Figure 3.5** Comparaison ANSYS/Haermon de la variation des fréquences propres en fonction des modes pour la plaque EEEE

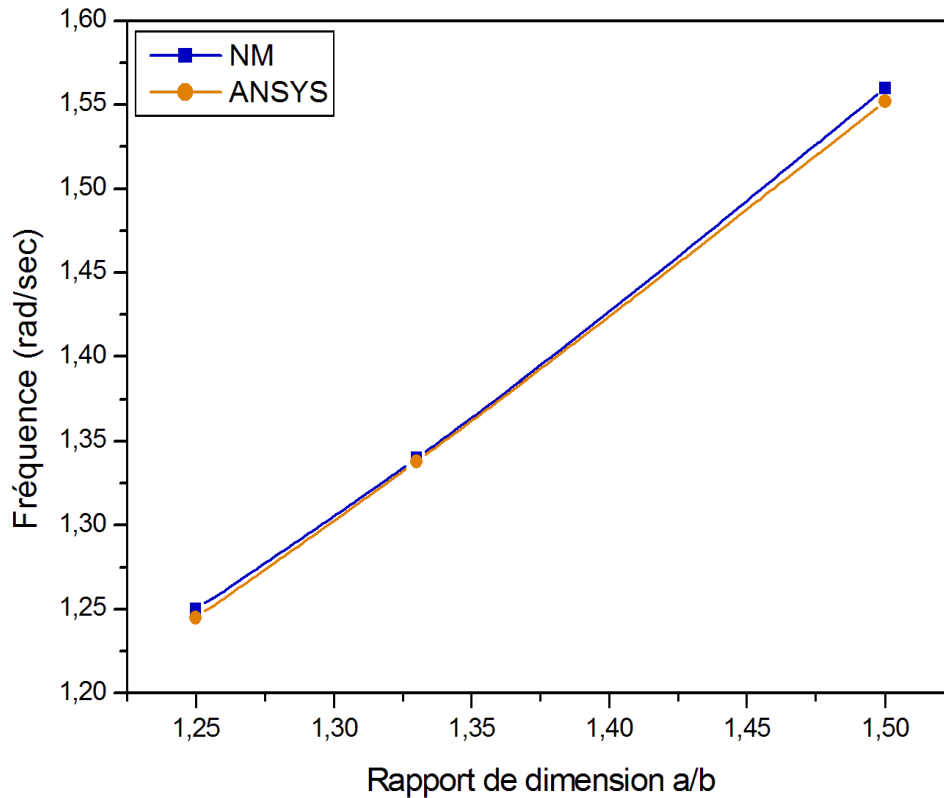
En se basant sur l'effet des dimensions de la plaque, le tableau suivant montre les résultats obtenus par ANSYS en comparant avec ceux de Haermon pour les plaques simplement appuyée et encastree les trois rapports de dimension ( $a/b$ ).

Conditions aux limites	$a/b$	$\omega$ (rad/sec)	
		ANSYS	NM
AAAA	1.25	0.682	0.68
	1.33	0.732	0.73
	1.5	0.839	0.84
EEEE	1.25	1.245	1.25
	1.33	1.338	1.34
	1.5	1.552	1.56

**Tableau 3.5** Comparaison ANSYS/Haermon des fréquences propres pour différents rapport dimension  $a/b$



**Figure 3.6** Comparaison ANSYS/Haermon de la variation des fréquences propres en fonction de rapport  $a/b$  pour la plaque AAAA



**Figure 3.7** Comparaison ANSYS/Haermon de la variation des fréquences propres en fonction de rapport ( $a/b$ ) pour la plaque EEEE

En référant aux comparaisons précédentes, les fréquences propres obtenues par la méthode des éléments finis en utilisant le code de calcul ANSYS sont très proches voir quasi identiques aux celles obtenues par Hearmon pour une plaque rectangulaire orthotrope sous différentes conditions aux limites avec trois rapports de dimension ( $a/b$ ), ce qui nous confirme l'habilité de ANSYS dans le calcul des plaques composites en vibration.

### 3.2.1.2 Comportement vibratoire des plaques orthotropes monocouches

Le comportement vibratoire de plaques composites orthotropes monocouches est étudié dans cette section. L'étude concerne la variation des fréquences de pulsation propres pour différents rapports de dimension  $R = a/b$  ( $a/b = 0.5, 1, 1.5$ ) en fonction de :

- Différentes conditions aux limites (AAAA, EEEE, EAEE, AAEA, AAEE, AEAE).
- Différentes angles d'orientation des fibres ( $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ).
- Rapport largeur-sur-épaisseur de la plaque  $a/h$  ( $a/h = 60, 95, 130, 165$ ).

Pour les rapports R : R=0.5 ; a = 1, b = 2

R= 1 ; a = 2, b = 2

R= 1.5 ; a =3, b = 2

### Chapitre 3 : Résultats et discussion

La plaque à étudier est constituée du matériau à fibres unidirectionnelles (Glass/Epoxy) dont les propriétés sont rapportées dans le tableau suivant.

Propriété et symbole	Valeur	Unité
$E_1$ ; Module d'Young dans la direction de la fibre	43.5	GPa
$E_2$ ; Module d'Young dans la direction transversale	11.5	GPa
$\nu_{12}$ ; Coefficient de Poisson dans le plan	0.27	
$G_{12}$ ; Module de cisaillement dans le plan	3.45	GPa
$\rho$ ; Densité	2000	Kg/m <sup>3</sup>

**Tableau 3.6** Propriétés du matériau Glass/Epoxy

Les fréquences propres sont obtenues par moyen de code de calcul *ANSYS* en utilisant l'élément coque SHELL63 et un maillage de 80x80.

Le tableau 3.7 montre les fréquences propres ( $\omega$ ) pour les dix premiers modes propres ( $\omega_{mn}$ ) de la plaque carrée ( $R=1$ ). En outre, la figure 3.8 montre les modes propres appropriés pour la plaque *AEAE*.

En ANNEX A un tableau qui représente les fréquences propres pour les plaques ayant  $R=0.5$  et  $R=1.5$  avec les six conditions aux limites présidentes.



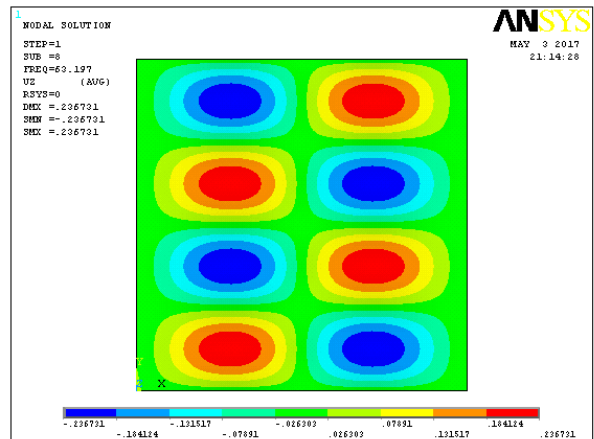
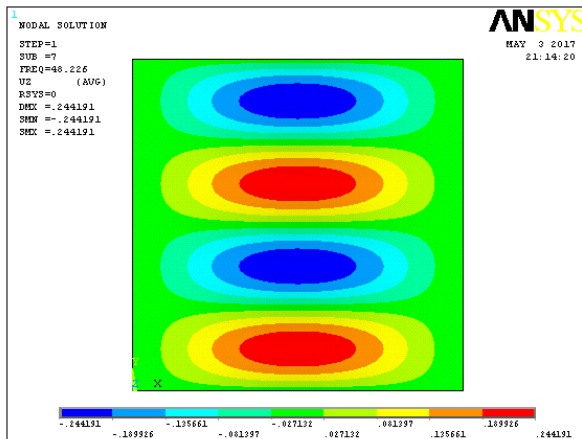
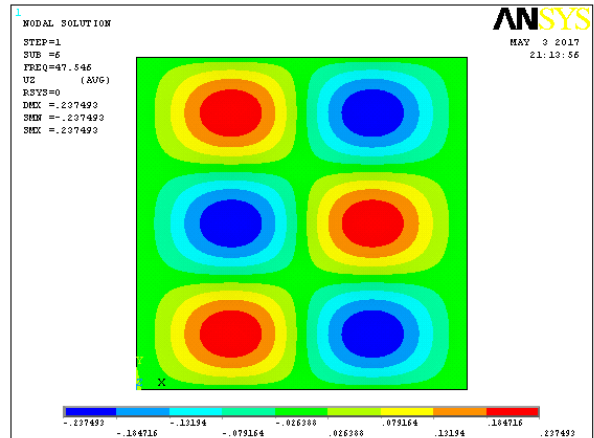
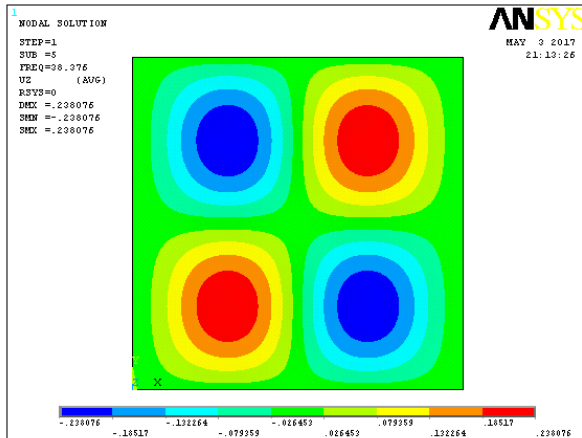
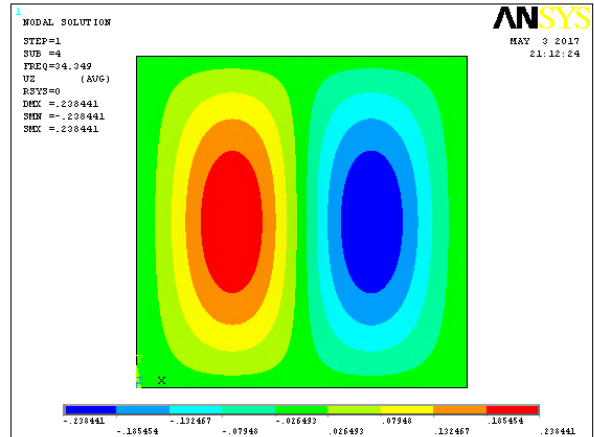
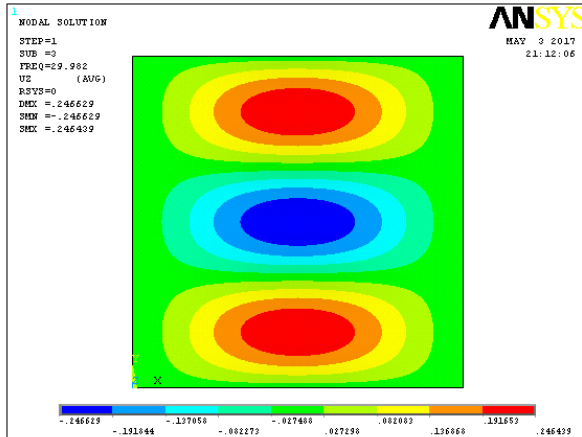
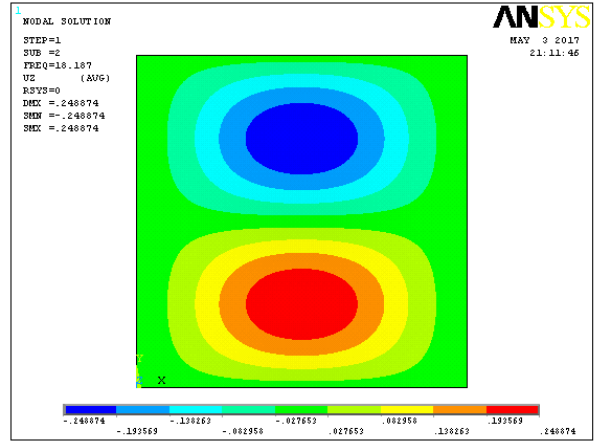
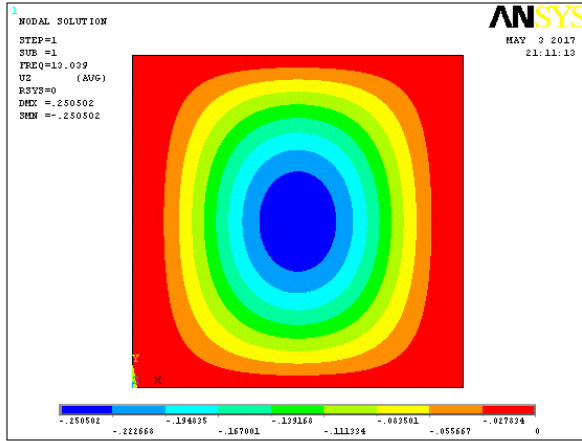
### Chapitre 3 : Résultats et discussion

$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)
$R = 1$	<b>AAAA</b>	1	$\omega_{11}$	6.9976
		2	$\omega_{12}$	14.171
		3	$\omega_{21}$	22.696
		4	$\omega_{13}$	27.485
		5	$\omega_{22}$	27.987
		6	$\omega_{23}$	39.140
		7	$\omega_{14}$	46.533
		8	$\omega_{31}$	49.306
		9	$\omega_{32}$	53.783
		10	$\omega_{24}$	56.690
	<b>EEEE</b>	1	$\omega_{11}$	14.314
		2	$\omega_{12}$	22.686
		3	$\omega_{21}$	34.975
		4	$\omega_{13}$	37.886
		5	$\omega_{22}$	41.016
		6	$\omega_{23}$	53.290
		7	$\omega_{14}$	59.236
		8	$\omega_{31}$	66.804
		9	$\omega_{32}$	71.786
		10	$\omega_{24}$	72.363
	<b>EAAE</b>	1	$\omega_{11}$	11.259
		2	$\omega_{12}$	20.806
		3	$\omega_{21}$	28.922
		4	$\omega_{22}$	35.812
		5	$\omega_{13}$	36.713
		6	$\omega_{23}$	49.197
		7	$\omega_{31}$	57.971
		8	$\omega_{14}$	58.429
		9	$\omega_{32}$	63.487
		10	$\omega_{24}$	69.225

$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)
$R = 1$	AAEA	1	$\omega_{11}$	7.8605
		2	$\omega_{12}$	16.668
		3	$\omega_{21}$	23.076
		4	$\omega_{22}$	29.539
		5	$\omega_{13}$	31.507
		6	$\omega_{23}$	42.298
		7	$\omega_{31}$	49.537
		8	$\omega_{14}$	52.005
		9	$\omega_{32}$	54.766
		10	$\omega_{24}$	61.484
	AAEE	1	$\omega_{11}$	10.256
		2	$\omega_{12}$	18.089
		3	$\omega_{21}$	28.488
		4	$\omega_{13}$	32.410
		5	$\omega_{22}$	34.139
		6	$\omega_{23}$	45.864
		7	$\omega_{14}$	52.650
		8	$\omega_{31}$	57.714
		9	$\omega_{32}$	62.429
		10	$\omega_{24}$	64.208
	AEAE	1	$\omega_{11}$	13.039
		2	$\omega_{12}$	18.187
		3	$\omega_{13}$	29.982
		4	$\omega_{21}$	34.349
		5	$\omega_{22}$	38.376
		6	$\omega_{23}$	47.546
		7	$\omega_{14}$	48.226
		8	$\omega_{24}$	63.197
		9	$\omega_{31}$	66.400
		10	$\omega_{32}$	70.064

Tableau 3.7 Fréquences propres pour dix premiers modes de la plaque avec  $R = 1$

## Chapitre 3 : Résultats et discussion



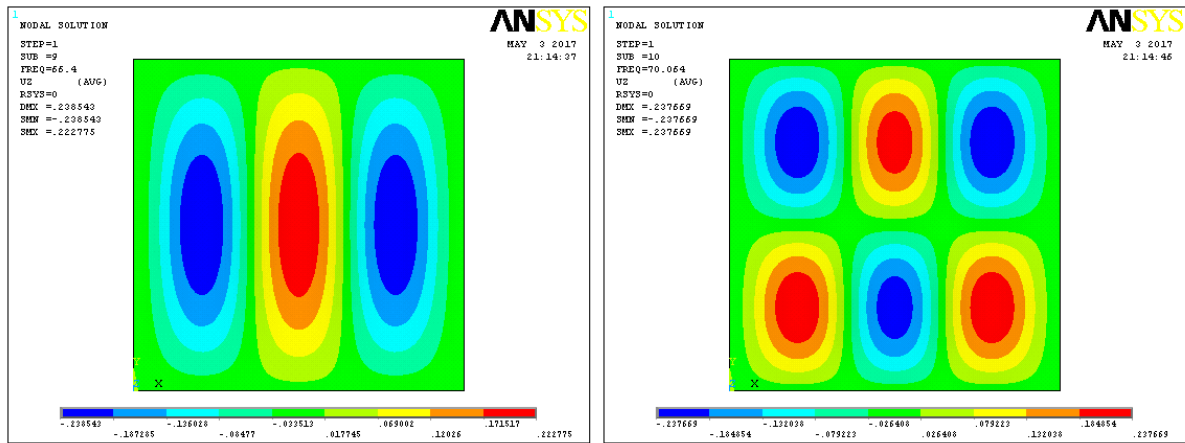


Figure 3.8 Modes propres pour la plaque carrée AEAE

### 3.2.1.2.1 Effet de conditions aux limites

En vue d'examiner le comportement des plaques orthotropes à fibres unidirectionnels vis-à-vis les six conditions aux limites telles qu'il est illustré précédemment on étudie la variation de fréquences propres en fonction des modes propres des plaques ayant les rapports de dimension  $R = 0.5, 1, 1.5$ .

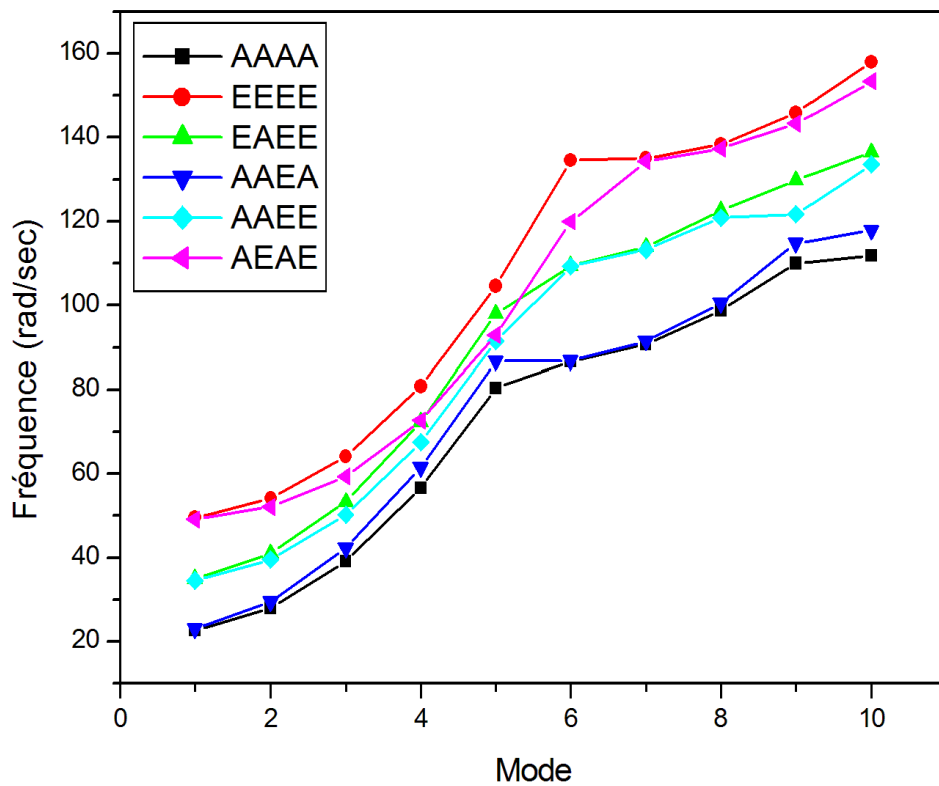


Figure 3.9 Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec  $R=0.5$

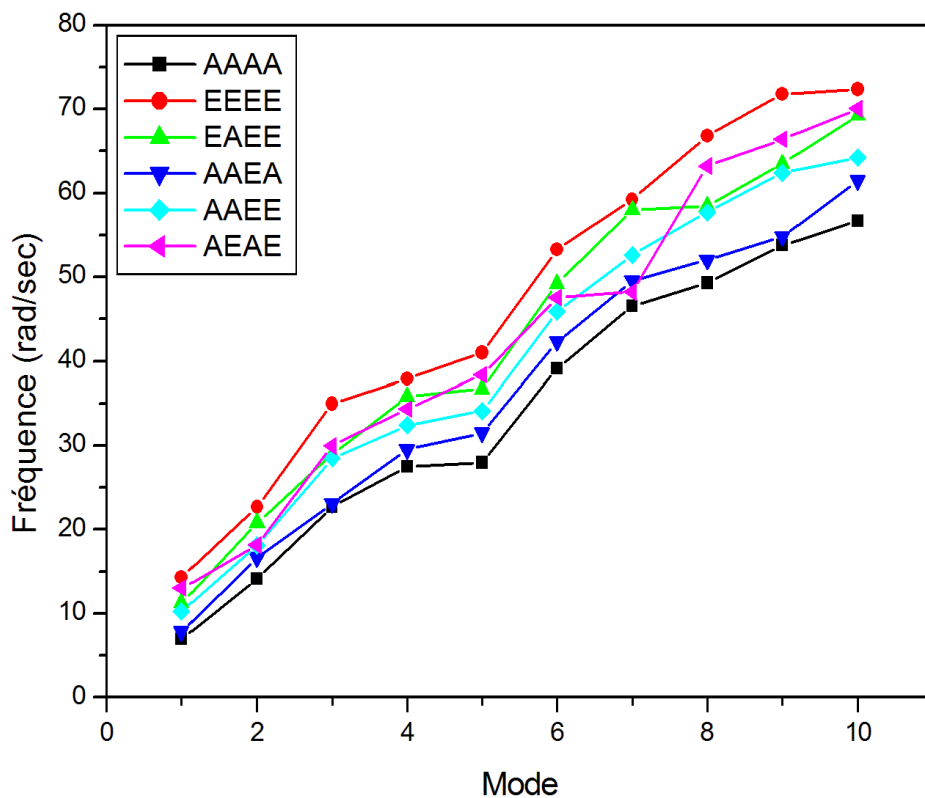


Figure 3.10 Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R= 1

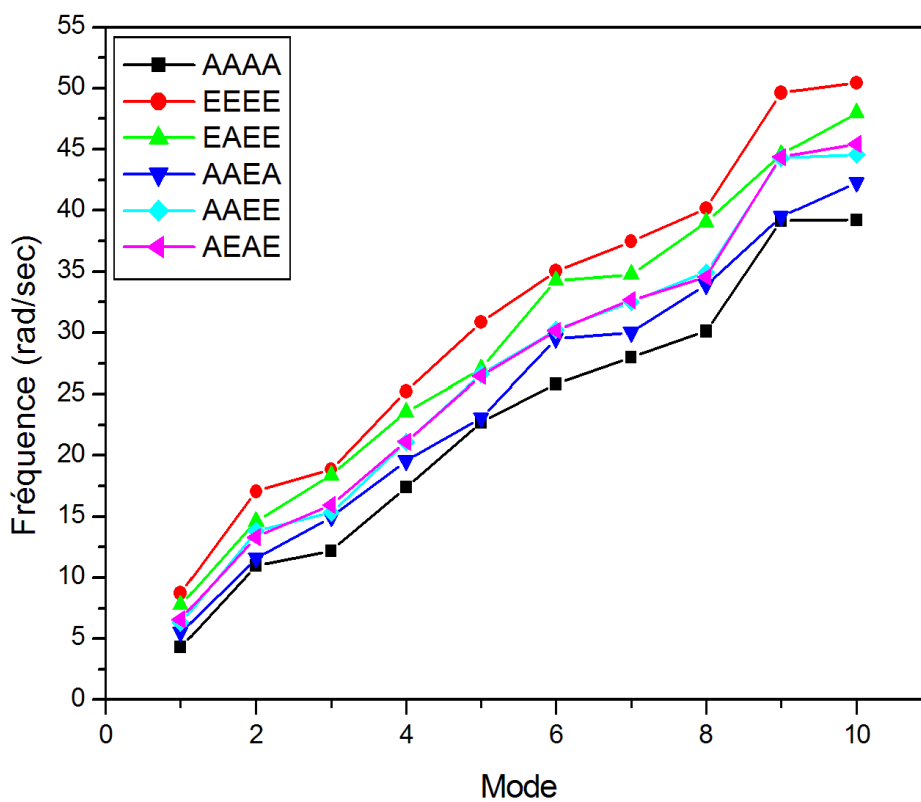


Figure 3.11 Variation de fréquence en fonction des modes propres, plaque avec R= 1.5

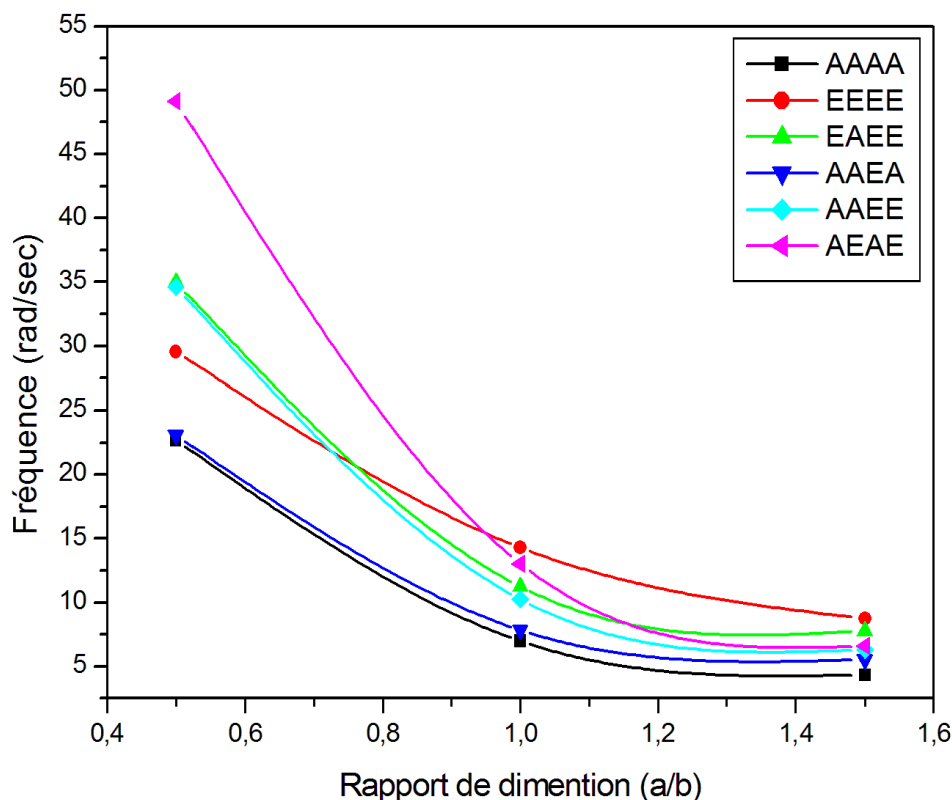
En analysant les trois courbes précédentes, il est clair que quelque soit le rapport de dimension  $R$  la plaque a le même comportement. En effet, les fréquences propres pour les dix premiers modes de la plaque simplement appuyée (AAAA) et encadrée (EEEE) sont les extrêmes bas et haut respectivement et les autres plaques se situent entre les deux tout dépend des valeurs de la fréquence. Ce comportement est dû à la fréquence propre qui dépend de la rigidité de la plaque, de fait que la plaque encadrée sur ses quatre côtés soit la plus rigide, tandis que la plaque simplement appuyée soit la plus souple.

#### 3.2.1.2.2 Effet de rapport de dimension $a/b$

Parmi les facteurs majeurs qui influent sur le comportement vibratoire de la plaque orthotrope à fibres unidirectionnelles, le rapport longueur-sur-largeur ( $a/b$ ). Le tableau et la figure suivants représentent la variation des fréquences propres en fonction de trois rapports  $R$  de la plaque sollicitée ayant les six conditions aux limites.

<i>Conditions aux limites</i>	<i><math>\omega</math> (rad/sec)</i>		
	<b>0.5</b>	<b>1</b>	<b>1.5</b>
<b>AAAA</b>	22.697	6.9979	4.3489
<b>EEEE</b>	29.575	14.314	8.7430
<b>EAEE</b>	34.979	11.259	7.7898
<b>AAEA</b>	23.076	7.8605	5.5391
<b>AAEE</b>	34.617	10.256	6.3101
<b>AEAE</b>	49.129	13.039	6.6016

**Tableaux 3.8** Fréquences propres pour les trois rapports de dimension



**Figure 3.12** Fréquences propres en fonction rapport de dimension

En référençant à la courbe précédente, on constate bien que la plaque n'a pas le même comportement pour les différents rapports  $R$  à savoir :

- L'écart de fréquence propre pour les six conditions aux limites devient de plus en plus moins au fait d'augmenter le rapport  $a/b$ .
- La rigidité de la plaque se diffère d'un rapport à un autre pour les mêmes conditions aux limites. La plaque *AEAE* est la plus rigide pour le cas de  $a/b = 0,5$ , tandis que pour le rapport de 1 et 1.5 la plaque *EEEE* est la plus rigide. La plaque *AAAA* est la plus souple dans les trois cas.
- Le comportement des plaques *AAAA*, *AAEA*, *AAE*, *EAE* ont le même comportement vis-à-vis le rapport de dimension  $a/b$  (même forme de courbe). Cependant, les fréquences propres de pair *AAAA* et *AAEA* et de pair *AAE* et *EAE* vu les mêmes pour un rapport de 0.5 et se différent de plus en plus avec l'augmentation du rapport.

3.2.1.2.3 Effet d'orientation des fibres

Les fibres ont pour rôle de renforcer la matrice afin d'obtenir un matériau plus consistant et plus rigide. L'orientation des fibres parmi les paramètres essentiels qu'on peut modifier pour avoir un matériau avec des caractéristiques optimales souhaitées. Dans cette partie on va examiner l'effet d'orientation des fibres sur le comportement vibratoire des plaques *AAAA*, *EEEE*, *AEAE* avec un rapport de dimension de 0.5 et 1.5 pour les angles de 0, 30, 60 et 90. Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux qui se trouvent en ANNEX C ainsi les figures 3.12 et 3.13 qui montrent la variation des fréquences propres en fonction des angles d'orientations des fibres.

A. Plaques rectangulaires avec  $R = 1.5$

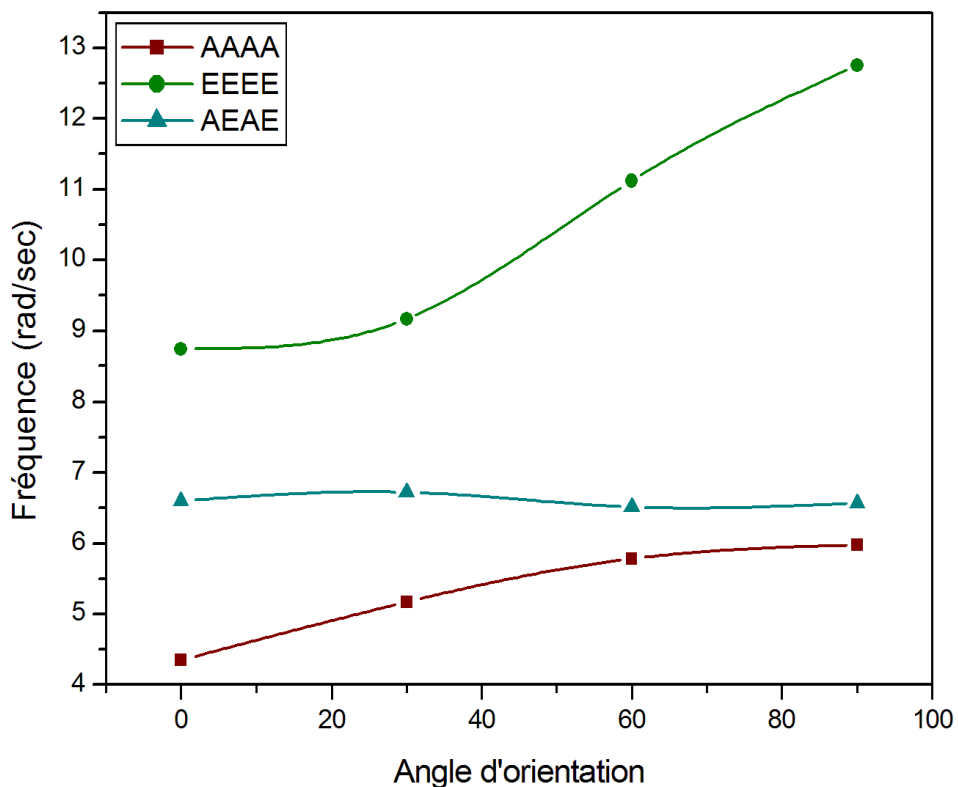


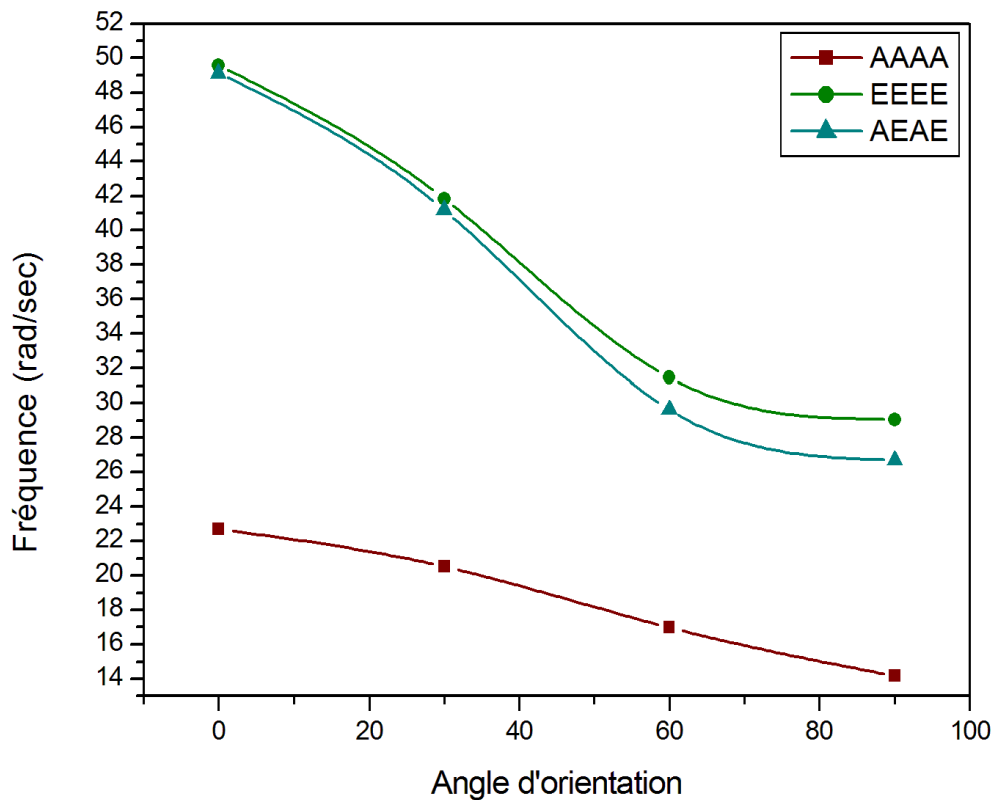
Figure 3.13 Variation de fréquence propre en fonction d'angle d'orientation des fibres avec  $R = 1.5$

D'après la figure précédente on voit que :

- La rigidité des plaques *AAAA* et *EEEE* augmente avec l'augmentation d'angle d'orientation notamment pour l'encastree qui a une augmentation importante.
- Pour la *AEAE*, la fréquence est presque la même pour les quatre angles d'orientation donc la rigidité ne change pas par le changement d'angle.



B. Plaques rectangulaires avec  $R = 0.5$



**Figure 3.14** Variation de fréquence propre en fonction d'angle d'orientation des fibres avec  $R = 0.5$

D'après la figure précédente on voit que :

- Pour le  $R = 0.5$ , c'est exactement le contraire de ce qui se passe dans le cas de  $R = 1.5$ . en effet, la rigidité des trois plaques diminue par le fait d'augmentation d'angle d'orientation des fibres.
- Le comportement des plaques EEEE et AEAE est exactement le même tant que leurs courbes ont la même forme. Ainsi les fréquences propres pour les deux cas ce divergent avec l'augmentation d'angle d'orientation.
- L'orientation des fibres a un effet important sur la rigidité de la plaque AEAE dans le de  $R = 0.5$  ; par opposition, dans le cas où  $R = 1.5$  l'orientation des fibres n'a pas un grand effet voir négligeable sur le comportement vibratoire de la plaque.

**3.2.1.2.4 Effet de rapport a/h**

Parmi les facteurs primordiaux aussi qu'on peut jouer avec pour avoir une bonne rigidité est l'épaisseur de la plaque ( $h$ ). Dans cette partie on va étudier l'effet de rapport  $a/h$  sur les fréquences naturelles pour les plaques *AAAA*, *EEEE*, *AEAE*. les tableaux en *ANNEX B* montrent les fréquences propres pour les dix premiers modes des trois plaques avec les trois rapports de dimensions. Le tableau 3.11 montre les résultats obtenus ainsi les figure 3.14, 3.15, 3.16 montrent la variation de la fréquence en fonction du rapport  $a/h$  pour un rapport de dimension 0.5, 1, 1.5 respectivement.

Conditions aux limites	$a/h$	$\omega$ (rad/sec)		
		0.5	1	1.5
<b>AAAA</b>	60	38.585	23.092	21.745
	95	22.697	14.695	13.916
	130	17.477	10.496	10.002
	165	13.618	8.3972	7.8280
<b>EEEE</b>	60	84.278	47.236	43.715
	95	49.575	30.059	27.978
	130	38.173	21.471	20.109
	165	29.745	17.177	15.737
<b>AEAE</b>	60	83.520	43.028	33.008
	95	49.129	27.382	21.125
	130	37.829	19.558	15.184
	165	29.477	15.647	11.883

**Tableau 3.9** Fréquences propres pour différents rapports  $a/h$  et rapport R

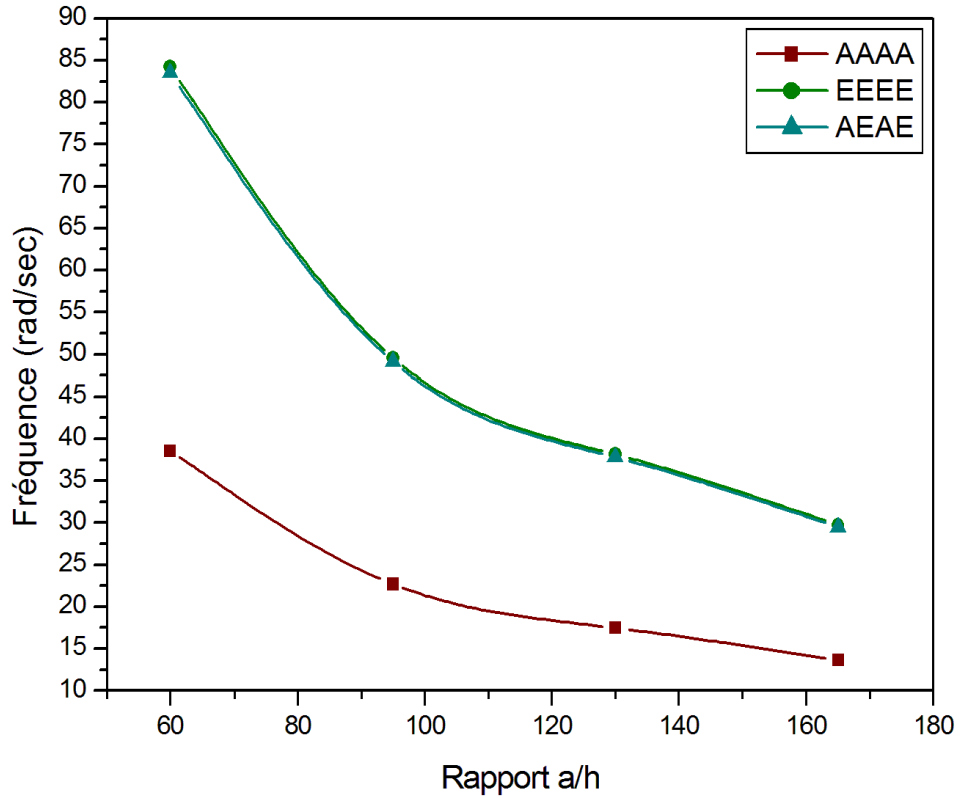


Figure 3.15 Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h, plaque avec  $R = 0.5$

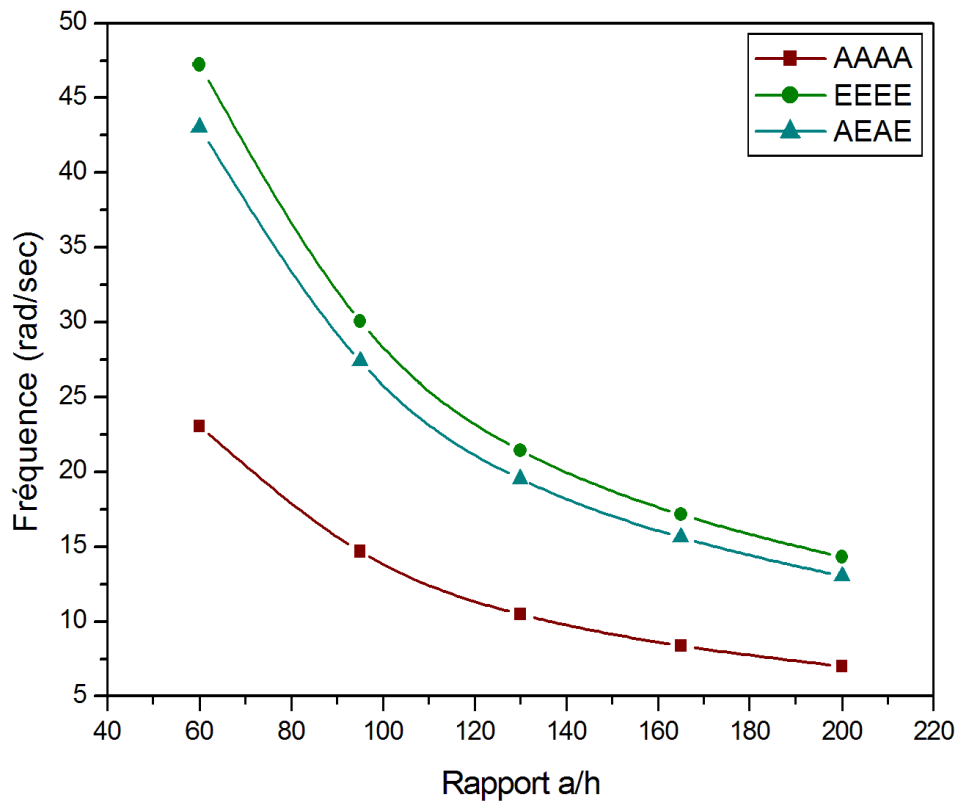
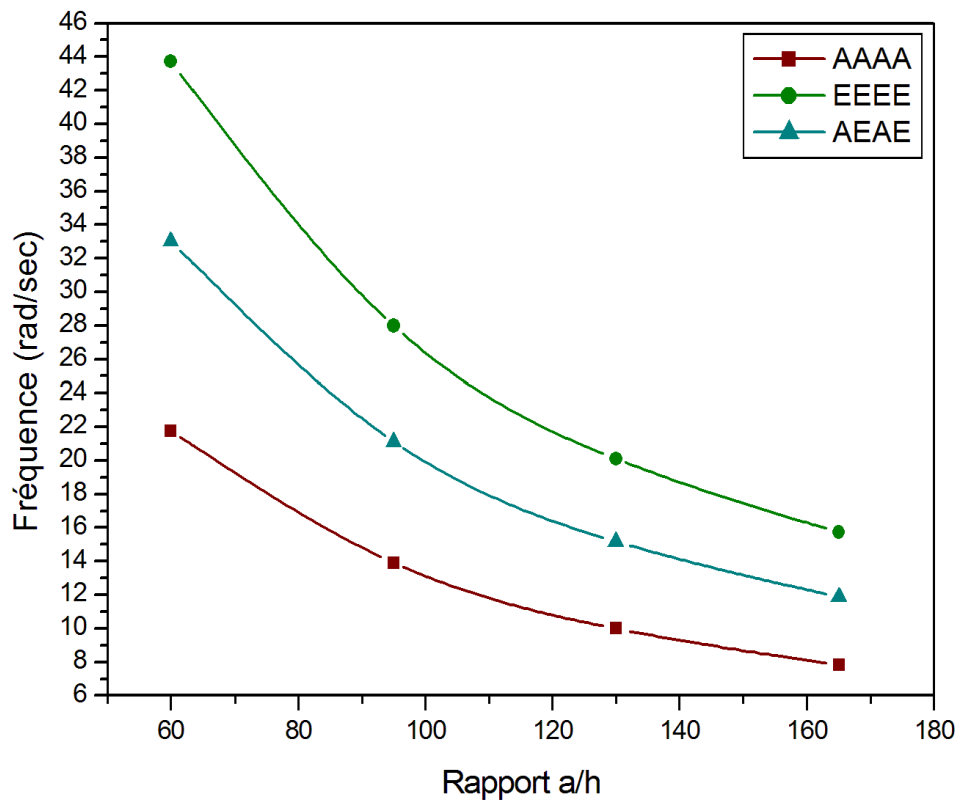


Figure 3.16 Variation de fréquence propre en fonction rapport a/h, plaque avec  $R = 1$



**Figure 3.17** Variation de fréquence propre en fonction rapport  $a/h$ , plaque avec  $R = 1.5$

En analysant les courbes précédentes on peut tirer les conclusions suivantes :

- La rigidité des plaques examinées devient plus en plus moins avec l'augmentation de rapport  $a/h$  avec les trois rapports de dimension ( $R$ ).
- La plaque *AEAE* est équivalente à la plaque *EEEE* pour un rapport  $R = 0.5$  ; son comportement se converge vers celui de la plaque *AAAA* avec l'augmentation de rapport de dimension  $R$ .
- Pour les trois rapports  $R$ , la plaque *AAAA* est la plus souple, tandis que la plaque *EEEE* est la plus rigide quelque soit le rapport  $a/h$ .

### 3.2.2 Vibration des plaques orthotropes multicouches

#### 3.2.2.1 Validation du programme

Afin de vérifier la consistance des résultats obtenus par la méthode des éléments finis sous *ANSYS* pour le calcul des fréquences propres des plaques composites multicouches, on fait une comparaison avec les résultats obtenus par LAHOUAL [16]. L'étude concerne la variation des fréquences propres d'une plaque constituée de trois plis orthotropes. La solution a été recherchée en utilisant un maillage de 10 x 10 et l'élément coque *SHELL99* pour les multicouches, cet élément a huit nœuds et six degrés de liberté par nœud, il utilise la théorie classique des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse.

La plaque à étudier est constituée du matériau à fibres unidirectionnelles *Graphite/Epoxy NTC-301* dont les propriétés sont rapportées dans le tableau (3.12).

Propriété et symbole	Valeur	Unité
$E_1$ ; Module d'Young dans la direction de la fibre	113.9	GPa
$E_2$ ; Module d'Young dans la direction transversale	7.9	GPa
$E_3$ ; Module d'Young hors plan	7.9	GPa
$N_{12}$ ; Coefficient de Poisson dans le plan	0.28	
$N_{23}$ ; Coefficient de Poisson à travers l'épaisseur	0.40	
$N_{13}$ ; Coefficient de Poisson dans le plan	0.02	
$G_{12}$ ; Module de cisaillement dans le plan	3.1	GPa
$G_{23}$ ; Module de cisaillement dans le plan	2.8	GPa
$G_{13}$ ; Module de cisaillement dans le plan	3.1	GPa
$H_0$ : Epaisseur d'un pli unitaire	0.139	mm
$\rho$ ; Densité	1480	Kg/m <sup>3</sup>

**Tableau 3.10** Propriétés du matériau Graphite/Epoxy

Le tableau ci-après présente les résultats obtenus par ANSYS en comparaison avec Réf [16].

$a/h$	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)		
		ANSYS	Réf [16]	Erreur relative
<b>100</b>	$\omega_{11}$	2.58	2.09	0.234
	$\omega_{12}$	4.43	3.41	0.299
	$\omega_{13}$	6.00	6.21	0.034
	$\omega_{21}$	7.75	7.63	0.016
<b>50</b>	$\omega_{11}$	10.70	8.38	0.277
	$\omega_{12}$	17.80	13.63	0.306
	$\omega_{13}$	24.61	24.86	0.010
	$\omega_{21}$	30.60	30.54	0.002

**Tableau 3.11** Comparaison des résultats d'ANSYS et résultats de Réf [16]

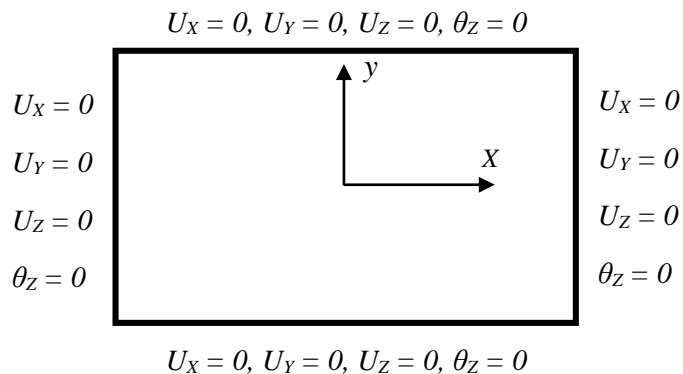
Voyant l'erreur relative, une erreur de 0.3 est enregistrée comme max parmi les quatre erreurs pour les quatre premiers modes et une erreur min de 0.002, voir négligeable, ce qui nous confirme la crédibilité de code de calcul ANSYS.

### 3.2.2.2 Etude de comportement vibratoire des plaques orthotropes multicouches

Le comportement vibratoire de plaques composites orthotropes multicouches est étudié dans cette section. L'étude concerne la variation des fréquences de pulsation propres d'une plaque constituant de trois plis, ayant une longueur  $a= 0.0417m$ , largeur  $b=0.03m$  et une épaisseur  $h=0.417$  mm en examinant l'effet de : conditions aux limites, orientation des fibres et l'empilement des couches.

#### 3.2.2.2.1 Effet de conditions aux limites

Pour les conditions aux limites on prend la plaque en *Graphite/Epoxy* (Tableau 3.12) pour deux types d'appuis, *Appui 1* et *Appui 2*, tel que représenté sur les figures suivantes :



**Figure 3.18** Plaque appuyée, Appui 1

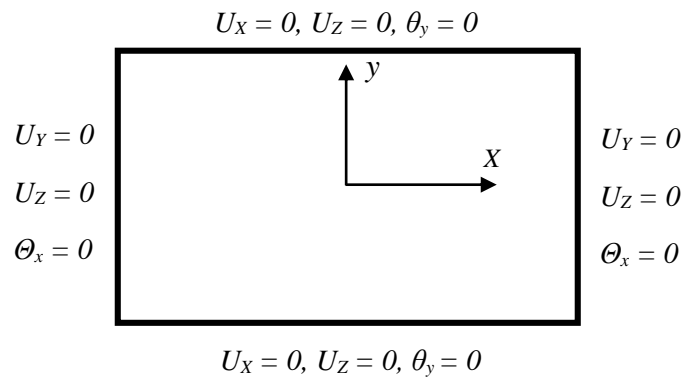
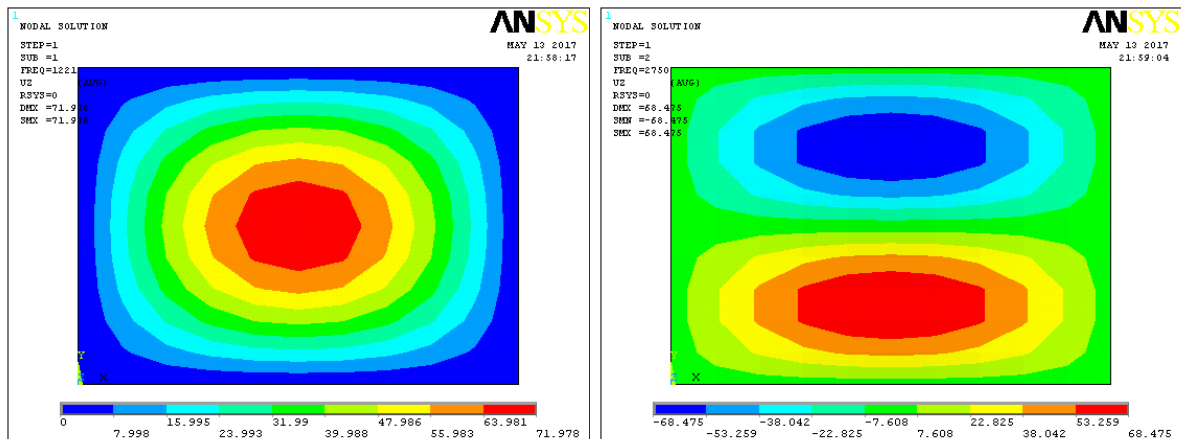


Figure 3.19 Plaque appuyée, Appui 2

Les résultats obtenus pour les quatre premiers modes sont reportés sur le tableau suivant :

Type d'appui	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec) x $10^3$
<b>Appui 1</b>	1	$\omega_{11}$	1.219
	2	$\omega_{12}$	2.746
	3	$\omega_{21}$	3.903
	4	$\omega_{22}$	4.848
<b>Appui 2</b>	1	$\omega_{11}$	1.222
	2	$\omega_{12}$	2.751
	3	$\omega_{21}$	3.906
	4	$\omega_{22}$	4.858

Tableau 3.12 Fréquences propres d'une plaque appuyée



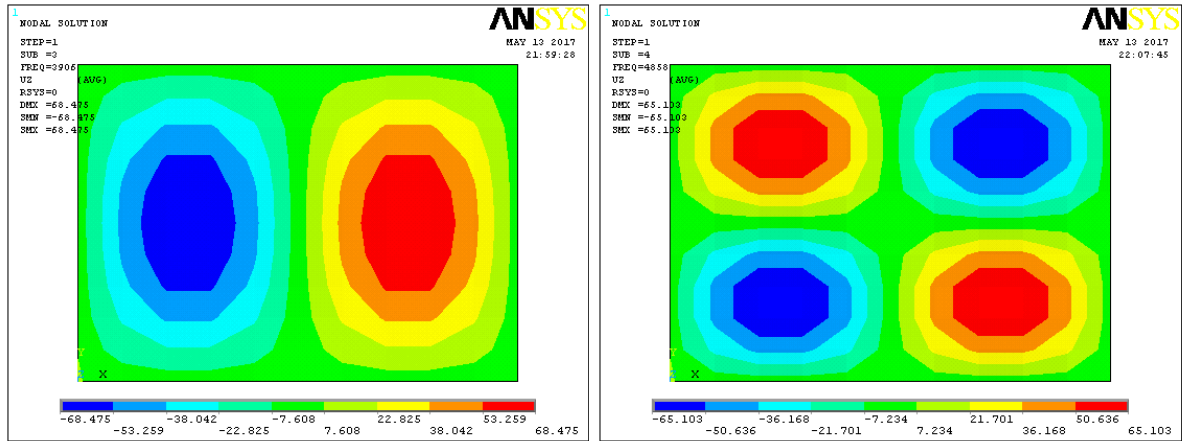


Figure 3.20 Modes propres du stratifié avec Appui 2

La figure suivante montre l'effet des conditions aux limites sur le comportement vibratoire de la plaque.

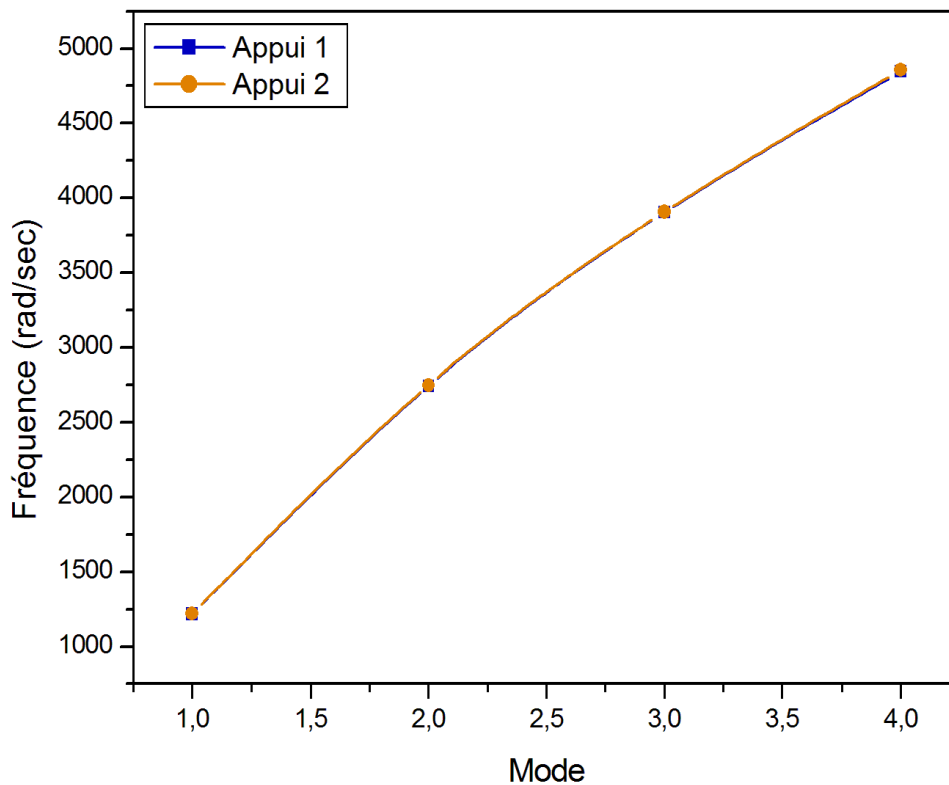


Figure 3.21 Fréquences propres pour une plaque sous deux types d'appuis



3.2.2.2.2 Effet d'orientation des fibres

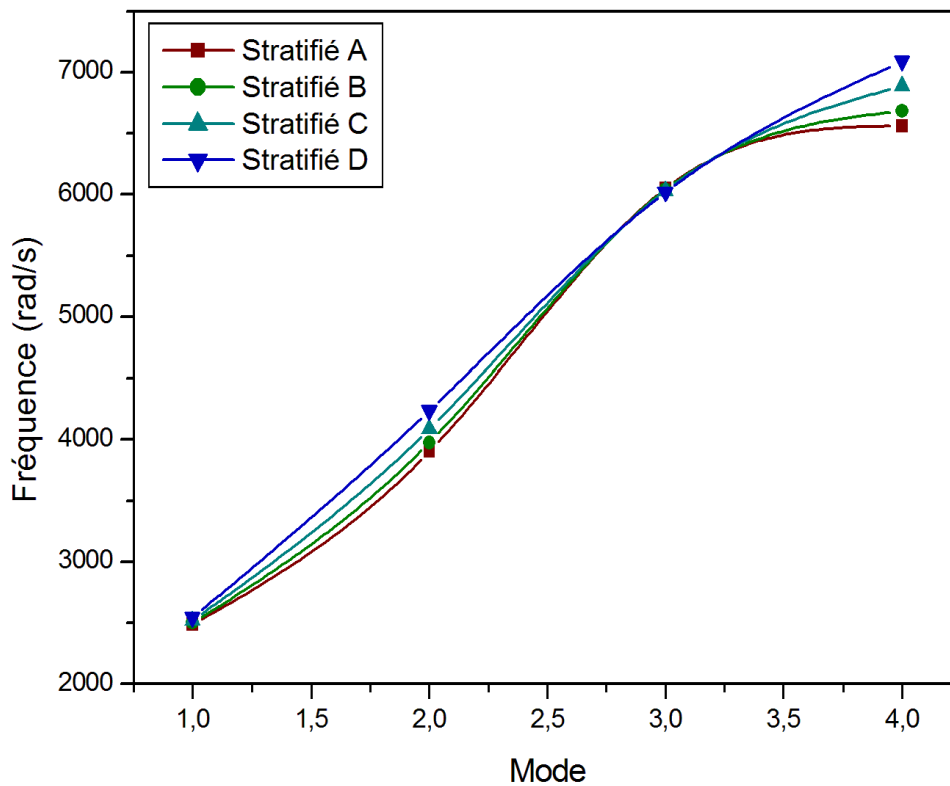
Toujours avec la plaque en *Graphite/Epoxy* encadrée constituée de trois plis on examine l'effet d'orientation des fibres sur le comportement vibratoire pour quatre stratifiés tels que :

- Stratifié A : [0/0/0]
- Stratifié B : [0/30/0]
- Stratifié C : [0/45/0]
- Stratifié D : [0/60/0]

Le tableau suivant montre les fréquences des quatre premiers modes.

Mode	$\omega$ (rad/sec) x 10 <sup>3</sup>			
	A	B	C	D
$\omega_{11}$	2.489	2.502	2.521	2.545
$\omega_{12}$	3.904	3.976	4.087	4.237
$\omega_{21}$	6.051	6.042	6.031	6.019
$\omega_{13}$	6.561	6.684	6.890	7.090

**Tableau 3.13** Fréquences propres de différents stratifiés avec différentes angles d'orientation des fibres



**Figure 3.22** Fréquences propres de différents stratifiés avec différentes angles d'orientation des fibres

La figure ci-dessus montre clairement que les quatre stratifiés avec leurs différents angles d'orientation ont un même comportement vibratoire alors qu'on constate qu'il y a une différence dans les fréquences propres d'un mode à un autre ; en effet quant au premier et troisième mode les fréquences sont quasi identiques contrairement au deuxième et quatrième mode.

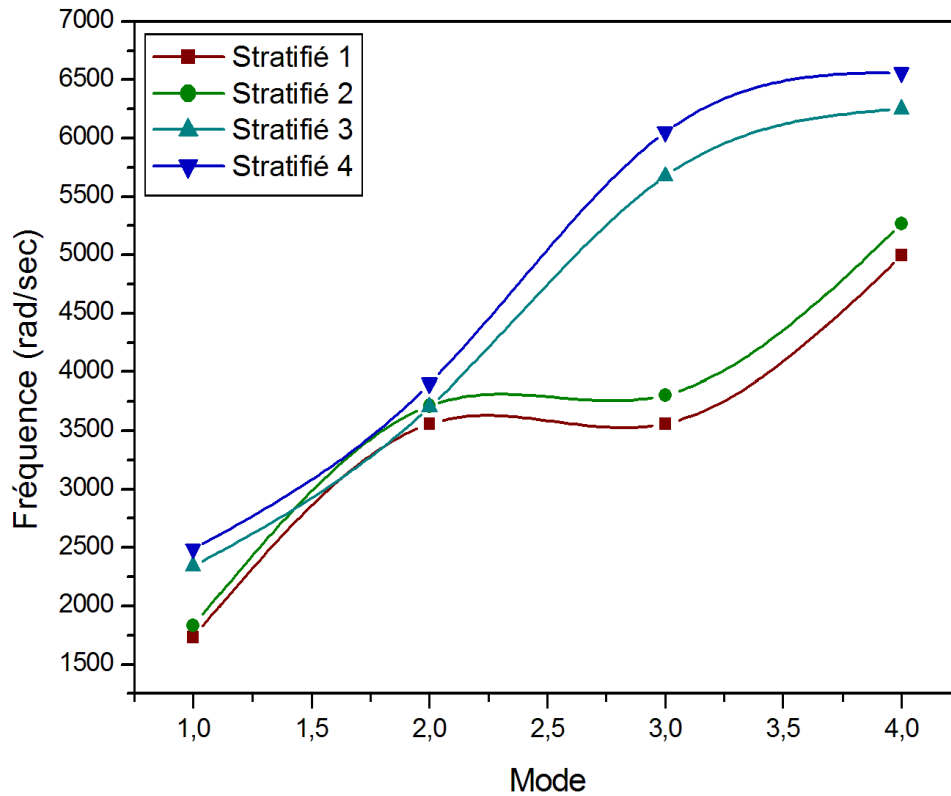
#### 3.2.2.2.3 Effet d'empilement

L'effet d'empilement est étudié sur quatre stratifiés constituant trois plis chacun tels que :

- Stratifié 1 : [Glass-Epoxy/ Glass-Epoxy/ Glass-Epoxy]
- Stratifié 2 : [Glass-Epoxy/ Graphite-Epoxy/ Glass-Epoxy]
- Stratifié 3 : [Graphite -Epoxy/ Glass-Epoxy/ Graphite -Epoxy]
- Stratifié 4 : [Graphite -Epoxy/ Graphite -Epoxy/ Graphite -Epoxy]

<i>Mode</i>	<i><math>\omega</math> (rad/sec) x 10<sup>3</sup></i>			
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
$\omega_{11}$	1.735	1.833	2.341	2.489
$\omega_{12}$	3.558	3.714	3.704	3.904
$\omega_{21}$	3.561	3.806	5.675	6.051
$\omega_{22}$	4.996	5.271	6.249	6.561

**Tableau 3.14** Fréquences propres de différents stratifiés avec différents empilements



**Figure 3.23** Fréquences propres de différents stratifiés avec différents empilements

La figure 3.21 montre bien que le comportement vibratoire de la multicouche n'est pas régulier dont on constate que le pair stratifié 1 et stratifié 2 ont un même comportement et le pair stratifié 3 a le même comportement que celui du stratifié 4, les deux comportements sont strictement opposé pour le mode 1, 3 et 4 alors que pour le mode 2 les deux comportements sont quasi identiques.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, deux études sur la prédiction et le comportement vibratoire des plaques composites monocouches et stratifiées en employant le code de calcul ANSYS après avoir vérifié la consistance des résultats obtenus par ce dernier en les comparant avec ceux que annoncés dans les littératures.

La première est celle des plaques monocouches, elle consiste à déterminer les fréquences de pulsation propres et leurs modes associés pour différents rapports de dimension  $R$  en fonction de l'effet des conditions aux limites, l'angle d'orientation des fibres et le rapport longueur-sur-épaisseur. Les principales conclusions sont :

- Les fréquences propres des plaques dépendent de leurs rigidités
- La rigidité de la plaque se diffère d'un rapport à un autre pour les mêmes conditions aux limites. La plaque AEAE est la plus rigide pour le cas de  $a/b = 0.5$ , tandis que pour le rapport de 1 et 1.5 la plaque EEEE est la plus rigide. La plaque AAAA est la plus souple dans les trois cas.
- L'orientation des fibres a un effet important sur la rigidité de la plaque AEAE dans le de  $R = 0.5$  ; par opposition, dans le cas où  $R = 1.5$  l'orientation des fibres n'a pas un grand effet voir négligeable sur le comportement vibratoire de la plaque.
- Les plaques AAAA et EEEE ont un même comportement, augmentation des fréquences propres avec l'augmentation d'angle d'orientation des fibres.
- La plaque AEAE est équivalente à la plaque EEEE pour un rapport  $R = 0.5$  ; son comportement se converge vers celui de la plaque AAAA avec l'augmentation de rapport de dimension  $R$ .

Dans la deuxième, une étude des plaques composites stratifiées est faite. Les plaques ayant différents rapports de dimension  $R$  sont examinées en fonction de l'effet des conditions aux limites, l'angle d'orientation des fibres et la séquence d'empilement. Comme conclusion principale on peut citer :

- Pour une plaque multicouche en vibration ayant différentes séquences d'empilement avec différents matériaux constituant n'a pas un comportement régulier, il dépend de chaque mode propre. Une analyse judicieuse est recommandée lors de l'utilisation de ce type des matériaux afin d'obtenir la meilleure composition conforme désirée.

## CONCLUSION

Dans ce mémoire, les vibrations des plaques composites monocouches et multicouches conventionnelles ont été étudiés. Les plaques constituées par des matériaux composites tels que le Glass/Epoxy et/ou le Graphite/Epoxy. Les matériaux composites sont souvent préférés par rapport aux matériaux métalliques en raison de leurs très grandes résistances et rigidités spécifiques et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés. Pour des raisons de performance et d'intégrité structurelle, il est essentiel de déterminer les caractéristiques dynamiques telles que les fréquences propres et leurs modes associés.

Jusqu'à maintenant, les méthodes analytiques restent limitées dans la résolution des problèmes vibratoires et l'obtention des résultats exacts. L'approche par éléments finis s'est avérée être une méthode puissante et largement applicable pour l'analyse de ce type des problèmes pour lesquels des solutions analytiques sont presque impossibles à trouver.

Une vérification de la consistance des résultats obtenus par la méthode des éléments finis sous *ANSYS* pour l'analyse vibratoire des plaques composites orthotropes monocouches et stratifiées en faisant une comparaison avec des résultats existants dans les littératures.

En employant le code de calcul *ANSYS*, on a fait une étude détaillée pour prédire le comportement vibratoire de plaques composites orthotropes monocouches et stratifiées sous différentes conditions aux limites, angle d'orientation des fibres, rapports de dimension longueur-sur-largeur et longueur-sur-épaisseur ainsi l'empilement des plis.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Berthelot J.M., "*Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures* ", Masson (1992).
- [2] Laurent Gornet, "*Généralités sur les matériaux composites* ", Engineering school, cel-00470296v1 (2008).
- [3] Kirchhoff. G. "*Vorlesungen uber Mathematics he Physik*", Vol.1 B.G. Teubner Leipzig, Germany (1876).
- [4] Lord Rayleigh, "*The theory of sound*", The Macmillan Company (1877).
- [5] W. Ritz, "*Theory Dertransversals Chwingungen einer Quadratische Platte Mit Freien*"
- [6] S.Timoshenko "*On the Correction of Transverse Shear Deformation of the Differential Equations for Transverse Vibration of Prismatic Bars*» Philosophical Magazine, 41 (series 6) 744 -746 (1921).
- [7] S.Timoshenko "*On the Transverse Vibration of Bars of Uniform. Cross Section*" Philosophical Magazine, 43 series (6) 125-131 (1922).
- [8] A.E.H. Love, "*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* ", Dover, New York. Randern, Annalen der physik 28 737-736 (1944).
- [9] Reissner E. "*The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*". J. of appl. Mech., (12) A69-A77 (1945).
- [10] Uflyand Y.S "*The Propagation of Waves in the Transverse Vibrations of Bars and Plates*" Akad.Nauk.SSSR, Prikl. Mat. Mech., 12 287-300 (1948).
- [11] R.D. Mindlin. "*Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates*", Journal of applied mechanics, 18 31-38 (1951).
- [12] Hearmon, R.F.S. "*The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic plates with clamped or simply supported edges*". J. Applied Mech. 26, 537-540 (1959).
- [13] Reddy, J.N. "*A simple higher-order theory for laminated composite plates*". J. Applied Mech. 51, 745-752 (1984).
- [14] Numayr, K.S., Haddad, R.H. & Haddad, "*Free vibration of composite plates using the finite difference method*". Thin-walled Struct. 42, 399-414, M.A (2004).
- [15] Abd Elyamine MEBARKI, "*Analyse dynamique libre des plaques composites multicouches*", Université Mentouri Constantine (2009).

- [16] Bahi Eddine LAHOUEL, "*Vibration des plaques composites trouées*", Université El-Hadj Lakhdar Batna (2015).
- [17] Y. Reissner and E. Stavsky, "*Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous anisotropic elastic Plate*", Journal of Applied Mechanics, no. 28, pp. 402-408, (1961).
- [18] P. C. Yang, C. H. Norris, and Y. Stavsky, "*Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plate*", International Journal of Solid Structure, vol. 2, pp. 665-684, (1966).
- [19] G. Kirchhoff, "*Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe*", Journal für reine und angewandte Mathematik, no. 40, pp. 51-88, (1850).

## ANNEXE A : Effet de rapport de dimensions longueur-sur-largeur

$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)
$R = 0.5$	AAAA	1	$\omega_{11}$	22.697
		2	$\omega_{12}$	27.985
		3	$\omega_{13}$	39.133
		4	$\omega_{14}$	56.681
		5	$\omega_{15}$	80.390
		6	$\omega_{21}$	86.639
		7	$\omega_{22}$	90.756
		8	$\omega_{23}$	98.766
		9	$\omega_{16}$	110.00
		10	$\omega_{24}$	111.86
	EEEE	1	$\omega_{11}$	49.575
		2	$\omega_{21}$	54.129
		3	$\omega_{13}$	64.101
		4	$\omega_{14}$	80.848
		5	$\omega_{15}$	104.58
		6	$\omega_{21}$	134.53
		7	$\omega_{16}$	135.00
		8	$\omega_{22}$	138.38
		9	$\omega_{23}$	145.82
		10	$\omega_{24}$	158.04
	EAEE	1	$\omega_{11}$	34.979
		2	$\omega_{12}$	41.016
		3	$\omega_{13}$	53.286
		4	$\omega_{14}$	72.363
		5	$\omega_{15}$	97.974
		6	$\omega_{21}$	109.42
		7	$\omega_{22}$	113.90
		8	$\omega_{23}$	122.52
		9	$\omega_{16}$	129.76
		10	$\omega_{24}$	136.44



$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)
$R = 0.5$	<b>AAEA</b>	1	$\omega_{11}$	23.076
		2	$\omega_{12}$	29.536
		3	$\omega_{13}$	42.292
		4	$\omega_{14}$	61.480
		5	$\omega_{15}$	86.763
		6	$\omega_{21}$	86.804
		7	$\omega_{22}$	91.451
		8	$\omega_{23}$	100.40
		9	$\omega_{24}$	114.80
		10	$\omega_{16}$	117.89
	<b>AAEE</b>	1	$\omega_{11}$	34.617
		2	$\omega_{12}$	39.551
		3	$\omega_{13}$	50.209
		4	$\omega_{14}$	67.558
		5	$\omega_{15}$	91.506
		6	$\omega_{21}$	109.26
		7	$\omega_{22}$	113.23
		8	$\omega_{23}$	120.93
		9	$\omega_{16}$	121.71
		10	$\omega_{24}$	133.58
	<b>AEAE</b>	1	$\omega_{11}$	49.129
		2	$\omega_{12}$	52.138
		3	$\omega_{13}$	59.380
		4	$\omega_{14}$	72.714
		5	$\omega_{15}$	92.925
		6	$\omega_{16}$	119.94
		7	$\omega_{21}$	134.28
		8	$\omega_{22}$	137.33
		9	$\omega_{23}$	143.31
		10	$\omega_{24}$	153.34

$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)
$R = 1$	<b>AAAA</b>	1	$\omega_{11}$	6.9976
		2	$\omega_{12}$	14.171
		3	$\omega_{21}$	22.696
		4	$\omega_{13}$	27.485
		5	$\omega_{22}$	27.987
		6	$\omega_{23}$	39.140
		7	$\omega_{14}$	46.533
		8	$\omega_{31}$	49.306
		9	$\omega_{32}$	53.783
		10	$\omega_{24}$	56.690
	<b>EEEE</b>	1	$\omega_{11}$	14.314
		2	$\omega_{12}$	22.686
		3	$\omega_{21}$	34.975
		4	$\omega_{13}$	37.886
		5	$\omega_{22}$	41.016
		6	$\omega_{23}$	53.290
		7	$\omega_{14}$	59.236
		8	$\omega_{31}$	66.804
		9	$\omega_{32}$	71.786
		10	$\omega_{24}$	72.363
	<b>EAE E</b>	1	$\omega_{11}$	11.259
		2	$\omega_{12}$	20.806
		3	$\omega_{21}$	28.922
		4	$\omega_{22}$	35.812
		5	$\omega_{13}$	36.713
		6	$\omega_{23}$	49.197
		7	$\omega_{31}$	57.971
		8	$\omega_{14}$	58.429
		9	$\omega_{32}$	63.487
		10	$\omega_{24}$	69.225

$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)
$R = 1$	AAEA	1	$\omega_{11}$	7.8605
		2	$\omega_{12}$	16.668
		3	$\omega_{21}$	23.076
		4	$\omega_{22}$	29.539
		5	$\omega_{13}$	31.507
		6	$\omega_{23}$	42.298
		7	$\omega_{31}$	49.537
		8	$\omega_{14}$	52.005
		9	$\omega_{32}$	54.766
		10	$\omega_{24}$	61.484
	AAEE	1	$\omega_{11}$	10.256
		2	$\omega_{12}$	18.089
		3	$\omega_{21}$	28.488
		4	$\omega_{13}$	32.410
		5	$\omega_{22}$	34.139
		6	$\omega_{23}$	45.864
		7	$\omega_{14}$	52.650
		8	$\omega_{31}$	57.714
		9	$\omega_{32}$	62.429
		10	$\omega_{24}$	64.208
	AEAE	1	$\omega_{11}$	13.039
		2	$\omega_{12}$	18.187
		3	$\omega_{13}$	29.982
		4	$\omega_{21}$	34.349
		5	$\omega_{22}$	38.376
		6	$\omega_{23}$	47.546
		7	$\omega_{14}$	48.226
		8	$\omega_{24}$	63.197
		9	$\omega_{31}$	66.400
		10	$\omega_{32}$	70.064

$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)
$R = 1.5$	AAAA	1	$\omega_{11}$	4.3489
		2	$\omega_{21}$	10.981
		3	$\omega_{12}$	12.214
		4	$\omega_{22}$	17.395
		5	$\omega_{31}$	22.696
		6	$\omega_{13}$	25.838
		7	$\omega_{32}$	27.986
		8	$\omega_{23}$	30.121
		9	$\omega_{33}$	39.135
		10	$\omega_{41}$	39.242
	EEEE	1	$\omega_{11}$	8.7430
		2	$\omega_{21}$	17.063
		3	$\omega_{12}$	18.858
		4	$\omega_{22}$	25.237
		5	$\omega_{31}$	30.859
		6	$\omega_{13}$	35.043
		7	$\omega_{32}$	37.451
		8	$\omega_{23}$	40.169
		9	$\omega_{41}$	49.635
		10	$\omega_{33}$	50.460
	EAEE	1	$\omega_{11}$	7.7898
		2	$\omega_{21}$	14.612
		3	$\omega_{12}$	18.391
		4	$\omega_{22}$	23.531
		5	$\omega_{31}$	27.065
		6	$\omega_{32}$	34.259
		7	$\omega_{13}$	34.759
		8	$\omega_{23}$	39.018
		9	$\omega_{41}$	44.588
		10	$\omega_{33}$	47.995

$R = a/b$	Conditions aux limites	Mode	$\omega_{mn}$	$\omega$ (rad/sec)
$R = 1.5$	<b>AAEA</b>	1	$\omega_{11}$	5.5391
		2	$\omega_{21}$	11.607
		3	$\omega_{12}$	14.956
		4	$\omega_{22}$	19.567
		5	$\omega_{31}$	23.075
		6	$\omega_{32}$	29.536
		7	$\omega_{13}$	30.013
		8	$\omega_{23}$	33.905
		9	$\omega_{41}$	39.508
		10	$\omega_{33}$	42.290
	<b>AAEE</b>	1	$\omega_{11}$	6.3101
		2	$\omega_{12}$	13.824
		3	$\omega_{21}$	15.336
		4	$\omega_{13}$	21.100
		5	$\omega_{22}$	26.603
		6	$\omega_{23}$	30.253
		7	$\omega_{14}$	32.512
		8	$\omega_{31}$	34.938
		9	$\omega_{32}$	44.274
		10	$\omega_{24}$	44.584
	<b>AEAE</b>	1	$\omega_{11}$	6.6016
		2	$\omega_{12}$	13.324
		3	$\omega_{21}$	15.938
		4	$\omega_{22}$	21.134
		5	$\omega_{13}$	26.479
		6	$\omega_{31}$	30.156
		7	$\omega_{23}$	32.671
		8	$\omega_{32}$	34.562
		9	$\omega_{33}$	44.385
		10	$\omega_{14}$	45.447

## ANNEXE B : Effet de rapport longueur-sur-épaisseur

Conditions aux limites	Mode	$\omega$ (rad/sec) $R=0.5$			
		60	95	130	165
AAAA	1	38.585	22.697	17.477	13.618
	2	47.575	27.985	21.549	16.791
	3	66.526	39.133	30.132	23.480
	4	96.357	56.681	43.644	34.009
	5	136.66	80.390	61.901	48.234
	6	147.29	86.639	66.712	51.983
	7	154.28	90.756	69.882	54.453
	8	167.90	98.766	76.050	59.260
	9	187.00	110.00	84.701	66.001
	10	190.17	111.86	86.134	67.117
EEEE	1	84.278	49.575	38.173	29.745
	2	92.019	54.129	41.679	32.477
	3	108.97	64.101	49.358	38.461
	4	137.44	80.848	62.253	48.509
	5	177.79	104.58	80.530	62.751
	6	228.70	134.53	103.59	80.717
	7	229.49	135.00	103.95	80.997
	8	235.24	138.38	106.55	83.026
	9	247.90	145.82	112.28	87.495
	10	268.67	158.04	121.69	94.825
AEAE	1	83.520	49.129	37.829	29.477
	2	88.634	52.138	40.146	31.283
	3	100.95	59.380	45.723	35.628
	4	123.61	72.714	55.990	43.628
	5	157.97	92.925	71.552	55.755
	6	203.90	119.94	92.354	71.964
	7	228.28	134.28	103.40	80.568
	8	233.45	137.33	105.74	82.396
	9	243.62	143.31	110.35	85.983
	10	260.68	153.34	118.07	92.006

*Annexe*

<i>Conditions aux limites</i>	<i>Mode</i>	<i><math>\omega</math> (rad/sec) R=1</i>			
		<b>60</b>	<b>95</b>	<b>130</b>	<b>165</b>
<b>AAAA</b>	1	23.092	14.695	10.496	8.3972
	2	46.764	29.759	21.256	17.005
	3	74.898	47.663	34.045	27.236
	4	90.700	57.718	41.227	32.982
	5	92.358	58.773	41.981	33.585
	6	129.16	82.193	58.709	46.968
	7	153.56	97.720	69.800	55.840
	8	162.71	103.54	73.958	59.167
	9	177.48	112.94	80.675	64.540
	10	187.08	119.05	85.035	68.028
<b>EEEE</b>	1	47.236	30.059	21.471	17.177
	2	74.862	47.640	34.028	27.223
	3	115.42	73.447	52.462	41.970
	4	125.02	79.560	56.829	45.463
	5	135.35	86.133	61.524	49.219
	6	175.86	111.91	79.934	63.948
	7	195.48	124.40	88.854	71.083
	8	220.45	140.29	100.21	80.165
	9	236.90	150.75	107.21	86.144
	10	238.80	151.96	108.54	86.836
<b>AEAE</b>	1	43.028	27.382	19.558	15.647
	2	60.018	38.193	27.281	21.825
	3	98.941	62.963	44.973	35.979
	4	113.35	72.133	51.523	41.219
	5	126.64	80.590	57.565	46.052
	6	156.90	99.846	71.319	57.055
	7	159.14	101.27	72.339	57.871
	8	208.55	132.71	94.795	75.836
	9	219.12	139.44	99.600	79.680
	10	231.21	147.13	105.10	84.077

*Annexe*

<i>Conditions aux limites</i>	<i>Mode</i>	<i><math>\omega</math> (rad/sec) R=1.5</i>			
		<b>60</b>	<b>95</b>	<b>130</b>	<b>165</b>
<b>AAAA</b>	1	21.745	13.916	10.002	7.8280
	2	54.906	35.140	25.257	19.766
	3	61.069	39.084	28.092	21.985
	4	86.974	55.663	40.008	31.311
	5	113.48	72.628	52.201	40.853
	6	129.19	82.681	59.427	46.508
	7	139.93	89.555	64.368	50.375
	8	150.61	96.388	69.279	54.218
	9	195.68	125.23	90.011	70.444
	10	196.21	125.57	90.256	70.635
<b>EEEE</b>	1	43.715	27.978	20.109	15.737
	2	85.316	54.602	39.245	30.714
	3	94.290	60.346	43.373	33.944
	4	126.19	80.759	58.046	45.427
	5	154.29	98.748	70.975	55.546
	6	175.21	112.14	80.598	63.077
	7	187.25	119.84	86.137	67.411
	8	200.84	128.54	92.388	72.304
	9	248.18	158.83	114.16	89.343
	10	252.30	161.47	116.06	90.829
<b>AEAE</b>	1	33.008	21.125	15.184	11.883
	2	66.622	42.638	30.646	23.984
	3	79.692	51.003	36.658	28.689
	4	105.67	67.629	48.609	38.041
	5	132.40	84.733	60.902	47.662
	6	150.78	96.500	69.359	54.281
	7	163.36	104.55	75.144	58.808
	8	172.81	110.60	79.492	62.211
	9	221.93	142.03	102.09	79.894
	10	227.24	145.43	104.53	81.805



## ANNEXE C : Effet d'orientation des fibres

Conditions aux limites	Mode	$\omega$ (rad/sec) $R=1.5$			
		0°	30°	60°	90°
AAAA	1	4.3489	5.1720	5.7842	5.9776
	2	10.981	10.768	9.7740	8.6774
	3	12.214	14.316	16.092	14.171
	4	17.395	18.338	18.820	21.915
	5	22.696	22.351	23.081	22.401
	6	25.838	27.536	24.645	23.904
	7	27.986	28.865	30.070	27.979
	8	30.121	34.034	35.036	33.221
	9	39.135	37.560	39.491	34.701
	10	39.242	38.578	41.072	44.280
EEEE	1	8.7430	9.1686	11.121	12.756
	2	17.063	15.901	15.166	15.407
	3	18.858	20.957	22.079	20.990
	4	25.237	24.961	28.400	29.656
	5	30.859	29.614	31.669	33.922
	6	35.043	35.476	32.450	35.927
	7	37.451	38.355	39.382	39.988
	8	40.169	42.879	43.347	41.201
	9	49.635	47.188	49.282	46.709
	10	50.460	47.856	54.717	55.446
AEAE	1	6.6016	6.7232	6.5137	6.5704
	2	13.324	13.718	11.773	10.642
	3	15.938	15.871	19.200	17.595
	4	21.134	21.745	19.317	22.148
	5	26.479	26.991	24.486	24.869
	6	30.156	29.757	28.762	27.197
	7	32.671	31.872	33.060	30.126
	8	34.562	38.274	39.416	38.273
	9	44.385	43.211	40.981	39.335
	10	45.447	43.731	45.018	48.716

*Annexe*

<i>Conditions aux limites</i>	<i>Mode</i>	<i><math>\omega</math> (rad/sec) <math>R = 0.5</math></i>			
		<b>0°</b>	<b>30°</b>	<b>60°</b>	<b>90°</b>
<b>AAAA</b>	1	22.697	20.532	16.994	14.170
	2	27.985	29.613	30.521	27.989
	3	39.133	44.251	50.442	46.518
	4	56.681	64.135	52.353	53.796
	5	80.390	72.844	68.908	56.675
	6	86.639	81.328	76.017	78.087
	7	90.756	90.258	94.581	90.782
	8	98.766	96.748	106.24	101.26
	9	110.00	117.84	110.67	109.90
	10	111.86	120.65	127.58	111.93
<b>EEEE</b>	1	49.575	41.832	31.478	29.065
	2	54.129	49.728	45.975	45.030
	3	64.101	64.050	68.380	71.695
	4	80.848	84.797	78.195	74.333
	5	104.58	111.09	94.589	83.190
	6	134.53	111.36	97.408	106.60
	7	135.00	120.12	120.90	115.68
	8	138.38	132.48	131.53	137.20
	9	145.82	145.54	147.76	143.20
	10	158.04	153.09	157.15	146.75
<b>AEAE</b>	1	49.129	41.189	29.635	26.686
	2	52.138	47.148	40.060	36.476
	3	59.380	58.591	58.130	59.128
	4	72.714	76.142	76.796	70.527
	5	92.925	99.676	83.705	78.245
	6	119.94	110.94	89.961	94.404
	7	134.28	118.09	111.55	95.745
	8	137.33	126.86	115.16	125.72
	9	143.31	132.73	141.27	136.45
	10	153.34	146.98	147.86	141.30