

UNIVERSITE KASDI MARBAH OUARGLA

Faculté des Sciences et Technologie et Sciences de la matière

Département de Génie Mécanique



Mémoire

MASTER PROFESSIONNEL

Domaine : Sciences et Techniques

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Maintenance Industriel

Présenté Par :

BAKHALED M^{ed} Cherif

KHEMIS Mahmoud

Thème

**Résolution de l'équation différentielle
(bi-Laplacien) par la solution de
CLEBSCH**

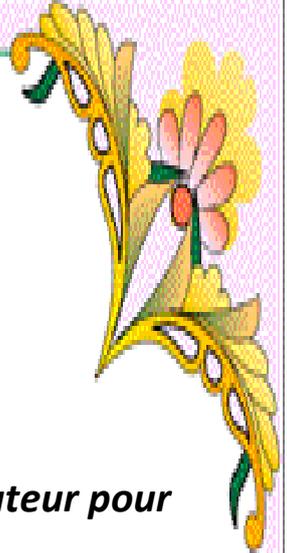
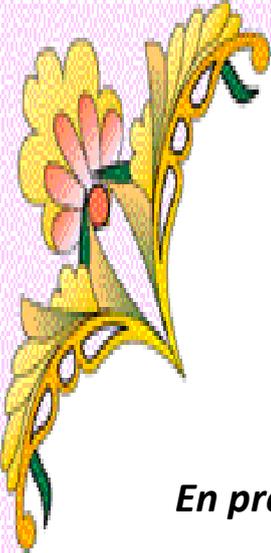
Soutenu publiquement

Le : 26 / 06 /2013

Devant le jury

M. KABDI	Président	UKM Ouargla
M. BENCHEIKH	Examineur	UKM Ouargla
M. BOUHEMAME Nasser	Encadreur	UKM Ouargla

Année Universitaire : 2012 /2013



REMERCIEMENTS

*En premier lieu, nous tenons à remercier **Dieu**, notre créateur pour nous avoir donné la force pour accomplir ce travail.*

*Nous tenons à remercier **Mr. BOUHEMAME Nasser** notre promoteur pour son grand soutien et ses conseils considérables.*

Nous remercions également tous les professeurs du département de génie mécanique.

Que toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail accepte nos grands et sincères remerciements.

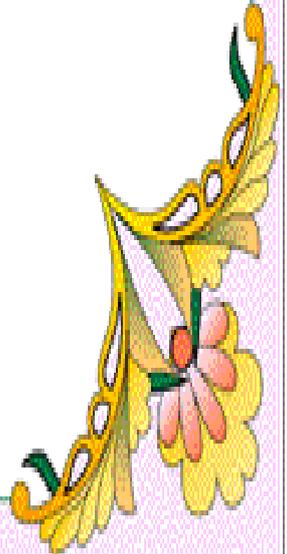
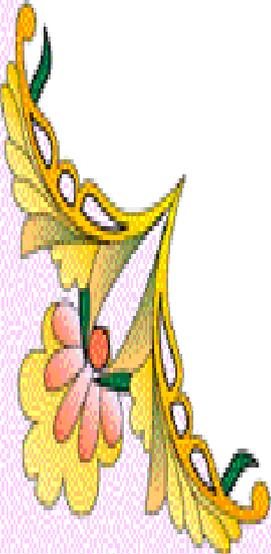


Table de matières

Table des matières.....	A
Liste des figures et liste des tableaux.....	C
Introduction générale.....	01

Chapitre I: Généralités sur les plaques

I.1. Définition de plaque.....	03
I.2. Historique.....	03
I.3. Type des plaques.....	03
I.4. Hypothèses simplificatrices.....	04
I.5. Relation entre les charges transversales et les flèches d'une plaque mince (Equation différentielle de la flexion des plaques minces).....	05
I.5.1. Les Efforts résultants.....	06
I.5.2. Equations d'équilibre.....	08
I.6. Quelques solutions des plaques rectangulaires.....	15
I.6.1. Plaques rectangulaires simplement appuyées. (Solution de Navier).....	15
I.6.2. Plaques rectangulaires simplement appuyées sur deux cotés opposés. Solution de Maurice Lévy).....	17
I.7. Conclusion.....	21

Chapitre II :

Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

II.1. Introduction.....	23
II.2. Equation différentielle de déformée d'une plaque.....	23
II.3. Equation générale.....	23
II.4. Solution de Clebsch.....	24
II.5. Méthode de L'énergie.....	29

II.6.Résultats et interprétation.....	35
II.6.1. Application numérique.....	35
II.6.2.Influence du nombre de fonction de correction.....	35
Conclusion générale.....	40

Bibliographique

Liste des figures

Chapitre I: Généralités sur les plaques

Figure. I. 1 Représentation les tensions provoquées par les charges extérieures.....	06
Figure. I. 2 Représentation des efforts résultants d'une flexion de plaque.....	07
Figure. I. 3 La déformation d'un point situé sur le plan moyen de la plaque.....	10
Figure. I. 4 Représentation des contraintes avant déformation.....	11
Figure. I. 5 Représentation des contraintes après déformation.....	12
Figure. I. 6 Plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à une densité de charge	15

Chapitre II :

Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

Figure. II. 1 Plaque de dimensions infinies soumise à une charge concentrée q	25
Figure. II. 2. a déformée d'une plaque Rectangulaire en Acier due à chargée concentrée...	35
Figure. II. 2. b Champ de la charge concentrée q	35
Figure. II. 3. a déformée d'une plaque Rectangulaire Aluminium en due à chargée concentrée.....	36
Figure. II. 3. b Champ de la charge concentrée q	36
Figure. II. 4. a déformée d'une plaque Rectangulaire en Béton due à chargée concentrée .	36
Figure. II. 4. b Champ de la charge concentrée q	36
Figure. II. 5 La variation de coefficient de correction agissant sur la déformée d'une plaque.....	37

Liste des Tableaux

Tableau II. 1 caractéristiques mécaniques des matériaux proposés.....	35
Tableau II. 2 Représente l'influence des fonctions de correction pour différent type de Matériau	37

Nomenclature

Symbole	Désignation	unité
a	Longueur de la plaque	m
A_j	Coefficients à déterminer par la méthode de l'énergie	
A_k, B_k, C_k et D_k	Constantes	
$A_{m,n}$	Coefficient de la densité de charge de série double (Navier)	
b	Largeur de la plaque	m
$B_{m,n}$	Coefficient de la solution de série double (Navier)	
c	Distance entre centre de l'encastrement et point d'application	
	La charge	m
D	Rigidité de flexion	N. m
E	Module longitudinal (module de Yong)	N/m ²
$F_m(y)$	Fonction de la solution de série trigonometrique simple (Maurice)	
$f_m(y)$	Intégrale particulière	
G	Module d'élasticité transversal	N/m ²
h	Epaisseur de la plaque	m
$[H]$	Matrice de système	
M_1, M_2	Moments fléchissant	N. m
M_r	Moment radial d'une plaque	N. m
M_x^{pl}, M_y^{pl}	Moments de flexion d'une plaque mince suivant les axes x et y	N. m
M_{xy}^{pl}	Moment de torsion d'une plaque mince suivants les axes x et y	N. m
M_{yx}^{pl}	Moment de torsion d'une plaque mince suivant les axe y et x	N. m
N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}	Efforts de bout suivant les axes x et y	N
p	Charge par unité de surface	N/m ²
$p_m(y)$	Fonction de la densité de charge trigonometrique simple (Maurice)	
q	Densité de charge	N
Q_x^{pl}, Q_y^{pl}	Efforts tranchants suivant les axes x et y	N
r	Rayon	m
(t, z)	Coordonnées du point d'application de la charge	m
U	Expression de la méthode de l'énergie	
u	déplacement suivant l'axe x	m
v	déplacement suivant l'axe y	m
V_r	Effort radial normal d'une plaque	N
ν	Coefficient de contraction latérale (coefficient de Poisson)	
w	déplacement suivant l'axe z	m

x, y, z	Coordonnées rectangulaires, x, y dans le plan équidistant	m
(x, y)	Coordonnées du point où se détermine le déplacement	m
γ	Distorsion ou dilatation angulaire	
θ	Angle	degré
φ	Angle	degré
ρ	Masse par unité de surface	kg/m^2
σ_x, σ_y	Contrainte normale suivant l'axe x et y	N/m^2
τ_{xy}	Contrainte de cisaillement suivant les axes x et y	N/m^2
τ_{xz}	Contraintes de cisaillement suivant les axes x et z	N/m^2
τ_{yz}	Contraintes de cisaillement suivant les axes y et z	N/m^2
$\Psi_0(r), \Psi_k(r), \bar{\Psi}_k(r)$	désignent des intégrales particulières	
δ_{ij}	Matrice de Kronecker	
Ω	surface de la plaque	
$[\Delta]$	vecteur des fonctions w_1, w_2, w_3 et w_4	

Introduction générale

Introduction générale

Le problème des plaques minces fléchies a fait l'objet d'un grand nombre de publications. Malheureusement les résultats obtenus concernent généralement des cas facilement accessibles à l'analyse mathématique. Telles sont les plaques circulaires, car l'équation de Lagrange transformée en coordonnées polaires, ne contient plus qu'une seule variable si la charge est symétrique par rapport au centre. De nombreux auteurs se sont de même occupés des plaques rectangulaires simplement appuyées. Les plaques de même forme, mais soumises à d'autres conditions sur leur limite, sont moins souvent traitées.

Dans ce travail nous utilisons une solution de l'équation différentielle de déformée d'une plaque rectangulaire. Pour résoudre cette équation différentielle partielle d'ordre 4, Clebsch consiste à développer la densité de charge en série trigonométrique et rechercher la solution sous forme d'une série trigonométrique, et on utilise la méthode énergétique de Ritz pour obtenir une expression approchée de la déflexion de la plaque avec une précision acceptable.

Le travail apporté dans ce mémoire est structuré en deux chapitre :

- Le premier chapitre est consacré à une présentation générale sur les plaques
- Le deuxième chapitre est consacré à la détermination de déformée d'une plaque rectangulaire posé sur champ par la solution de Clebsch.

En outre le mémoire comporte aussi une introduction générale, conclusion générale et références bibliographiques.

Chapitre I

Généralités sur les plaques

I.1. Définition de plaque

On appelle plaque tout corps cylindriques ou prismatique de hauteur (épaisseur) plus petit en comparaison avec le reste des autres dimensions. En fonction de la configuration du plan, les plaques se distinguent en rectangulaire, circulaire, annulaire, triangulaire etc. si le matériau constituant la plaque ayant les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions, alors la plaque est dite isotrope, par contre si les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant les plaques sont différentes dans l'une des directions, alors la plaque est dite anisotrope (orthotrope).

I.2. Historique

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces. La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948) [1-2-3-4-5].

I.3. Type des plaques

En général, on distingue trois types de plaques selon le rapport de son épaisseur par rapport à la petite dimension de son contour [6]. On peut distinguer donc:

- 1- plaque épaisse.
- 2- plaque mince rigide.
- 3- plaque mince déformable.

On considère que la plaque est de type épais si le rapport entre son épaisseur et la plus petite dimension de sa configuration d'épaisseur $\frac{1}{2}$ l'état de contraintes des plaques épaisses est donné par les équations générales de la théorie d'élasticité. Les plaques rigides minces leur rapport moins de $\frac{1}{2}$, mais les déflexions sont très petites en comparaison avec son épaisseur.

L'état de déformation de ce type de plaque est décrit par la théorie des déflexions. Plaque mince déformable se caractérise du faite que le rapport est très petit et ses déflexions ne sont pas petites par rapport à son épaisseur et ces caractéristiques favorisent l'application d'effort interne important, ce qui influe considérablement sur l'état de contraintes de ce type de plaque. Cette distinction est faite pour simplifier l'étude de la plaque en général. Par

exemple, si l'on s'occupe de l'étude des vibrations libre de la plaque, c'est-à-dire la détermination de ses fréquences et déformées propres on se repère à la théorie des déflexions; si l'on s'occupe de la détermination de l'état de contraintes de la plaque ou utilise les équations de la théorie d'élasticité.

I.4. Hypothèses simplificatrices

Il n'existe pas encore de théorie exacte traitant la flexion des plaques. Si celles-ci sont minces et que leurs déformations restent petites par rapport à l'épaisseur, certaines simplifications sont permises, plus ou moins analogues à celles de la théorie des poutres, et qui conduisent à une théorie approchée. A part les deux conditions énoncées plus haut (épaisseur faible, déformations petites)

Les hypothèses admises sont les suivantes:

a) Prenons les axes x et y de coordonnées dans le plan équidistant des faces, appelé feuillet moyen et que la déformation transformera en une surface élastique. L'axe z sera perpendiculaire à ce plan. Si l'on appelle $u_0 = u(x, y, 0), v_0, w_0$ les déplacements correspondants du feuillet moyen, on admet que u_0 et v_0 sont négligeables. Les forces données et les réactions sont toutes normales au feuillet moyen qui est une surface neutre.

b) Une normale au feuillet moyen reste droite après la déformation, elle est perpendiculaire à la surface déformée. On néglige ainsi l'influence du cisaillement sur les déformations (Bernoulli-Navier).

c) Les tensions σ_z sont petites et leur influence sur les déformations peut être omise.

Généralement on considère une matière homogène et isotrope. Nous allons par contre admettre que la matière présente, par rapport à ses propriétés élastiques, deux directions privilégiées x et y . On parle alors de matière orthotrope. Il est bien entendu que l'on se limite au domaine élastique où la loi de Hooke est valable.

I.5. Relation entre les charges transversales et les flèches d'une plaque mince (Equation différentielle de la flexion des plaques minces)

Des tensions intérieures prennent naissance dans les plaques, lorsqu'elles sont sollicitées par des charges extérieures. Nous considérerons en premier lieu seulement les efforts résultant des tensions internes, sans rien dire tout d'abord de la répartition exacte de ces tensions. Nous montrerons que les lois de l'équilibre ne suffisent pas à déterminer complètement les efforts résultants: le problème est par conséquent hyperstatique.

S'il s'agit de plaques minces, l'hypothèse de Navier permet de trouver les conditions manquantes à l'aide des flèches, ce qui nous donne finalement la relation désirée entre ces flèches et les charges transversales extérieures. Mais pour exprimer les flèches, nous devons faire appel aux tensions. Le problème de leur répartition se trouve de ce fait également résolu[7].

I.5.1 Les Efforts résultants

Les lois de la composition des forces définissent immédiatement les efforts résultants par unité de longueur ou de largeur de la plaque figure.I.2 en fonction des tensions provoquées par les charges extérieures figure.I.1. Avec les signes et les sens habituels de la mécanique appliquée, on obtient les résultats suivants:

1- Pour les efforts de bout, normaux et au cisaillement:

$$N_x = + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (I.1)$$

$$N_y = + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad (I.2)$$

$$N_{xy} = + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (I.3)$$

$$N_{yx} = + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} dz \quad (I.4)$$

Où :

h – Epaisseur de la plaque ;

N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} – Les efforts de bout suivant les axes x et y ;

σ_x – Contrainte normale suivant l'axe x ;

σ_y – Contrainte normale suivant l'axe y ;

τ_{xy} – Contrainte de cisaillement suivant les axes x et y ;

τ_{yx} – Contrainte de cisaillement suivant les axes y et x ;

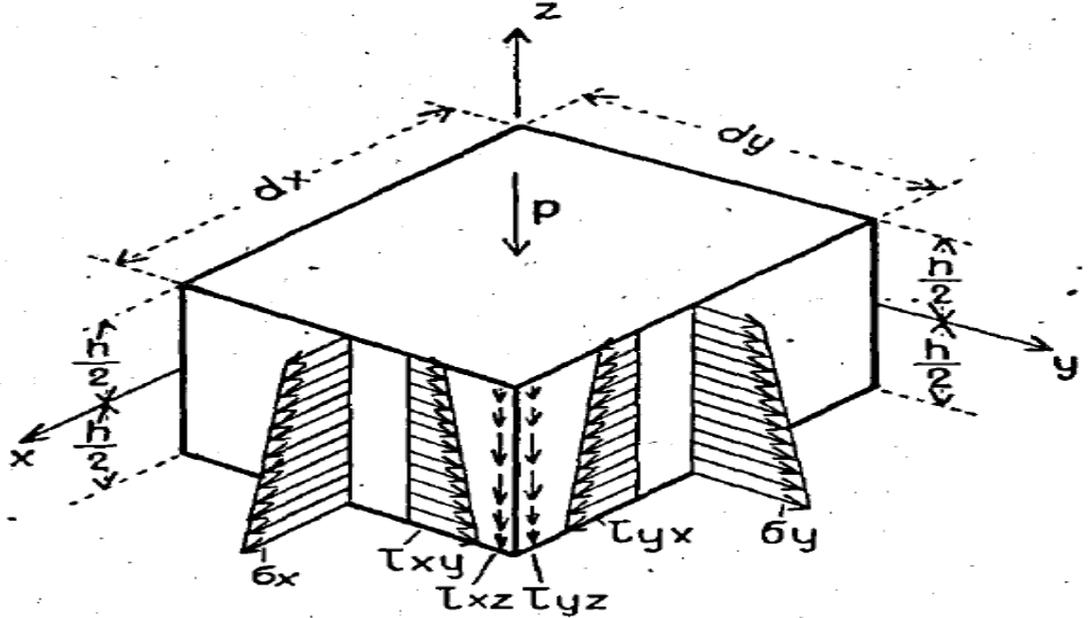


Figure. I. 1 Représentation les tensions provoquées par les charges extérieures

2- Pour les efforts résultant d'une flexion de la plaque, c'est à- dire les efforts tranchants et les moments de flexion et de torsion :

$$Q_x^{pl} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (I. 5)$$

$$Q_y^{pl} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (I. 6)$$

$$M_x^{pl} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad (I. 7)$$

$$M_y^{pl} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (I. 8)$$

$$M_{xy}^{pl} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (I. 9)$$

$$M_{yx}^{pl} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz \quad (I. 10)$$

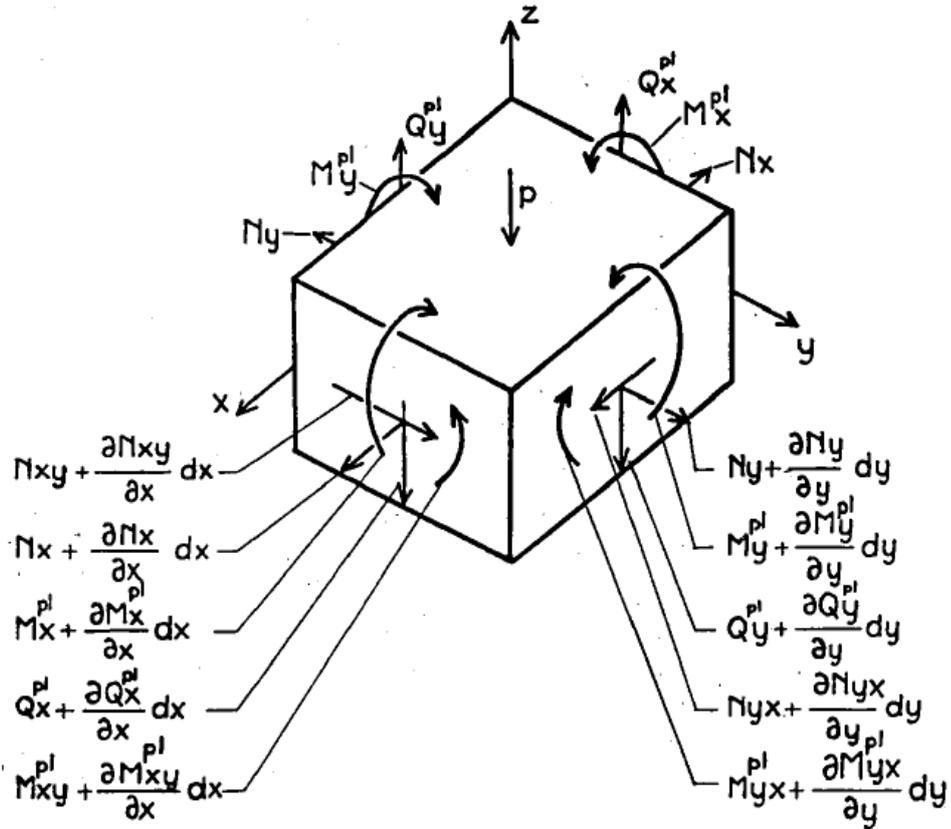


Figure. I. 2 Représentation des efforts résultants d'une flexion de plaque

Où :

Q_x^{pl}, Q_y^{pl} – Les efforts tranchants suivant les axes x et y ;

τ_{xz} – Les Contraintes de cisaillement suivant les axes x et z ;

τ_{yz} – Les Contraintes de cisaillement suivant les axes y et z ;

M_x^{pl}, M_y^{pl} – Moments de flexion d'une plaque mince suivant les axes x et y ;

M_{xy}^{pl} – Moment de torsion d'une plaque mince suivants les axes x et y ;

M_{yx}^{pl} – Moment de torsion d'une plaque mince suivant les axe y et x ;

I.5.2 Equations d'équilibre

Nous savons que, pour des raisons d'équilibre $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ On en tire immédiatement:

$$N_{xy} = N_{yx} \quad (\text{I. 11})$$

$$M_{xy}^{pl} = M_{yx}^{pl} \quad (\text{I. 12})$$

Appliquons les lois de l'équilibre aux efforts agissant sur le petit élément de plaque de la figure. I. 2 en observant que les efforts indiqués sont tous positifs et que la charge extérieure du petit élément considéré vaut $p \cdot dx \cdot dy$. Après simplification, division par $dx \cdot dy$ et en tenant compte de (I. 11) et de (I. 12), on trouve :

1. Pour les efforts de bout:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{I. 13})$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (\text{I. 14})$$

2. Pour les efforts résultant d'une flexion de la plaque :

$$\frac{\partial M_x^{pl}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{pl}}{\partial y} - Q_x^{pl} = 0 \quad (\text{I. 15})$$

$$\frac{\partial M_y^{pl}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^{pl}}{\partial x} - Q_y^{pl} = 0 \quad (\text{I. 16})$$

$$\frac{\partial Q_x^{pl}}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^{pl}}{\partial y} + p = 0 \quad (\text{I. 17})$$

Où :

p – Charge par unité de surface ;

On peut faire disparaître les efforts tranchants de l'équation (I. 17) en substituant les expressions de Q_x^{pl} et de Q_y^{pl} tirées des équations (I. 15) et (I. 16). L'équation (I. 17) devient alors:

$$\frac{\partial^2 M_x^{pl}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{pl}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{pl}}{\partial y^2} = -p \quad (\text{I. 17. a})$$

Nous avons maintenant à disposition deux groupes indépendants d'équations d'équilibre, soit un premier groupe de 2 équations pour les 3 inconnues N_x, N_y, N_{xy} et un second groupe de 3 équations pour les 5 inconnues $M_x^{pl}, M_y^{pl}, M_{xy}^{pl}, Q_x^{pl}, Q_y^{pl}$. Le problème de la détermination des efforts résultants des plaques est donc un problème hyperstatique.

I.5.2.1 Conditions et équations de déformation

Pour résoudre tout problème hyperstatique, il faut faire intervenir les déformations et exprimer les relations qui existent entre elles: ce sont les conditions de déformation, alors que les équations de déformation qui en découlent renferment les efforts surabondants, liés aux déplacements par la loi de Hooke, pour le domaine élastique, auquel nous voulons borner toute notre étude.

Pour simplifier le problème, supposons que la plaque soit formée d'une pile de tranches très minces chevillées les unes aux autres, mais ne n'exerçant entre elles aucune action réciproque [8]

Si tel est bien le cas, il n'y a pas de cisaillement possible entre les différentes tranches, ni par conséquent de mouvement relatif entre deux tranches voisines. En coupant la plaque entière perpendiculairement aux tranches, l'angle droit ainsi formé sera conservé après la flexion: les sections planes avant la déformation restent planes après la déformation. C'est l'hypothèse bien connue de Bernoulli-Navier, que nous voulons examiner maintenant.

En excluant tout cisaillement entre les tranches, nous négligeons délibérément la déformation due à l'effort tranchant (mais non l'effort tranchant lui-même, qui reste dans les équations d'équilibre, lesquelles ne peuvent être satisfaites sans lui). Dans le cas de la flexion pure l'hypothèse de Bernoulli-Navier sera donc parfaitement exacte. Il en sera de même si l'effort tranchant reste partout invariable. Dans ce cas, la déformation supplémentaire due à cet effort (effet de gauchissement de la section) s'ajoute simplement à celle de la flexion pure. Si l'effort tranchant varie, l'erreur commise reste faible. On le montre pour certains cas de flexion des poutres, dont on connaît la solution exacte [9]. Il est cependant bien entendu que l'hypothèse de la conservation des sections planes après la flexion ne vaut avec une approximation suffisante que pour les poutres et les plaques, c'est-à-dire si la hauteur de la poutre et l'épaisseur de la plaque sont faibles par rapport à la portée. Remarquons enfin que nous négligeons presque toujours, en mécanique appliquée, la déformation due à l'effort tranchant lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes hyperstatiques de poutres continues, d'arcs ou de cadres. On sait que cette simplification ne change guère les efforts surabondants, ni en

général les charges critiques des problèmes de stabilité. Par contre, si l'on désire obtenir la valeur véritable des flèches, l'influence de l'effort tranchant ne peut être négligée.

Considérons une charge extérieure agissant sur une plaque, perpendiculairement à celle-ci. Eloignons-nous de son point d'application, en restant dans son prolongement. Puisque cette charge représente en fait les tensions en surface, celles-ci doivent se répartir lentement en tous sens et disparaître complètement sous la plaque. Pour satisfaire aux lois de l'équilibre, il faut alors que des contraintes de cisaillement s'exercent entre les tranches. L'hypothèse de Bernoulli-Navier n'est donc pas valable au droit des forces extérieures, mais seulement à une certaine distance [10] elle n'est jamais à même de rendre compte des phénomènes dits «locaux».

Un effet immédiat de l'hypothèse de Bernoulli-Navier est de rendre les équations de la flexion (I. 15), (I. 16), (I. 17), indépendantes de celles des efforts de bout (I. 13), (I. 14). En effet, les efforts de bout agissent sur toutes les tranches de la même façon. Ils ne changent pas par conséquent la déformation propre de la flexion, ni les contraintes, moments fléchissants ou efforts tranchants qui en résultent. Les effets de la flexion et des efforts de bout sont donc bien indépendants et peuvent être simplement superposés.

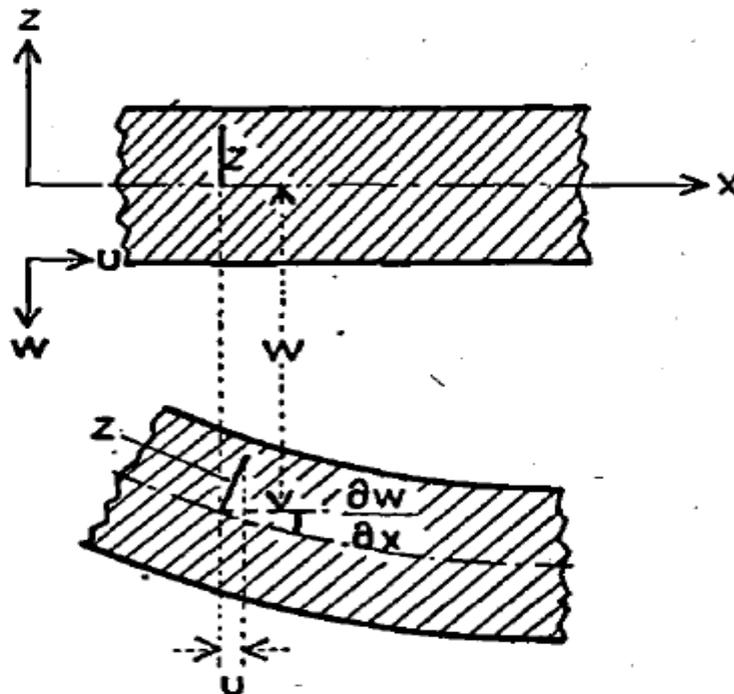


Figure. I. 3 La déformation d'un point situé sur le plan moyen de la plaque

Le second effet de l'hypothèse de Bernoulli-Navier est de nous permettre de poser très aisément les deux conditions manquantes les conditions de déformation. Appelons u, v, w les déplacements d'un point quelconque de la plaque après flexion.

En considérant la figure. I. 3, où w positif est dirigé vers le bas, on trouve les deux relations:

$$u = z \frac{\partial w}{\partial x} \tag{I. 18}$$

$$v = z \frac{\partial w}{\partial y} \tag{I. 19}$$

Pour passer des conditions(I. 18), (I. 19) aux équations de déformation, il faut exprimer les déplacements u et v des différentes tranches minces qui forment la plaque. Considérons les contraintes figure. I. 4 et les déformations correspondantes figure. I. 5

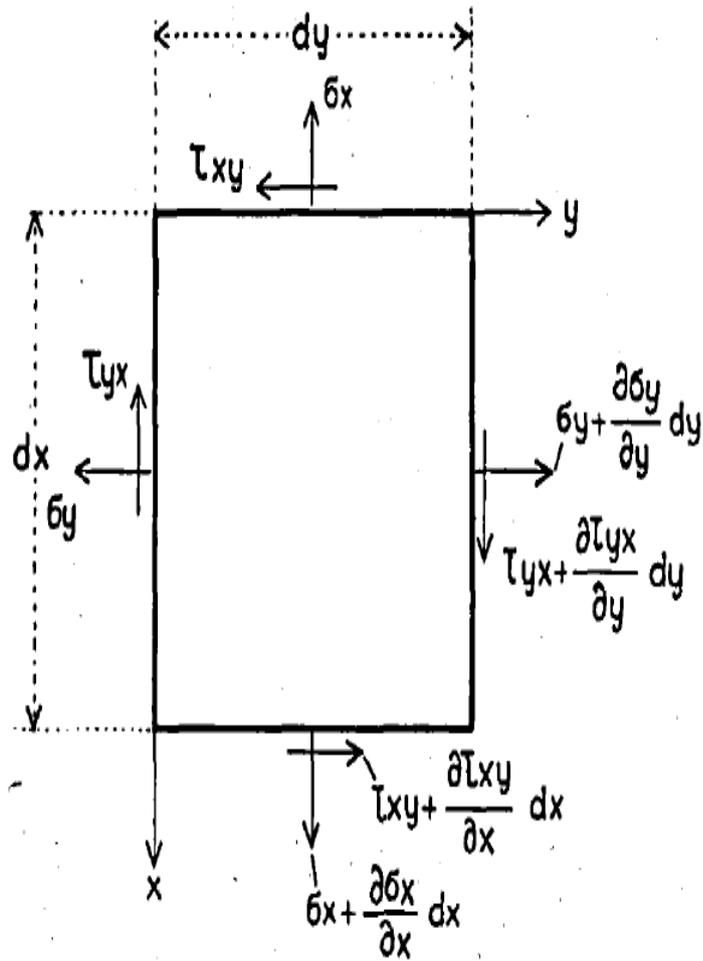


Figure. I. 4 Représentation des contraintes avant déformation

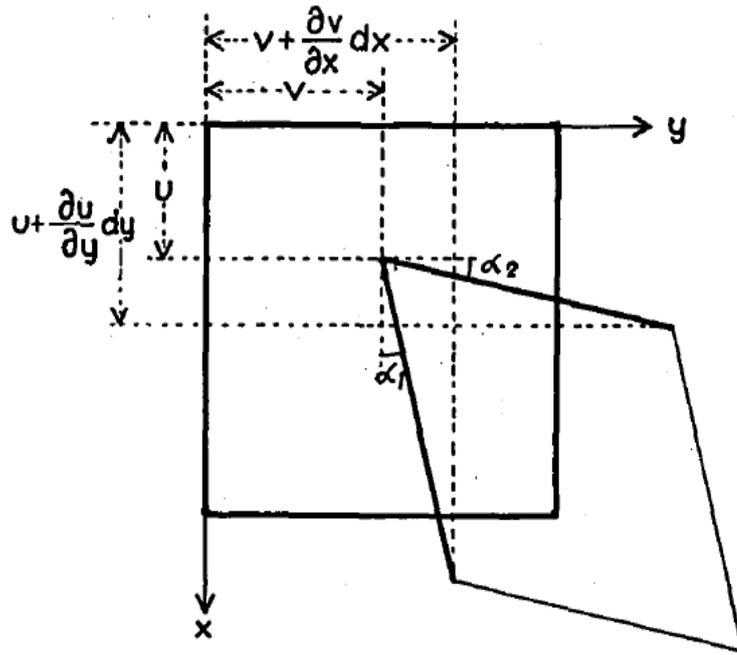


Figure. I. 5 Représentation des contraintes après déformation

D'une de ces tranches. Dans le domaine élastique, auquel nous nous sommes limités, les relations des tensions et des déformations sont les suivantes :

$$\sigma = \varepsilon E \tag{I. 20}$$

$$\tau = \gamma G \tag{I. 21}$$

Les modules E et G ne sont pas indépendants; ils sont liés entre eux par la relation [9]

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{I. 22}$$

Où :

G – Module d'élasticité transversal ;

E – Module longitudinal ;

ν – Est le coefficient de contraction latérale (coefficient de Poisson) ;

En cumulant les effets de σ_x et de σ_y on trouve les équations connues [9]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \tag{I. 23}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \tag{I. 24}$$

$$\gamma = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (\text{I.25})$$

Où :

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – Allongements unitaires ;

γ – Distorsion ou dilatation angulaire ;

Remarquons que

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

puisque l'on peut confondre les angles α_1 et α_2 avec leurs tangentes, la différence étant un infiniment petit d'ordre supérieur.

Nous pouvons résoudre les équations précédentes par rapport aux tensions, ce qui donne :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{I.26})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (\text{I.27})$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{I.28})$$

Avec les valeurs de u et de v des conditions de déformation (I.18) et (I.19) on trouve:

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I.29})$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{I.30})$$

$$\tau_{xy} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.31})$$

Pour simplifier l'écriture, désignons par D la rigidité de la plaque à la flexion :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{I.32})$$

Les dimensions de D sont, remarquons-le, des t-cm ou des kg-cm ($\text{t-cm}^3/\text{cm}^2$); le facteur $h^3/12$ n'est rien d'autre que le moment d'inertie d'une bande de plaque de largeur unitaire et $1-\nu^2$ présente l'influence de la contraction latérale.

Introduisons maintenant les valeurs précédentes de σ_x , σ_y et τ_{xy} dans les équations (I. 7), (I. 8), (I. 9) en tenant compte de (I. 32) On obtient alors:

$$M_x^{pl} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (I. 33)$$

$$M_y^{pl} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (I. 34)$$

$$M_{xy}^{pl} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (I. 35)$$

Ces trois équations renfermant une inconnue supplémentaire w ne constituent donc en fait que deux relations supplémentaires, les équations de déformation cherchées. En conséquence, nous avons maintenant à disposition six équations [(I. 15), (I. 16), (I. 17), (I. 33), (I. 34)(I. 35)] pour déterminer les cinq efforts inconnus (M_x^{pl} , M_{xy}^{pl} , M_y^{pl} , Q_x^{pl} , Q_y^{pl}) et la flèche w également inconnue. Utilisons l'équation (I. 17. a) qui remplace (I. 15), (I. 16), (I. 17), en la combinant avec (I. 33), (I. 34), (I. 35) on obtient immédiatement la relation charge transversale-flèche que nous désirons et que nous appellerons dorénavant (I. 36) équation différentielle des flexion des plaque en coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (I. 36)$$

Cette relation (I. 36) s'écrit parfois de façon plus ramassée, en utilisant l'opérateur de Laplace ou Laplacien :

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad \text{ou} \quad \text{ou encore} \quad \Delta^2 w = \frac{q}{D} \quad (I. 37)$$

Où :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

L'équation différentielle des déflexions des plaques en coordonnées polaire est donnée par l'expression Suivante :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (I. 38)$$

Où:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ la rigidité de flexion.}$$

E – Module de Young

ν – Coefficient de Poisson de la plaque

h – hauteur

I.6 Quelques solutions des plaques rectangulaires

I.6.1 Plaques rectangulaires simplement appuyées. (Solution de Navier)

Considérons une plaque rectangulaire, simplement appuyée sur ses bords $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$ soumise à une densité de charge $q(x, y)$ figure. I. 6. Il est immédiat de vérifier que la série double de sinus :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I. 39})$$

Satisfait aux conditions aux limites. Il suffit donc de déterminer les coefficients $B_{m,n}$ de façon que cette série soit une intégrale de l'équation de Lagrange (I. 37).

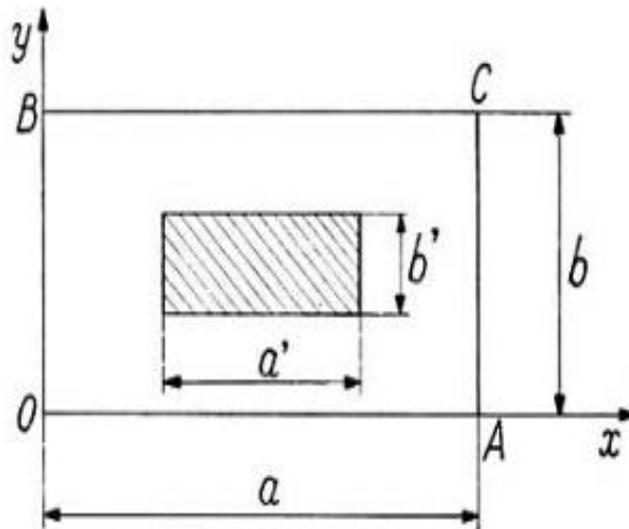


Figure. I. 6 Plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à une densité de charge

Pour cela, développons $q(x, y)$ en série double de sinus :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I. 40})$$

Cette série dont les coefficients ont pour valeurs :

$$A_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (\text{I. 41})$$

est absolument et uniformément convergente dans le domaine ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) et a pour somme $q(x, y)$ si les conditions suffisantes suivantes sont vérifiées :

- $q(x, y)$ est nul sur le contour de la plaque ;
- m et n étant deux entiers relatifs choisis de façon que le point $(x + ma, y + nb)$ appartienne au domaine ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) la fonction $p(x, y)$ définie dans tout le plan par la relation :

$$p(x, y) = (-1)^{m+n} q(x + ma, y + nb) \quad (\text{I. 42})$$

est continue, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre quatre.

En reportant les séries qui donnent $w(x, y)$ et $q(x, y)$ dans l'équation de Lagrange(I. 37), on trouve les coefficients $B_{m,n}$. On obtient ainsi la solution :

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{m,n}}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I. 43})$$

Cette série est a fortiori absolument et uniformément convergente, puisque ses coefficients sont plus petits en valeur absolue que les coefficients $A_{m,n}$. Elle ne converge pas très rapidement. Mais les séries qui représentent M_1, M_2 par exemple :

- Les moments fléchissant :

$$M_1 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \frac{\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I. 44})$$

$$M_2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \frac{\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I. 45})$$

Convergent encore plus lentement. Il faut donc toujours préférer la solution de Maurice Lévy qui donne $w(x, y)$ sous la forme d'une série simple très rapidement convergente.

Il peut arriver que les séries qui représentent les fonctions w, M_1, M_2, M_t, T_1 et T_2 soient absolument et uniformément convergentes sans que la série dont les coefficients sont définis par la formule (I. 41) le soit. Dans ce cas, la somme de la série (I. 43) est encore le déplacement $w(x, y)$, car il est possible de modifier infiniment peu la fonction $q(x, y)$, pour qu'elle satisfasse aux conditions suffisantes indiquées précédemment, sans modifier pour cela l'équilibre de la plaque.

Ce cas se rencontre notamment pour une charge de densité constante q répartie sur un rectangle de côtés a' et b' parallèles aux côtés de la plaque, et dont le centre est confondu avec celui de la plaque figure. I. 6 en effet dans ce cas :

$$A_{m,n} = \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor + 1} \frac{16q}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi a'}{2a} \sin \frac{n\pi b'}{2b} & \text{si } m \text{ et } n \text{ sont impair} \\ 0 & \text{si } m \text{ et } n \text{ sont pair} \end{cases} \quad (\text{I. 46})$$

I.6.2 Plaques rectangulaires simplement appuyées sur deux cotés opposés. (Solution de Maurice Lévy)

Maurice Lévy a étudié les solutions de l'équation de Lagrange (I. 37) qui sont représentées par une série trigonométrique simple :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I. 47})$$

Dont les coefficients sont des fonctions de y . Cette solution, qui vérifie les conditions $w = 0$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ pour $x = 0$ et $x = a$, convient donc pour une plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses deux côtés opposés $x = 0$ et $x = a$. Nous allons voir qu'il est possible de déterminer les fonctions $F_m(y)$ de façon à vérifier des conditions aux limites diverses (bord encastré, bord simplement appuyé ou bord libre) le long des deux autres côtés de la plaque d'équations $y = b_1$ et $y = b_2$.

Développons la densité de charge $q(x, y)$ en série de sinus :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I. 48})$$

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (\text{I. 49})$$

est absolument et uniformément convergente et a pour somme $q(x, y)$ si les conditions suffisantes suivantes sont vérifiées :

- $q(x, y)$ s'annule pour $x = 0$ et $x = a$
- m étant un entier relatif tel que $x + ma$ appartienne à l'intervalle $[0, a]$, la fonction définie quel que soit x , par :

$$\mathcal{P}(x, y) = (-1)^m p(x + ma, y) \quad (\text{I. 50})$$

est une fonction de x continue, ainsi que ses deux premières dérivées.

En reportant les séries donnant $w(x, y)$ et $q(x, y)$ dans l'équation de Lagrange (I. 37) on trouve que les fonctions $F_m(y)$ doivent vérifier les équations différentielles linéaires à coefficients constants :

$$F_m^{(IV)} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} F_m = -\frac{1}{D} p_m(y) \quad (\text{I. 51})$$

L'intégrale générale de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$F_m(y) = f_m(y) + \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \quad (\text{I. 52})$$

A_m, B_m, C_m et D_m étant des constantes arbitraires, et $f_m(y)$ une intégrale particulière que l'on peut toujours obtenir par la méthode de la variation des constantes. Dans l'expression (I. 52) nous avons mis en évidence une fonction paire de (y) dans la première parenthèse, et une fonction impaire de (y) dans la seconde.

Il est alors possible de déterminer les constantes A_m, B_m, C_m et D_m de façon à vérifier les conditions aux limites (bord encastré, bord simplement appuyé ou bord libre) le long des

côtés $y = b_1$ et $y = b_2$. Ces conditions étant homogènes en w , il suffit d'écrire que chaque solution élémentaire :

$$w_m(x, y) = F_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (I.53)$$

Satisfait aux conditions aux limites envisagées.

Précisons par exemple les conditions aux limites le long du côté $y = b_1$

- Le côté $y = b_1$ est encasté : on trouve, w_m et $\frac{\partial w_m}{\partial y}$ devant être nuls pour $y = b_1$:

$$F_m(b_1) = 0 \quad (I.54)$$

$$F'_m(b_1) = 0 \quad (I.55)$$

- Le côté $y = b_1$ est simplement appuyé : on trouve, w_m et $D \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} + \frac{\nu \partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)$ devant être nuls pour $y = b_1$:

$$F_m(b_1) = 0 \quad (I.56)$$

$$F''_m(b_1) = 0 \quad (I.57)$$

- Le côté $y = b_1$ est simplement appuyé : on trouve w_m et $D \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} + \frac{\nu \partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)$ et $D \left(\frac{\partial^3 w_m}{\partial y^3} + \frac{(2-\nu)\partial^3 w_m}{\partial x^2 \partial y} \right)$ devant être nuls pour $y = b_1$:

$$F''_m(b_1) - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F(b_1) = 0 \quad (I.58)$$

$$F'''_m(b_1) - (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F'_m(b_1) = 0 \quad (I.59)$$

Les fonctions $F_m(y)$ doivent donc satisfaire à quatre conditions :

Deux sur chacun des côtés $y = b_1$ et $y = b_2$ Nous obtenons ainsi quatre équations linéaires pour déterminer les quatre constantes A_m, B_m, C_m et D_m .

Connaissant w les fonctions des moments fléchissant :

$$M_1 = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[\nu F_m''(y) - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I. 60})$$

$$M_2 = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[F_m''(y) - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I. 61})$$

- Moment de torsion M_t est :

$$M_t = D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} F_m'(y) \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I. 62})$$

ainsi que les formules des efforts tranchants :

$$T_1 = D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \left[F_m''(y) - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_m(y) \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I. 63})$$

$$T_2 = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[F_m'''(y) - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} F_m'(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I. 64})$$

Remarque

Il est toujours possible, sans troubler l'équilibre de la plaque, de modifier infiniment peu la densité de charge $q(x, y)$ finie pour que les conditions suffisantes de représentation de la densité de charge par une série de sinus soient satisfaites. Il en résulte que la série (I. 47) a pour somme $w(x, y)$ lorsqu'elle est convergente. Ce résultat est encore exact dans le cas d'une densité linéaire de charge appliquée le long d'une courbe du plan moyen.

I.7. Conclusion

Dans ce chapitre on a obtenu L'équation différentielle des déformations des plaques mince où la majorité des applications techniques sont suffisante pour l'étude des problèmes de flexion.

Nous avons aussi exposés d'autres solutions comme solution de Navier et Maurice, qui sont des solutions approchées de l'équation différentielle de déformée d'une plaque, la solution de Clebsch est une solution qui sera traitée au chapitre suivant.

Chapitre II

Détermination de déformée des
plaques Rectangulaires par la
Solution de CLEBSHE

II.1. Introduction

En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différentiation auquel une des fonctions inconnues y a été soumise. Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'appliquées. Le bi-Laplacien est une équation différentielle partielle d'ordre 4 qui représente l'équation différentielle de déformée d'une plaque, il existe plusieurs solutions approchées pour cette équation comme la solution de Navier ou la solution de Mauris. Clebsch [11] proposa sa solution qui consiste à développer la densité de charge en série trigonométrique et à rechercher la solution sous forme d'une série trigonométrique, et on utilise la méthode de l'énergie pour trouver une expression approchée de la solution générale.

On présente dans ce travail une solution approchée pour le calcul statique des plaques rectangulaires. Cette solution a permis de déterminer la déformée de la plaque rectangulaire de n'importe quel type de matériau et soumise à n'importe quel type de charge extérieure.

II.2. Equation différentielle de déformée d'une plaque

Si une plaque est sollicitée par une charge extérieure $q = q(x, y)$ la plaque se déforme et son plan moyen se détermine après déformation par la fonction $w = w(x, y)$. Donc l'équation différentielle de déformée de la plaque (bi-Laplacien) ne fait intervenir qu'une seule variable w . On sait, que les déplacements du plan moyen d'une plaque, de dimensions quelconques, engendrés par la force concentrée, normale à ce plan, doivent satisfaire l'équation différentielle (I.37)

II.3. Equation générale

Prenons pour origine des coordonnées polaires le centre o de la plaque. La densité de charge appliquée à la plaque est une fonction $q = (r, \theta)$ de r et de θ . Les formules générales suivantes s'obtiennent au moyen du changement de variables qui permet de passer des coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées polaires (r, θ) . Le déplacement $w(r, \theta)$ est une intégrale de l'équation de Lagrange (I.38)

II.4. Solution de Clebsch

Elle consiste à développer la densité de charge en série trigonométrique [11] :

$$q(r, \theta) = q_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} [q_k(r) \cos(k\theta) + \bar{q}_k(r) \sin(k\theta)] \quad (\text{II. 1})$$

Et à rechercher la solution sous la forme d'une série trigonométrique :

$$w(r, \theta) = w_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} [w_k(r) \cos(k\theta) + \bar{w}_k(r) \sin(k\theta)] \quad (\text{II. 2})$$

La série précédente est une intégrale de l'équation de Lagrange si les fonctions $w_0(r)$, $w_k(r)$, et $\bar{w}_k(r)$ vérifient les équations différentielles linéaires :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} \right) &= \frac{q_0(r)}{D} \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} w_k \right) &= \frac{q_k(r)}{D} \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 \bar{w}_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \bar{w}_k \right) &= \frac{\bar{q}_k(r)}{D} \end{aligned} \quad (\text{II. 3})$$

L'intégrale générale de l'équation différentielle en w_0 est :

Pour $k = 0$

$$w_0(r) = \Psi_0(r) + A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r \quad (\text{II. 4})$$

Les intégrales générales des équations différentielles en w_k et \bar{w}_k sont :

Pour $k = 1$

$$\begin{cases} w_1(r) = \Psi_1(r) + A_1 r + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_1 r \ln r \\ \bar{w}_1(r) = \bar{\Psi}_1(r) + \bar{A}_1 r + \bar{B}_1 r^{-1} + \bar{C}_1 r^3 + \bar{D}_1 r \ln r \end{cases} \quad (\text{II. 5})$$

Pour $k > 1$

$$\begin{cases} w_k(r) = \Psi_k(r) + A_k r^k + B_k r^{-k} + C_k r^{k+2} + D_k r^{-k+2} \\ \bar{w}_k(r) = \bar{\Psi}_k(r) + \bar{A}_k r^k + \bar{B}_k r^{-k} + \bar{C}_k r^{k+2} + \bar{D}_k r^{-k+2} \end{cases} \quad (\text{II. 6})$$

$\Psi_0(r)$, $\Psi_k(r)$ et $\bar{\Psi}_k(r)$ désignent des intégrales particulières que l'on peut toujours obtenir

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

Par la méthode de la variation des constantes.

Dans notre cas examinons une plaque de dimensions infinies, encastree normalement A son plan moyen à l'origine de coordonnées, et sollicitée par la force concentrée q figure II. 1

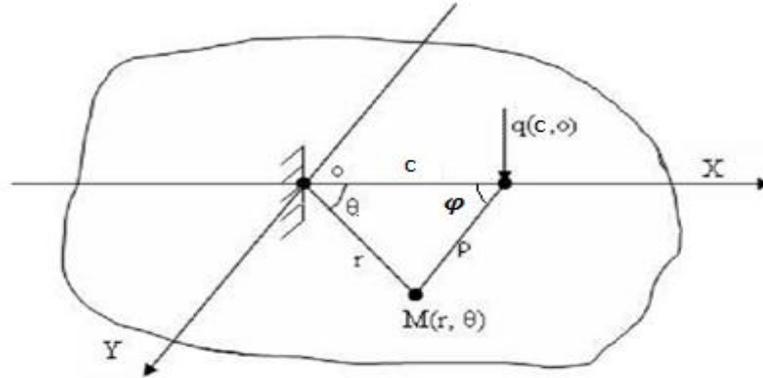


Figure. II. 1 Plaque de dimensions infinies soumise à une charge concentrée q

La solution générale de l'équation différentielle (I. 38) est :

$$\begin{aligned}
 w_0(r) &= A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r & k=0 \\
 w_1(r) &= A_1 r + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_1 r \ln r & k=1 \\
 w_k(r) &= A_k r^k + B_k r^{-k} + C_k r^{k+2} + D_k r^{-k+2} & k > 1
 \end{aligned} \tag{II. 7}$$

Condition aux limites

Le déplacement et la pente de la plaque sont nuls au niveau de l'encastrement virtuel ($r = 0$)

$$\text{c. à. d. } w(r, \theta) = \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} = 0$$

Appliquons ces conditions aux limites aux solutions de l'équation différentielle homogène

(II. 7) Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 w_0(r) &= C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r & k=0 \\
 w_1(r) &= C_1 r^3 & k=1 \\
 w_k(r) &= A_k r^k + C_k r^{k+2} & k > 1
 \end{aligned} \tag{II. 8}$$

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

Le moment radial d'une plaque est [12] :

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{II. 9})$$

L'effort radial normal d'une plaque est :

$$V_r = -D \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{\nu}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (\text{II. 10})$$

Le moment radial M_r et l'effort normal (radial) V_r d'une plaque sont nuls lorsque r tend vers l'infini ($r \rightarrow \infty$), on injecte la solution (II. 8) dans la formule (II. 9) et (II. 10)

Puisque le moment radial M_r représente la deuxième dérivées de $w(r, \theta)$ alors il faut que le degré de r ne dépasse pas 2 pour vérifier la condition $M_r = 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$

Finalement :

$$\begin{aligned} w_0(r) &= C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r \\ w_2(r) &= A_2 r^2 \cos 2\theta \end{aligned} \quad (\text{II. 11})$$

On revient à la solution de l'équation différentielle (II. 2) on trouve :

$$w(r, \theta) = C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r + A_2 r^2 \cos 2\theta \quad (\text{II. 12})$$

A cette solution de l'équation différentielle homogène (II. 12) il faut ajouter l'expression générale de la solution particulière [13] :

$$w(\rho) = \frac{q}{16\pi D} (\rho^2 \ln \rho^2) \quad (\text{II. 13})$$

Où:

$$\rho = \sqrt{c^2 + r^2 - 2cr \cos(\theta - \varphi)} .$$

Par conséquent

$$w(r, \theta) = C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r + A_2 r^2 \cos 2\theta + \frac{q}{16\pi D} (c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta) \ln(c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta) \quad (\text{II. 14})$$

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

En appliquant de nouveau les conditions aux limites à cette solution (II. 14) :

- La satisfaction des conditions géométriques au niveau de l'encastrement virtuel ou à l'origine de coordonnées figure II. 1 doivent être égales à zéro, c'est-à-dire :

$$w(r, \theta)|_{r=0} = \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$

- La satisfaction des conditions statiques aux limites où :

$$M_r|_{r \rightarrow \infty} = V_r|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

- La condition, c'est que $w(r, \theta) = 0$ quand la force concentrée $q(c, \varphi)|_{c=0}$ est appliqué à l'origine de coordonnées
- La condition, c'est que le problème se traite avec un seul axe de symétrie. En vertu de toutes ces conditions nous obtenons ;

$$\begin{cases} w(0, \theta) = \frac{q}{16\pi D} c^2 \ln c^2 \\ \frac{w(0, \theta)}{\partial r} = -2cc\cos\theta(1 + \ln c^2) \end{cases} \quad (\text{II. 15})$$

Alors il faut ajouter certains termes pour vérifier les conditions au niveau de l'encastrement

$$w(r, \theta) = C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r + A_2 r^2 \cos 2\theta + \frac{q}{16\pi D} [(c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta) \ln(c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta) + 2cr \cos \theta(1 + \ln c^2) - c^2 \ln c^2 - r^2 \ln r^2] \quad (\text{II. 16})$$

On a ajouté le terme $r^2 \ln r^2$ pour vérifier la condition $w(r, \theta) = 0$ lorsque $c = 0$ C'est-à-dire la charge q est au niveau de l'encastrement virtuel.

Finalement la formule $w(r, \theta)$ est obtenue avec trois coefficients C_0, D_0 et A_2 à déterminer.

On rejète le coefficient multiplie par $\cos 2\theta$ car il correspond au problème doublement symétrique, donc notre problème devient avec deux coefficients à déterminer C_0, A_2 Par conséquent

$$w(r, \theta) = C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r + \frac{q}{16\pi D} [(c^2 + r^2 - 2crc\cos \theta) \ln(c^2 + r^2 - 2crc\cos \theta) + 2crc\cos\theta(1 + \ln c^2) - c^2 \ln c^2 - r^2 \ln r^2] \quad (\text{II. 17})$$

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

On injecte encore une fois la solution $w(r, \theta)$ dans la formule du moment radial (II. 9), on obtient :

$$M_r = -D \left\{ 2 C_0 + 2D_0 \ln r^2 + 6D_0 + \frac{q}{16\pi D} \left[\ln(c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta) + \frac{(-2cr \cos \theta + 2r)^2}{c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta} - 2 \ln r^2 - 4 \right] + 2\nu C_0 + 2\nu D_0 (\ln r^2 + 1) + \frac{\nu q}{16\pi D} \left[2 \ln(c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta) - 2 \ln r^2 + \frac{4c^2 \sin \theta}{c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta} \right] \right\} \quad (\text{II. 18})$$

Le moment radial $M_r = 0$ de l'équation (II. 18) lorsque r tend vers ∞ , donc on trouve :

$$M_r = C_0 + D_0 \ln r^2 + 3D_0 + \nu(C_0 + D_0 \ln r^2 + D_0) = 0 \quad (\text{II. 19})$$

Alors on obtient le système d'équations suivant pour que $M_r = 0$ de l'équation (II. 19) :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 + 3D_0 + \nu(C_0 + D_0) = 0 \\ \text{et} \\ D_0 \ln r^2 + \nu D_0 \ln r^2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} D_0 + \nu D_0 = 0 \\ \text{et} \\ C_0 + 3D_0 + \nu(C_0 + D_0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II. 20})$$

On a $\ln r^2 \neq 0$ ce système d'équations (II. 20) a pour solution $C_0 = D_0 = 0$

Remarque

Dans ce cas en vérifier que l'on a bien conformément au théorème de réciprocity de Maxwell-Berti [14] ; $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ c'est-à-dire en remplace $r = c$ et $c = r$

Finalement la solution totale est obtenue sous la forme suivante :

$$w(r, \theta) = \frac{q}{16\pi D} \{ (c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta) \ln(c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta) + 4cr \cos \theta (\ln cr + 1) - c^2 \ln c^2 - r^2 \ln r^2 \} \quad (\text{II. 21})$$

Faisant un changement de variable des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes pour la solution totale de l'équation (II.21) et on divise (x, y) par a et (t, z) par b , uniquement pour obtenir la dimension en mètre.

$$w_0(x, y) = \frac{qab}{16\pi D} \left\{ \left[\left(\frac{x}{a} - \frac{t}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] \ln \left[\left(\frac{x}{a} - \frac{t}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{b} \right)^2 \right] + 4 \left(\frac{xt}{a^2} + \frac{yz}{b^2} \right) \left(1 + \ln \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{t^2 + z^2}}{ab} \right] \right) - \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \ln \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \ln \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right\} \quad (\text{II. 22})$$

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

Où :

(x, y) – Coordonnées du point où se détermine le déplacement ;

(t, z) – Coordonnées du point d'application de la charge ;

a – Longueur de la plaque ;

b – Largeur de la plaque ;

II.5 Méthode de L'énergie

Il est possible, au lieu d'intégrer l'équation de Lagrange (I.38) de déterminer le déplacement $w(x, y)$ d'une plaque soumise à la charge $q(x, y)$ en écrivant que l'énergie totale U est minimale pour la position d'équilibre [15]. L'énergie totale U est la somme de l'énergie de déformation T et de l'énergie potentielle de la charge $q(x, y)$:

$$U = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \{\psi(w(x, y))\} dx dy + qw(t, z) \quad (\text{II. 23})$$

Où :

D – Rigidité cylindrique ;

Ω - surface de la plaque ;

ψ - opérateur donné par ;

$$\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 - \beta \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

$$\beta = 2(1 - \nu)$$

Le problème de la flexion d'une plaque revient donc à chercher la fonction $w(x, y)$ qui vérifie les conditions aux limites et qui rend minimale l'intégrale(II. 23).

On peut utiliser la méthode de l'énergie pour trouver une expression approchée de $w(x, y)$.

Supposons connues n fonctions $w_j(x, y)$ vérifiant les conditions aux limites on peut représenter approximativement $w(x, y)$ par une combinaison linéaire de ces fonctions :

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \sum_{j=1}^n A_{jj} w_j(x, y) \quad (\text{II. 24})$$

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

Avec

$w_0(x, y)$ est donnée par (II. 22)

$A_{jj}, j = 1, \dots, n$ Coefficients à déterminer par l'utilisation de la méthode de l'énergie.

La précision de la solution (II. 24) dépend du nombre de terme à prendre. D'après [15], une solution de précision jugée suffisante est obtenue si on tient compte uniquement de quatre fonctions de correction.

$$w(x, y) = w_0(x, y) + A_{11} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + A_{22} \left(\frac{2xy}{ab} \right) + A_{33} \frac{x}{a} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + A_{44} \frac{y}{b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (\text{II. 25})$$

En substituant l'expression précédente, qui vérifie les conditions aux limites, dans l'intégrale U nous obtenons, après intégration, U sous la forme d'un pôleynome du second degré des coefficients A_{jj} . Les valeurs des coefficients qui rendent l'intégrale U minimale vérifient donc les quatre équations linéaires :

$$\frac{\partial U}{\partial A_{11}} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial A_{22}} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial A_{33}} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial A_{44}} = 0 \quad (\text{II. 26})$$

Le système d'équations (II. 26) prend la forme matricielle suivante :

$$[H]\{A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}\}^T = q[\Delta] \quad (\text{II. 27})$$

Pour résoudre ce système d'équation (II. 27) nous avons utilisée un Algorithme.

L'algorithme est un processus systématique composé d'un ensemble d'instructions pour la résolution d'un problème permettant de décrire les étapes vers le résultat, il est ensuite implémenté, ou bien simulé avec un programme.

Notre problème consiste à trouver une solution approchée de $w(x, y)$, cette solution est corrigée par des fonctions de correction en utilisant la méthode de l'énergie .

La précision jugée suffisante si on tient compte uniquement de quatre fonctions de correction donc, l'objectif de cet Algorithme est de déterminer les quatre coefficients des fonctions se s'écrivant comme suit :

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

Algorithme méthode Energétique ;

Constantes : E, ν, a, b, h, q ;

Variables : $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$;

Début

1- Ecrire ('déformée de la plaque sans fonction de correction w_0 : ') ;

2- Ecrire ('fonctions de correction w_1, w_2, w_3, w_4 ') ;

3- Ecrire ('déformée de la plaque avec les fonctions de correction w : ') ;

$$w = w_0 + A_{11}w_1 + A_{22}w_2 + A_{33}w_3 + A_{44}w_4$$

4- Ecrire ('Energie totale U: ') ;

5- Ecrire (' Les Intégrations et les dérivations par rapport à A_{11} de la formule U') ;

- $\delta_{11} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{11}, 1\}], A_{11}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{12} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{11}, 1\}], A_{22}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{13} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{11}, 1\}], A_{33}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{14} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{11}, 1\}], A_{44}^{\wedge 1}]] ;$

6- Ecrire (' Les Intégrations et les dérivations par rapport à A_{22} de la formule U') ;

- $\delta_{21} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{22}, 1\}], A_{11}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{22} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{22}, 1\}], A_{22}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{23} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{22}, 1\}], A_{33}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{24} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{22}, 1\}], A_{44}^{\wedge 1}]] ;$

7- Ecrire (' Les Intégrations et les dérivations par rapport à A_{33} de la formule U') ;

- $\delta_{31} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{33}, 1\}], A_{11}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{32} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{33}, 1\}], A_{22}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{33} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{33}, 1\}], A_{33}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{34} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{33}, 1\}], A_{44}^{\wedge 1}]] ;$

8- Ecrire (' Les Intégrations et les dérivations par rapport à A_{44} de la formule U') ;

- $\delta_{41} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{44}, 1\}], A_{11}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{42} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{44}, 1\}], A_{22}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{43} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{44}, 1\}], A_{33}^{\wedge 1}]] ;$

- $\delta_{44} = [\text{Intégrée} [\text{Dérivée} [U, \{A_{44}, 1\}], A_{44}^{\wedge 1}]] ;$

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

9- Ecrire (' Les résultats obtenus sous forme matricielle') ;

10- Ecrire (' les expressions (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) avec un seul coefficient avant intégration') ;

$$Q_{1(x,y)} = \text{coefficient [U, (A}_{11})^1]$$

$$Q_{2(x,y)} = \text{coefficient [U, (A}_{22})^1]$$

$$Q_{3(x,y)} = \text{coefficient [U, (A}_{33})^1]$$

$$Q_{4(x,y)} = \text{coefficient [U, (A}_{44})^1]$$

11- Ecrire (' Le système d'équation sous la forme suivante')

$$[H]\{A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}\}^T = q[\Delta]$$

Exécution

$$A_{11} = \frac{q}{\delta_{11}} [[\text{intégrée}Q_1] - w_1(t, z)];$$

$$A_{22} = \frac{q}{\delta_{22}} [[\text{intégrée}Q_2] - w_2(t, z)];$$

$$A_{33} = \frac{q}{\delta_{33}} [[\text{intégrée}Q_3] - w_3(t, z)];$$

$$A_{44} = \frac{q}{\delta_{44}} [[\text{intégrée}Q_4] - w_4(t, z)];$$

Fin

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

Les expressions des coefficients A_{11}, A_{22}, A_{33} et A_{44} sont déterminées à l'aide du logiciel « Mathematica-8 ».

Après résolution du système (II. 27) on trouve :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{qab}{16D\beta} \left[\int_{-b}^b \int_{-a}^a Q_1 dx dy - \left(\frac{t^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right) \right] \\
 A_{22} &= \frac{qab}{16D\beta} \left[\int_{-b}^b \int_{-a}^a Q_2 dx dy - \frac{2tz}{ab} \right] \\
 A_{33} &= \frac{-3qab}{32D\beta} \left[\int_{-b}^b \int_{-a}^a Q_3 dx dy - \frac{t}{a} \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \right] \\
 A_{44} &= \frac{-3qab}{32D\beta} \left[\int_{-b}^b \int_{-a}^a Q_4 dx dy - \frac{z}{b} \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{II. 28}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 Q_1(x, y) &= ((b^8 t(t-x)^2 x^3 (x-y)(x+y) + a^8 (x-y)y^3 (x+y)(y-z)^2 z \\
 &\quad + a^6 b^2 y(-txy^3(x^2 + 3y^2) + y^2(x^2(t^2 + 2x^2) + (-t^2 + 8tx + x^2)y^2 \\
 &\quad + y^4)z - y(2(x^2 + y^2)^2 + t(x^3 + 3xy^2))z^2 + a^2 b^6 x(-t^3(x^2 + y^2)^2 \\
 &\quad + x^3 y(3x^2 + y^2)z + t^2(2x(x^2 + y^2)^2 + xy(3x^2 + y^2)z) - tx^2(x^4 + x^2(y^2 \\
 &\quad + 8yz - z^2) + y^2(2y^2 + z^2))) + a^4 b^4(-t^3 xy^2(x^2 + 3y^2) + ty^2(2x^5 \\
 &\quad + 3x^3 y^2 + 3xy^4) - tx(x^2 + y^2)^2 z^2 + t^2 y(2(x-y)y^3(x+y) \\
 &\quad + (x^2 + y^2)^2 z) + x^2 z(-2y^5 + y^3 z^2 + x^4(-3y + 2z) + x^2 y(-3y^2 - 2yz \\
 &\quad + 3z^2)))\beta) / 4a^3 b^3 \pi (x^2 + y^2)^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2) (b^2 (t-x)^2 + a^2 (y-z)^2)
 \end{aligned}$$

$Q_2(x, y)$

$$= \frac{\left(y \left(\frac{t(x-y)(x+y)}{a^2(x^2 + y^2)^2} + \frac{x}{b^2 x^2 + a^2 y^2} \right) + \frac{(t-x)(y-z)}{b^2(t-x)^2 + a^2(y-z)^2} + \frac{x(-x+y)(x+y)z}{b^2(x^2 + y^2)^2} \right) \beta}{2\pi}$$

**Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de
CLEBSCH**

$$\begin{aligned}
 Q_3(x, y) = & (\beta(3b^5t(t-x)^2x^2(x-y)(x+y) - 3a^6x(x-y)(x+y)(y-x)^2z \\
 & + a^2b^4(t((t-x)^2x^4 + x^2(5t^2 - 10tx + 8x^2)y^2 - (2t^2 - 4tx + 5x^2)y^4) \\
 & + 3xy(x^2(3t^2 - 8tx + 3x^2) + (t^2 + x^2)y^2)z + 3tx^2(x-y)(x+y)z^2) \\
 & + a^4b^2(3t^2xy(-x^2 + y^2)z + t(2y^4(y-z)z + x^4(3y^2 + 2yz + z^2) \\
 & + x^2y^2(9y^2 - 20yz + 5z^2)) + xz(y^3(y-3z)(y-z) + x^4(-5y + 2z) \\
 & + x^2y(8y^2 - 14yz + 9z^2))) \\
 & - 2a^2b^2x(x^2 + y^2)^2(b^2(t-x)^2 + a^2(y-z)^2) \left(\text{Log} \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right] \right. \\
 & \left. - \text{Log} \left[\frac{b^2(t-x)^2 + a^2(y-z)^2}{a^2b^2} \right] \right) / (4a^4b^3\pi(x^2 + y^2)^2(b^2(t-x)^2 \\
 & + a^2(y-z)^2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_4(x, y) = & -(\beta(3b^6t(t-x)^2xy(-x^2 + y^2) + 3a^6(x-y)y^2(x+y)(y-z)^2z \\
 & + a^4b^2(3t^2(x-y)y^2(x+y)z + z(-y^4(y-z)^2 + x^2y^2(-8y^2 + 10yz \\
 & - 5z^2) + x^4(5y^2 - 4yz + 2z^2)) - 3txy(x^2(y^2 + z^2) + y^2(3y^2 - 8yz \\
 & + 3z^2))) + a^2b^4(-3t^3xy(x^2 + 3y^2) - 3x^2y^2(3x^2 + y^2)z + t^2(x^2y^2(14y \\
 & - 5z) + 2x^4(2y + z) - y^4(2y + z)) + t(-x^5(y + 2z) + x^3y(-8y^2 + 20yz \\
 & - 3z^2) + xy^3(5y^2 - 2yz + 3z^2))) \\
 & + 2a^2b^2y(x^2 + y^2)^2(b^2(t-x)^2 + a^2(y-z)^2) \left(\text{Log} \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right] \right. \\
 & \left. - \text{Log} \left[\frac{b^2(t-x)^2 + a^2(y-z)^2}{a^2b^2} \right] \right) / (4a^3b^4\pi(x^2 + y^2)^2(b^2(t-x)^2 \\
 & + a^2(y-z)^2)).
 \end{aligned}$$

II.6 Résultats et interprétation

Considérons une plaque de dimension finies ($a \times b$) de masse M et d'épaisseur h caractérisée par son module d'élasticité E et son coefficient de poisson, supposée libre à son plan moyen à l'origine de coordonnées ,et sollicitée par la force concentrée q .

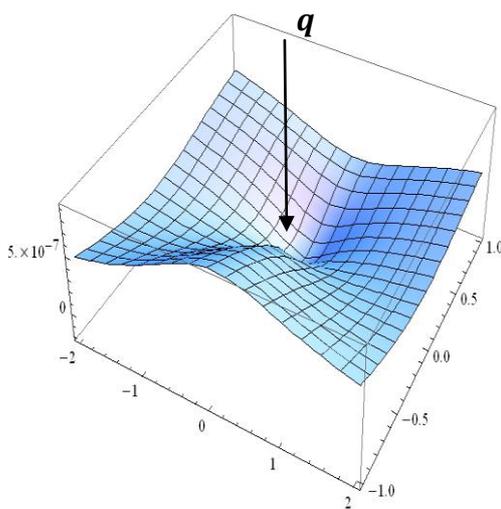
II.6.1 Application numérique

Considérons les données physiques et géométriques d'une plaque rectangulaire suivante : $a = 2 \text{ m}$; $b = 1 \text{ m}$; $h = 0.2 \text{ m}$ Pour une charge concentrée unitaire $q = 1000\text{N}$ appliquée au point de coordonnées $t = -1/4$ $z = 3/4$, le module d'élasticité E et coefficient de poisson ν représente sur le tableau suivant :

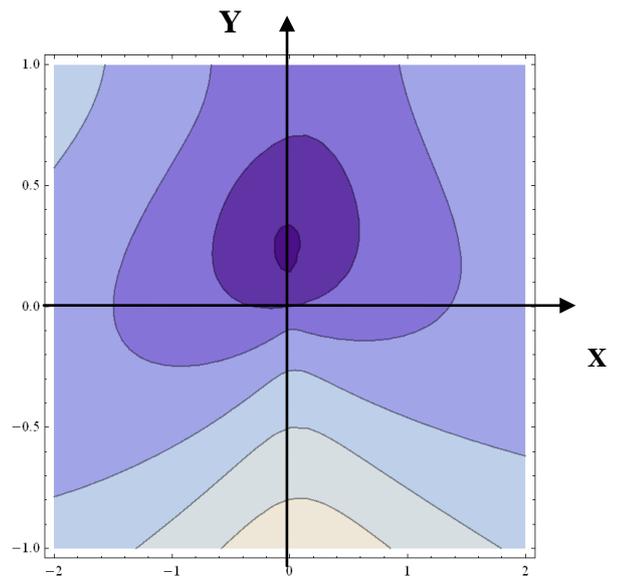
Matériau	Acier	Aluminium	Béton
module d'élasticité $E [N/m^2]$	2.1×10^{11}	6.4×10^{10}	3×10^{10}
coefficient de poisson ν	0.3	0.346	1/6

Tableau(II. 1) caractéristiques mécaniques des matériaux proposés

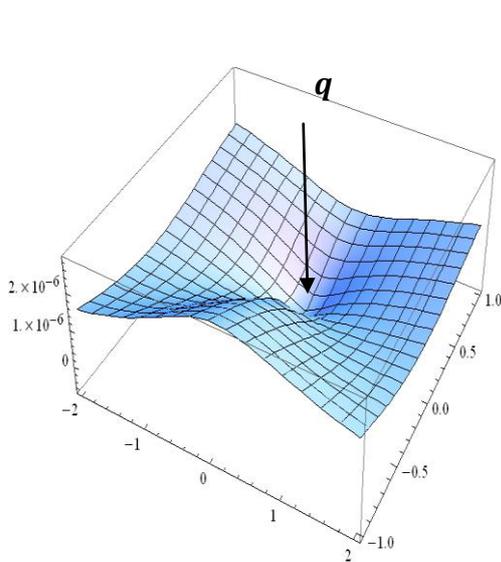
II.6.2 Influence du nombre de fonction de correction



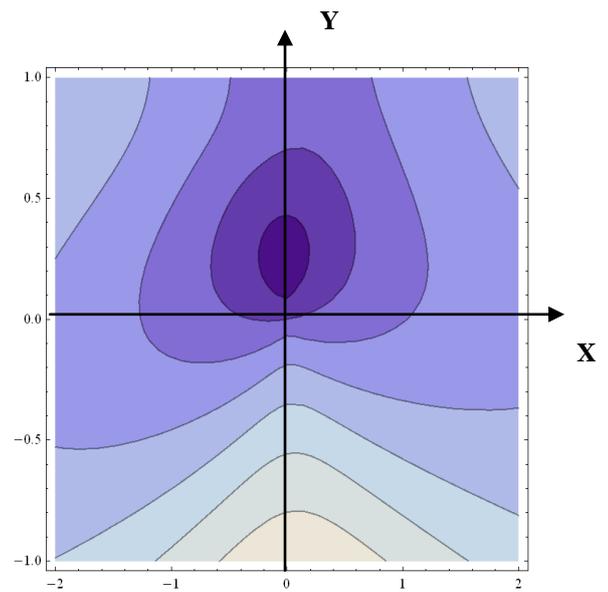
Figure(II. 2. a) déformée d'une plaque Rectangulaire en Acier due à la chargée concentrée



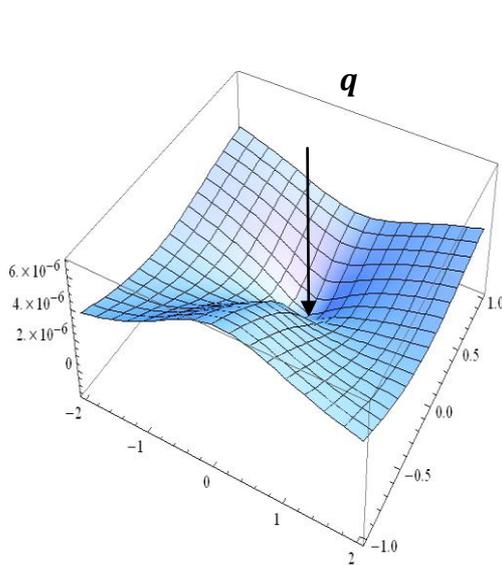
Figure(II. 2. b) Champ de la charge concentrée q



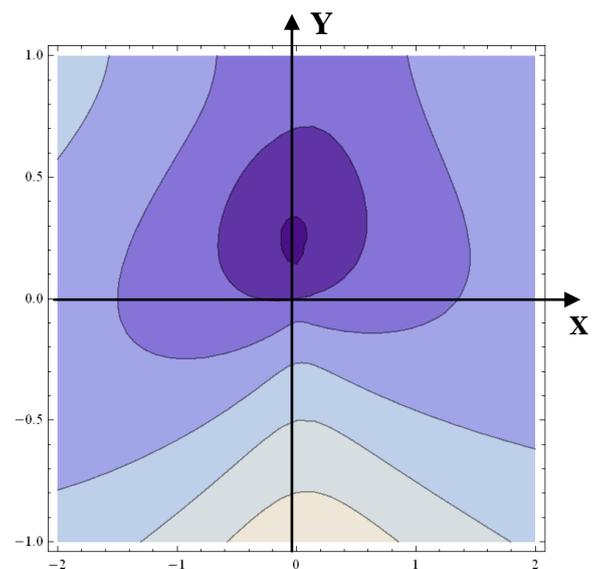
Figure(II. 3. a) déformée d'une plaque Rectangulaire en Aluminium due à la chargée concentrée



Figure(II. 3. b) Champ de la charge concentrée q



Figure(II. 4. a) déformée d'une plaque Rectangulaire en Béton due à la chargée concentrée



Figure(II. 4. b) Champ de la charge concentrée q

On remarque que la déformée de la plaque rectangulaire due à la charge concentrée pour les trois types de matériaux ont la même réponse sauf pour la valeur maximale de la profondeur de la charge qui se diffère à cause du caractéristique mécaniques de chaque plaque.

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

Le tableau suivant donne les valeurs des solutions approchées (sans fonctions de corrections et avec fonctions des corrections) pour trois types de matériaux :

Solution approchée due à une charge concentrée [m]	Acier	Aluminium	Béton
w_0	4.97973×10^{-11}	1.29716×10^{-10}	5.13475×10^{-10}
$w_0 + A_{11}w_1$	6.89213×10^{-8}	2.15362×10^{-7}	5.15627×10^{-7}
$w_0 + A_{11}w_1 + A_{22}w_2$	6.89417×10^{-8}	2.15433×10^{-7}	5.15743×10^{-7}
$w_0 + A_{11}w_1 + A_{22}w_2 + A_{33}w_3$	6.89894×10^{-8}	2.15610×10^{-7}	5.15947×10^{-7}
w	6.91010×10^{-8}	2.15970×10^{-7}	5.16723×10^{-7}

Tableau. II. 2 Représente l'influence des fonctions de correction pour différent type de matériau

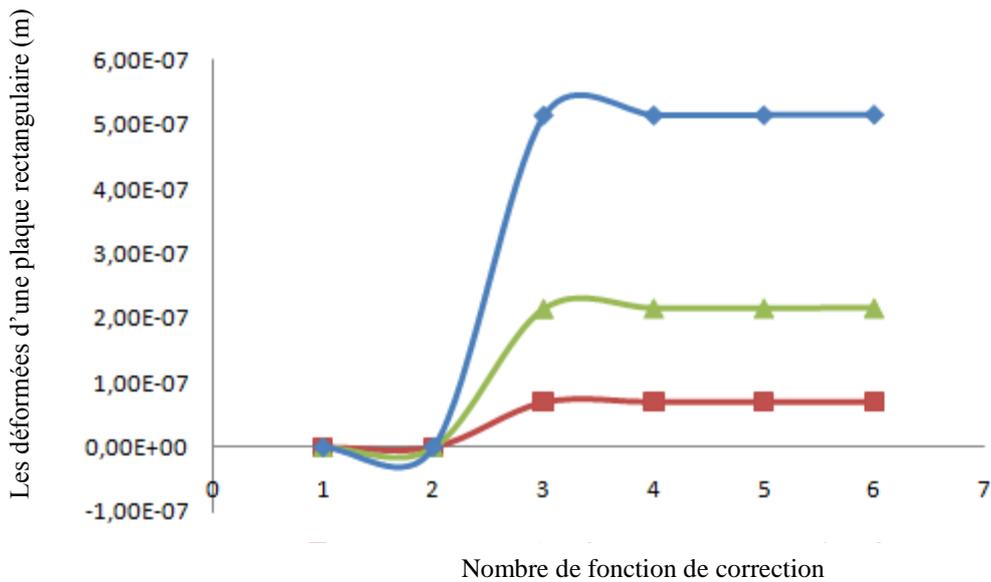


Figure. II. 5 La variation de coefficient de correction agissant sur la déformée d'une plaque

Chapitre II Détermination de déformée des plaques Rectangulaires par la solution de CLEBSCH

Nous avons représentées les valeurs du tableau II.2 sous forme d'un graphe figure II.5 où l'axe abscisses représente le nombre de fonction de correction et l'axe des ordonnées représente les déformées d'une plaque rectangulaire due à une charge concentrée pour trois types de matériaux (Acier, Aluminium et béton).

Dans le premier point nous considérons la plaque dans le cas libre c'est-à-dire le cas où il n'y a pas de charge appliqué.

Dans le deuxième point on injecte les données physiques et géométriques de la plaque, on obtient la valeur de la fonction w_0 , cette valeur sans fonction de correction. On remarque une légère décroissance dans tous les types de matériaux (Acier, Aluminium et béton).

Après on ajoute la première fonction de correction $A_{11}w_1$, qui représente le troisième point, on remarque une croissance de déformation de la plaque rectangulaire. Après addition de la deuxième fonction de correction $A_{22}w_2$, qui est représenté dans le quatrième point ce qui provoque la croissance de la courbe pour chaque type de matériaux jusqu'à un maximum, puis on constate une stabilité des résultats avec les autres fonctions de correction $A_{33}w_3$ et $A_{44}w_4$, qui sont représentées dans le cinquième et sixième point. D'après [15] la précision est obtenue si on tient compte uniquement des quatres fonctions de correction.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'utilisation des plaques comme élément de résistance au choc et vibration est courante dans toutes les filières d'ingénieur en structure: mécanique, aéronautique, aérospatiale, civile, navale, matériel de sport et militaire. Devant ce vaste et important éventail de domaine d'applications, il est aisé de comprendre l'intérêt et la demande urgente de s'impliquer dans l'analyse statique et du comportement dynamique des plaques.

En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différentiation auquel une des fonctions inconnues y a été soumise. Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'appliquées. Le bi-Laplacien est une équation différentielle partielle d'ordre 4 qui représente l'équation différentielle de déformée d'une plaque.

Dans notre travail nous avons utilisés une solution approchée [13] pour le calcul statique des plaques rectangulaires, cette solution de Clebsch qui consiste à développer la densité de charge en série trigonométrique et à rechercher la solution sous forme d'une série trigonométrique, et on utilise la méthode de l'énergie pour trouver une expression approchée de la solution totale, nous avons utilisés un algorithme pour trouver les expressions des coefficients des fonctions de correction A_{11}, A_{22}, A_{33} et A_{44} qui sont déterminées à l'aide du logiciel « Mathematica-8 ».

Des résultats obtenus des déformées de la plaque rectangulaire de n'importe quel type de matériaux exemple (Acier, Aluminium et Béton), et avec l'influence des fonctions de correction qui donne une précision acceptable et satisfaisante.

Bibliographie

- [1] **A. E. H. Love**, On the small free vibrations and deformations of elastic shells, Philosophical trans. of the Royal Society (London), 1888, Vol. série A, N° 17 p. 491–549.
- [2] **R. D. Mindlin**, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, Journal of Applied Mechanics, 1951, Vol. 18 p. 31–38.
- [3] **Mili Faycel** « Etude de comportement mécanique d'un matériel composite à remplacement unidirectionnel » thèse de magister.
- [4] **S. Timoshenki** « théorie of plates and Shells » MC Graw-Hill, 2nd ed 1959.
- [5] Calcul statique linéaire pour coques, Guide de validation des progiciels de calcul de structure, ICAB.
- [6] **Isnard v** (1964), GREKOWA.Mrozwiczp, Formulaire de l'ingénieur paris.
- [7] **W. Flügge**, Festigkeits- Lehre und Elastizitätstheorie, S. 185 des Taschenbuches für Bauingenieure, herausgegeben von F. Schleicher, Berlin 1943, Springer.
- [8] **G. Pigeaud**, Résistance des Matériaux et Elasticité, Paris 1934, Gauthier-Villars, p. 893.
- [9] **Cf. S. Timoshenko**, Theory of Elasticity, New York and London 1934, McOrawHill, p.27.
- [10] **Jean Résal**, Résistance des matériaux, Paris et Liège 1922, Béranger.
- [11] **S. Timoshenko**, S. Woinowsky- Krieger Théorie des plaques et des coques, Béranger 1961.
- [12] **Pdf**. Theorie des plaques elastques.p.31.
- [13] **Techniques de l'ingénieur** 2-1990. Calcul des structures, A 311-1-11.
- [14] **A.S. Kolmanok** Calcul statique des plaques, Stroiidat Moscou 1984.
- [15] **S.V. Bosakov** Calcul des plaques reposant sur milieu élastique, Minsk 2002.

Résumé

Nous avons présentés dans ce travail une solution approchée de la déformée d'une plaque de forme rectangulaire basée sur l'idée de Clebsch où cette dernière vérifiée toutes les conditions aux limites imposée par le problème, et nous avons utilisés la méthode de Ritz pour obtenir une expression approchée de la déflexion de la plaque.

Mots clé: - Plaque rectangulaire

- Solution de Clebsch

- Méthode de Ritz

تلخيص :

قدمنا في هذا العمل حل تقريبي لتشوه صفيحة على شكل مستطيل بالاعتماد على فكرة كليش أين تكون هذه الأخيرة و ذلك بتحقيق كل الشروط الحدية المفروضة في هذا المشكل، و قد استعملنا طريقة ريتز للحصول على عبارة تقريبية لتشوه هذه الصفيحة .

الكلمات المفتاحية : - صفيحة مستطيلة

- حل كليش

- طريقة ريتز