



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Kasdi Merbah Ouargla Faculté des Sciences Appliquées Département de Génie Mécanique

**Option : Génie Énergétique** 

**Réf:....** 

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme de :

### MASTER

Présenté par :

M<sup>r</sup>. ZAIZ Youcef

M<sup>r</sup>. BENDJADDOU Med El hachemi

# Thème

Simulation numérique de l'écoulement d'un

fluide Newtonien et incompressible

à travers un faisceau de tubes

Soutenu publiquement

### Le: 01/06/2017

M <sup>r</sup> . ATTIA Abbase	MA (A)	Président	UKM Ouargla
M <sup>r</sup> . BELAKROUM Rassim	MC (B)	Encadreur/rapporteur	UKM Ouargla
M <sup>r</sup> . KHAMA Reda	MC (B)	Examinateur	UKM Ouargla

**Promotion : Juin 2017** 





Toute la gratitude et le merci à Dieu notre créateur qui nous a donné la force pour effectuer et achever ce travail. Ainsi nos parents qui nous aident. Nous tenons à remercier en premier lieu et très chaleureusement notre promoteur **DR. BELAKROUM Rassim** pour avoir accepté de diriger notre travail, pour ses précieux conseils, pour son esprit d'ouverture et sa disponibilité. Grâce à lui, notre travail s'est déroulé. Nous remercions toutes personnes qui nous ont aidés de près ou de loin à la finalisation de ce travail, nous tenons à leur exprimer notre vive gratitude. Enfin nos remerciements à tous les enseignants qui ont contribués à notre formation à l'université de OUARGLA.

Mille Mercis





Je dédie ce modeste travail : Amon très Cher Père : Mesaoud. Ama très Chère Mère : Fatma zouhra. Atous mes Frères : Elhadi, Taher, Lazhar et Mohamed. Atous mes sœurs : Fatiha Wahiba Khadidia Faiz

*Atous mes sœurs : Fatiha, Wahiba, Khadidja, Faiza, Meriam, Arbia.* 

Ames chers et fidèles amis : Azzouz Oussama, Abbas,

Salem, Hama, Imad, Walid, Lakhdar, S.Fares, Ammar,

Ninou, Ysn, H.Ooussama, Khaled, Nacer, Abdou,

b.Fares, Sasi, Youcef, Yassin, Hakim, Dr. Halassa

Daoud.

Amon cher binôme Hicham.

*Atoute la promotion Génie énergétique.* 

Joucef





Je dédie ce modeste travail : Imon très Cher Père : Ali. Ima très Chère Mère : Mesaouda. Itous mes Frères : Ridha et Akram. Itous mes sœurs : Nadjwa, Zineb et Nadouche. Imes oncles : Azzedine et Khaled. Imes chers et fidèles amis. Itoute la promotion Génie énergétique.



#### Résumé :

Ce travail a pour but d'étudier numériquement l'écoulement instationnaire d'un fluide Newtonien et incompressible à travers un faisceau de tubes. La configuration abordée et composée de quatre cylindres disposés en forme de carré. Afin de résoudre le système d'équation régissant l'écoulement du fluide, nous avons utilisé le logiciel **FLUENT** basé sur la méthode des volumes finis. L'analyse est faite pour différents nombre de Reynolds et différentes distances séparant les cylindres. Pour chaque cas, nous avons déterminé l'évolution des efforts de portance et de trainée dans les espaces temporels et fréquentiels. L'analyse judicieuse de l'écoulement autour de chaque cylindre a révélé que l'augmentation du nombre de Reynolds ainsi que la distance entre les cylindres diminue les effets réciproques des quatre cylindres l'un sur l'autre.

Mots clés : Lâchers tourbillonnaire, Vortex, Zone de sillage, Écoulement autour d'obstacles.

#### Abstract :

The aim of this project is to numerically predict the unsteady flow of a Newtonian incompressible fluid around tubes. The configuration tackled is composed of four cylinders arranged in a square shape. In order to solve the equations governing the fluid flow, we used **FLUENT** software based on finite volume method. The analysis is made for different Reynolds number and different distances separating the cylinders. For each case, we determined the evolution of lift and drag in time and frequency spaces. The judicious analysis of the flow around each cylinder revealed that the increase of Reynolds number and the distance between the cylinders decreases the reciprocal effects of the four cylinders on each other.

Key words: Vortex shedding, Vortex, Wake zone, Flow around bluff body.

#### الملخص:

يهدف هذا العمل الى الدراسة الرقمية للتدفق المتقلب لمائع نيوتني وغير قابل للانضغاط حول حزمة من الأنابيب. التركيبة المناقشة مكونة من أربعة أسطوانات متموضعة في شكل مربع. بصدد حل جملة المعادلات التي تصف تدفق المائع. استعملنا برنامج FLUENT الذي يعتمد على طريقة الحجوم المحدودة. خلال المناقشة قمنا بتحليل تصرف المائع من أجل أعداد Reynolds ومسافات فاصلة بين الأسطوانات مختلفة. في كل حالة اعتمدنا على تحديد تغير قوى الرفع والسحب في المجال الزمني والترددي. وكشف التحليل المفصل للتدفق حول أربعة أسطوانات على أن الزيادة في عدد Reynolds والمسافة بين الأسطوانات تقلل من التأثير المتبادل للأسطوانات على بعضها البعض.

كلمات مفتاحية: إصدار دوامات، دوامة، منطقة أعقاب، تدفق حول العقبات.

# Sommaire

Remerciements	
Dédicaces	
Résumé	
Sommaire	
Liste des figures	
Nomenclature	
Introduction générale	01

# Chapitre I

### Étude Bibliographique

I.1. Introduction	03
I.2. Les obstacles aérodynamiques	03
I.2.1. Ecoulement autour des obstacles	04
I.2.2. Ecoulement autour d'un cylindre	04
I.2.3. Ecoulement autour d'un quatre cylindres	05
I.3. L'écoulement de Von Karman	05
I.4. Synthèse bibliographique	06

## Chapitre II

### Modélisation Mathématique et Méthode Numérique

II.1. Introduction	11
II.2. Modélisation Mathématique	11
II.2.1. Equations de transport	11
II.2.1.1. Equation de continuité	11
II.2.1.2. Equations de quantité de mouvement (Navier Stokes)	13
II.3. Nombre de Reynolds	13
II.4. Méthode Numérique	13
II.4.1. Méthode des volumes finis (MVF)	14

# Chapitre III

## Résultats et discussions

III.1. Introduction	16
III.2. Ecoulement autour d'un cylindre à section circulaire	16
III.3. Ecoulement autour de quatre cylindres dans disposition carrée	21
III.3.1. Première géométrie P/D=2	22
III.3.2. Deuxième géométrie P/D=3	
III.3.3. Troisième géométrie P/D=4	
Conclusion générale	36
Bibliographie	

# Liste des figures

Figure	Intitulé	Page
I.1	Coefficient de traînée Cx en fonction du nombre de Reynolds (Re)	05
	pour un cylindre lisse et une sphère lisse	
I.2	Allée tourbillonnaire alternée de Bénard-Von Karman	06
III.1	Géométrie et conditions aux limites	16
III.2	Maillage autour d'un cylindre à section circulaire	16
III.3	Champs de vitesses autour d'un cylindre à différents instants pour	17
	Re=500	
III.4	Champs de vitesses autour d'un cylindre à différents instants pour	18
	Re=2000	
III.5	Coefficients de traînée et de portance en fonction de temps	19
III.6	Spectre des fréquences des coefficients de traînée et de portance	20
III.7	Fréquences des lâchers en fonction des vitesses d'écoulements à	20
	l'entrée	
III.8	Nombre de Strouhal en fonction des vitesses d'écoulements à l'entrée	21
III.9	Géométrie et conditions aux limites	21
III.10	Maillage utilisé autour de quatre cylindres dans disposition carrée	22
III.11	Champ de vitesses autour de quatre cylindres à t =60s et Re=1000	22
III.12	Coefficient de portance en fonction du temps pour Re=1000	24
III.13	Spectre de fréquence du coefficient de portance pour Re=1000	25
III.14	Spectre de fréquence du coefficient de portance pour Re=2000	27
III.15	Spectre de fréquence du coefficient de portance pour Re=3000	28
III.16	Champ de vitesses autour de quatre cylindres à t =60s pour Re=1000	29
III.17	Spectre de fréquence des coefficients de portance, pour Re=1000	30
III.18	Spectre de fréquence des coefficients de portance, pour Re=2000	31
III.19	Spectre de fréquence des coefficients de portance pour Re=3000	33
III.20	Champ de vitesses autour de quatre cylindres à t =60s, pour Re=1000	33
III.21	Spectre de fréquence des coefficients de portance pour Re=1000	35

# Nomenclature

#### Notations usuels :

m : masse du fluide (Kg)

- $\vartheta$ : volume élémentaire (m<sup>3</sup>)
- t: temps (s)
- f: fréquences (HZ)
- $\vec{v}$ : vecteur de vitesse
- $\vec{n}$  : vecteur unitaire normal à un élément de surface
- s : surface élémentaire (m<sup>2</sup>)
- P : pression locale du fluide (Kg/ms<sup>2</sup>)
- $u_{:}$  composante axiale du vecteur vitesse (m/s)
- $v_{:}$  composante verticale du vecteur vitesse (m/s)
- x, y: les coordonnées cartésiennes
- X, Y : les coordonnées adimensionnelles
- *V* : le volume du volume de contrôle
- $\vec{A}$ : le vecteur l'aire de la surface

 $S_{\Phi}$ : le terme source (la source de  $\Phi$  par unité de volume)

 $N_{faces}$ : le nombre de faces (interfaces) du volume de contrôle

 $v_f$ : le flux de masse à travers l'interface f

 $A_f$ : l'aire de l'interface f

#### **Symbole Grecque :**

- $\rho$ : Masse volumique (Kg/m<sup>3</sup>)
- $\Omega$  : volume de contrôle (m<sup>3</sup>)
- $\Sigma$ : Surface de contrôle (m<sup>2</sup>)
- $\mu$ : viscosité dynamique (N.s/m<sup>2</sup>)
- $\Phi$  : la dissipation visqueuse (N/s.m<sup>2</sup>)
- $\Gamma_{\Phi}$ : le coefficient de diffusion de la grandeur  $\Phi$
- $\Phi_f$ : la valeur de  $\Phi$  transférée par convection à travers l'interface f

 $(\vec{\nabla}\Phi)_n$ : la valeur de  $\vec{\nabla}\Phi$  normal (perpendiculaire) à l'interface f

### Nombres sans dimensions :

Re: nombre de Reynolds

- C<sub>d</sub>: coefficients de traînée
- $C_l$ : coefficient de portance
- $\overline{C_l}$ : coefficient de portance moyenne
- St : nombres de Strouhal

# **INTRODUCTION GENERALE**

### Introduction générale

La mécanique des fluides est une science qui s'intéresse à l'étudie du comportement des fluides à l'état statique ou dynamique. C'est une science qui trouve des applications dans plusieurs domaines tels que l'astrophysique, la biomédecine, la météorologie, la géophysique, la physique du plasma, l'aérodynamique, l'hydraulique, les turbomachines et les équipements thermiques...etc.

Dans la pratique, le phénomène d'écoulement de fluide autour des obstacles est très fréquent. Il est d'une importance capitale dans beaucoup domaines tels que : la conception mécanique et thermique de plusieurs systèmes en industrie engineering comme : avions, automobiles, bâtiments, composant électroniques, les aubes de turbines et les formes géométriques à section circulaire. L'identification et l'étude des phénomènes hydro et aérodynamiques qui surgissent dans le sillage d'un obstacle restent un sujet d'intérêt d'actualité dans divers domaines.

Dans la majorité des recherches effectuées, le cylindre à section circulaire a été le modèle de base des corps non profilés et est devenu la configuration conforme pour étudier de tels écoulements externes. L'écoulement autour d'un cylindre est un problème classique de la dynamique des fluides et sert de cadre à la validation de nouvelles méthodes numériques. On peut noter que ce problème académique a suscité un regain d'intérêt durant la dernière décennie qu'il soit expérimentalement ou numériquement, dû à l'émergence de nouvelles méthodes de résolutions des équations de la dynamique. Pour notre cas, on s'intéresse à l'étude numérique de l'écoulement autour d'un cylindre et aussi de quatre cylindres dans une disposition carrée en fonction de différent nombre de Reynolds.

Le présent mémoire est structuré en trois chapitre :

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique sur des travaux antérieurs réalisés par d'autres auteurs traitant du domaine de l'étude théorique et expérimentale de l'écoulement autour d'un cylindre et de quatre cylindres ainsi que des généralités sur les écoulements autour d'obstacles.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la formulation mathématique nécessaire ainsi qu'un aperçu sur la méthode numérique utilisée. Il s'agit donc de l'établissement des équations de continuité et de quantité de mouvement (Navier Stokes). En plus une présentation de la méthode numérique utilisée (La méthode des volumes finis).

Le troisième chapitre est dédié à la présentation et à la discussion des résultats. Finalement en termine par une conclusion générale.



Étude Bibliographique

# Chapitre I Étude Bibliographique

#### I.1. Introduction

Plusieurs travaux de recherches ont été réalisés afin de modéliser les écoulements autour des obstacles. Pour cela, des travaux d'expérimentation ont été réalisés et confrontés aux méthodes numériques. Une large gamme de modèles mathématiques ont été développés afin de s'approcher de la réalité des écoulements au tour d'obstacles à différents régimes (laminaire et turbulent) et de fournir le maximum d'informations qui peuvent se produire [1].

L'étude de l'écoulement inertiel autour d'un obstacle cylindrique est un problème classique de la mécanique des fluides. Dans le cas newtonien, les études autant numériques qu'expérimentales sont très nombreuses. On recense aussi quelques travaux qui se sont intéressés à l'écoulement autour d'un cylindre en milieu confiné [2].

Dans le présent mémoire, on s'intéresse à l'écoulement bidimensionnel d'un fluide Newtonien et incompressible autour de quatre cylindres dans une configuration carrée.

#### I.2. Les obstacles aérodynamiques

On peut classer les obstacles de forme géométrie simple en trois types :

- Les obstacles à courbure progressive : pour lesquels le point de décollement de la couche limite est susceptible de se déplacer : le modèle géométrique est la sphère ou la cylindre.
- Les obstacles à arrête vive, pour lesquels le point de décollement de la couche limite est fixe : le modèle géométrique est la plaque plane inclinée sur la direction de la vitesse V.
- Les obstacles profilés, pour lesquels il n'y a pas de décollement de la couche limite : le modèle géométrique est la plaque plane parallèle à V [3].

#### I.2.1. Ecoulement autour des obstacles

L'écoulement autour des obstacles est un phénomène qui se produit fréquemment dans la pratique et sa compréhension est nécessaire pour la conception mécanique et thermique de nombreux systèmes en engineering comme : avions, automobiles, bâtiments, composantes électroniques, les aubes de turbine...etc. L'indentification et étude des phénomènes hydro et aérodynamiques qui surgissant dans le sillage d'un obstacle restent un sujet d'intérêt dans divers domaines [4].

#### I.2.2. Ecoulement autour d'un cylindre

Le cylindre est un corps qui présente une grande surface frontale à l'écoulement, à partir de Re=50 la couche limite décolle au niveau du maître couple du fait de l'action retardatrice du trop fort gradient de pression positif à cet endroit. On dit gradient positif, lorsque la pression près de la paroi augmente dans le sens de l'écoulement. Ce décollement crée un sillage épais de dimension comparable au maître couple (la plus grande surface frontale présentée à l'écoulement).

La traînée est due essentiellement à la différence de pression régnant entre le point d'arrêt et le sillage. On appelle cette traînée de pression ou traînée de Couette. Il est donc évident de choisir le maitre couple (S) comme surface permettant de définir le Cx. (S=d. L pour le cylindre). Le nombre de Reynolds est défini lui aussi à partir de la plus grande dimension transversale (le diamètre pour le cylindre) :

Pour le cylindre le  $Re_c=4.10e5$ , le Cx du premier régime est de 1.2 celui du second est de 0.5. La figure (**Figure. I.1**) présente la variation du coefficient de traînée en fonction de nombre de Reynolds pour un cylindre et une sphère lisses [5-4].



Figure. I.1 : Coefficient de traînée Cx en fonction du nombre de Reynolds (Re) pour un cylindre lisse et une sphère lisse [5]

#### I.2.3. Ecoulement autour d'un quatre cylindres

Les études traitant le problème de l'écoulement autour d'un quatre cylindres dans une configuration carrée ont suscité un intérêt considérable ces dernières années. Cet intérêt découle de la variété d'applications dans le domaine de l'ingénierie faisant appel à des formes cylindriques.

#### I.3. L'écoulement de Von Karman

Le phénomène d'instabilité de Bénard-Von Karman est l'un des problèmes les plus classiques de mécanique des fluides. C'est le modèle le plus simpliste permettant une approche concrète des phénomènes de turbulence générés par la présence d'un obstacle sur le trajet d'un écoulement laminaire. Son étude connaît depuis quelques années un nouvel engouement lié à la possibilité de modifier l'écoulement en faisant osciller l'obstacle.

Revenons tout d'abord sur le problème classique : on place un obstacle cylindrique sur le trajet d'un écoulement parallèle. Selon le nombre de Reynolds (Re) de l'écoulement on observe des comportements distincts. Pour les valeurs de Re faibles, de l'ordre de l'unité, l'écoulement est laminaire et approximativement linéaire. Pour les valeurs de Re de quelques dizaines, il apparaît des tourbillons stables derrière le cylindre, l'écoulement est toujours symétrique. A partir d'une valeur critique de Re, environ Rec = 46, les tourbillons se détachent périodiquement du



cylindre. On obtient ce que l'on appelle une allée tourbillonnaire alternée de Bénard-Von Karman (voir figure au-dessous, correspondant à Re = 96). Notons que tant que Re  $\leq$  150, les effets tridimensionnels sont négligeables. Il est d'autre part important de savoir que le nombre de Strouhal St = f.d/u est constant pour un montage donné, où f est la fréquence d'émission des tourbillons, d est le diamètre de l'obstacle, et u est la vitesse moyenne du fluide loin en aval de l'obstacle. On peut aussi écrire f = St.u/d, et donc la fréquence d'émission de vortex est proportionnelle à u, donc au nombre de Reynolds de l'écoulement. Ceci reste valable pour les très grandes valeurs de Re [6].



Figure. I.2 : Allée tourbillonnaire alternée de Bénard-Von Karman [6]

#### I.4. Synthèse bibliographique

**K. Lam et S. C. Lo [7] :** ont étudié expérimentalement l'écoulement autour de quatre cylindres (soumis à un flux croisé) dans une configuration carrée, pour différents arrangements et dispositions, avec un nombre de Reynolds sous-critique Re=2100.

**Guojon-Durand et al [1] :** ont étudié l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre animé d'un mouvement de rotation oscillante autour de son axe. Ils ont confirmé que pour certaines valeurs de la fréquence d'oscillation, il ya lieu d'une réduction de l'instabilité hydrodynamique. Et par la suite, ils ont modifié l'écoulement moyen en fonction de certains paramètres mécanique de structure du corps.

**N. Roquet et al [1] :** ont travaillé sur l'écoulement d'un fluide stationnaire autour d'un cylindre en utilisant la modélisation numérique pour étudier et expliquer la variation de l'effort de

Chapitre I

#### ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

fléchissement sur le sillage d'un cylindre. Les résultats portent sur la détermination du comportement asymptotique du fluide.

**Rodolphe Perrin [8] :** ont étudié l'écoulement turbulent autour d'un cylindre circulaire à grand nombre de Reynolds et l'ont analysé expérimentalement en utilisant les techniques PIV, PIV Stéréoscopique et PIV haute cadence. Les nombres de Reynolds étudies correspondent à l'entrée de l'écoulement dans le régime critique, marqué par la diminution de la traînée, et où le point de transition rejoint le point de décollement et la couche limite devient turbulente. Le cylindre est placé en milieu confiné afin de permettre des comparaisons avec des simulations numériques effectuées sur un domaine réaliste.

**QIE- Rong et al [1] :** ont mené une étude expérimentale de l'écoulement de l'eau peu profonde transitoire autour d'un cylindre circulaire horizontal avec un rapport d'espace G. à l'aide d'une méthode PIV image vélocimétrie de particule, Ils ont présenté la distribution de champ de vitesse, champ de pression et le développement du vortex pour divers rapports -espace G.

**N. Takafumi et al [1] :** ont effectué une étude numérique bidimensionnelle de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, en utilisant la modèle DES (Detached Eddy Simulation). Les résultats obtenus par La DES a prévu la cessation du décollement de tourbillon derrière le cylindre ; et même résultat a été obtenu en utilisant la méthode simulation RANS (Reynolds Average Numerical Simulation), mais avec un rapport –espace G=h/d plus petit que la DES.

**P.F. Zhang et al [1] :** ont effectué une étude numérique de l'écoulement laminaire bidimensionnel autour d'une tige ascendante et d'un cylindre circulaire. Les résultats obtenus à l'aide du logiciel de simulation Fluent démontrent que le coefficient de trainée moyenne et le coefficient de fluctuation de portance du cylindre peuvent être réduits par une tige ascendante.

**R. Belakroum et al [1] :** Ont étudié par la méthode des éléments finis, le modèle LES (Large Eddy Simulation) pour simuler l'écoulement instationnaire et turbulent d'un fluide incompressible autour d'un cylindre

**Dal Jae Park et al [1] :** ont étudié expérimentalement les effets de différentes obstructions formées sur la propagation de la flamme dans un emprisonnement rectangulaire. Quatre obstacles simples différents ont été employés : sections transversales rectangulaires, cylindriques triangulaires et carrées avec des rapports de colmatage de 5 et de 10%. Ils ont

Chapitre I

#### ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

utilisé une caméra vidéo à grande vitesse pour étudier l'interaction entre une flamme de propagation et l'obstacle. Des images temporellement résolues de flamme ont été observées. Les vitesses de déplacement de flamme qui sont fonctions de la densité de probabilité ont été obtenues pour les différents obstacles. Comme la flamme de propagation empiète sur l'obstacle, une augmentation de vitesse locale de propagation due à l'expansion du gaz brûlé et au colmatage de l'obstacle a été obtenue. Cette augmentation locale de vitesse devient plus grande en allant d'un obstacle circulaire à un obstacle triangulaire ou carré. Ils ont trouvé que Les vitesses mesurées avec différents rapports de colmatage pour le même obstacle et ramenées à une moyenne de déplacement de flamme n'étaient pas sensiblement différentes à celle étudiées dans ce travail. Cependant, ils ont observé l'augmentation de la vitesse la plus rapide ramenée à une moyenne de flamme.

**S. Pascal-Ribot et Y. Blanchet [1] :** ont réalisé une étude expérimentale et numérique de l'écoulement de fluide autour d'un cylindre rigide en deux phases l'air et eau. La résolution numérique du problème a été faite à l'aide d'une méthode d'analyse dimensionnelle standard. Ils ont présenté une exploration de base pour évaluer les forces de portance de vibration exercées sur le cylindre.

**C. Shu et al [1] :** Ont mené une étude numérique d'un écoulement transitoire bidimensionnel au-dessus d'un cylindre circulaire. La résolution numérique du problème a été faite à l'aide d'une méthode IBM (Méthode Immergée de Boltzmann) de correction-treillis.

Ils ont constaté que cette méthode est simple dans le concept et facile pour l'exécution et la convergence du calcul numérique est plus rapide et plus stable.

**I. Khabbouchi et M.S. Guellouz [1] :** Ont effectué des mesures par PIV dans la zone du sillage proche derrière un cylindre placé près d'une paroi au niveau de son bord d'attaque. La configuration géométrique a permis d'isoler l'effet de l'écoulement type jet qui s'installe dans l'espacement entre la paroi et le cylindre. Le nombre de Reynolds, basé sur le diamètre du cylindre et la vitesse de l'écoulement libre est Re=8667. Ils ont montré l'existence de trois régions différentes d'écoulement lorsque le cylindre se rapproche de la paroi. L'effet de l'écoulement type jet se manifeste dans les faibles rapport- espace (G/D<0.3) en détruisant la couche de cisaillement inférieure et empêchant, par la suite l'allée de Von Karman de s'installer dans le sillage.

**Shuyang Cao –Yukio Tamura [1]:** Ont étudié numériquement et expérimentalement l'écoulement autours d'un cylindre circulaire pour un nombre de Reynolds sous-critique. On le constate que le nombre de Strouhal ne montre aucune variation par rapport au paramètre de cisaillement, et que le point d'arrêt à haute vitesse a une grande influence sur la force aérodynamique.

**K. Lam et al [9] :** Ont étudié numériquement par la méthode des volumes finis l'écoulement bidimensionnel et tridimensionnel autour de quatre cylindres dans une configuration carré. Pour le cas bidimensionnel ils ont pris Re = 100 et 200 et pour le cas tridimensionnel ils ont choisi Re = 200.

**E. Faghani et al [1] :** ont étudié l'écoulement et le transfert de chaleur d'un cylindre circulaire à partir d'un gicleur à air isotherme. L'étude s'est établie sur de bas nombre de Reynolds.

**K. Lam -L. Zou [1] :** ont étudié numériquement et expérimentalement les écoulements turbulents autour de quatre cylindres dans une configuration carrée intégrée avec différents rapports d'espacement choisis. Les résultats obtenus de la fluctuation de vitesse sont avérés similaires aux résultats numériques.

**L. Bruno et al [1] :** ont contribué par l'étude à l'analyse tridimensionnelle, de l'écoulement de fluide turbulent, pour un nombre de Reynolds élevé autour d'un cylindre rectangulaire. Ils ont réalisé que les paramètres aérodynamiques principaux obtenus par la modélisation numérique sont semblables aux résultats proposés dans la littérature.

Anu Dutta et al [10] : ont étudié numériquement le flux non confiné autour de quatre cylindres dans une configuration carrée en ligne dans le régime laminaire bidimensionnel pour Re = 200 et L / D = 2,5. En utilisant un code à base d'éléments finis COMSOL.

**Stephane Mossaz [2] :** ont étudié l'écoulement rampants, recirculants et instationnaires d'un fluide viscoplastique autour d'un cylindre. Ils ont étudié numériquement, les morphologies des écoulements, la localisation des zones rigides, les champs de contraintes et pression autour du cylindre ainsi que le coefficient de traînée. Expérimentalement, les fluides étudiés sont des gels de polymère Carbopol. Le comportement élastoviscoplastique de ces gels a été modélisé par une loi d'Herschel-Bulkley adaptée. Le montage expérimental conçu et réalisé a été validé par



l'étude de l'écoulement d'un fluide newtonien autour d'un cylindre et la mise en place d'une procédure adaptée pour les fluides à seuil. On a pu constater l'influence des conditions d'interface avec l'apparition d'une morphologie de lâchers de tourbillons simultanés et symétriques.

**X.K. Wang et al [11] :** ont étudié numériquement et expérimentalement l'écoulement autour de quatre cylindres dans une configuration carrée pour différents arrangements et dispositions, avec un nombre de Reynolds fixe Re=8000.

**S. BENSEDIRA et al [12] :** ont étudié le comportement aérodynamique de l'écoulement autour d'un obstacle cylindrique proche d'une paroi. L'écoulement bidimensionnel en régime laminaire pour un fluide incompressible sans transfert de chaleur, a été simulé. Ils ont utilisé la méthode des éléments finis avec le logiciel ANSYS CFX pour résoudre le système d'équations régissant l'écoulement. L'analyse est faite pour différents nombres de Reynolds (Re= 1, 10, 20, ...700) et différentes distances entre le cylindre et la paroi (10D, 15D et 20D).



# Modélisation Mathématique et Méthode Numérique

# Chapitre II Modélisation Mathématique et Méthode Numérique

#### **II.1.** Introduction

Dans le présent travail, l'écoulement considéré est l'écoulement autour d'un seul cylindre et aussi à travers un faisceau de tubes (autour de quatre cylindres dans une disposition carrée).

#### Hypothèses simplificatrices

Nous supposons l'écoulement est : instationnaire, bidimensionnel, laminaire, Newtonien et incompressible.

#### **II.2.** Modélisation Mathématique

Dans ce qui suit, seront décrites les équations de continuité et de quantité de mouvement (Navier Stokes) régissant de tels écoulements avec les simplifications nécessaires qui sont faites dans le code FLUENT selon les cas étudiés.

#### **II.2.1.** Equations de transport

Les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide incompressible Newtonien sont L'équation de continuité ainsi que les équations de conservation de quantité de mouvement :

#### II.2.1.1. Equation de continuité

L'équation de la continuité doit traduire le principe de conservation de la masse. C'est-àdire la variation de masse pendant un temps d'un élément de volume fluide doit être égal à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle de fluide sortant.

On considère un volume matérielle  $\Omega$ . Sa masse peut s'exprimer comme :

$$\boldsymbol{m} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{d} \boldsymbol{\vartheta} \tag{II.1}$$

Où  $\rho$  désigne la densité locale du fluide. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, la masse qui se trouve dans  $\Omega$  est constante et on peut écrire :

Chapitre II

MODELISATION MATHEMATIQUE ET METHODE NUMERIQUE

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho d\vartheta \qquad (II.2)$$

On applique le théorème de transport au volume  $\Omega$  sur une surface de contrôle  $\Sigma$  "Le théorème de transport de Reynolds"

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho d\vartheta = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\vartheta + \iint_{\Sigma} \rho(\vec{V}) ds \qquad (II.3)$$

Si le volume ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur  $\Sigma$  peut être remplacer par une intégrale de volume "Le théorème d'Ostrogradsky"

$$\iint_{\Sigma} \rho(\vec{V}\,\vec{n})ds = \iiint_{\Omega} \nabla(\rho\vec{V})d\vartheta \qquad (II.4)$$

Dans ces conditions l'équation (II.3) devient :

$$\iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{V}) \right] d\vartheta = 0 \qquad (II.5)$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrale doit être identiquement nulle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left( \rho \vec{V} \right) = 0 \tag{II.6}$$

L'équation (II.6) est appelée l'équation de continuité (forme différentielle) [4-13].

Pour notre cas (incompressible) l'équation de continuité s'écrit :

$$\nabla(\vec{V}) = 0 \tag{II.7}$$

#### Chapitre II

#### MODELISATION MATHEMATIQUE ET METHODE NUMERIQUE

#### II.2.1.2. Equations de quantité de mouvement (Navier Stokes)

La loi de conservation de quantité de mouvement traduite par les équations de Navier Stokes exprime tout simplement la loi fondamentale de la dynamique à un fluide Newtonien. Les équations de quantité de mouvement écrites suivants  $x_i$  (i =1, 2,3) sont [1] :



Dans notre cas (bidimensionnel) les équations de quantité de mouvement écrites suivant x et y sont [12] :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
(II.9)

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$
(II.10)

#### II.3. Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds noté **Re**, représente le rapport entre les effets d'inertie et les effets visqueux. Il définit la nature laminaire, transitoire ou turbulente d'un écoulement. Un écoulement laminaire est caractérisé par de faibles nombres de Reynolds, i.e. par des effets d'inertie faibles devant les effets visqueux. Un écoulement turbulent est caractérisé par des effets visqueux négligeables devant les effets d'inertie. Le nombre de Reynolds généralisé est défini par l'équation [14] :

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$
(II.11)

#### II.4. Méthode Numérique

Pour résoudre un problème de la mécanique des fluides il faut distinguer le modèle physique du modèle mathématique. Le modèle physique peut s'exprimer en mots et phrases qu'il est nécessaire de traduire en expressions mathématiques. Lorsque le problème est ainsi

#### MODELISATION MATHEMATIQUE ET METHODE NUMERIQUE

bien posé, il est alors possible de le résoudre soit mathématiquement (solution analytique) ou numériquement (solution numérique). Les solutions analytiques, basées sur la forme locale du problème (Equations aux Dérivées Partielles : « E.D.P. » associées aux conditions initiales et aux limites), ne peuvent être déterminées dans le cas général sauf dans certains cas classique connus depuis bien longtemps. Dans le cas général où il y'a des difficultés si l'on résout les équations aux drivées partielles qui régissent les phénomènes étudiés, on fait appel aux méthodes numériques, **le principe de ces méthodes est de transformer les équations différentielles en un système d'équations algébriques.** Il y'a trois méthodes numériques qui sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations aux drivées partielles régissant les écoulements. Ces méthodes sont [15] :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des volumes finis.

Pour la résolution de notre problème nous avons adopté la méthode des volumes finies.

#### II.3.1. Méthode des volumes finis (MVF)

La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar.

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC).

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire  $\Phi$ , valable pour toutes les équations d'écoulement, en régime stationnaire :

$$\oint_{A} (\rho \Phi \vec{\nu}) d\vec{A} = \oint_{A} (\Gamma_{\Phi} \overline{grad} \Phi) d\vec{A} + \int_{VC} S_{\Phi} dV \qquad (II.12)$$

Où

 $\rho$  : densité du fluide.

 $\vec{\mathbf{v}}$ : le vecteur vitesse ( $\vec{\mathbf{v}} = v_x \vec{\mathbf{i}} + v_y \vec{\mathbf{j}}$ ).

 $\vec{A}$ : le vecteur l'aire de la surface.

 $\Gamma_{\Phi}$ : le coefficient de diffusion de la grandeur  $\Phi$ .

 $\overrightarrow{grad}$ : le gradient de  $\Phi$  ( $grad\Phi = \overrightarrow{\nabla}\Phi = \frac{d\Phi}{dx}\overrightarrow{\iota} + \frac{d\Phi}{dy}\overrightarrow{J}$  en 2D).

 $S_{\Phi}$ : le terme source (la source de  $\Phi$  par unité de volume).

L'équation (**II.15**) est appliquée sur chaque volume de contrôle du domaine de calcul (domaine d'étude ou d'analyse). La discrétisation de cette équation donne :

$$\sum_{f}^{N_{faces}} \rho_{f} \nu_{f} \Phi_{f} A_{f} = \sum_{f}^{N_{faces}} \Gamma_{\Phi} (\nabla \Phi)_{n} A_{f} + S_{\Phi} V \qquad (II.13)$$

Où

 $N_{faces}$ : le nombre de faces (interfaces) du volume de contrôle.

 $\Phi_f$ : la valeur de  $\Phi$  transférée par convection à travers l'interface f.

 $v_f$ : le flux de masse à travers l'interface *f*.

 $A_f$ : l'aire de l'interface  $f(|\vec{A}| = |A_x\vec{\iota} + A_y\vec{j}| \text{ en 2D}).$ 

 $(\vec{\nabla}\Phi)_n$ : la valeur de  $\vec{\nabla}\Phi$  normal (perpendiculaire) à l'interface *f*.

*V* : le volume du volume de contrôle.

Les différentes étapes de la mise en œuvre sont :

- Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points (les nœuds du maillage), autour desquels on définit des volumes élémentaires (appelés volumes de contrôle) contigus, non juxtaposés et sans discontinuités aux interfaces.
- Les équations modèles, sous forme conservative, sont intégrées sur chaque volume de contrôle (VC).
- Les intégrales sur un volume de contrôle en un nœud donné sont évaluées en approchant la variation de Φ par des profils ou des lois d'interpolation entre les nœuds voisins du point considéré.
- Écriture des équations algébriques en fonction des valeurs de  $\Phi$  aux nœuds du maillage.
- Résolution du système algébrique linéaire obtenu [16].



# Chapitre III Résultats et discussions

#### **III.1.** Introduction

Ce chapitre est dédié à la discussion et à l'interprétation des résultats des simulations numériques réalisées. Nous allons commencer par la présentation des résultats concernant un premier cas test qui est l'écoulement autour d'un cylindre à section circulaire. Par la suite nous discuterons le comportement des écoulements de fluide autour de quatre cylindres disposés en forme carré. Une importance particulière est donnée à l'effet de la distance entre les cylindres sur les coefficients de trainée et de portance.

#### III.2. Ecoulement autour d'un cylindre à section circulaire

La figure III.1 représente la configuration étudiée ainsi que les conditions aux limites utilisées. La figure III.2 illustre le maillage utilisé proche de l'obstacle cylindrique. Les paramètres géométriques considérés sont : L=20m, H=10m et D=1m.



Figure.III.1 : Géométrie et conditions aux limites



Figure.III.2 : Maillage autour d'un cylindre à section circulaire

Nous pouvons observer sur les figures III.3. a, b et c le champ des vitesses autour d'un cylindre à differents instants pour un nombre de Reynolds Re=500. Il est claire que l'écoulement reste toujour symetrique jusqu'à t=30s. Le premier détachement tourbillonaire est remarqué au environs de t=60s. Par la suite les lachers de tourbillons ou de vortex vont continuer à avoir lieu de manière alternée et continue dans le temps.



#### (c): t = 120s



Pour un nombre de Reynolds 2000, On remarque pratiquement la même topologie de l'écoulement dans la zone de sillage. Cependant, il est important de noter qu'à t=30s contrairement au cas où Re=500 l'écoulement n'est plus symétrique et le phénomène d'éclatement tourbillonnaire et déjà établi. Il est aussi important de noter que l'amplitude des vitesses enregistrée atteint des valeurs crêtes plus importantes.



(a): t = 40s

#### Figure.III.4 : Champs de vitesses autour d'un cylindre à différents instants pour Re=2000

Les figures III.5 et III.6 représentent l'évolution temporelle des coefficients aérodynamiques. Il est évident qu'après une période de transition qui diminue en augmentant la vitesse d'écoulement, on remarque une certaine périodicité dans l'évolution temporelle de la trainée et de la portance. Le coefficient de portance fluctue autour d'une valeur moyenne nulle par contre le coefficient de traînée évolue autour d'une moyenne égale à 1.5 pour Re=500 et 1.75 pour Re=2000.

A partir des spectres des fréquences des coefficients de traînée et de portance que représente la figure III.6, on peut voir que les signaux de portance et de traînée sont dominés par une seule fréquence fondamentale. Par conséquent, on pourrait dire que l'évolution des

coefficients aérodynamique est pratiquement harmonique. On peut aussi vérifier que la fréquence principale de la traînée et le double de celle de la portance.



Figure.III.5 : Coefficients de traînée et de portance en fonction de temps



Chapitre III



Figure.III.6 : Spectre des fréquences des coefficients de traînée et de portance

Il est observé sur la figure III.7 représentant la variation de la fréquence des lâchées tourbillonnaires en fonction des vitesses d'écoulement à l'entrée du domaine de calcul une certaine évolution linéaire. Cette relation linéaire reliant les fréquences aux vitesses d'écoulements est très connue et est même la base de la conception des compteurs à effet vortex.



Figure.III.7 : Fréquences des lâchers en fonction des vitesses d'écoulements à l'entrée

Il est illustré sur la figure III.8 la variation du nombre de Strouhal en fonction de la vitesse d'écoulement. On remarque au-delà de 0.75m/s la fréquence adimensionnelle (St) reste pratiquement constante est vaut 0.26.



Figure.III.8 : Nombre de Strouhal en fonction des vitesses d'écoulements à l'entrée

#### III.3. Ecoulement autour de quatre cylindres dans une disposition carrée

La figure III.9 représente la configuration étudiée dans le cas de quatre cylindres ainsi que les conditions aux limites utilisées. La figure III.10 illustre le maillage utilisé proche de l'obstacle cylindrique. Les paramètres géométriques considérés sont :

- Pour la premier géométrie L=0.48m, H=0.26m, D=0.02m et P=0.02m.
- Pour la deuxième géométrie L=0.51m, H=0.29m, D=0.02m et P=0.04m.
- Pour la troisième géométrie L=0.58m, H=0.36m, D=0.02m et P=0.06m.

Pour chaque géométrie, on a un définit le rapport : P/D.

Chapitrg III



#### Chapitre III

#### RESULTATS ET DISCUSSIONS



Figure.III.10 : Maillage utilisé autour de quatre cylindres dans disposition carrée

#### III.3.1. Première géométrie P/D=2

La figure III.11 représente l'évolution des magnétudes de vitesses des particules fluides autours de quatre cylindre pour P/D=2. Il est évident qu'il y a des effets réciproques des quatre cylindres l'un sur l'autre. C'est-a-dire que le comportement du fluide proche de l'un des cylindres est sensibles à la présence des trois autres cylindres. Il est claire que la topologie de l'écoulement semble différente de celle d'un écoulement autour d'un seul cylindre.



Figure.III.11 : Champ de vitesses autour de quatre cylindres à t =60s et Re=1000

En examinant l'évolution dans le temps des coefficients de portance sur les quatre cylindres représentés sur la figure III.12; nous pouvons voir clairement que la valeur moyenne de la portance sur le cylindre 1 est une valeur négative par contre celle sur le cylindre 4 est positive. Cela est dû aux effets réciproques des cylindres. Par contre l'effet n'est pas aussi clair sur les autres cylindres 2 et 3.







Figure.III.12 : Coefficient de portance en fonction du temps pour Re=1000

A partir des spectres des fréquences sur la figure III.13, on remarque pour Re=1000 l'existence d'une seule fréquence fondamentale dans le signal de la portance des deux premiers cylindres (1 et 4). Cependant, on observe deux fréquences sur les spectres de fréquences des portances des cylindres en arrière 2 et 3. Cela est dû au fait que les cylindres 2 et 3 se trouve dans la zone perturbée de l'écoulement par la présence des cylindre 1 et 4. Pour un nombre de Reynolds Re=2000 (figure III.14), pratiquement on remarque le même comportement avec la seule différence de l'apparition d'un troisième pique sur les spectres de fréquences des cylindre 2 et 3.









(c) : Cylindre 3



*Figure.III.13 : Spectre de fréquence du coefficient de portance pour Re=1000* 



(a) : Cylindre 1



(h)		Culinda	. )
$(\boldsymbol{v})$	٠	Cyunare	- 4



(c) : Cylindre 3



*Figure.III.14 : Spectre de fréquence du coefficient de portance pour Re=2000* 

A partir de la figure III.15 représentant les spectres de fréquences du coefficient de portance pour un nombre de Reynolds Re=3000, on remarque une seule fréquence fondamentale de l'ordre de 13.513Hz pour l'ensemble des quatre cylindres. Cela implique l'absence des effets réciproques entre les cylindres à ce régime d'écoulement (Re=3000).









(c) : Cylindre 3



(d): Cylindre 4

Figure.III.15 : Spectre de fréquence du coefficient de portance pour Re=3000

#### III.3.2. Deuxième géométrie P/D=3

Pour un rapport P/D=3, nous avons tracé sur la figure III.16 le champ des vitesses autour des quatre cylindres à t=60s. A partir des spectres de fréquences représentés sur les figures III.17, III.18 et III.19 on remarque une seule et unique fréquence de base. On peut conclure que dans ces conditions, les quatre cylindres se comportent de manière isolée dans l'écoulement.



Figure.III.16 : Champ de vitesses autour de quatre cylindres à t =60s pour Re=1000



Chapitr<u>e</u> III



Figure.III.17 : Spectre de fréquence des coefficients de portance, pour Re=1000



(a) : Cylindre 1



Figure.III.18 : Spectre de fréquence des coefficients de portance, pour Re=2000











(c) : Cylindre 3



*Figure.III.19 : Spectre de fréquence des coefficients de portance pour Re=3000* 

#### III.3.3. Troisième géométrie P/D=4

A travers le champ des vitesses autour de quatre cylindres représentés sur la figure III.20, il semble que l'écoulement autour de chaque cylindre n'est pas influencé par la présence des trois autres cylindres. Cette observation est confirmée par l'analyse des spectres de fréquences représentés sur la figure III.21.



Figure.III.20 : Champ de vitesses autour de quatre cylindres à t =60s, pour Re=1000

Chapitre III







(b) : Cylindre 2



(c) : Cylindre 3



*Figure.III.21 : Spectre de fréquence des coefficients de portance pour Re=1000* 

Finalement il est important de noter les conclusions suivantes :

- L'effet réciproque des cylindres l'un sur l'autre diminue voire même disparait en augmentant le nombre de Reynolds.
- Il est évidant aussi que l'augmentation de la distance entre les cylindres diminue les interactions entre ces derniers.

# CONCLUSION GENERALE

### **Conclusion Générale**

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique de l'écoulement des fluides Newtoniens et incompressibles à travers un faisceau de tubes. En premier lieu, nous avons abordé numériquement le phénomène d'éclatement tourbillonnaire lors d'un écoulement autour d'un seul cylindre à section circulaire. Par le biais de l'algorithme de calcul FFT (Fast Fourier Transformation), nous avons pu tracer les spectres de fréquences relatif aux efforts de trainée et de portance. Les calculs réalisés, on mis en évidence l'évolution linéaire de la fréquence des lâchers tourbillonnaires en fonction des vitesses d'écoulements.

En deuxième lieu, nous avons examiné l'évolution de l'écoulement instationnaire autour de quatre cylindres arrangés en forme de carrée. Nous avons inspecté l'effet de la distance entre les cylindres sur l'évolution temporelles de la portance. Nous avons pu observer que l'interaction simultanée des quatre cylindres diminue et voir même disparait en augmentant la distance entre les cylindres ou bien la vitesse d'écoulement.

Les résultats présentés dans ce modeste travail, on permit la compréhension du comportement d'un fluide autour de quatre cylindres ce qui permettra surement une meilleure prédiction des chargements hydro/aérodynamiques lors l'étude de systèmes réels.

# Bibliographie

[1] **BEDJEGHIT EL-Houas**, « Etude expérimentale et numérique d'un écoulement autour d'obstacles carré et cylindrique », Thèse université de Constantine, 2010.

**[2] Stephane Mossaz**, « Etudes expérimentales et numériques des écoulements inertiels de fluides à seuil autour d'un cylindre », Thèse université Grenoble Alpes, France,2011.

[3] SAMIR Khene, « Mécanique des fluides », Publications de l'université Badji Mokhtar, Annaba, 2000.

[4] ION Paraschivoiu, « Aérodynamique subsonique », Editions de l'école polytechnique de Montréal (Québec), Canada, 1998.

**[5] DANIEL Cauvin**, « Aérodynamique, Mécanique du vol », Université Aéronautique Jean Mermoz, France, 1990.

[6] **Benjamin Renaud,** « Instabilité de Bénard-Von Karman derrière un obstacle oscillant », Rapport de stage expérimental, Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, Paris, 2000.

[7] K. Lam et S. C. Lo, «A VISUALIZATION STUDY OF CROSS-FLOW AROUND FOUR CYLINDERS IN A SQUARE CONFIGURATION », Journal of Fluids and Structures, 6 (1992), 109-131

**[8] Rodolphe Perrin,** « Analyse physique et modélisation d'écoulements incompressibles instationnaires turbulents autour d'un cylindre circulaire à grand nombre de Reynolds », Thèse l'Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 2005.

**[9] K. Lam, W.Q. Gong et R.M.C. So,** « Numerical simulation of cross-flow around four cylinders in an in-line square configuration », Journal of Fluids and Structures 24 (2008) 34–57.

**[10] Anu Dutta, Priyanshu Goyal, R.K. Singh et K.K. Vaze** « Fluid Flow Analysis for crossflow around four cylinders arranged in a square configuration », Reactor Safety Division, Bhabha Atomic Research Centre, Mumbai, 2010.

[11] X.K. Wang, K. Gong, H. Liu, J.-X. Zhang et S.K. Tan, «Flow around four cylinders arranged in a square configuration », Journal of Fluids and Structures 43(2013)179–199.

[12] S. BENSEDIRA, A. ABDELLAH EL-HADJ et D. SEMMAR, « ETUDE DYNAMIQUE DE L'ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE PLACÉ PROCHE D'UNE PAROI », Third International Conference on Energy, Materials, Applied Energetics and Pollution, ICEMAEP2016, October 30-31, 2016, Constantine, Algeria.

**[13] STEPHANE Chaussedent**, « Statique et dynamique des fluides », Université d'Angers, novembre 2011.

**[14] Fiacre Ahonguio,** « Ecoulements de fluides à seuil autour d'obstacles », Thèse université Grenoble Alpes, Français, 2015.

[15] BOUHELAL Abdelhamid, « CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT AUTOUR D'UN OBSTACLE MINCE DANS UN INTERVALLE DE NOMBRE DE MACH : 0 < M < 3 », Mémoire de Master, Université Mohamed Khider Biskra, 2014.

**[16] Loan C. POPA**, « MODELISATION NUMERIQUE DU TRANSFERT THERMIQUE, Méthode des volumes finis », Université Craiova, 2002.